УДК 681.5

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ В МОДУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Кошман С. А.[1], Краснобаев В. А.[2], Маврина М. А.[2]

[1]Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко,
[2]Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

В статье описываются методы статического и динамического резервирования для систем обработки информации, которые функционируют в модулярной системе счисления. Материалы данной статьи могут быть использованы при создании средств обработки цифровой информации, функционирующих в реальном времени решения алгоритма управления.

Постановка проблемы. Обеспечение заданного уровня надёжности в системах обработки информации (СОИ) реального времени является важной и актуальной задачей, так как отказ или даже сбой в таких СОИ, может привести к нарушению работы всей системы, что в свою очередь может повлечь за собой катастрофические последствия. Как известно одним из основных способов обеспечения заданного уровня надёжности СОИ является применение различных видов резервирования (дублирование, троирование и др. [1]). Однако существующие методы резервирования разработаны для структур, которые построены с использованием позиционных систем счисления (ПСС). В тоже применение непозиционных систем счисления, а в частности модулярной системы счисления (МСС) может существенно повысить технико-эксплуатационные показатели СОИ [2].

Анализ последних исследований и публикаций. В МСС операнд A представляется в виде набора остатков $\{a_i\}$, $i=\overline{1,n}$, которые образуются путём последовательного деления исходного числа A на набор модулей $\{m_i\}$, т. е. $a_i = A-[A/m_i]\cdot m_i$, при условии, что модули являются взаимно попарно простыми числами: $НОД(m_i, m_j)=1;\ i\neq j$ [1]. Из определения вытекают следующие основные свойства МСС: 1. Независимость остатков. Это свойство дает возможность построить СОИ в виде набора информационно независимых вычислительных трактов; 2. Равноправность остатков. Любой остаток a_i числа A в МСС несёт информацию обо всём исходном числе; 3. Малоразрядность остатков. Это свойство даёт возможность применять (в отличие от ПСС) табличную арифметику.

Цель статьи. В данной статье рассматриваются особенности, применения статического и динамического резервирования СОИ которые функционируют в МСС. Так же с учётом того, что в данной статье рассматриваются СОИ реального времени, то в качестве основного показателя для оценки надежности используется вероятность безотказной работы $P(t)$.

Основные материалы исследований. Оптимизацию структуры СОИ в МСС будем производить на основании результата решения задачи оптимального резервирования. Для повышения надежности СОИ в соответствующих каналах обработки информации (КОИ) вводятся резервные тракты обработки информации (ТОИ). Предполагается, что, во-первых, известно, какой надежности i-го КОИ мы можем достигнуть, если дополнительно введем x_i избыточных ТОИ, т.е. нам должна быть известна функция $R_i(x_i)$ надежности. Во-вторых, использования одного резервного ТОИ для i-го КОИ сопряжено с экономическими затратами средств c_i. В общем случае, затраты c_i могут измеряться не только в стоимостных единицах, но и в единицах веса, объема и т.п. Далее будем рассматривать затраты в виде дополнительно вводимого количества $V_{доп}^{(l)}$ оборудования, необходимого для обеспечения необходимого уровня надежности СОИ.

Вначале рассмотрим вариант для случая с применением статического резервирования.

Существует несколько различных и в достаточной степени эффективных методов математического решения рассматриваемых задач оптимального резервирования [3].

Для случая со статическим резервированием воспользуемся одним из известных простейших инженерных методов решения задачи оптимального резервирования, который даёт практически достаточно точное решение – это метод покоординатного наискорейшего спуска, который заключается в следующем.

Для каждого участка надежностной схемы СОИ вычисляются значения относительных приращений логарифма функции, характеризующей надежность СОИ, на единицу затрат при добавлении одного i-го резервного элемента (одного ТОИ для i-го КОИ)

$$Y_i(x_i) = \frac{1}{c_i}\log_a \frac{H_i(x_i)}{H_i(x_i-1)}.$$

При этом, когда функция $R_i(x_i)$ выпукла (а она действительно логарифмически выпукла для большинства практических случаев), процедура оптимального наращивания резервных элементов в системе состоит в том, чтобы на очередном шаге процесса прибавлять тот элемент, для которого величина $Y_i(x_i)$ является наибольшей.

Результаты решения задач оптимального резервирования в МСС могут ответить на два научно-практических вопроса:

– как обеспечить необходимый (заданный) уровень надежности $H_{СОИ}(t)$ СОИ при минимальной стоимости затрат (массогабаритных, энергетических и пр.) (прямая задача оптимального резервирования в теории надежности);

– каким образом обеспечить максимальное значение $H_{СОИ}(t)$ при заданных затратах (обратная задача оптимального резервирования).

Как мы уже условились для СОИ реального времени важно, в первую очередь, такое свойство надежности как безотказность. Кроме этого, в качестве значения $V_{зад}^{(l)}$ будем считать относительное количество оборудования позиционной троированной мажоритарной структуры (которая широко используется для повышения надёжности СОИ турбоагрегата в ПСС) l-байтовой СОИ, приведенное к единице разрядной сетки, т.е. $V_{зад}^{(l)} = 3 \cdot 8 \cdot l = 24 \cdot l$ (усл. един.). В качестве объема оборудования резервированной СОИ в МСС будем считать относительное количество оборудования резервированной СОИ, которое определяется выражением $V_{СОК}^{(l)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \alpha_i$, где: $\alpha_i = \left[\log_2(m_i - 1)\right] + 1$; x_i – количество однотипных трактов информации (ТОИ) в канале обработки информации (КОИ) по модулю m_i МСС, из которых состоит резервированная СОИ в МСС.

С учетом вышеизложенного, а также с учетом результатов постановки задачи оптимального резервирования, сформулируем (в формализованном виде) соответственно прямую (1) и обратную (2) задачи оптимального резервирования в МСС следующим образом

$$\begin{cases} V_{МСС}^{(l)} \to \min, \\ P_{МСС}^{(l)}(t) \geq P_{зад}(t)[t = const]; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} P_{МСС}^{(l)}(t)[t = const] \to \max, \\ V_{МСС}^{(l)} \leq 24l. \end{cases} \tag{2}$$

На основе результатов решения задачи оптимального резервирования в МСС можно получить искомый вектор состояния СОИ в МСС.

$$X_{МСС}^{(l)} = \{x_1 \| x_2 \| \ldots \| x_i \| \ldots \| x_n\} \tag{3}$$

В этом случае КОИ по модулю m_i содержит x_i ТОИ (один основной и $x_i - 1$ резервных).

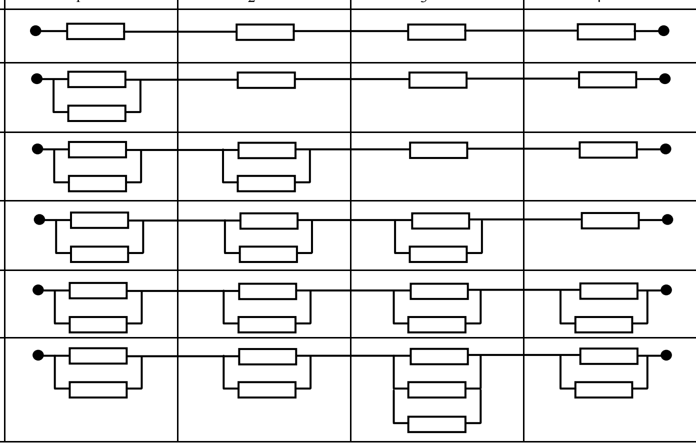
Исходя из структуры вектора X состояние возможно получить математическую модель надежности СОИ в МСС для заданного значения $t_{зад}$ времени. Так, для вектора (3) состояния в общем виде математическая модель надежности СОИ в МСС будет иметь следующий вид

$$\begin{gathered} P_{МСС}^{(l)}(t) = \left\{1 - \left[1 - P_1^{(0)}(t)\right]^{x_1+1}\right\} \times \\ \times \left\{1 - \left[1 - P_2^{(0)}(t)\right]^{x_2+1}\right\} \cdot \ldots \cdot \left\{1 - \left[1 - P_n^{(0)}(t)\right]^{x_n+1}\right\} \end{gathered} \tag{4}$$

Надёжностная структура полученная вследствие решения задачи оптимального резервирования для однобайтовой ($l = 1$) СОИ в МСС представлена в табл. 1.

Таблица 1 – Надежностные структуры СОИ в МСС для $l = 1$

Кратность резервирования	Номер структуры	Вид структуры				$V_{МСС}^{(l)}$
		$m_1 = 3$	$m_2 = 4$	$m_3 = 5$	$m_4 = 7$	
0	1					10
1	2					12
2	3					14
3	4					17
4	5					20
5	6					23



Для оценки эффективности использования МСС для повышения отказоустойчивости СОИ проведем расчет и сравнительный анализ надежности СОИ в МСС и в ПСС. В качестве СОИ в ПСС возьмём широко используемую на практике трехканальную мажоритарную структуру. В этом случае вероятность безотказной работы СОИ в ПСС определяется известным выражением

$$\begin{gathered} P_{\underset{ПСС}{СОИ}}^{(l)}(t) = 3 \cdot P_0^2(t) - 2 \cdot P_0^3(t) = \\ = e^{-16 \cdot l \cdot \lambda_э \cdot t}\left(3 - 2 \cdot e^{-8 \cdot l \cdot \lambda_э \cdot t}\right), \end{gathered} \tag{5}$$

где $P_0(t)=e^{-\lambda_0 \cdot t}=e^{-8 \cdot l \cdot \lambda_э \cdot t}$ – вероятность безотказной работы одного (каждого) из трех каналов обработки информации СОИ.

Так, например, для СОИ с исходными данными: $l=1$; $\lambda_э=10^{-4}\left[1/_{час}\right]$; $t_{зад}=1[час]$; $V_{зад}^{(l)}=24 \cdot l$ $[усл.един.]$, по формуле (4) рассчитаем значение вероятности безотказной работы: $P_{\underset{ПСС}{СОИ}}^{(1)}(t)=e^{-16 \cdot 10^{-4}}\left(3-2 \cdot e^{-8 \cdot 10^{-4}}\right)=0{,}999998$. Сравнение значений вероятности безотказной работы СОИ в МСС $P_{МСС}=0{,}99999999997$ и в ПСС $P_{ПСС}=0{,}999998$ показывает, что при заданных исходных данных применение непозиционных кодовых структур для повышения надежности (отказоустойчивости) систем обработки информации гораздо эффективнее троированной мажоритарной структуры в ПСС.

Результаты решения задачи оптимального резервирования в МСС, в виде совокупности векторов состояний резервированной СОИ, представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты решения задачи оптимального резервирования

l	$X_{СОК}^{(l)}$
1	2,2,3,2
2	2,2,2,3,3,3
3	3,2,3,3,3,3,3
4	2.2,2,2,3,2,3,3,3,3

В случае с применением динамического резервирования для СОИ, которые построены на основе использования МСС задача синтеза их основывается на выполнении условия:

$$\begin{gathered}\forall m_j\left(j=\overline{n+1, n+k}\right)\exists!\, m_{j_{opt}}\left(m_{n+1} \leq m_{j_{opt}} \leq m_{n+k}\right); \\ \left[H_{МСС}^{(n+1)}(t)[t=const]=\max\right]\end{gathered} \qquad 6$$

и формулируется следующим образом: необходимо определить единственное оптимальное значение контрольного модуля $m_{(n+1)_{opt}}$ из возможных m_{n+1}, m_{n+2}, . . . , m_{n+k}, при котором надежность $H_{МСС}^{(n+1)}(t)$ СОИ в МСС была бы максимальная. Для динамического резервирования решим обратную задачу оптимального резервирования в МСС, аналитически представленную следующим образом:

$$\begin{cases}H_{МСС}^{(n+k)}(t)[t=const] \rightarrow \max; \\ \left(V_{ПСС}^{(l)} \geq V_{МСС}^{(n+k)}\right),\end{cases} \qquad 7$$

где k – количество оптимальных контрольных оснований $\left\{m_{(n+z)opt}\right\}$, $z=\overline{1,k}$, одновременное использование которых обеспечивает максимальное значение надежности $H_{МСС}^{(n+1)}(t)$;

$V_{ПСС}^{(l)}$ – количество оборудования СОИ в позиционной системе счисления (ПСС);

$V_{МСС}^{(n+k)}$ – количество оборудования СОИ в МСС.

В отличии от динамического резервирования в ПСС, для кодов в МСС характерно то, что реальная надежность СОИ лежит в следующих пределах:

$$H_{МСС}^{(n+k)}(t) \leq H_{МСС}(t) \leq H_{МСС}^{(n+k')}(t), \qquad 8$$

где

$$\begin{gathered}H_{МСС}^{(n+k)}(t)=P_{МСС}^{(k/n)}(t)=\sum_{i=0}^{k} C_{k+n}^{i} P_1^{k+n-i}(t) \times \\ \times \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j P_1^j(t)\end{gathered}, \qquad 9$$

$$\begin{gathered}H_{МСС}^{(n+k')}(t)=P_{МСС}^{(k'/n)}(t)=\sum_{i=0}^{k'} C_{k'+n}^{i} P_1^{k'+n-i}(t) \times \\ \times \sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j P_1^j(t)\end{gathered}, \qquad 10$$

При реализации выражений (9) и (10) будет естественным допущение, что все вычислительные тракты (ВТ) равнонадежны. В этом случае $P_1(t)=e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\left\{\left]V_{МСС}^{(n+k)}/(n+k)\right[\right\}\lambda_э$.

Для сравнения СОИ в ПСС рассмотрим вариант троирования. В этом случае вероятность безотказной работы для таких СОИ будет определяться выражением:

$$P_{3ПСС}^{(l)}(t)=1-\left[1-P_{0ПСС}^{(l)}(t)\right]^3, \qquad 11$$

где $P_{0ПСС}^{(l)}(t)=e^{-8l\lambda_э t}$ – вероятность безотказной работы безизбыточной l-байтовой позиционной СОИ.

Количество оборудования для троированной СОИ определяется выражением – $V_{3ПСС}^{(l)}=3 \cdot 8 \cdot l$. В табл. 3 представлены наборы информационных оснований МСС, а также данные о количестве оборудования СОИ в МСС:

$$V_{МСС}^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i;\; V_{МСС}^{(k)}=\sum_{i=n+1}^{n+k}\alpha_i;\; \left(V_{МСС}^{(n+k)}=V_{МСС}^{(n)}+V_{МСС}^{(k)}\right);$$
$$\alpha_i=\left[\log_2(m_i-1)\right]+1.$$

Так же в табл. 3 приведены данные о количестве оборудования СОИ в ПСС $V_{ПСС}^{(l)}$ и набор k контрольных оснований МСС, полученных из условия: $\Delta V \approx V_{МСС}^{(k)}$, где $\Delta V=\Delta V_{3ПСС}^{(l)}-V_{МСС}^{(n)}$, или из условия $V_{ПСС}^{(l)} \approx V_{МСС}^{(n+k)}$, путем выбора оптимального набора контрольных k оснований МСС. Учитывая соотношения (9) и (10), а также данные, представленные в табл. 3, получим наборы формул 12 – 19 для определения надежности различных структур СОИ в МСС.

Таблица 3 – Расчётные данные о количестве оборудования СОИ в ПСС и МСС

l (n)	$\{m_i\}\ i=\overline{1,n}$	$V_{MCC}^{(n)}$	$V_{3ПСС}^{(l)}$	ΔV	$\{m_j\}\ j=\overline{n+1;n+k}$	$V_{MCC}^{(k)}$	k	r	k′	α
1 (4)	m_1=3, m_2=4, m_3=5, m_4=7	10	24	14	m_5=11, m_6=13, m_7=17	13	3	2	4	4
2 (6)	m_1=2, m_2=5, m_3=7, m_4=9, m_5=11, m_6=13	19	48	29	m_7=17, m_8=19, m_9=23, m_{10}=29, m_{11}=31	25	5	2	6	4
3 (8)	m_1=3, m_2=4, m_3=5, m_4=7, m_5=11, m_6=13, m_7=17, m_8=19	28	72	44	m_9=23, m_{10}=29, m_{11}=31, m_{12}=37, m_{13}=41, m_{14}=43, m_{15}=47, m_{16}=53	45	8	2	9	5
4 (10)	m_1=2, m_2=3, m_3=5, m_4=7, m_5=11, m_6=13, m_7=17, m_8=19, m_9=23, m_{10}=29	37	96	59	m_{11}=31, m_{12}=37, m_{13}=41, m_{14}=43, m_{15}=41, m_{16}=53, m_{17}=59, m_{18}=61, m_{19}=67	54	9	3	11	5

$$P^{(4/3)}_{\substack{MCC\\ l=1\\ \min}}(t)=\sum_{i=0}^{3}C_7^iP_1^{7-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 12$$

$$P^{(4/4)}_{\substack{MCC\\ l=1\\ \max}}(t)=\sum_{i=0}^{4}C_8^iP_1^{8-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 13$$

$$P^{(6/5)}_{\substack{MCC\\ l=2\\ \min}}(t)=\sum_{i=0}^{5}C_{11}^iP_1^{11-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 14$$

$$P^{(6/6)}_{\substack{MCC\\ l=2\\ \max}}(t)=\sum_{i=0}^{6}C_{12}^iP_1^{12-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 15$$

$$P^{(8/8)}_{\substack{MCC\\ l=3\\ \min}}(t)=\sum_{i=0}^{8}C_{16}^iP_1^{16-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 16$$

$$P^{(8/9)}_{\substack{MCC\\ l=3\\ \max}}(t)=\sum_{i=0}^{9}C_{17}^iP_1^{17-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 17$$

$$P^{(10/9)}_{\substack{MCC\\ l=4\\ \min}}(t)=\sum_{i=0}^{9}C_{19}^iP_1^{19-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 18$$

$$P^{(10/11)}_{\substack{MCC\\ l=4\\ \max}}(t)=\sum_{i=0}^{11}C_{21}^iP_1^{21-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_1^j(t);\qquad 19$$

Висновки. Таким образом, на основании решения задачи синтеза СОИ в МСС разработаны оптимальные надежностные вычислительные структуры. Произведен расчет и сравнительный анализ безотказности СОИ в МСС и в ПСС, который показал высокую эффективность использования непозиционных кодовых структур в модулярной системе счисления. Проведенные исследования показали, что применения непозиционных кодовых структур в МСС обеспечивают более высокую отказоустойчивость, чем широко применяемые в ПСС методы троирования СОИ и при меньшем количестве дополнительно вводимого оборудования.

Список использованных источников

1. Основи діагностика цифрових систем / [В. С. Харченко, Є. А. Артеменко, М. П. Благодарний та інш.] – Підручник. – Харків: Національний аерокосмічний університет "ХАІ", 2004. – 665 с.

2. Кошман С. А. Концепция создания системы обработки цифровой информации на основе использования системы остаточных классов / С. А. Кошман // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 7 (48). – С. 138–141.

3. Кошман С. А. Повышение надёжности высокопроизводительных процессоров в системе остаточных классов / С. А. Кошман, А. А. Сиора, Khere Ali Abdullah, В. А. Краснобаев // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 7 (34). – С. 124 – 128.

Анотація

МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗЕРВУВАННЯ У МОДУЛЯРНІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ

Кошман С. О., Краснобаєв В. А., Мавріна М. А.

У статті описуються методи статичного та динамічного резервування для систем обробки інформації, які функціонують у модулярній системі числення. Матеріали даної статті можуть бути використані при створенні засобів обробки цифрової інформації, які функціонують у реальному часі рішення алгоритму керування.

Abstract

METHODS OF OPTIMAL BACKUPING IN MODULAR NUMBER SYSTEM

S. Koshman, V. Krasnobayev, M. Mavrina

In the article the methods of the static and dynamic backuping are described for the systems treatments of information, which function in the modular number system. Materials of this article can be used for creation of facilities of treatment of digital information, functioning in real time decisions of management algorithm.