МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський державний університет харчування та торгівлі

Д. О. Торяник

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Харків
ХДУХТ
2017

УДК 512.64+514.74+517(075.8)
ББК 22.1я7
Т61

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. В. О. Потапов

д-р техн. наук, проф. М. С. Синєкоп

Рекомендовано до друку вченою радою Харківського державного університету харчування та торгівлі, протокол № 9 від 28.12.2016 р.

Торяник Д. О.

Т61 Вища та прикладна математика. Індивідуальні завдання [Електронний ресурс] : навч. посібник / Д. О. Торяник. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2017. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

ISBN

Посібник відповідає робочій програмі дисципліни «Вища та прикладна математика», що викладається студентам першого курсу факультету управління торговельно-підприємницькою та митною діяльністю. Він складається з теоретичного матеріалу, який містить основні поняття, означення та формули, з індивідуальних завдань, прикладу розв’язання типового варіанта та списку використаних джерел.

Посібник також буде корисним студентам інших факультетів та спеціальностей, які вивчають відповідні теми з дисципліни «Вища математика».

УДК 512.64+514.74+517(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою пропонованого видання є допомога студентам денного та заочного відділення факультету управління торговельно-підприємницькою та митною діяльністю правильно організувати свою самостійну роботу по оволодінню теоретичним матеріалом, необхідним для розв'язання задач з відповідних тем вищої математики, що вивчаються впродовж курсу «Вища та прикладна математика». Посібник також буде корисним студентам інших факультетів, які вивчають відповідні теми з дисципліни «Вища математика».

Посібник написано згідно з робочою програмою дисципліни «Вища та прикладна математика», що викладається студентам першого курсу факультету управління торговельно-підприємницькою та митною діяльністю. Він складається з теоретичного матеріалу, який містить основні поняття, означення та формули, індивідуальних завдань, прикладу розв'язання типового варіанта та списку використаних джерел.

Індивідуальні завдання виконуються за варіантом, номер якого співпадає з номером студента за списком студентського журналу. Завдання потрібно виконувати в окремому зошиті, що здається на перевірку викладачеві, який веде практичні заняття. Перед розв'язанням задач слід підставити числові значення параметрів a, b, c, m, n, k з таблиці варіантів параметрів, які відповідають варіанту студента, до умов задач.

ТАБЛИЦЯ ВАРІАНТІВ ПАРАМЕТРІВ

№ з/п	*a*	*b*	*c*	*m*	*n*	*k*	№ з/п	*a*	*b*	*c*	*m*	*n*	*k*
1	-2	3	1	-4	-1	-3	**16**	-3	2	-1	-2	4	-1
2	3	-1	-2	-3	2	1	**17**	2	-4	3	1	-1	2
3	2	5	-2	1	-4	3	**18**	-2	1	5	-4	1	-3
4	-3	2	4	-3	2	-1	**19**	-2	-3	1	-2	3	4
5	4	-3	3	2	1	-2	**20**	5	-2	-1	3	-2	-4
6	2	-4	-1	-2	3	1	**21**	3	5	-2	-1	3	2
7	-5	2	1	-1	4	2	**22**	-3	1	4	-1	2	-3
8	-2	1	3	4	-2	-1	**23**	2	4	-2	3	-5	2
9	2	-1	-5	3	1	-2	**24**	-2	-3	4	2	-1	-2
10	-4	2	1	-1	2	3	**25**	-3	4	1	-2	1	5
11	3	-3	-4	2	-1	2	**26**	2	-4	3	1	-1	-2
12	2	-2	3	5	4	-3	**27**	-3	2	-1	3	-2	1
13	-5	1	-2	1	-3	4	**28**	3	-3	2	-2	-1	4
14	-2	4	5	-3	-2	1	**29**	-4	-2	1	3	5	-1
15	2	3	-4	4	5	3	**30**	-2	4	3	-1	2	1

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ, ПРАВИЛА ТА ФОРМУЛИ

1. Елементи лінійної алгебри

Матрицею розміру $m\times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Матриця називається квадратною порядку n, якщо $m=n$.

Одиничною матрицею називається квадратна матриця

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумою матриць A і B однакового розміру називається матриця C того ж самого розміру така, що $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, де індекси i, j показують, що елемент матриці стоїть на перетині рядка з номером i та стовпця з номером j.

Добутком матриці A на число α називається матриця C така, що $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Добутком матриці A розміру $m\times p$ на матрицю B розміру $p\times n$ називається матриця C розміру $m\times n$ така, що $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$. Взагалі

$$AB\neq BA.$$

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність число, яке обчислюється за певним правилом та називається визначником або детермінантом матриці. Позначення визначника:

$$|A| = \det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

.

Визначник другого порядку знаходиться за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначник третього порядку обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Мінором M_{ij} квадратної матриці A порядку n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A визначається рівністю

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначник n-го порядку обчислюється методом розкладання матриці за елементами рядка або стовпця. Розкладання за елементами i-го рядка має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

де A_{ij} алгебраїчні доповнення елементів i-го рядка.

Визначники мають такі властивості:

1. Рівноправність рядків та стовпців: величина визначника не змінюється при транспонуванні.

2. Якщо поміняти місцями два рядка (стовпця) величина визначника змінить тільки знак.

3. Визначники з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнюють нулю.

4. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають загальний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то величина визначника також дорівнює нулю.

6. Визначник, який має два пропорційних рядка (стовпця), дорівнює нулю.

7. Якщо один з рядків (стовпців) визначника є лінійною комбінацією його інших рядків (стовпців), то визначник дорівнює нулю.

8. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

Квадратна матриця A називається виродженою, якщо $\det A = 0$, і невиродженою, якщо $\det A \neq 0$.

Оберненою до невиродженої матриці A називається матриця A^{-1} така, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, яка знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці.

Мінором M_k матриці A називається визначник k-го порядку, що утворений із її елементів, які стоять на перетині будь-яких k рядків і k стовпців матриці.

Рангом матриці A (позначається r або *rang A*) називається найвищий порядок мінору, відмінний від нуля.

Ранг матриці не змінюється при її елементарних перетвореннях, до яких відносяться:

а) заміна рядків стовпцями і навпаки;

б) перестановки рядків (стовпців) ;

в) відкидання рядку (стовпця), всі елементи якого дорівнюють нулю;

г) множення елементів рядка (стовпця) на одне і те ж число відмінне від нуля;

д) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) помножених на одне и те ж число.

Матриці, які утворюються в результаті елементарних перетворень, називаються еквівалентними, їх еквівалентність позначається значком ~.

Система лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

називається системою лінійних рівнянь. В матричній формі вона записується

$$AX = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ основна матриця системи, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ стовпець невідомих, а $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ стовпець правих частин.

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається набір чисел, які після підстановки їх замість невідомих у систему, перетворюють кожне рівняння системи на тотожність. Якщо система має лише один розв'язок, вона називається визначеною. Система, яка має хоча б один розв'язок, називається сумісною, а якщо не має жодного розв'язку – несумісною.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг основної матриці системи A дорівнював би рангу розширеної матриці

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник основної матриці якої відмінний від нуля, сумісна та визначена, розв'язок якої можна знайти методом Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

де Δ – визначник основної матриці системи, а Δ_i одержується із визначника Δ заміною *i*-го стовпця стовпцем правих частин. Розв'язок такої системи також можна отримати матричним способом за формулою

$$X = A^{-1}B,$$

де A^{-1} – обернена матриця основної матриці системи, а B – стовпець правих частин.

Для систем з довільною кількістю рівнянь та невідомих розв'язок системи можна знайти за методом Гауса, який полягає в послідовному виключенні змінних.

2. Елементи векторної алгебри

Вектором називається відрізок, який має напрямок. Якщо початок вектора знаходиться в точці A, а кінець – в точці B, то вектор позначається $\overrightarrow{AB}$, а довільні вектори позначаються $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...

Довжиною, або модулем вектора називається відстань між його початком і кінцем. Позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Два вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються колінеарними. Три вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах, називаються компланарними.

Два вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають рівні довжини.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\vec{c} = \alpha\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\alpha||\vec{a}|$, а напрямок співпадає з $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, та має протилежний напрямок, якщо $\alpha < 0$.

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який прямує з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, якщо вектор $\vec{b}$ починається з кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 1).

Сумою *n* векторів, які розміщені послідовно, називається вектор, який прямує з початку першого вектора з кінцем останнього вектора.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь *l* визначається формулою

$$a_l = np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

де φ – кут між вектором $\vec{a}$ та віссю *l*.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються лінійно залежними в n-вимірному просторі, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, що виконується рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0.$$

Якщо ця рівність виконується лише за умови рівності нулю всіх α_i, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними і утворюють в n-вимірному просторі базис, тобто будь-який вектор в цьому просторі може бути розкладений за векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Так в тривимірному просторі будь-який вектор $\vec{d}$ може бути розкладений за трьома лінійно незалежними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Числа α, β і γ називаються координатами вектора $\vec{d}$ в тривимірному базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Лінійно незалежні взаємно перпендикулярні вектори одиничної довжини називаються ортами та утворюють ортонормований базис. Таким базисом є прямокутна декартова система координат $Oxyz$, в якій положення точки в просторі визначається координатами x, y, z. В цій системі координат орти, напрями яких співпадають з напрямами координатних осей, позначають через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді будь-який вектор в просторі можна представити у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

або

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

де a_x, a_y, a_z координати вектора $\vec{a}$. Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$ – початок вектора, $B(x_2, y_2, z_2)$ – його кінець, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ визначаються за формулою

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Довжина вектора, якщо відомі його координати, обчислюються за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ .$$

Косинуси кутів, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами відповідних осей координат називаються напрямними косинусами і обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}\ .$$

Для напрямних косинусів завжди виконується рівність

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинуса кута φ між ними. Позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$. Тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Якщо вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ задані у координатному вигляді, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,.$$

Скалярний добуток має властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$; α – число,
3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;
4) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (умова перпендикулярності двох векторів);
5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Косинус кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ дорівнює

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє умовам:

1) довжина дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
2) перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
3) має такий напрям, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ спостерігається проти годинникової стрілки.

Позначається векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$. Якщо вектори задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, а його половина – площі трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Векторний добуток має властивості:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
3) $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$, α – число;
4) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, що є результатом скалярного множення одного з них на векторний добуток двох інших. Позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ і навпаки.

Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, а $\frac{1}{6}$ його величини – об'єму трикутної піраміди, побудованих на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, як на ребрах.

3. Елементи аналітичної геометрії

Пряма лінія на площині

Будь-яке лінійне рівняння, що зв'язує між собою змінні x та y задає пряму лінію на площині. Найбільш загальний вигляд такого рівняння є

$$Ax+By+C=0.$$

Воно називається загальним рівнянням прямої на площині. Перпендикулярний до прямої вектор $\vec{n}=(A, B)$ називається нормальним вектором цієї прямої.

Різні види рівняння прямої на площині:

- $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A, B)$;
- $y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, $k=tg\varphi$, де φ кут між прямою та додатним напрямком осі Ox, $b-$ точка перетину з віссю Oy;
- $y_0-y=k(x_0-x)$ – рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом k, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$;
- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – рівняння прямої у відрізках на осях, a і b – величини відрізків, які пряма відсікає на осях координат;
- $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}$ – канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{l}=(m, p)$, який називається напрямним вектором прямої;
- $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої що проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$.

Умови паралельності та перпендикулярності прямих та кут між ними визначаються умовами колінеарності та ортогональності нормалей цих прямих $\vec{n}_1=(A_1,B_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2)$ та кутом між ними. Якщо прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1; y=k_2x+b_2$, то умова паралельності цих прямих буде

$$k_1 = k_2,$$

перпендикулярності

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

а кут між прямими визначається рівністю

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Площина в просторі

Будь-яке лінійне рівняння, що зв'язує між собою змінні x, y та z, задає площину у просторі. Найбільш загальний вигляд такого рівняння є

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Воно називається загальним рівнянням площини. Перпендикулярний до площини вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ називається нормальним вектором цієї площини.

Різні види рівняння площини:

- $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$;
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння площини у відрізках на осях, a, b і c – величини відрізків, які площина відсікає на осях координат;
- $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Умови паралельності, перпендикулярності площин та кут між ними визначаються умовами колінеарності, ортогональності та кутом між нормалями цих площин $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

перпендикулярності:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Кут між площинами

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ до прямої $Ax+By+Cz+D=0$ визначається формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пряма лінія в просторі

Пряма у просторі задається як лінія перетину двох площин

$$\begin{cases} A_1x+B_1x+C_1x+D_1=0 \\ A_2x+B_2x+C_2x+D_2=0 \end{cases}.$$

Різні види рівнянь прямої у просторі:

- $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{p}=\dfrac{z-z_0}{q}$ – канонічні рівняння прямої, що проходить

через точку $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ паралельно вектору $\vec{l}=(m,\,p,\,q)$, який називається напрямним вектором прямої;

- $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої що проходить через

дві задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$;

- $\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=pt+y_0 \\ z=qt+z_0 \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої.

Умови паралельності, перпендикулярності прямих у просторі та кут між ними визначаються умовами колінеарності, ортогональності та кутом між напрямними векторами цих прямих $\vec{l}_1 = (m_1,\, p_1, q_1)$ і $\vec{l}_2 = (m_2,\, p_2, q_2)$. Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

перпендикулярності:

$$m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0.$$

Кут між прямими

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{|\vec{l}_1||\vec{l}_2|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2}\sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

Взаємне розташування прямої та площини у просторі

Нехай площина задана загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а пряма канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}.$$

Тоді площина і пряма будуть паралельними якщо нормальний вектор площини $\vec{n} = (A, B, C)$ та напрямний вектор прямої $\vec{l} = (m,\, p,\, q)$ перпендикулярні, тобто

$$Am + Bp + Cq = 0.$$

Умова перпендикулярності площини та прямої буде

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}.$$

Кут між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{n},\vec{S})}{|\vec{n}||\vec{S}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Криві другого порядку

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне рівняння еліпсу, симетричного відносно координатних осей має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Числа a і b називаються напівосями еліпса. При $a > b$ еліпс має вигляд, представлений на рис. 1.

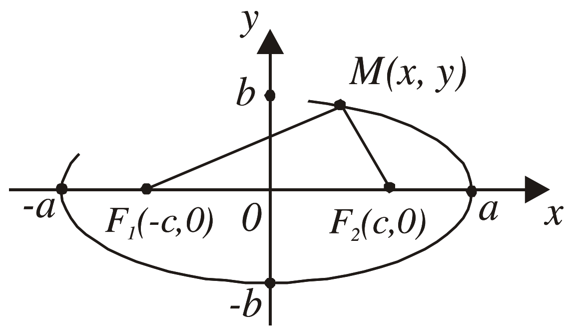

Рис. 1. Еліпс

Фокусна відстань такого еліпсу знаходиться за формулою

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса і характеризує його форму. Відстані від деякої точки $M(x,\, y)$ до фокусів знаходяться за формулами

$$|MF_1| = a + \varepsilon x;$$
$$|MF_2| = a - \varepsilon x.$$

Якщо $a = b$ (при цьому $\varepsilon = 0$), то маємо рівняння кола

$$x^2 + y^2 = a^2$$

з центром на початку координат, радіус якого дорівнює a.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне рівняння гіперболи, симетричної відносно координатних осей має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Число a називається дійсною, а b уявною напівосями гіперболи. Гіпербола має вигляд представлений на рис. 2.

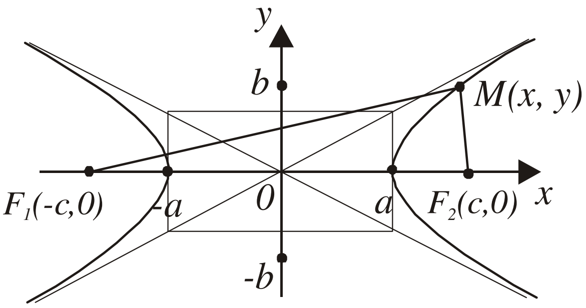

Рис. 2. Гіпербола

Гіпербола має дві асимптоти

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Фокусна відстань гіперболи знаходиться за формулою

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи.

Параболою називається геометричне місце точок, що рівновіддалені від фіксованої точки, яка називається фокусом, та фіксованої прямої, яка називається директрисою.

Канонічне рівняння параболи симетричної відносно осі Ox та з вершиною на початку координат має вигляд

$$y^2=2px,$$

де параметр p відстань від фокуса до директриси. Парабола має вигляд, представлений на рис. 3.

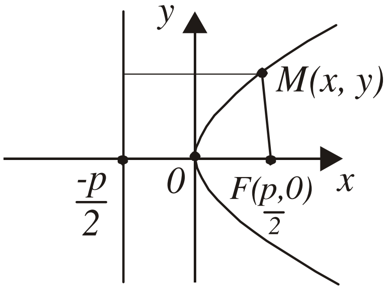

Рис. 3. Парабола

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Воно, в залежності від значень коефіцієнтів та співвідношення між ними, може бути приведено до одного з канонічних рівнянь ліній другого порядку: кола, еліпса, гіперболи або параболи.

4. Вступ до математичного аналізу

Множиною називається сукупність деяких об'єктів. Об'єкти, що утворюють множину, називаються елементами або точками цієї множини. Множини позначаються великими буквами, а їх елементи малими $A=(a,b,c,...)$; $A=\{x_n\}, n=1,2,...$; $A=\{x:...\}$ – елемент множини x має властивості, які вказано після двокрапки. Множина, елементами якої є усі дійсні числа, позначається як R. Множина, що не містить жодного елемента, називається пустою і позначається $\varnothing$. Якщо a є елемент множини A, то пишуть $a\in A$. Якщо b не є елементом множини A, то пишуть $b\notin A$. Якщо множина B є частиною множини A, то множина B називається підмножиною множини A і це позначається $B\subset A$.

Відрізняють такі числові множини:

- $[a,b]=\{x:a\le x\le b\}$ – відрізок;
- $(a,b)=\{x:a<x<b\}$ – інтервал, відкритий відрізок;
- $(-\infty,\infty)=\{x:-\infty<x<\infty\}$ – нескінченний інтервал;
- $\bigcup(c,\varepsilon)=\{x:|x-c|<\varepsilon\}=(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ – ε-окіл точки c;
- $\bigcup(\infty,\varepsilon)=\{x:|x|>\varepsilon\}$ – ε-окіл нескінченної точки;
- $\bigcup(+\infty,\varepsilon)=\{x:x>\varepsilon\}$ – ε-окіл точки $+\infty$;
- $\bigcup(-\infty,\varepsilon)=\{x:x<-\varepsilon\}$ – ε-окіл точки $-\infty$;

- $A \bigcup B = \{x : x \in A$ або $x \in B\}$ – об’єднання множин;
- $A \bigcap B = \{x : x \in A$ і $x \in B\}$ – перетин множин A і B.

Якщо кожному числу x з множини X поставлено у відповідність за деяким законом число y з множини Y, то закон цієї відповідності називається функцією та позначається $y = f(x)$**.** Множина X називається областю визначення функції, а множина Y – областю значень функції.

Існує декілька способів задання функції:

1) Аналітичний спосіб, коли функція задається формулою вигляду $y = f(x)$;

2) Табличний спосіб, коли вказані всі можливі значення змінної x та відповідні їм значення змінної y;

3) Графічний спосіб полягає в зображенні графіка функції – множини точок (x, y) площини.

Функція $y = f(x)$ називається парною (непарною), якщо для будь-якого $x \in X$ $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). Якщо функція $f(x)$ не є парною чи непарною, то вона називається функцією загального виду.

Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для довільних x з області визначення функції $f(x+T) = f(x)$.

Нехай $Y = \{y : y = f(x), x \in X\}$. Функція $x = f^{-1}(y)$ називається оберненою до функції $y = f(x)$, якщо $X = \{x : x = f^{-1}(y), y \in Y\}$. Обернену функцію позначають $y = f^{-1}(x)$.

До основних елементарних функцій відносяться:

- степенева ($y = x^{\alpha}, \alpha \in R$);
- показникова ($y = a^{x}, a \neq 0, a \neq 1$);
- тригонометричні ($y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$);
- обернені функції ($y = \ln x,\ y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,$ $y = arcctgx$).

Функції, які створені із основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і суперпозицій, називаються елементарними.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, крім, можливо, самої точки a. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при прямуванні x до a ($x \to a$), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають цю границю функції так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Якщо $x < a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a-0$; якщо $x > a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a+0$. Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ та $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ називають, відповідно, границею функції $y = f(x)$ зліва в точці a і границею функції $y = f(x)$ справа в точці a, або однобічними границями функції $y = f(x)$ в точці a. Для існування границі функції при $x \to a$ необхідно і достатньо, щоб $f(a-0) = f(a+0)$.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають границі при $x \to a$ і вони скінченні, то

1) $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$;

2) $\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$;

3) $\lim(cu) = c \lim u,\ c = const$;

4) $\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim u}{\lim v}$ при $\lim v \neq 0$;

5) $\lim\left(u^v\right) = \left(\lim u\right)^{\lim v}$.

Границя сталої функції $u(x) = c$ дорівнює самій сталій c, тобто $\lim c = c$.

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, а функція $\beta(x)$ – нескінченно великою при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = \infty$ (a – скінчене число або нескінченність). Нескінченно великі та нескінченно малі функції називаються еквівалентними при $x \to a$, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці.

Еквівалентними нескінченно малими при $x \to 0$ є наступні функції:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \mathrm{tg} x \sim \mathrm{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x).$$

При обчисленні границь необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням і вияснити, чи має місце невизначеність. До невизначених виразів відносяться: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$. Якщо в результаті підстановки граничного значення аргументу одержуємо невизначений вираз, то треба виконати тотожні перетворення, в результаті яких усувається невизначеність, а потім обчислити границю. При розкритті деяких невизначеностей використовують першу та другу важливі границі.

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ або, } \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Функція $y=f(x)$ називається неперервною при $x=a$, якщо виконані умови:

1) існують обидві однобічні границі $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;
2) вони дорівнюють одна одній;
3) значення функції в точці $x=a$ дорівнює значенню однобічних границь $f(a)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, то вона називається неперервною на цьому проміжку.

Якщо хоча б одна умова неперервності функції в точці не виконується то ця точка є точкою розриву даної функції:

1) точка $x=a$ є точкою усувного розриву функції $y=f(x)$, якщо обидві однобічні границі існують, дорівнюють одна одній але не дорівнюють значенню функції в цій точці;
2) точка $x=a$ є точкою розриву першого роду функції $y=f(x)$, якщо обидві однобічні границі існують але не дорівнюють одна одній;
3) точка $x=a$ є точкою розриву другого роду функції $y=f(x)$, якщо хоча б одна однобічна границя не існує або дорівнює нескінченості.

Асимптотою функції $y=f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається нескінчена гілка графіка функції.

Пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою функції $y=f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty.$$

Пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою функції $y=f(x)$, якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Пряма $y=b$ є горизонтальною асимптотою функції $y=f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$. Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти $y=kx+b$.

5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Границя відношення приросту функції $y=f(x)$ до приросту аргументу функції при прямуванні останнього до нуля називається похідною даної функції

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо зазначена границя існує, то функція $f(x)$ називається диференційовною, а операцію знаходження похідної – диференціюванням.

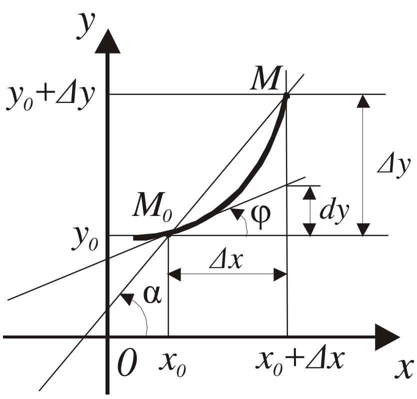

Рис. 4. Геометричний зміст похідної

Геометричний зміст похідної це тангенс кута нахилу дотичної до графіку функції $y=f(x)$ в точці (x_0, y_0). Розглянемо рис. 4. M_0M – січна, що проходить через дві точки $M_0(x_0,y_0)$ і $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ кривої $y=f(x)$, $tg\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x\to 0$ $M\to M_0$, а січна переходить в дотичну, що проходить через точку M_0 до кривої, при цьому $tg\alpha\to tg\varphi$, де φ – кут між додатним напрямом осі OX і дотичною, який відраховується проти ходу годинникової стрілки. Використовуючи рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

запишемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, що проходить через точку $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); \quad f'(x_0) = tg\varphi .$$

Похідна має властивості:

1) похідна сталої дорівнює нулю ($c' = 0$);

2) $(cf(x))' = cf'(x)$;

3) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

4) $(uv)' = u'v + uv'$;

5) $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'v + uv'}{v^2}$.

Похідні основних елементарних функцій:

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}$;

2) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;

3) $\left(e^x\right)' = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

6) $(\sin x)' = \cos x$;

7) $(\cos x)' = -\sin x$;

8) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

9) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

12) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

13) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Похідна складної функції $z = z(y(x))$:

$$z'(x) = z'(y)\,y'(x).$$

Якщо функція задана неявно $F(x, y) = 0$, то вона диференціюється за змінною x, вважаючи y деякою невідомою функцією змінної x: $y = f(x)$.

При параметричному заданні функції $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

похідна знаходиться за формулою

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

В деяких випадках, наприклад при диференціюванні функцій вигляду $y = [f(x)]^{g(x)}$, вираз спочатку логарифмується, а потім знаходиться похідна неявно заданої функції.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина приросту функції, яка лінійна відносно $\Delta x, \Delta x \to 0$. Позначається $dy = f'(x_0)dx$. Тоді $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, де dy – диференціал функції, dx– диференціал незалежної змінної. Порівняння Δy з dy показує, що $\Delta y \approx dy$. Звідки $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ та $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малих приростах Δx аргументу x.

Похідна другого порядку визначається як похідна від похідної і позначається

$$y'' = (y')'.$$

Похідна третього порядку визначається як похідна від похідної другого порядку і т.д. Похідна порядку n буде

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Похідні можуть застосовуватись для розкриття невизначеностей вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ та $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ (правило Лопіталя). Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, обидві прямують до нуля або нескінченості при прямуванні до a, то має місце рівність

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

якщо остання границя існує (a – скінченне число або нескінченність). При розкритті невизначеностей вигляду $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}$ за правилом Лопіталя вони спочатку зводяться до невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$ шляхом алгебраїчних перетворень.

Функція $y=f(x)$ називається зростаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 та x_2 з цього інтервалу, таких що $x_2>x_1$ виконується нерівність $f(x_2)>f(x_1)$.

Функція $y=f(x)$ називається спадаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 та x_2 з цього інтервалу, таких що $x_2>x_1$ виконується нерівність $f(x_2)<f(x_1)$.

Ознаки зростання і спадання функції:

- якщо $f'(x)>0$ на (a,b), то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі;
- якщо $f'(x)<0$ на (a,b), то $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Інтервали зростання та спадання функції називаються інтервалами монотонності.

Функція $y=f(x)$ досягає в точці $x=x_0$ локального максимуму (max) (локального мінімуму (min)), якщо існує такий $\varepsilon-$окіл точки x_0 $U(x_0,\varepsilon)$, що для будь-якого $x_0\in U(x_0,\varepsilon)$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$. Точки максимуму і мінімуму функції $y=f(x)$ називаються точками локального екстремуму.

Необхідна умова екстремуму: якщо точка $x=x_0$ є точкою локального екстремуму функції $y=f(x)$, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називаються критичними точками.

Достатня умова екстремуму: якщо при переході через точку $x=x_0$ похідна функції $y=f(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції, а якщо з мінуса на плюс, то точкою мінімуму. Якщо похідна не змінює знак, то екстремуму немає.

Функція досягає на відрізку своїх найбільшого та найменшого значень або у критичних точках або на кінцях відрізку.

Функція $y=f(x)$ називається опуклою на інтервалі (a,b), якщо її графік на цьому інтервалі розташований нижче дотичних, проведених в будь-яких його точках.

Функція $y = f(x)$ називається угнутою на інтервалі (a, b), якщо її графік на цьому інтервалі розташований вище дотичних, проведених в будь-яких його точках.

Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка функції, в якій графік змінює свою опуклість на угнутість і навпаки, називається точкою перегину.

Достатня умова опуклості (угнутості) графіка функції: якщо друга похідна $f''(x)$ функції $y = f(x)$ на деякому інтервалі від'ємна $f''(x) < 0$ (додатна $f''(x) > 0$), то графік функції опуклий (угнутий) на цьому інтервалі.

Необхідна умова існування точки перегину: якщо точка $x = x_0$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, то друга похідна функції в цій точці дорівнює нулю.

Достатня умова існування точки перегину: якщо при переході через точку $x = x_0$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то ця точка є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Схема повного дослідження функції і побудови її графіка:

- визначити область існування функції;
- дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
- знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- дослідити точки розриву функції, якщо вони існують, знайти вертикальні асимптоти;
- знайти похилі асимптоти, а у випадку їх відсутності дослідити поведінку функції при $x \to \pm\infty$;
- визначити інтервали зростання та спадання функції та її екстремуми;
- визначити інтервали опуклості та угнутості графіка функції і його точки перегину;
- побудувати графік.

6. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Нехай існує дві множини дійсних чисел D і Z. Якщо кожній парі значень x і y з множини D поставлено у відповідність деяке значення z з множини Z, то закон цієї відповідності називається функцією двох змінних. Ця залежність записується у вигляді $z = f(x, y)$, графіком якої є деяка поверхня у просторі. Множина D називається областю визначення, а множина Z областю значень функції z. Областю визначення функції є деяка частина площини *XOY*, обмежена лініями, які можуть належати або не належати цій області. Тобто, якщо функція задана аналітичним виразом (формулою), то областю визначення слід вважати область існування її аналітичного виразу – множину всіх тих точок (x, y), в яких даний аналітичний вираз визначений і набуває тільки дійсних і скінченних значень.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x .$$

Ця границя обчислюється за умови $y = const$.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною y називається границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y ,$$

яка обчислюється за умови $x = const$.

Частинними похідними другого порядку є частинні похідні від частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Для усіх елементарних функцій $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, тому порядок диференціювання при знаходженні мішаної похідної не важливий. Другі похідні також записуються $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$.

Повним диференціалом функції двох змінних називається вираз

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy ,$$

де $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ – диференціали незалежних змінних. Повний диференціал використовується у наближених обчисленнях значень функцій, оскільки $\Delta z \approx dz$, а

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Похідною функції $z = f(x, y)$ в точці M за напрямом l (рис. 5) називається границя

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

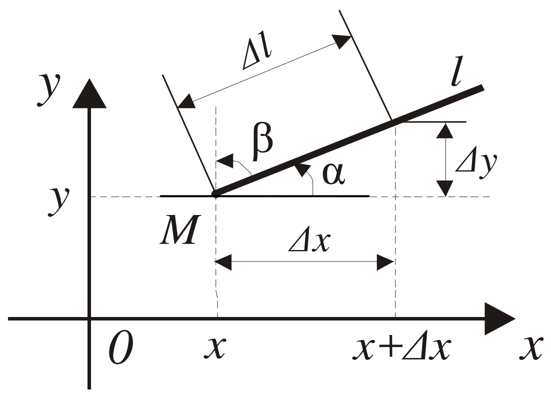

Рис. 5. Похідна за напрямом

Оскільки пряма l складає кут α з додатним напрямом осі Ox, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dl} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ називається вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, який позначається $\vec{\nabla} z$ (читається «набла» z) або $\overrightarrow{grad}\, z$. Аналогічно визначається градієнт функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} u = \overrightarrow{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$, якщо в будь-якому досить малому околі цієї точки $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$).

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо функція $z = f(x, y)$ в точці $\left(x_0, y_0\right)$ має екстремум, то частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю.

Достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має частинні похідні, що дорівнюють нулю і в цій точці існують частинні похідні другого порядку $A = \dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\, \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}$,

$\Delta = A \cdot C - B^2$. Тоді, якщо

1) $\Delta > 0$ і $A < 0$ – точка M_0 є точкою *max*;
2) $\Delta > 0$ і $A > 0$ – точка M_0 є точкою *min*;
3) $\Delta < 0$ – екстремуму немає;
4) $\Delta = 0$ – необхідні додаткові дослідження.

Функція багатьох змінних досягає своїх найбільшого та найменшого значень в обмеженій замкненій області або в точках екстремуму, або на межі області.

7. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Функція $y = F\left(x\right)$ називається первісною функції $y = f\left(x\right)$, якщо $F'(x) = f(x)$. Тобто вона визначена з точністю до сталої.

Множина всіх первісних функції $y = f\left(x\right)$ називається невизначеним інтегралом

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, а $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Знаходження невизначеного інтегралу називається інтегруванням та є оберненим до диференціювання. Тому таблиця похідних основних елементарних функцій є основою для складання таблиці основних інтегралів:

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n-1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| + C$.

Невизначений інтеграл має властивості:

а) $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$;

б) $\int df(x) = f(x) + C$;

в) $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda = const$;

г) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

Основні методи інтегрування:

1) безпосереднє інтегрування – приведення підінтегральної функції до суми або різниці функцій та застосування властивостей та таблиці невизначених інтегралів;

2) інтегрування частинами за формулою

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du;$$

3) інтегрування заміною змінної. Нехай $y = f(x)$ та $x = \varphi(t)$, тоді

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Розглянемо задачу знаходження площі плоскої фігури обмеженої зверху кривою $y = f(x)$, знизу віссю Ox та з боків прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 6). Розіб’ємо цю фігуру прямими перпендикулярними осі Ox на n частин. Тоді площа всієї фігури буде дорівнювати сумі частин, що представляють собою криволінійні трапеції, одна з сторін яких лежить на осі Ox. Позначимо ці відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i та замінимо площу криволінійної трапеції площею прямокутника з основою $[x_{i-1}, x_i]$ та висотою $f(\xi_i)$. Тоді площа всієї фігури буде наближено дорівнювати сумі $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ця сума називається інтегральною і залежить від розбиття відрізку $[a,b]$ та вибору точок ξ_i. Границя цієї суми при необмеженому зростанні кількості розбивань n та необмеженому зменшенні найбільшого з частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ називається визначеним інтегралом функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

Число a називається нижньою, а число b – верхньою межею визначеного інтегралу.

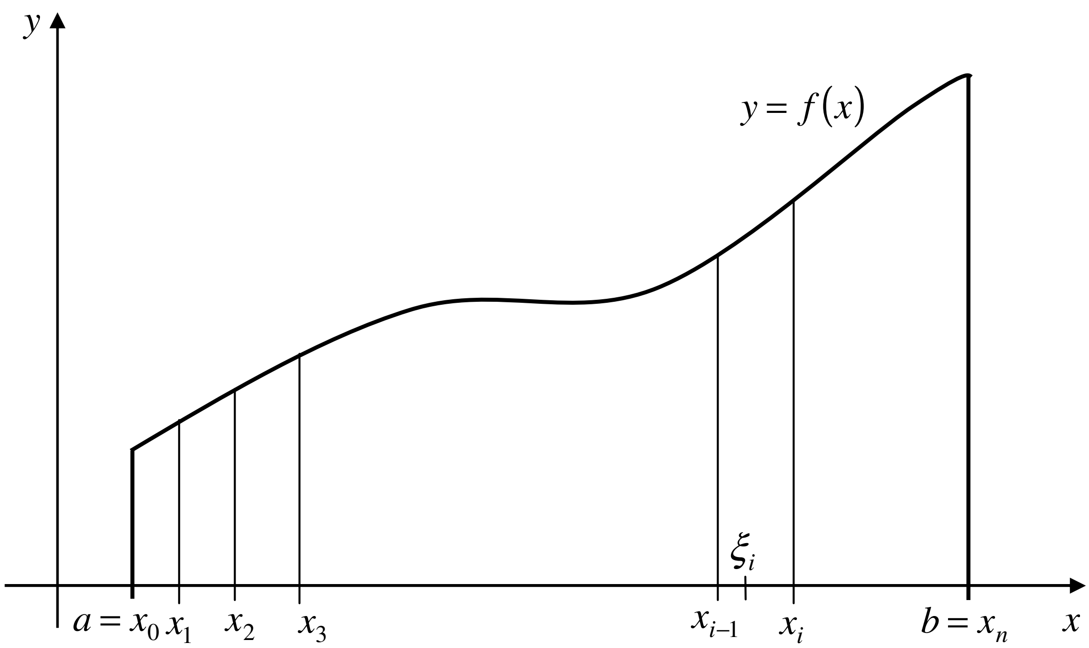

Рис. 6. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Визначений інтеграл має властивості:

а) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

б) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

в) $\int\limits_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx \pm \beta\int\limits_a^b g(x)dx$, $\alpha = const, \beta = const$

г) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Обчислюється визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбниця

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ первісна функції $y = f(x)$.

Основні методи обчислення визначеного інтегралу:

1) інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

2) заміна змінної

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Визначений інтеграл називається невласним, якщо хоча б одна з меж інтегрування є нескінченою (невласний інтеграл першого роду), або підінтегральна функція в околі деякої точки на проміжку інтегрування є необмеженою (невласний інтеграл другого роду).

Невласний інтеграл першого роду обчислюється за формулами

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називається збіжним, в протилежному випадку – розбіжним.

Нехай функція $y = f(x)$ необмежена в точці $c \in [a, b]$. Тоді інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є невласним інтегралом другого роду та обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Поняття збіжності цього інтегралу таке саме, як для невласного інтеграла першого роду.

Застосування визначеного інтегралу:

1. Обчислення площ плоских фігур. Нехай фігура обмежена з боків прямими $x = a$, $x = b$, а зверху та знизу кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ причому $f_1(x) \le f_2(x)$ в кожній точці проміжку $[a, b]$, тоді площа цієї фігури знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx;$$

2. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, відрізками $x = a$ і $x = b$ та віссю Ox, знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

При обертанні криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = \varphi(y)$, відрізками прямих $y = c$ і $y = d$ і віссю Oy навколо осі Oy, об'єм тіла знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy;$$

3. Довжина плоских кривих обчислюється за формулами:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

якщо крива задана рівнянням $y=f(x)$ та

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

при параметричному заданні кривої $x=x(t),\ y=y(t)$.

8. Диференціальні рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв’язує невідому функцію y, її похідні та незалежну змінну x. Порядок диференціального рівняння визначається порядком найвищої похідної, що входить до рівняння. Так диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))=0.$$

Будь-яка функція $y=\varphi(x)$, що задовольняє диференціальному рівнянню, тобто перетворює його на тотожність, називається розв’язком цього рівняння. Вираз $\Phi(x, y)=0$, який неявно задає розв’язок рівняння, називається інтегралом цього рівняння. Графік розв’язку диференціального рівняння називається його інтегральною кривою. Процес знаходження розв’язку диференціального рівняння називається його інтегруванням.

Загальним розв’язком, або загальним інтегралом диференціального рівняння називають такий його розв’язок

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

або

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0,$$

який містить довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, кількість яких дорівнює порядку цього рівняння. Якщо всі сталі покласти рівними деяким значенням, то отримаємо розв’язок, який називається частинним. Задача знаходження частинного розв’язку диференціального рівняння називається задачею Коши.

При цьому поряд з диференціальним рівнянням потрібно задати початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку є таким:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно похідної, то воно набуває вигляду:

$$y' = f(x, y).$$

Рівняння вигляду

$$y' = f(x)$$

називається рівнянням з відокремленими змінними і має загальний розв'язок

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням зі змінними що можна відокремити, якщо воно зводиться до вигляду:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0.$$

За допомогою алгебраїчних перетворень воно приводиться до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx,$$

яке має розв'язок

$$\int \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = -\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + C.$$

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке можна записати у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного і того ж порядку n, тобто

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y),\ Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x, y).$$

Шляхом заміни

$$\frac{y}{x} = t(x),$$

де $t = t(x)$ – невідома функція, це рівняння зводиться до рівняння зі змінними що можна відокремити.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x),$$

а рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

рівнянням Бернуллі. Обидва ці рівняння можуть бути розв'язані методом Бернуллі, який полягає в пошуку невідомої функції у вигляді добутку двох функцій

$$y = u(x)v(x).$$

Тоді

$$y' = u'v + v'u.$$

Підстановка цього виразу до лінійного диференціального рівняння перетворює його до вигляду

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x).$$

Оскільки невідому функцію y шукаємо, як добуток двох функцій, то одну з них можна вибрати довільно. Виберемо функцію $v(x)$ таку, щоб вираз в квадратних дужках дорівнював нулю. Тоді лінійне диференціальне рівняння розпадається на два диференціальних рівняння зі змінними, які можна відокремити:

$$v' + p(x)v = 0$$

та

$$u'v = q(x).$$

Ці рівняння легко розв’язуються і остаточно маємо

$$y = uv = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

При інтегруванні конкретного рівняння останньою формулою, як правило, не користуються, а послідовно виконують всі дії за вказаною схемою. За цією ж схемою інтегрують і рівняння Бернуллі.

Розв’язання диференціальних рівнянь другого порядку

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

є більш складним, але в деяких випадках порядок диференціального рівняння можна знизити. Розглянемо такі диференціальні рівняння:

1. Рівняння

$$y'' = f(x).$$

Розв’язок цього рівняння знаходимо шляхом послідовного інтегрування:

$$y' = \int f(x)dx + C_1; \; y = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2.$$

2. Рівняння, що не містить явно шукану функцію:

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Зниження порядку такого рівняння досягається введенням нової шуканої функції

$$z(x) = y', z(x) = y''.$$

Тоді рівняння набуває вигляду

$$F(x, z, z') = 0,$$

яке представляє собою рівняння першого порядку.

3. Рівняння, що не містить явно незалежну змінну x:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

В цьому випадку в якості нової функції беремо

$$p(y) = y',$$

а нової незалежної змінної: y. Тоді

$$y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

Така заміна змінних призводить до диференціального рівняння першого порядку:

$$F(y, p, p'p) = 0.$$

Лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = 0,$$

де p і q – дійсні числа. Його розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y = e^{kx}.$$

Після підстановки його до рівняння отримуємо квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0,$$

яке називається характеристичним. Загальний розв'язок лінійного рівняння, в залежності від коренів характеристичного рівняння, має вигляд:

а) корені дійсні і різні $k_1 \neq k_2$ (дискримінант характеристичного рівняння $D > 0$)

$$y_{з.о.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

б) корені кратні $k_1 = k_2 = k$ (дискримінант характеристичного рівняння $D = 0$)

$$y_{з.о.} = e^{kx}(C_1 + xC_2);$$

в) корені комплексно-спряжені $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$ (дискримінант характеристичного рівняння $D > 0$)

$$y_{з.о.} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – деяка задана функція.

Теорема. Загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв’язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв’язку неоднорідного

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}.$$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукається виходячи з вигляду функції $f(x)$.

Розглянемо окремі випадки вигляду правої частини $f(x)$:

1. $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Тоді частинний розв’язок слід шукати у вигляді:

$$y_{ч.н.} = Q_n(x) x^r,$$

де $Q_n(x)$ – багаточлен з невідомими коефіцієнтами того ж степеня, що й багаточлен $P_n(x), r$ – кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють нулю.

2. $f(x) = ae^{\alpha x}$.

Тоді

$$y_{ч.н.} = Ae^{\alpha x} x^r,$$

де A – невідомий коефіцієнт, r – кількість коренів характеристичного рівняння, що дорівнюють α.

3. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{ч.н.} = Q_n(x)e^{\alpha x} x^r,$$

де $Q_n(x)$ – багаточлен з невідомими коефіцієнтами того ж степеня, що й багаточлен $P_n(x)$, r – кількість коренів характеристичного рівняння, що дорівнюють α.

4. $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^r,$$

де A і B – невідомі коефіцієнти, r – кратність кореня $\pm\beta i$ в характеристичному рівнянні, що дорівнюють βi.

Невизначені коефіцієнти знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку одержуємо із умов рівності коефіцієнтів подібних членів в правій і лівій частинах неоднорідного рівняння після підстановки в нього $y_{ч.н.}$ замість невідомої функції y.

9. Ряди

Вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається числовим рядом, а числа $u_1, u_2, \ldots$ – членами ряду. n-ий член ряду u_n називається загальним членом ряду і задає правило побудови всіх членів ряду.

Побудуємо таку послідовність

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1; \\ &S_2 = u_1 + u_2; \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3; \\ &\ldots \\ &S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i . \end{aligned}$$

Тобто S_n представляє собою суму перших n членів ряду та називається частинною сумою ряду. Величина

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

називається сумою ряду, якщо границя існує та відмінна від нескінченості. Числовий ряд, який має суму, називається збіжним. В протилежному випадку – розбіжним.

Збіжні числові ряди мають властивості:

1) якщо до збіжного числового ряду додати або відняти скінчену кількість членів, то новий ряд також буде збігатись;

2) якщо кожний член збіжного числового ряду з сумою S помножити на одне і теж саме число A, то отриманий ряд також буде збігатись, а його сума дорівнювати $A \cdot S$;

3) якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються та їх суми відповідно дорівнюють S_u та S_v, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ також будуть збігатись, а їх суми дорівнювати $S_u + S_v$ та $S_u - S_v$.

Необхідна ознака збіжності ряду: якщо ряд збігається, то $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$. Якщо необхідна ознака не виконується, то ряд розбігається. На основі виконання необхідної ознаки не можливо зробити висновок про збіжність або розбіжність ряду.

Достатні ознаки збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами:

1. Ознака Даламбера. Нехай існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тоді ряд збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$, при $l=1$ збіжність ряду встановлюється за допомогою інших ознак.

2. Радикальна ознака Коши. Нехай існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. Тоді ряд збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$, при $l=1$ потрібне додаткове дослідження.

3. Інтегральна ознака Коши. Нехай функція $f(x)\geq 0$ неперервна на інтервалі $[1;+\infty)$, тоді невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ одночасно або збігаються, або розбігаються.

4. Ознака порівняння. Нехай задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, і виконується нерівність $u_n \leq v_n$. Тоді якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Для того щоб скористатися ознакою порівняння потрібно підібрати інший відомий ряд, з яким можна порівнювати досліджуємі ряди. Наприклад, узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},$$

який розбігається, якщо $\alpha \leq 1$ та збігається, якщо $\alpha > 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається знакозмінним, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні.

Окремим випадком знакозмінного ряду є знакопереміжний ряд, члени якого строго перемежаються за знаком: $u_1 - u_2 + u_3 - u_n + \ldots$, ($u_n > 0$).

Теорема Лейбниця: якщо в знакопереміжному ряді абсолютні величини ряду спадають $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > \ldots$, а загальний член прямує до нуля $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається, причому сума ряду не перевищує його першого члена: $S \leq u_1$.

Знакопереміжний ряд називається збіжним абсолютно, якщо він збігається за теоремою Лейбниця та збігається ряд складений з абсолютних величин.

Знакопереміжний ряд називається збіжним умовно, якщо він збігається за теоремою Лейбниця, а ряд, складений з абсолютних величин, розбігається.

Якщо членами ряду є функції $u_n(x)$ незалежної змінної x, то ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

називається функціональним. Множина значень змінної x, при яких цей ряд збігається, називається областю збіжності функціонального ряду.

Для знаходження області збіжності ряду можна застосовувати відомі ознаки збіжності числових рядів (Даламбера, Коші), вважаючи x фіксованою величиною.

Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-b)^n,$$

де b, a_n – дійсні числа, числа a_n називаються коефіцієнтами членів ряду. Якщо $a=0$, то маємо степеневий ряд за степенями x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n .$$

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ збігається в точці x_0, то він буде абсолютно та рівномірно збігатись в інтервалі $|x|<|x_0|$

Додатне число R називається радіусом збіжності степеневого ряду, якщо при $|x|<R$ ряд збігається абсолютно, а при $|x|>R$ розбігається. При $|x|=R$ збіжність степеневого ряду перевіряється підстановкою до степеневого ряду та дослідженні отриманих числових рядів. Радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулами

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

або

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

де a_n, a_{n+1} – коефіцієнти при n-ому і $(n+1)$-ому членах ряду.

Степеневий ряд можна почленно інтегрувати і диференціювати всередині його інтервалу збіжності. При цьому степеневі ряди, які будуть одержані, мають той же інтервал збіжності, що і вихідний ряд.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідні будь-якого порядку в околі точки $x = a$, то її можна розкласти в степеневий ряд:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

Цей ряд називається рядом Тейлора. В скороченому запису його можна представити

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Якщо $a = 0$, то одержимо частковий випадок ряду Тейлора, який називається рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

або

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Наведемо розкладання деяких важливих елементарних функцій в степеневі ряди.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Ці ряди мають область збіжності $-\infty < x < \infty$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n ;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n+1} x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} ;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} .$$

Ці ряди мають область збіжності $-1 < x < 1$.

Ряди Тейлора та Маклорена використовуються для наближених обчислень з будь-якої наперед заданою точністю значень функцій та визначених інтегралів.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Елементи лінійної алгебри

Задача 1. Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & -c & -a \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} c & a \\ b & c \\ a & b \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} m & c & -n \\ n & -b & -m \\ k & a & c \end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix} a & -b & c & m \\ n & k & -a & b \\ -c & n & b & k \\ b & -m & n & a \end{pmatrix}.$$

Знайти:
а) $A+nC$; б) B^T ; в) $B^T B$; г) A^2; д) $|F|$.

Задача 2. Дано систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Довести її сумісність і розв'язати трьома способами – методом Гауса, за правилом Крамера, засобами матричного числення:

$$\begin{cases} mx+ay+cz=cn; \\ kx+ny+mz=ak; \\ nx-by-az=bm. \end{cases}$$

Задача 3. Дослідити сумісність та знайти загальний і один частинний розв'язок систем:

а) $\begin{cases} ax+by+cz=m, \\ (c-a)x+(n-b)\,y+(k-c)z=b, \\ cx+ny+kz=m-b; \end{cases}$

б) $\begin{cases} bx-cy-cnz=bm, \\ nx+cy-bcz=mn, \\ (n-b)x+2cy+c(n-b)z=m(n-b). \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри

Задача 1. Дано вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ такі, що $|\vec{x}|=|\vec{y}|=|c|$, $(\vec{x},\vec{y})=60^\circ$.
Знайти:
а) $(n\vec{x}+k\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})$;
б) $|(b\vec{x}+\vec{y})\times(a\vec{x}+m\vec{y})|$;
в) косинус кута між векторами $a\vec{x}+\vec{y}$ і $\vec{x}+a\vec{y}$.

Задача 2. Дано чотири точки: $A(m;c;-k-n)$; $B(m;k^2+k+c;0)$; $C(m+k+n;k+c;-k-n)$; $D(2m;c;m-k-n)\,(k\neq -n)$.
Знайти:
а) $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}|$; б) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}$; в) $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|$;
г) площу трикутника ABC;
д) об'єм піраміди $DABC$;
е) відстань від точки D до площини ABC.

3. Елементи аналітичної геометрії

Задача 1. Дано три точки: $M_1(c;b;c);M_2(n+c;b;n+c);M_3(c;m+b;a+c)$.
Написати:
а) рівняння площини, що проходить через ці три точки;
б) рівняння площини, що проходить через точки M_2 і M_3 паралельно вектору $\vec{q}=(n;-m;n)$;
в) рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно площинам $nx-my+(n-a)z+b=0$ і $nx+nz+k=0$.

Задача 2. Знайти відстань від точки $M(ac;ac;-c)$ до площини $ax+(a+1)y+(a^2+a)z+c(a+1)=0$.

Задача 3. Дано трикутник ABC з вершинами $A(b;-m);B(-m;-b)$ і $C(0;b)$.
Написати:
а) рівняння медіани AM;
б) рівняння висоти AD і знайти її довжину.

Задача 4. Знайти кут між прямою, що проходить через точки $A(a-m;b;n)$ і $B(a;b+c;n+m)$ та площиною $mx+cy+mz+k=0$.

Задача 5. Написати рівняння кола, що проходить через точку $(n;-m)$ з центром у точці $(m;n)$.

4. Вступ до математичного аналізу

Задача 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2-(a-1)x-a}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(kx+b)^2}{cx^2+n}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+bx}-\sqrt{1-bx}}{kx}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{cx-1}{cx+1}\right)^{kx}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\ln(1+nx)}$.

Задача 2. Дослідити функції на неперервність:

а) $y=e^{\frac{k}{x-m}}$ в точках $x_1=m, x_2=b, x_3=-n$;

б) $y=\begin{cases} x+b & при\, x\le k, \\ a & при\; k<x<k+2, \\ c^2-x^2 & при\; x\ge k+2. \end{cases}$.

5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1. Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ для функцій:

а) $y=\dfrac{\sqrt{a^2x^2-ax+1}}{x}$;

б) $\begin{cases} x=a\cos bt, \\ y=b\sin at. \end{cases}$;

в) $(x+a)^4+(y+b)^4=(x+a)^2(y+b)^2$;

г) $y=(arctg\, c^2x)^{kx}$.

Задача 2. Обчислити похідну y' функцій:

а) $y=\left(ax-\dfrac{a}{k}\right)\cdot e^{kx-mk}$ у точці $x=m$;

б) $y=\ln(x^3-3c^2x)-\dfrac{nc}{x}$ у точці $x=c$.

Задача 3. Знайти похідну $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=e^{a(x+b)^2}$.

Задача 4. Обчислити задані границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx-kx}{nx-\sin nx}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(kx+c)}{cx^{m^2}+ax}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-\cos bx}{e^{nx}-\cos nx}$.

Задача 5. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y=(x-k+1)^3(x+a)$ у точці $x=k$.

Задача 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=e^{-m^2x^2}$ на проміжку $[-a^2,n^2]$.

Задача 7. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

а) $y=mx^3+kx^2$; б) $y=\dfrac{a}{x^2-(k+c)x+kc}$.

6. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Задача 1. Знайти область визначення функції і побудувати її на площині (x,y):

а) $z=\dfrac{a}{bx+cy}$; б) $z=\arcsin\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$.

Задача 2. Показати, що функція $z=k\sin^2(x-ay)$ задовольняє рівнянню $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; впевнитись в справедливості рівності $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Задача 3. Обчислити значення повного диференціала функції $z(x,y)$, що задана неявно рівнянням $ax^3-by^3+cxyz+cz^2=ab$, в точці $M_0(b,a,ab)$, якщо $\Delta x=-0{,}1; \Delta y=0{,}1$.

Задача 4. Дослідити на екстремум функцію $z=x^3-3bxy+y^3$.

Задача 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=xy-y^2-\frac{a}{3}(x-y)$ в області D, що обмежена лініями $x=0,\ y=0,\ x+y=a$.

7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Задача 1. Знайти невизначені інтеграли. В прикладі *б* результат перевірити диференціюванням.

а) $\int \frac{(\arcsin bx)^5}{\sqrt{1-(bx)^2}}dx$; б) $\int (mx+k)\sin(bx+a)dx$; в) $\int \frac{dx}{(x+m)\sqrt{x+n}}$;

г) $\int \frac{bx^2+2abx}{x^3-a^3}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2kx+b}}$; е) $\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$.

Задача 2. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 \frac{nx+b}{|a|x+|k|}dx$; б) $\int\limits_{-\left|\frac{n}{a}\right|}^{0} xe^{ax+n}dx$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{k}} [a\sin(kx)+m\cos(kx)]dx$; г) $\int\limits_{\frac{b}{|k|}}^{\frac{b}{|k|}+1} \sqrt{|k|x-b}\,dx$.

Задача 3. Обчислити площу фігури, що обмежена вказаними лініями. Зобразити ці лінії і фігуру, яку вони обмежують:

а) $y=x+b; y=0; x=1-b; x=3-b$;

б) $y=x^2+ax; y=x+a$.

8. Диференціальні рівняння

Задача 1. Розв’язати диференціальні рівняння першого порядку:

а) $y^a y' = b + kx$;

б) $y' + my = e^{nx}$;

в) $y' = \dfrac{ax + by}{bx - ay}$.

Задача 2. Розв’язати диференціальні рівняння другого порядку:

а) $x^k y'' = y'^2$;

б) $y'' = kyy'$.

Задача 3. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам:

а) $y'' - (a+1)y' + ay = 2ax - 2$; $y(0) = 0, y'(0) = a - 1$;

б) $y'' + a^2 y = k\sin x$; $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{k}{a^2 - 1}; (a \neq \pm 1)$.

9. Ряди

Задача 1. Дослідити на збіжність ряди

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a|^n}{|b|^n (2n-1)}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{bn}{an^{k+1} + bn^k + |c|}$.

Задача 2. Дослідити на абсолютну збіжність ряди

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin|b|n}{n^{k+1}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(|b|n - 1)^k}$.

Задача 3. Знайти область збіжності степеневого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{|a|^n (|b|n + 1)}.$$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Нехай $a=2;\ b=-3;\ c=1;\ m=-1;\ n=4;\ k=-5.$

1. Елементи лінійної алгебри

Задача 1. При заданих значеннях параметрів маємо:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&-3\\-3&-1&-2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\\2&-3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}-1&1&-4\\4&3&1\\5&2&1\end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix}2&3&1&-1\\4&-5&-2&-3\\-1&4&-3&-5\\-3&1&4&2\end{pmatrix}.$$

Знайти:
а) $A+4C$; б) B^T; в) B^TB; г) A^2; д) $|F|$.

Розв'язання

а) При додаванні двох матриць додаються їх відповідні елементи, а при множенні на число всі елементи матриці помножаються на це число. Тому

$$A+4C=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&-3\\-3&-1&-2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1&1&-4\\4&3&1\\5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&-3\\-3&-1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&4&-16\\16&12&4\\20&8&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+(-4)&-3+4&1+(-16)\\1+16&2+12&-3+4\\-3+20&-1+8&-2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&-15\\17&14&1\\17&7&2\end{pmatrix}.$$

б) B^T є матриця транспонована до матриці B, тому її рядки є стовпцями матриці B зі збереженням порядку розміщення:

$$B^T=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\end{pmatrix}.$$

в) Оскільки матриця B^T має три стовпця, а матриця B три рядка, то вони є узгодженими, тому їх можна перемножити, причому результуюча матриця буде квадратною матрицею другого порядку

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+(-3)\cdot(-3)+2\cdot2 & 1\cdot2+(-3)\cdot1+2\cdot(-3) \\ 2\cdot1+1\cdot(-3)+(-3)\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+(-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}.$$

г) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot2+(-3)\cdot1+1\cdot(-3) \\ 1\cdot2+2\cdot1+(-3)\cdot(-3) \\ (-3)\cdot2+(-1)\cdot1+(-2)\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 2\cdot(-3)+(-3)\cdot2+1\cdot(-1) & 2\cdot1+(-3)\cdot(-3)+1\cdot(-2) \\ 1\cdot(-3)+2\cdot2+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot(-3)+(-3)\cdot(-2) \\ (-3)\cdot(-3)+(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-1) & (-3)\cdot1+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-2) \end{matrix}\Bigg) = \begin{pmatrix} -2 & -13 & 9 \\ 13 & 4 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

д) Спосіб І. Розкладемо визначник за елементами першого стовпця

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + A_{31} \cdot A_{31} + A_{41} \cdot A_{41}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента першого стовпця

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-3)\cdot2+4\cdot4\cdot(-3)+(-2)\cdot(-5)\cdot1-(-3)\cdot(-3)\cdot1-4\cdot(-5)\cdot(-5)-$$
$$-4\cdot(-2)\cdot2 = -101;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -[3\cdot(-3)\cdot2+4\cdot4\cdot(-1)+1\cdot1\cdot(-5)-1\cdot(-3)\cdot(-1)-4\cdot1\cdot2-4\cdot(-5)\cdot3] = -10;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot 2+(-5)\cdot 4\cdot(-1)+1\cdot(-3)\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot 1-4\cdot(-3)\cdot 3-$$

$$-(-5)\cdot 1\cdot 2=49;$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & -2 & -3\\ 4 & -3 & -5\end{vmatrix}=[3\cdot(-2)\cdot(-5)+1\cdot(-3)\cdot 4+(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)\cdot 4-1\cdot(-5)\cdot(-5)-$$

$$-3\cdot(-3)\cdot 3]=57.$$

Отже маємо $|F|=2\cdot(-101)+4\cdot(-10)+(-1)\cdot 49+(-3)\cdot 57=-462$.

Спосіб II. Використаємо метод зниження порядку, який базується на застосуванні правила обчислення визначників розкладанням за елементами деякого рядка (стовпця). Але при цьому заздалегідь, використовуючи властивість визначників про лінійну комбінацію елементів рядків (стовпців), перетворюємо в нулі усі, крім одного, елементи деякого рядка (стовпця). Нам зручно зробити це з першим рядком, залишивши тільки третій її елемент. Третій стовпець послідовно помножимо на (-2), (-3), 1 і додамо відповідно до першого, другого та четвертого стовпців

$$|F|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & -1\\ 4 & -5 & -2 & -3\\ -1 & 4 & -3 & -5\\ -3 & 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 1 & -2 & -5\\ 5 & 13 & -3 & -8\\ -11 & -11 & 4 & 6\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}8 & 1 & -5\\ 5 & 13 & -8\\ -11 & -11 & 6\end{vmatrix}.$$

Далі знову перетворюємо на нулі усі, окрім другого, елементи першого рядка

$$|F|=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5\\ 5 & 13 & -8\\ -11 & -11 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -99 & 13 & 57\\ 77 & -11 & -49\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-99 & 57\\ 77 & -49\end{vmatrix}=$$

$$-[(-99)\cdot(-49)-77\cdot 57]=-462.$$

Задача 2. Дано систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Довести її сумісність і розв'язати трьома способами – методом Гаусса, за правилом Крамера, засобами матричного числення:

$$\begin{cases} -x+2y+z=4, \\ -5x+4y-z=-10, \\ 4x+3y-2z=3. \end{cases}$$

Розв'язання

Спосіб I. Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до східчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків, які вказано справа, де S_i позначено і-й рядок матриці.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 4 & -1 & -10 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_2-5S_1 \\ S_3+4S_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & -30 \\ 0 & 11 & 2 & 19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_2:(-6) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 2 & 19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_3-11S_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -36 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_1\cdot(-1) \\ S_3:(-9) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Оскільки кількість ненульових рядків матриці системи і розширеної матриці співпадають, то ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці. За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має єдиний розв'язок. Таким чином, за методом Гаусса одержуємо перетворену систему у вигляді:

$$\begin{cases} x-2y-z=-4, \\ \quad\quad y+z=5, \\ \quad\quad\quad z=4. \end{cases}$$

Звідки $z=4$, $y=5-z=5-4=1$, $x=-4+2y+z=-4+2+4=2$.

Відповідь: (2, 1, 4).

Спосіб II. При розв'язуванні системи за правилом Крамера необхідно, щоб визначник системи Δ не дорівнював нулю. Знайдемо визначники $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$. Якщо $\Delta \neq 0$, то розв'язок системи визначимо за формулами:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -42 - 12 = -54,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -10 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \\ 11 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = -42 - 66 = -108,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -5 & -10 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -66 + 12 = -54,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & -10 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -30 \\ 0 & 11 & 29 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -6 & 30 \\ 11 & 29 \end{vmatrix} = -(114 + 330) = -216,$$

$$x = \frac{-108}{-54} = 2, \quad y = \frac{-54}{-54} = 1, \quad z = \frac{-216}{-54} = 4.$$

Відповідь: (2, 1, 4).

Спосіб III. Запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Розв'язання матричним способом можливо, лише коли матриця системи A не вироджена. В нашому випадку вона є такою, бо її визначник $|A| = \Delta = -54 \neq 0$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для цього відшукаємо алгебраїчні доповнення A_{ij} $(1 \le i \le 3, \cdots 1 \le j \le 3)$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8+3 = -5,\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-3) = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2-4 = -6,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(10+4) = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2-4 = -2,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -(1+5) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -15-16 = -31,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-3-8) = 11,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -4+10 = 6,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -5 & 7 & -6 \\ -14 & -2 & -6 \\ -31 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добуток $A^{-1}A$, щоб впевнитись, що матриця A^{-1} знайдена правильно:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -5 & 7 & -6 \\ -14 & -2 & -6 \\ -31 & 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -54 & 0 & 0 \\ 0 & -54 & 0 \\ 0 & 0 & -54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Тоді

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-5 & 7 & -6\\ -14 & -2 & -6\\ -31 & 11 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -10\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-108\\ -54\\ -216\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: (2, 1, 4).

Задача 3. Дослідити сумісність та знайти загальний і один частинний розв'язок системи рівнянь:

а) $\begin{cases}2x-3y+z=-1,\\ -x+7y-6z=-3,\\ x+4y-5z=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-3x-y-4z=3,\\ 4x+y+3z=-4,\\ 7x+2y+7z=-7.\end{cases}$

Розв'язання

а) Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & -1\\ -1 & 7 & -6 & -3\\ 1 & 4 & -5 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -5 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -1\\ -1 & 7 & -6 & -3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ S_2-2S_1\sim\\ S_3+S_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -5 & 2\\ 0 & -11 & 11 & -5\\ 0 & 11 & -11 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ S_3+S_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -5 & 2\\ 0 & -11 & 11 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right).$$

Тобто ранг основної матриці системи не дорівнює рангу розширеної матриці. За теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна.

Відповідь: система розв'язку не має.

б) Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & -1 & -4 & 3\\ 4 & 1 & 3 & -4\\ 7 & 2 & 7 & -7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ S_1+S_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -1\\ 4 & 1 & 3 & -4\\ 7 & 2 & 7 & -7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ S_2-4S_1\sim\\ S_3-7S_1\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 0 \\ 0 & 2 & 14 & | & 0 \end{pmatrix}_{S_3-2S_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Одержали, що ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриц. За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна. Оскільки система містить 3 невідомих, а її ранг дорівнює 2, то маємо одну вільну невідому (3-2=1). Нехай вільною невідомою буде $z=t$, де $t\in R$. Тоді перетворена система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x-t=-1, \\ y+7t=0. \end{cases}$$

Звідки маємо $x=-1+t, y=-7t$, тобто загальний розв'язок системи $(-1+t;-7t;t)$. Для знаходження частинного розв'язку покладемо $t=2$. Тоді $x=-1+2=1,\ \ y=-7\cdot 2=-14,\ \ z=2$.

Відповідь: система сумісна; загальний розв'язок $(-1+t;\ -7t;\ t),\ t\in R$. Частинний розв'язок – $(1;-14;\ 2)$.

2. Елементи векторної алгебри

Задача 1. Дано вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ такі, що $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$, $(\vec{x},\vec{y})=60^\circ$. Знайти:

а) скалярний добуток $(4\vec{x}-5\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})$;

б) модуль векторного добутку $(-3\vec{x}+\vec{y})\times(2\vec{x}-\vec{y})$;

в) косинус кута між векторами $2\vec{x}+\vec{y}$ і $\vec{x}+2\vec{y}$.

Розв'язання.

а) На підставі означення і властивостей скалярного добутку векторів маємо:

$$(4\vec{x}-5\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x}) = 4(\vec{x}\cdot\vec{y}) - 4(\vec{x}\cdot\vec{x}) - 5(\vec{y}\cdot\vec{y}) + 5(\vec{y}\cdot\vec{x}) = 4|\vec{x}||\vec{y}|\cos 60^\circ -$$

$$-4|\vec{x}|^2 - 5|\vec{y}|^2 + 5|\vec{y}||\vec{x}|\cos 60^\circ = 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 5\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{9}{2}$.

б) На підставі означення і властивостей векторного добутку двох векторів маємо:

$$|(-3\vec{x}+\vec{y})\times(2\vec{x}-\vec{y})| = |-6(\vec{x}\times\vec{x}) + 3(\vec{x}\times\vec{y}) + 2(\vec{y}\times\vec{x}) - \vec{y}\times\vec{y}| =$$

$$=\left|-6\cdot\vec{0}+3(\vec{x}\times\vec{y})-2(\vec{x}\times\vec{y})-\vec{0}\right|=\left|\vec{x}\times\vec{y}\right|=\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) Для обчислення косинуса кута φ між заданими векторами скористаємося формулами

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\ \text{і}\ \left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,.$$

Тоді

$$\cos\varphi=\frac{(2\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+2\vec{y})}{\left|2\vec{x}+\vec{y}\right|\left|\vec{x}+2\vec{y}\right|}=\frac{2(\vec{x}\cdot\vec{x})+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{y}\cdot\vec{x})+2(\vec{y}\cdot\vec{y})}{\sqrt{(2\vec{x}+\vec{y})^2}\sqrt{(\vec{x}+2\vec{y})^2}}=$$

$$=\frac{2\left|\vec{x}\right|^2+5\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|\cos 60^\circ+2\left|\vec{y}\right|^2}{\sqrt{4\vec{x}^2+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+\vec{y}^2}\sqrt{\vec{x}^2+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+4\vec{y}^2}}=$$

$$=\frac{2+5\cdot\frac{1}{2}+2}{\sqrt{4\left|\vec{x}\right|^2+4\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|\cos 60^\circ+\left|\vec{y}\right|^2}\sqrt{\left|\vec{x}\right|^2+4\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|\cos 60^\circ+4\left|\vec{y}\right|^2}}=$$

$$=\frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{4+4\cdot\frac{1}{2}+1}\sqrt{1+4\cdot\frac{1}{2}+4}}=\frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{13}{14}\,.$$

Відповідь: $\frac{13}{14}$.

Задача 2. Дано чотири точки: $A(-1;1;1)$; $B(-1;21;\ 0)$; $C(-2;-4;1)$; $D(-2;1;0)$.

Знайти:

а) довжину $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$;

б) скалярний добуток $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}$;

в) модуль векторного добутку $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$

г) площу трикутника ABC;

д) об’єм піраміди $DABC$;

е) відстань від точки D до площини ABC.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}$, які задані координатами початку і кінця. Тоді

$$\overrightarrow{AC}=(-2-(-1);-4-1;1-1)=(-1;-5;0),$$

$$\overrightarrow{AB}=(-1-(-1);21-1;0-1)=(0;20;-1),$$

$$\overrightarrow{AD}=(-2-(-1);1-1;0-1)=(-1;0;-1),$$

$$\overrightarrow{CD}=(-2-(-2);1-(-4);0-1)=(0;5;-1).$$

Застосуємо правила дій над векторами, що задані координатами в ортонормованому базисі векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

а) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=(-1+0;-5+5;0-1)=(-1;0;-1),$

$$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\sqrt{2}$.

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=(-1+0;0+20;-1+(-1))=(-1;20;-2),$

$$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\cdot(-1)+20\cdot(-5)+(-2)\cdot 0=1-100=-99.$$

Відповідь: -99.

в)

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -5 & 0\\ 0 & 20 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 20 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 0 & 20\end{vmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}-20\vec{k}=(5;-1;-20);$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-20)^2}=\sqrt{426}.$$

Відповідь: $\sqrt{426}$.

г) Для знаходження площі трикутника скористуємось властивостями векторного добутку. Площа ΔABC дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$, який уже обчислено вище. Тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{426} \text{ (кв.од).}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{426}$ кв. од.

д) Об'єм піраміди обчислюємо через модуль мішаного добутку:

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{S_3 - S_2} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -20 + 5 = -15,$$

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|-15\right| = \frac{5}{2} \text{ (куб. од.).}$$

Відповідь: $\frac{5}{2}$ куб. од.

е) Відстань від точки D до площини ABC дорівнює висоті піраміди $ABCD$. На рис. 7 вона позначена OD. Об'єм піраміди можна обчислити через її висоту за формулою:

$$V_{nip} = \frac{1}{3}S_{осн}H \Rightarrow H = OD = \frac{3V_{nip}}{S_{осн}}$$

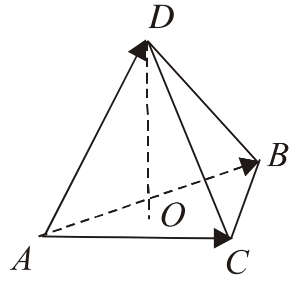

Рис. 7. Піраміда ABCD

Вище знайдено $V_{nip}=\dfrac{5}{2}$ куб.од., $S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{426}$ кв. од. Звідси

$$OD=\frac{3\cdot\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{426}}=\frac{15}{\sqrt{426}} \text{ (лін. од.)}$$

Відповідь: $\dfrac{15}{\sqrt{426}}$ лін. од.

3. Елементи аналітичної геометрії

Задача 1. Дано три точки: $M_1(1;-3;1); M_2(5;-3;5); M_3(1;-4;3)$. Написати:
а) рівняння площини, що проходить через ці три точки;
б) рівняння площини, що проходить через точки M_2 і M_3 паралельно вектору $\vec{q}=(4;1;4)$;
в) рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно площинам $4x+y+2z-3=0$ і $4x+4z-5=0$.

Розв'язання

а) Запишемо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1); M_2(x_2;y_2;z_2); M_3(x_3;y_3;z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Підставимо в це рівняння відповідні значення $x_i, y_i, z_i\ (i=1,2,3)$ При цьому одержимо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 5-1 & -3+3 & 5-1 \\ 1-1 & -4+3 & 3-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1)-8(y+3)-4(z-1)=0\Rightarrow x-2y-z-6=0.$$

Відповідь: $x-2y-z-6=0$.

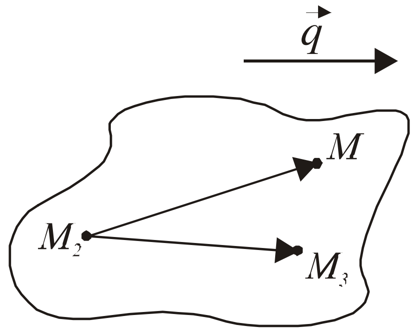

Рис. 8. Площина, паралельна вектору $\vec{q}$

б) Шукана площина проходить через точки $M_2(5;-3;5)\,i\,M_3(1;-4;3)$ і тоді в ній лежить вектор $\overrightarrow{M_2M_3}=(1-5;-4+3;3-5)=(-4;-1;-2)$. Якщо $M(x,y,z)$ – довільна точка цієї площини, то вектор $\overrightarrow{M_2M}=(x-5;y+3;z-5)$ також належатиме цій площині. За умовою вектор $\vec{q}=(4;1;4)$ паралельний шуканій площині. Тобто вектори $\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2M_3}$ і $\vec{q}$ компланарні (рис. 8), тобто їх мішаний добуток дорівнює нулю. Ця умова і визначає рівняння шуканої площини

$$\overrightarrow{M_2M}\cdot\overrightarrow{M_2M_3}\cdot\vec{q}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-5 & y+3 & z-5\\ -4 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-5)\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}+(z-5)\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-2(x-5)+8(y+3)=0\Rightarrow x-4y-17=0.$$

Відповідь: $x-4y-17=0$.

в) Шукана площина проходить через точку $M_1(1;-3;1)$ і якщо $M(x,y,z)$ – довільна її точка, то вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-1,y+3,z-1)$ лежатиме в цій площині. За умовою шукана площина перпендикулярна двом площинам, а це означає, що нормальні вектори цих площин $\vec{n}_1=(4,1,2)$ і $\vec{n}_2=(4,0,4)$ (рис. 9) будуть паралельні шуканій площині. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M},\vec{n}_1,\vec{n}_2$ – компланарні і їх мішаний добуток дорівнює нулю. Із цієї умови одержуємо рівняння шуканої площини.

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 4(x-1)-8(y+3)-4(z-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2y-z-6=0$$

Відповідь: $x-2y-z-6=0$.

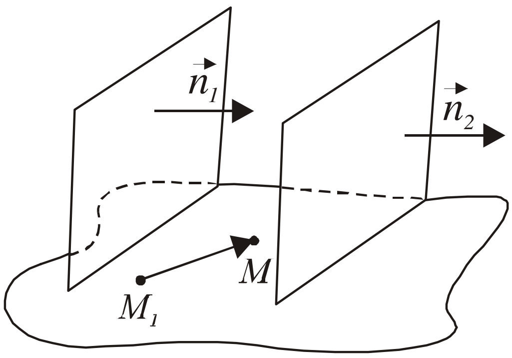

Рис. 9. Площина, перпендикулярна двом площинам

Задача 2. Знайти відстань від точки $M(2;2;-1)$ до площини $2x+3y+6z+3=0$.

Розв'язання.

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини, заданої рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, обчислюється за формулою

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

У нашому випадку

$$\rho=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 2+6\cdot(-1)+3|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{7}{\sqrt{49}}=1 \text{ (лін. од.)}$$

Відповідь: 1 лін. од.

Задача 3. Дано трикутник ABC з вершинами $A(-3;1); B(1;3)$ і $C(0;-3)$. Написати:

а) рівняння медіани AM ;

б) рівняння висоти AD і знайти її довжину.

Розв'язання.

а) Медіана AM проходить через дві точки $A(-3;1)$ і $M(x_M, y_M)$ і ділить сторону CB пополам. Тоді точка M є серединою відрізка CB і її координати знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_C + y_B}{2}.$$

Отже, $x_M = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $y_M = \dfrac{-3+3}{2} = 0$, $M(\dfrac{1}{2},0)$. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

У відповідності з цим рівняння медіани AM буде:

$$\frac{x-x_A}{x_M - x_A} = \frac{y-y_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \frac{x+3}{\frac{1}{2}+3} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \frac{2}{7}(x+3) = -(y-1) \Rightarrow 2x+7y-1=0.$$

Відповідь: $2x+7y-1=0$.

б) Висота трикутника AD, що проведена із вершини $A(-3,1)$, перпендикулярна стороні CB. Тоді її рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y - y_A = k_{AD}(x - x_A).$$

Оскільки прямі AD і CB перпендикулярні, то $k_{AD} = -\dfrac{1}{k_{CB}}$ (умова перпендикулярності). Рівняння прямої CB записуємо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $C(0,-3)$ і $B(1,3)$:

$$\frac{x-x_C}{x_B - x_C} = \frac{y-y_C}{y_B - y_C} \Rightarrow \frac{x-0}{1-0} = \frac{y+3}{3+3} \Rightarrow 6x-y-3=0 \Rightarrow k_{CB} = 6 \Rightarrow k_{AD} = -\frac{1}{6}.$$

Рівняння висоти AD набуває вигляду:

$$y-1 = -\frac{1}{6}(x+3) \text{ або } x+6y-3=0.$$

Для знаходження довжини висоти AD скористуємося тим, що вона дорівнює відстані від точки A до прямої CD, яка обчислюється за формулою:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – точка, відстань від якої до прямої, заданої рівнянням $Ax+By+C=0$. Тоді довжина висоти AD буде дорівнювати:

$$AD = \frac{|6\cdot(-3)-1\cdot1-3|}{\sqrt{6^2+1}} = \frac{22}{\sqrt{37}} \text{ (лін. од).}$$

Відповідь: $x+6y-3=0$; $\frac{22}{\sqrt{37}}$ лін. од.

Задача 4. Знайти кут між прямою, що проходить через точки $A(3;-3;4)$ і $B(2;-2;3)$ та площиною $-x+y-z-5=0$.

Розв'язання.

Якщо $\vec{n}=(A,B,C)$ – нормальний вектор площини, а $\vec{S}=(m,n,p)$ – напрямний вектор прямої, то величина кута φ між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{S}|}{|\vec{n}||\vec{S}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Для заданої площини нормальний вектор $\vec{n}=(-1;1;-1)$.

А за напрямний вектор заданої прямої можна взяти вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(2-3;-2-(-3);3-4)=(-1;1;-1).$$

Тоді $\sin\varphi = \frac{|(-1)(-1)+1\cdot1+(-1)(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 1.$

Звідси $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Задача 5. Написати рівняння кола, що проходить через точку $(4;1)$ з центром у точці $(-1;4)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння кола у вигляді:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

де $(x_0;y_0)$ – координати центру кола, а R – його радіус. Оскільки центр шуканого кола задано, то рівняння набуває вигляду:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=R^2$$

і містить одне невідоме значення R. Підставимо в останнє рівняння координати точки, через яку проходить коло. Тоді $5^2+3^2=R^2 \Rightarrow R^2=34$. Таким чином

$$(x+1)^2+(y-4)^2=34.$$

Відповідь: $(x+1)^2+(y-4)^2=34$.

4. Вступ до математичного аналізу

Задача 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-5x-3)^2}{x^2+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-x)}{\ln(1+4x)}$.

Розв'язання.

а) Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладаємо чисельник і знаменник на найпростіші множники і одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x+1)}=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{3}$.

б) В цьому прикладі маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Спосіб 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x-3)^2}{x^2+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{25x^2+30x+9}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(25+30\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2})}{x^2(1+4\cdot\frac{1}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{25+30\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}}{1+4\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{25+30\cdot 0+9\cdot 0}{1+4\cdot 0}=\frac{25}{1}=25.$$

Скористались тим, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Спосіб 2. При розв'язанні цього прикладу можна скористатися еквівалентністю нескінченно великих величин, а саме:

$25x^2+30x+9\sim 25x^2$ при $x\to\infty$,

$x^2+4\sim x^2$ при $x\to\infty$.

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-5x-3)^2}{x^2+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^2+30x+9}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^2}{x^2}=25.$

Відповідь: 25.

в) У виразі $\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}$ помножимо чисельник і знаменник на спряжений чисельнику вираз $\sqrt{1-3x}+\sqrt{1-3x}$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x})(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1-3x-(1+3x)}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{-6x}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=$$

$$=\frac{6}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

г) Невизначеність $1^{-\infty}$. Перетворимо вираз $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}$ так, щоб скористатися другою важливою границею

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e.$$

$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2}{x+1}\cdot(-5x)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+1}}=$$

$$=e^{10\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}=e^{10\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}}=e^{10\cdot\frac{1}{1+0}}=e^{10}.$$

Відповідь: e^{10}.

д) При обчисленні цієї границі скористуємось еквівалентністю нескінченно малих величин

$$\sin(-x)_{x\to 0}\sim -x,\ \ln(1+4x)_{x\to 0}\sim 4x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

Задача 2. Дослідити задані функції на неперервність:

а) $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ в точках $x_1=-1, x_2=-3, x_3=-4$;

б) $y=\begin{cases} x-3 & при\, x\le -5, \\ 2 & при\ -5<x<-3. \\ 1-x^2 & при\, x\ge -3 \end{cases}$

Розв'язання.

а) В точці $x_1=-1$ функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ має розрив, оскільки при $x=-1$ знаменник виразу $-\frac{5}{x+1}$ дорівнює нулю. Знайдемо границі зліва і справа від точки $x=-1$.

$$\lim_{x\to-1+0} y=\lim_{x\to-1+0} e^{-\frac{5}{x+1}}=0\text{, тому що } \lim_{x\to-1+0}\left(-\frac{5}{x+1}\right)=\left(-\frac{5}{+0}\right)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to-1-0} y=\lim_{x\to-1-0} e^{-\frac{5}{x+1}}=+\infty\text{, тому що } \lim_{x\to-1-0}\left(-\frac{5}{x+1}\right)=\left(-\frac{5}{-0}\right)=+\infty.$$

Таким чином, границя функції справа від точки $x=-1$ існує і дорівнює 0, границя зліва від точки $x=-1$ нескінченна і дорівнює $+\infty$. Отже, в точці $x=-1$ функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ має розрив другого роду (нескінченний).

При $x_2=-3$ і $x_3=-4$ функція неперервна, оскільки

$$\lim_{x\to-3} e^{-\frac{5}{x+1}}=e^{-\frac{5}{-3+1}}=e^{\frac{5}{2}}=y(-3);$$

$$\lim_{x\to-4} e^{-\frac{5}{x+1}}=e^{-\frac{5}{-4+1}}=e^{\frac{5}{3}}=y(-4).$$

Відповідь: функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ розривна в точці $x=-1$ і неперервна при $x_2=-3$ і $x_3=-4$.

б) Точки $x_1=-5$ і $x_2=-3$ є підозрілими на розрив. Обчислимо в цих точках однобічні границі і значення функції.

$$\lim_{x\to-5-0} f(x)=\lim_{x\to-5-0}(x-3)=-8;\ \lim_{x\to-5+0} f(x)=\lim_{x\to-5+0} 2=2;\ f(-5)=-5-3=-8.$$

Оскільки обидві однобічні границі існують, але $\lim\limits_{x\to-5-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-5+0} f(x)$, то в точці $x=-5$ маємо розрив I-го роду.

$$\lim_{x\to-3-0} f(x)=\lim_{x\to-3-0} 2=2;\ \lim_{x\to-3+0} f(x)=\lim_{x\to-3+0}(1-x^2)=1-9=-8;\ f(-3)=1-9=-8.$$

Одержали, що $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3+0} f(x)$, тобто в точці $x=-3$ функція також має розрив першого роду.

Відповідь: $x=-5$ і $x=-3$ є точками розриву I-го роду.

5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1. Знайти похідну $y' = \dfrac{dy}{dx}$ для функцій:

а) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x}$; б) $\begin{cases} x = 2\cos(-3t), \\ y = -3\sin 2t. \end{cases}$;

в) $(x+2)^4 + (y-3)^4 = (x+2)^2(y-3)^2$; г) $y = (arctg\, x)^{-5x}$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої функції, суми і частки, одержуємо:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{4x^2-2x+1}\right)' x - x'\sqrt{4x^2-2x+1}}{x^2} = \frac{\dfrac{8x-2}{2\sqrt{4x^2-2x+1}}\, x - \sqrt{4x^2-2x+1}}{x^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - x - (4x^2-2x+1)}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}} = \frac{x-1}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}}.$$

Відповідь: $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

б) Формула для знаходження першої похідної функції, що задана параметрично, має вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Послідовно знаходимо

$$y'_t = -3\cos 2t \cdot 2 = -6\cos 2t,$$

$$x'_t = 2(-\sin(-3t))\cdot(-3) = -6\sin 3t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-6\cos 2t}{-6\sin 3t}=\frac{\cos 2t}{\sin 3t}.$$

Відповідь: $\dfrac{\cos 2t}{\sin 3t}$.

в) Для диференціювання функції, яка задана неявно, візьмемо похідні по x від обох частин рівності

$$4(x+2)^3+4(y-3)^3 y'=2(x+2)(y-3)^2+2(y-3)y'(x+2)^2.$$

Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$2(y-3)^3 y'-(y-3)y'(x+2)^2=(x+2)(y-3)^2-2(x+2)^3.$$

Звідки

$$y'=\frac{(x+2)\left[(y-3)^2-2(x+2)^2\right]}{(y-3)\left[2(y-3)^2-(x+2)^2\right]}.$$

Відповідь: $\dfrac{(x+2)\left[(y-3)^2-2(x+2)^2\right]}{(y-3)\left[2(y-3)^2-(x+2)^2\right]}$.

г) Для диференціювання степенево-показникових функцій можна скористатись логарифмічним диференціюванням. Прологарифмуємо обидві частини початкового виразу $\ln y=-5x\ln arctgx$. Візьмемо від обох частин рівності похідну по x:

$$\frac{1}{y}y'=-5\left(\ln arctgx+\frac{x}{arctgx(1+x^2)}\right).$$

Звідси

$$y'=-5y\left(\ln arctgx+\frac{x}{arctgx(1+x^2)}\right).$$

Відповідь: $-5(arctgx)^{-5x}\left(\ln arctgx+\dfrac{x}{(1+x^2)arctgx}\right)$.

Задача 2. Обчислити похідну y' функцій:

а) $y=\left(2x+\frac{2}{5}\right)\cdot e^{-5x-5}$ у точці $x=-1$;

б) $y=\ln(x^3-3x)-\frac{4}{x}$ у точці $x=1$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, показникової функції і добутку, одержуємо:

$$y' = 2e^{-5x-5} + \left(2x+\frac{2}{5}\right)e^{-5x-5}\cdot(-5) = e^{-5x-5}(2-10x-2) = -10xe^{-5x-5}.$$

Обчислюємо значення y' в точці $x=-1$:

$$y'(-1)=-10\cdot(-1)e^{-5(-1)-5}=10e^{5-5}=10e^{0}=10.$$

Відповідь: 10.

б) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої та логарифмічної функцій та суми, одержуємо:

$$y'=\frac{1}{x^3-3x}\cdot(3x^2-3)+\frac{4}{x^2}.$$

Обчислюємо значення похідної в точці $x=1$.

$$y'(1)=\frac{1}{1^3-3\cdot 1}\cdot(3\cdot 1-3)+\frac{4}{1}=-\frac{1}{2}\cdot 0+4=4.$$

Відповідь: 4.

Задача 3. Знайти похідну $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=e^{2(x-3)^2}$.

Розв'язання.

Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої і показникової функцій, одержуємо:

$$y'=e^{2(x-3)^2}\cdot 4(x-3),$$

$$y''=\left(y'\right)'=4\left[e^{2(x-3)^2}\cdot 4(x-3)^2+e^{2(x-3)^2}\right]=4e^{2(x-3)^2}\left[4(x-3)^2+1\right].$$

Відповідь: $4e^{2(x-3)^2}\left[4(x-3)^2+1\right]$.

Задача 4. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(-5x)+5x}{4x-\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(-5x+1)}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-\cos 3x}{e^{4x}-\cos 4x}$.

Розв'язання.

а) Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Застосовуємо правило Лопіталя тричі і одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(-5x)+5x}{4x-\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{[tg(-5x)+5x]'}{(4x-\sin 4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2(-5x)}(-5)+5}{4-4\cos 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5+5\cos^2 5x}{\cos^2 5x(4-4\cos 4x)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-1}{1-\cos 4x}=\frac{5}{4}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-1}{1-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 5x-1)'}{(1-\cos 4x)'}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 5x(-\sin 5x)5}{4\sin 4x}=\frac{5}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)\lim_{x\to 0}\cos 5x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=-\frac{25}{8}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sin 4x)'}=-\frac{25}{8}\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{4\cos 4x}=-\frac{125}{32}.$$

Відповідь: $-\dfrac{125}{32}$.

б) Маємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$. Застосовуємо правило Лопіталя і одержуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(-5x+1)}{3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(-5x+1))'}{(3x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-5}{1-5x}}{3}=\frac{-5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-5x}=\frac{5}{3}\cdot 0=0.$$

Відповідь: 0.

в) Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Застосовуємо правило Лопіталя і одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{e^{-3x}-\cos 3x}{e^{4x}-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-3x}-\cos 3x)'}{(e^{4x}-\cos 4x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3e^{-3x}+3\sin 3x}{4e^{4x}+4\sin 4x}=\frac{-3\cdot 1+3\cdot 0}{4\cdot 1+4\cdot 0}=-\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{3}{4}$.

Задача 5. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y=(x+6)^3(x+2)$ у точці $x=-5$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ записується формулою $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, де $y_0=f(x_0)$. Знайдемо y':

$$y'=3(x+6)^2(x+2)+(x+6)^3.$$

Обчислимо значення y і y' в точці $x=-5$:

$$y(-5)=(-5+6)^3(-5+2)=-3,$$

$$y'(-5)=3(-5+6)^2(-5+2)+(-5+6)^3=-9+1=-8.$$

Підставимо одержані значення у формулу

$$y+3=-8(x+5)\Rightarrow 8x+y+43=0.$$

Відповідь. Дотична має рівняння $8x+y+43=0$.

Задача 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=e^{-x^2}$ на проміжку $[-4,16]$.

Розв'язання.

Знайдемо критичні точки заданої функції. $y'=e^{-x^2}(-2x)\Rightarrow x=0$ – критична точка, яка належить проміжку [-4;16]. Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях проміжку [-4;16].

$$y(0)=e^0=1;\ y(-4)=e^{-16};\ y(16)=e^{-256}.$$

Тоді $y_{\text{найб}}=1$, $y_{\text{найм}}=e^{-256}$.

Відповідь: 1; e^{-256}.

Задача 7. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

а) $y=-x^3-5x^2$; б) $y=\dfrac{2}{x^2+4x-5}$.

Розв'язання.

а) Дана функція є многочленом, тому вона визначена та неперервна на всій числовій осі OX, тобто $x\in R$. Функція не є ні парною, ні непарною, оскільки

$$y(-x)=-(-x)^3-5(-x)^2=x^3-5x^2\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}.$$

Для знаходження точок перетину графіка функції з осями координат покладемо

$$x=0\Rightarrow y=0;\, y=0\Rightarrow x=0\, i\, x=-5.$$

Функція неперіодична.

Знайдемо інтервали монотонності функції та екстремуми. Похідна

$$y'=-3x^2-10x=-x(3x+10)$$

дорівнює нулю при $x_1=-\dfrac{10}{3}$ і $x_2=0$.

Стаціонарні точки функції ділять числову вісь на три інтервали монотонності: $(-\infty;-\frac{10}{3}),(-\frac{10}{3};0),(0;\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному із цих інтервалів та екстремуми

x	$(-\infty;-\frac{10}{3})$	$-\frac{10}{3}$	$(-\frac{10}{3};0)$	0	$(0;\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	спадає	*min*	зростає	*max*	спадає

Отже, при $x=-\dfrac{10}{3}$ функція має мінімум, а при x=0 – максимум, причому

$$y_{\min}=y(-\frac{10}{3})=-\left(-\frac{10}{3}\right)^3-5\left(-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{1000}{27}-\frac{500}{9}=-\frac{500}{27}\approx-18{,}5;\ y_{\max}=y(0)=0.$$

Знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину. Друга похідна

$$y'' = -6x - 10$$

дорівнює нулю при $x = -\frac{5}{3}$. Ця точка ділить числову вісь на два інтервали: $(-\infty; -\frac{5}{3})$ та $(-\frac{5}{3}; \infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак другої похідної на кожному із цих інтервалів і точку перегину

x	$(-\infty; -\frac{5}{3})$	$-\frac{5}{3}$	$(-\frac{5}{3}; \infty)$
y''	+	0	-
y	угнута	перегин	опукла

Отже, при $x = -\frac{5}{3}$ маємо точку перегину, причому

$$y(-\frac{5}{3}) = -\left(-\frac{5}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{125}{27} - \frac{125}{9} = -\frac{250}{27} \approx -9 .$$

Графік функції вертикальних асимптот не має, оскільки функція визначена для всіх $x \in R$. Для визначення рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$ скористуємося формулами

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Маємо $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-x^3 - 5x^2}{x} = \mp\infty$, що свідчить про відсутність похилих асимптот.

Встановимо поведінку функції на нескінченності: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (-x^3 - 5x^2) = \mp\infty$. На основі отриманих даних будуємо графік функції.

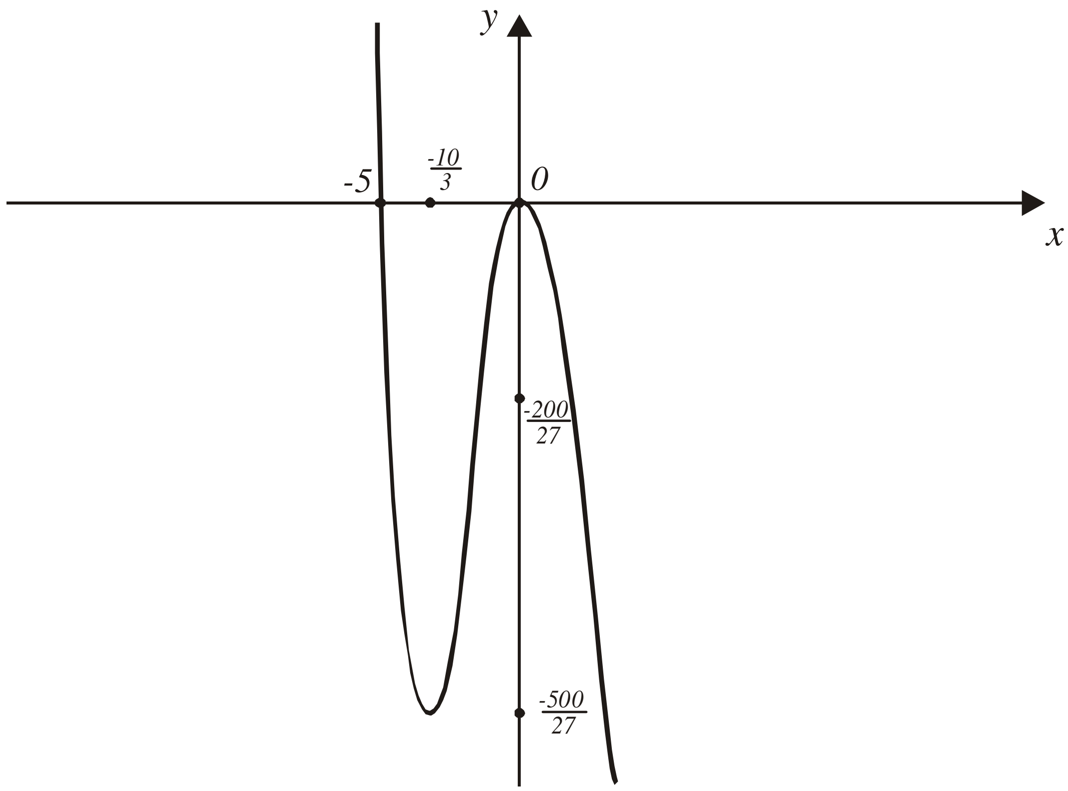

Рис. 10. Графік функції $y = -x^3 - 5x^2$

б) Дана функція визначена при всіх значеннях аргументу, крім тих, при яких знаменник x^2+4x-5 дорівнює нулю, тобто при $x=-5$ і $x=1$. Таким чином, область визначення складається із трьох інтервалів: $(-\infty;-5)\bigcup(-5;1)\bigcup(1;\infty)$.

Функція $y=\dfrac{2}{x^2+4x-5}$ не є парною або непарною. З віссю OX графік функції не перетинається. Якщо $x=0$, то $y=-\dfrac{2}{5}$. Функція неперіодична.

Функція має нескінченні розриви при $x=-5$ і $x=1$, причому

$$\lim_{x\to-5-0} f(x)=\lim_{x\to-5-0}\frac{2}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to-5-0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{(-0)(-6)}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-5+0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{(+0)(-6)}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{6(-0)}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{2}{(x+5)(x-1)} = \left(\frac{2}{6(+0)}\right) = +\infty .$$

При всіх інших значеннях аргументу функція неперервна.

Оскільки в точках $x=-5$ і $x=1$ функція має нескінченний розрив, то прямі $x=-5$ і $x=1$ є вертикальні асимптоти для графіка функції. Для визначення рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$ скористуємося формулами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b=\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-kx].$$

Маємо

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2+4x-5}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x(x^2+4x-5)} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0 .$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2+4x-5} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0 .$$

Отже, графік функції похилої асимптоти не має, а пряма $y=0$ є його горизонтальною асимптотою.

Знайдемо інтервали монотонності функції та точки екстремуму. Похідна

$$y' = -\frac{2(2x+4)}{(x^2+4x-5)^2}$$

дорівнює нулю при $x=-2$, та нескінченості при $x=-5$ і $x=1$, які не належать області визначення, отже, ці точки не підлягають дослідженню на екстремум.

Розіб'ємо числову вісь на чотири інтервали: $(-\infty;5),(-5;-2),(-2;1),(1;\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів та точки екстремуму.

x	$(-\infty;-5)$	-5	(-5; 2)	-2	(-2; 1)	1	$(1;\infty)$
y'	+	не існує	+	0	-	не існує	-
y	зростає	не існує	зростає	*max*	спадає	не існує	спадає

Отже, при $x=-2$ функція має максимум

$$y_{\max} = y(-2) = \frac{2}{(-2)^2+4(-2)-5} = -\frac{2}{9} .$$

Знайдемо інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції. Друга похідна

$$y'' = -2\frac{2(x^2+4x-5)^2 - 2(x^2+4x-5)(2x+4)^2}{(x^2+4x-5)^4} = -4\cdot\frac{x^2+4x-5-4x^2-16x-16}{(x^2+4x-5)^3} =$$

$$= -4\frac{-3x^2-12x-21}{(x^2+4x-5)^3} = 12\frac{x^2+4x+7}{(x^2+4x-5)^3}$$

не дорівнює нулю при будь-якому x і нескінченості при $x=-5$ і $x=1$. Отже, точок перегину графік функції не має. Складемо таблицю для визначення інтервалів опуклості і угнутості

x	$(-\infty;-5)$	(-5; 1)	$(1;+\infty)$
y''	+	-	-
y	угнута	опукла	угнута

На основі отриманих даних будуємо графік функції.

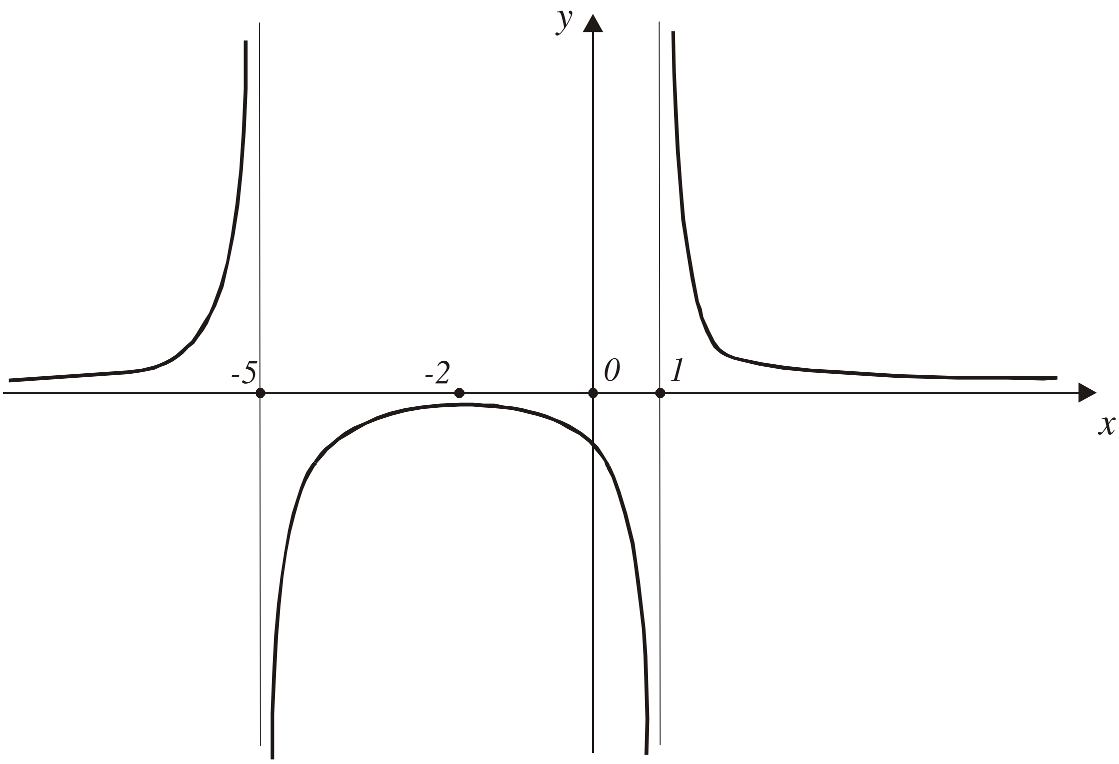

Рис. 11. Графік функції $\mathbf{y = \dfrac{2}{x^2+4x-5}}$

6. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Нехай $a = 2;\ b = -4;\ c = 3;\ m = 1;\ n = -1;\ k = 2.$

Задача 1. Знайти область визначення функції і побудувати її на площині (x, y):

а) $z = \dfrac{2}{-4x+3y}$; б) $z = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16}\right)$.

Розв'язання.

а) Область визначення D даної функції – множина тих точок (x, y) площини Oxy, в яких знаменник не дорівнює нулю, тобто $-4x+3y \neq 0$. Рівняння $y = \dfrac{4}{3}x$ задає пряму лінію, в точках якої вираз $\dfrac{2}{-4x+3y}$ не має змісту. Область D є відкритою і її можна задати за допомогою системи нерівностей:

$$D = \left\{-\infty < x < \infty;\ y \neq \frac{4}{3}x\right\};$$

б) Оскільки функція $y = \arcsin x$ є визначеною при $-1 \le x \le 1$, то враховуючи, що

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \ge 0,$$

робимо висновок: область визначення D є множина точок, координати яких задовольняють умові

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 1.$$

Щоб зобразити область D, знайдемо її межу. Рівняння межі

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Це рівняння визначає на площині Oxy еліпс з напівосями $a = 2$ та $b = 4$. даний еліпс ділить всю площину на дві частини. Для точок однієї з цих частин

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}<1,$$

а для іншої –

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}>1.$$

Щоб виявити, яка з частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умові

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\le 1,$$

достатньо перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки, яка не лежить на еліпсі. Наприклад, точка $O(0;0)$ належить області D, тому що $\frac{0}{4}+\frac{0}{16}=0<1$. Отже, внутрішніми точками області D є точки області, обмеженої еліпсом. Сам еліпс також належить області D, тому що для точок еліпсу $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$. Це замкнена область, що зображена на рис.12.

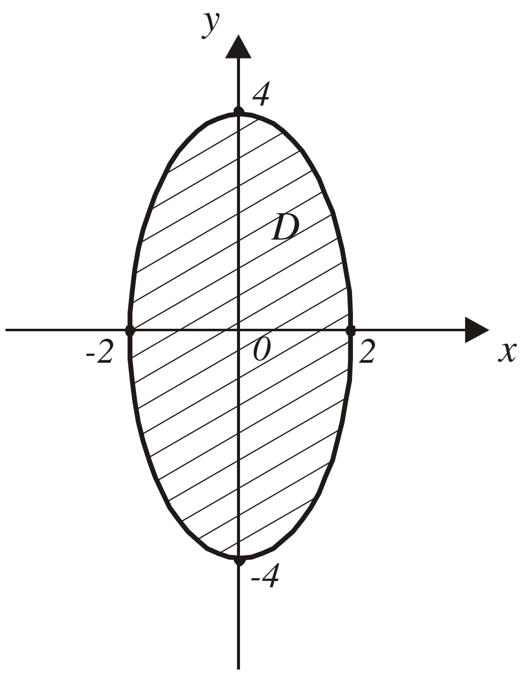

Рис.12. Область визначення функції $\mathbf{z=\arcsin\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\right)}$

Задача 2. Показати, що функція $z=-2\sin^2(x-2y)$ задовольняє рівнянню $4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ та впевнитись, що виконується рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання.

Оскільки z функція двох змінних x і y, то знайдемо частинні похідні першого і другого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2\cdot 2\sin(x-2y)\cdot\cos(x-2y)=-2\sin 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\cos 2(x-2y)\cdot 2=-4\cos 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-2\cos 2(x-2y)\cdot(-4)=8\cos 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\cdot 2\sin(x-2y)\cos(x-2y)(-2)=4\sin 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\cos 2(x-2y)(-4)=-16\cos 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=4\cos 2(x-2y)\cdot 2=8\cos 2(x-2y).$$

Підставимо одержані значення похідних в задане рівняння

$$4\cdot(-4\cos 2(x-2y))=-16\cos 2(x-2y),$$

$$-16\cos 2(x-2y)\equiv-16\cos 2(x-2y).$$

Одержали тотожність, тобто функція задовольняє заданому рівнянню

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8\cos 2(x-2y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

то бачимо, що для даної функції має місце рівність мішаних похідних другого порядку.

Задача 3. Обчислити значення повного диференціала функції $z(x, y)$, що задана неявно рівнянням $2x^3 + 4y^3 + 3xyz + 3z^2 + 8 = 0$, в точці $M_0(-4{,}2{,}-8)$, якщо $\Delta x = -0{,}1;\ \Delta y = 0{,}1$.

Розв'язання.

Позначимо ліву частину даного рівняння через $F(x, y, z)$. Тоді

$$F(x, y, z) = 2x^3 + 4y^3 + 3xyz + 3z^2 + 8,$$

$$F'_x(x, y, z) = 6x^2 + 3yz,\ F'_y(x, y, z) = 12y^2 + 3xz,\ F'_z(x, y, z) = 3xy + 6z.$$

Далі скориставшись формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$$

отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6x^2 + 3xz}{3xy + 6z} = -\frac{2x^2 + yz}{xy + 2z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{12y^2 + 3xz}{3xy + 6z} = -\frac{4y^2 + xz}{xy + 2z}.$$

Отже, повний диференціал дорівнює

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = -\frac{(2x^2 + yz)\Delta x + (4y^2 + xz)\Delta y}{xy + 2z}.$$

Обчислимо тепер значення повного диференціала в точці M_0:

$$dz\big|_{M_0} = -\frac{[2(-4)^2 + 2(-8)](-0{,}1) + [4 \cdot 2^2 + (-4)(-8)] \cdot 0{,}1}{[(-4) \cdot 2 + 2(-8)]} = \frac{2}{15}.$$

Відповідь: $\frac{2}{15}$.

Задача 4. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 12xy + y^3$.

Розв’язання.

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 12y, \; \frac{\partial z}{\partial y} = 12x + 3y^2.$$

Точки можливого екстремуму визначимо із системи:

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y = 0, \\ 12x + 3y^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y = 0, \\ 4x + y^2 = 0. \end{cases}.$$

Розв’язавши цю систему, одержуємо дві стаціонарні точки заданої функції $M_1(0;0),\ M_2(-4;-4)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

В точці M_1 маємо:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0; \; B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = 12; \; C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 - 144 = -144 < 0,$$

це означає, що точка $M_1(0;0)$ не є екстремальною.

В точці M_2 маємо:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6(-4) = -24 < 0; \;\; B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = 12; \; C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 6(-4) = -24;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-24)(-24) - 144 = 332 > 0.$$

Отже, в точці M_2 одержали: $\Delta = 332 > 0,\ A = -24 < 0$. Таким чином, в точці M_2 маємо максимум. В цій точці $z_{\max} = 64$.

Відповідь: $z_{\max} = z(-4, -4) = 64$.

Задача 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy - y^2 - \frac{2}{3}(x - y)$ в області D, що обмежена лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

Розв'язання.

Задана область є трикутник (рис. 13). Функція є неперервною на замкненій обмеженій області, а тому досягає на ній свого найбільшого і найменшого значень. Ці значення треба шукати в точках можливого екстремуму як в середині області, так і в точках можливого екстремуму на межі області ($x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$).

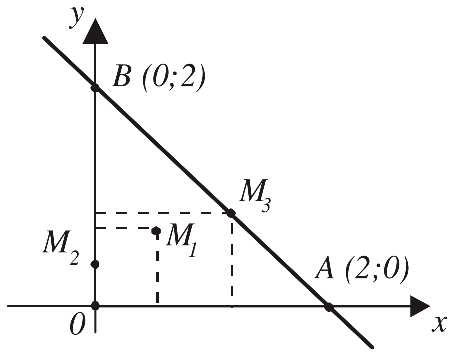

Рис. 13. Область, яка обмежена лініями $\mathbf{x = 0, y = 0, x + y = 2}$

1) Знайдемо стаціонарні точки, як розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - \dfrac{2}{3} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - 2y + \dfrac{2}{3} = 0. \end{cases}$$

Звідси $y_1 = \frac{2}{3},\ x_1 = \frac{2}{3}$. Таким чином, одержуємо точку $M_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, яка належить заданій області. Обчислюємо

$$z(M_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Дослідження на екстремум робити не обов'язково.

2) Дослідимо функцію на межі області, тобто на відрізках *OB, OA, AB*.

OB: $x = 0;\ z = -y^2 + \frac{2}{3}y$. Задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції однієї змінної на відрізку $0 \le y \le 2$.

$$\frac{dz}{dy} = -2y + \frac{2}{3} = 0,\ y_2 = \frac{1}{3},\ x_2 = 0.$$

Таким чином одержали точку $M_2\left(0; \frac{1}{3}\right)$. Обчислюємо

$$z(M_2) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

На кінцях відрізку $0 \le y \le 2$ $z(O) = 0;\ z(B) = -4 + \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$.

OA: $y = 0;\ z = -\frac{2}{3}x;\ 0 \le x \le 2$. В даному випадку функція $z(x)$ не має стаціонарних точок. Обчислюємо $z(A) = -\frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3}$.

AB: $y + x = 2$ $0 \le x \le 2$; при $y = 2 - x$ маємо $z = -2x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{8}{3}$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції однієї змінної на відрізку $0 \le x \le 2$.

$$\frac{dz}{dx} = -4x + \frac{14}{3},\ x_3 = \frac{7}{6},\ y_3 = \frac{5}{6}.$$

Таким чином одержали точку $M_3\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right)$. Обчислюємо

$$z(M_3) = \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{7}{6} - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{18}.$$

3) Порівнюючи всі одержані результати, робимо висновок, що $z_{найб} = \frac{1}{9}$ досягається в граничній точці $M_2\left(0; \frac{1}{3}\right)$; $z_{найм} = -\frac{8}{3}$ – в граничній точці $B(0;2)$.

Відповідь: $z_{найм} = z(0;2) = -\frac{8}{3}$, $z_{найб} = z\left(0; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$.

7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Задача 1. Знайти невизначені інтеграли. В прикладі *б* результат перевірити диференціюванням.

а) $\int \frac{[\arcsin(-4x)]^5}{\sqrt{1-16x^2}}dx$; б) $\int (x-2)\sin(-4x+2)dx$; в) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}$;

г) $\int \frac{-4x^2-16x}{x^3-8}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-4}}$; е) $\int \frac{dx}{\mathbf{2}\cos x - 4\sin x}$.

Розв'язання.

а) Враховуючи непарність функції $\arcsin x$, перепишемо інтеграл у вигляді:

$$I = \int \frac{[\arcsin(-4x)]^5}{\sqrt{1-16x^2}}dx = -\int \frac{(\arcsin 4x)^5}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

Відмітимо, що $\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}} = \frac{1}{4}d(\arcsin 4x)$. Звідси

$$I = -\frac{1}{4}\int (\arcsin 4x)^5 d(\arcsin 4x) = -\frac{1}{4}\int t^5 dt = -\frac{1}{4}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{24}(\arcsin 4x)^6 + C.$$

б) Скористуємося формулою інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$. Покладемо $u = x-2, dv = \sin(-4x+2)dx.$ Звідси $du = dx$,

$$v = \int \sin(-4x+2)dx = -\frac{1}{4}\int \sin(-4x+2)d(-4x+2) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \sin t dt = -\frac{1}{4}(-\cos t) = \frac{1}{4}\cos(-4x+2).$$

Остаточно одержуємо:

$$I = \int (x-2)\sin(-4x+2)dx = (x-2)\cdot\frac{1}{4}\cos(-4x+2) - \frac{1}{4}\int \cos(-4x+2)dx =$$

$$=\frac{1}{4}(x-2)\cos(-4x+2)-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)\int\cos(-4x+2)d(-4x+2)=$$

$$=\frac{1}{4}(x-2)\cos(-4x+2)+\frac{1}{16}\sin(-4x+2)+C.$$

За означенням первісної $\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow F'(x)=f(x)$. Перевіримо одержаний результат. Для цього знайдемо похідну:

$$F'(x)=\frac{1}{4}\big(1\cdot\cos(-4x+2)+(x-2)(-\sin(-4x+2))(-4)\big)+\frac{1}{16}\cos(-4x+2)(-4)=$$

$$=\frac{1}{4}\cos(-4x+2)+(x-2)\sin(-4x+2)-\frac{1}{4}\cos(-4x+2)=(x-2)\sin(-4x+2).$$

в) Зробимо заміну змінної: $x-1=t^2\Rightarrow x=t^2+1\Rightarrow dx=2tdt$, $x+1=t^2+2, t=\sqrt{x-1}$. Тоді

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}=\int\frac{2tdt}{(t^2+2)t}=2\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\sqrt{2}arctg\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}+C.$$

г) Перетворимо знаменник підінтегральної функції: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{-4x^2-16x}{x^3-8}=\frac{-4x^2-16x}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)=-4x^2-16x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+4A-2C=-4x^2-16x.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A,B,C одержуємо систему рівнянь із умови рівності двох багаточленів:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & \left\{ \begin{array}{c} A+B=-4, \\ 2A-2B+C=-16, \\ 4A-2C=0. \end{array} \right. \\ x & \\ x^0 & \end{array}$$

Із першого і третього рівнянь маємо $C=2A,\ B=-4-A$. Підставляючи ці вирази в друге рівняння системи, одержуємо рівняння відносно A:

$$2A+8+2A=-16 \Rightarrow 6A=-24 \Rightarrow A=-4.$$

Тоді $C=-8, B=0$. Отже,

$$\frac{-4x^2-16x}{x^3-8}=-\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2+2x+4}.$$

Підставимо отримане розкладання дробово-раціонального виразу до інтегралу та знайдемо його

$$I=\int\frac{-4x^2-16x}{x^3-8}dx=-\left(\int\frac{4}{x-2}dx+\int\frac{8}{(x^2+2x+1)+3}dx\right)=$$

$$=-\left[4\int\frac{dx}{x-2}+8\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right]=-4\ln|x-2|-\frac{8}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

д) Перетворимо вираз під коренем

$$x^2-4x-4=(x^2-4x+4)-8=(x-2)^2-8.$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-8}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-8}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-8}}=$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right|+C=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-4}\right|+C.$$

е) Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, x=2arctg\,t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$2\cos x - 4\sin x = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - \frac{8t}{1+t^2} = \frac{2-2t^2-8t}{1+t^2}.$$

Тоді

$$I = \int \frac{dx}{\mathbf{2}\cos x - 4\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2-2t^2-8t} = \int \frac{dt}{1-t^2-4t} = -\int \frac{dt}{t^2+4t+4-5} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t+2)^2-(\sqrt{5})^2} = -\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2-(\sqrt{5})^2} = -\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{5})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}{tg\,\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}\right| + C.$$

Задача 2. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 \frac{-x-4}{2x+2}dx$; б) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x-1}dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [2\sin(-2x)+\cos(-2x)]dx$; г) $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{2x+4}dx$.

Розв'язання

а) Перетворимо підінтегральну функцію, тому що вона є неправильним дробом:

$$\frac{-x-4}{2x+2} = -\frac{1}{2}\frac{x+4}{x+1} = -\frac{1}{2}\frac{(x+1)+3}{x+1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{3}{x+1}\right) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{x+1}\right).$$

Тоді

$$I = \int\limits_0^1 \frac{-x-4}{2x+2}dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1+\frac{3}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{2}\left(x+3\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+3\ln 2 - 0 - 3\ln 1\right) = -\frac{1}{2}(1+3\ln 2).$$

б) Скористуємось формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Покладемо $u = x, dv = e^{2x-1}dx$. Звідси $du = dx$,

$$v = \int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x-1}d(2x-1) = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2x-1}.$$

Остаточно маємо:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x-1}dx = \frac{1}{2}xe^{2x-1}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\left[0\cdot e^{2\cdot 0-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}\left(e^{2\cdot 0-1} - e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}\right) = \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{4}e^{-2} = -\frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2}.$$

в) Обчислимо інтеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} [2\sin(-2x) + \cos(-2x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} (\cos 2x - 2\sin 2x)dx = \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(-\pi) + \cos(-\pi) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

г) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\sqrt{2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}(2x+4)^{\frac{1}{2}}d(2x+4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$

Задача 3. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$; б) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2}$.

Розв'язання.

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-2b} - e^{-2\cdot 0}\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$

б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{4-\varepsilon} (x-4)^{-2}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Bigg|_0^{4-\varepsilon} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{4-\varepsilon-4} - \frac{1}{0-4}\right) =$

$= -\left(-\infty + \frac{1}{4}\right) = +\infty$.

Задача 4. Обчислити площу фігури, що обмежена вказаними лініями. Зобразити ці лінії і фігуру, яку вони обмежують:

а) $y = x-4;\ y=0;\ x=5;\ \ x=7$;

б) $y = x^2+2x;\ \ y = x+2$.

Розв'язання.

а) Виконаємо побудову. Всі задані лінії є прямі, фігура представляє собою трапецію, зверху обмежену прямою $y = x-4$, а з боків прямими $x=5, x=7$.

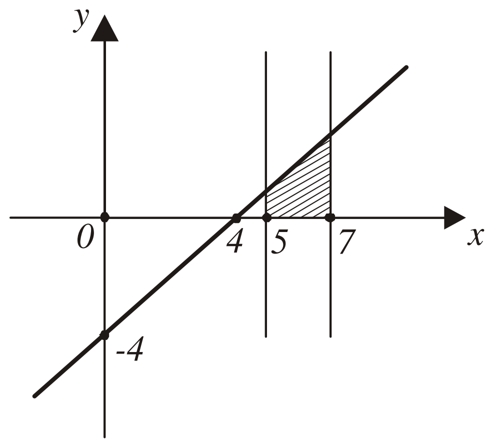

Рис. 14. Фігура, що задана прямими лініями

Тому

$$S = \int\limits_5^7 (x-4)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_5^7 = \frac{49}{2} - 28 - \left(\frac{25}{2} - 20\right) = 4 \text{ (кв.од.)}$$

б) Виконаємо побудову. $y = x^2+2x$ – парабола, яка перетинає вісь OX в точках $x=0$ і $x=-2$, $y = x+2$ – пряма, яка перетинає вісь OX в точці $x=-2$, а вісь OY – в точці $y=2$. Одержана фігура зверху обмежена прямою $y=x+2$, а знизу параболою $y = x^2+2x$.

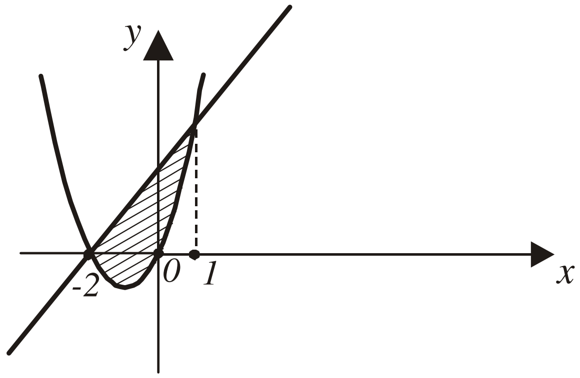

Рис. 15. Фігура, що задана перетином прямої та параболи

Площу обчислимо за формулою:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)dx\ .$$

Знайдемо межі інтегрування, для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ y = x + 2, \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

Тоді

$$S = \int_{-2}^{1} \left[(x+2) - (x^2 + 2x) \right] dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 6 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2} \text{(кв.од)}$$

8. Диференціальні рівняння

Задача 1. Розв’язати диференціальні рівняння першого порядку:

а) $y^2 y' = -4 - 2x$;

б) $y' + y = e^{-x}$;

в) $y' = \dfrac{x - 2y}{-2x + y}$.

Розв'язання.

а) Маємо диференціальне рівняння зі змінними які можна відокремити, оскільки його можна записати у вигляді:

$$y' = \frac{-2}{y^2}(2+x).$$

Перепишемо його в диференціальній формі і проінтегруємо:

$$y^2 dy = -2(2+x)dx;$$

$$\int y^2 dy = -2\int (2+x)dx + C \Rightarrow \frac{y^3}{3} = -2\left(2x + \frac{x^2}{2}\right) + C.$$

Одержали загальний інтеграл заданого рівняння, де C – довільна стала.

б) Покладемо $y = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$. Підставимо y і y' в рівняння і одержимо

$$u'v + v'u + uv = e^{-x} \Rightarrow u'v + u(v' + v) = e^{-x}.$$

На підставі довільності функцій $u(x)$ і $v(x)$ можна покласти $v' + v = 0$. Приходимо до наступної системи рівнянь для знаходження u і v:

$$\begin{cases} v' + v = 0; \\ u'v = e^{-x}. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи знаходимо функцію $v(x)$, а із другого – функцію $u(x)$.

Розв'яжемо перше рівняння.

$$\frac{dv}{dx} + v = 0 \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \quad \Rightarrow \ln|v| = -x \Rightarrow v = e^{-x}.$$

Підставимо $v(x)$ в друге рівняння системи

$$u'e^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow u' = 1 \quad \Rightarrow u = \int dx + C = x + C.$$

Звідси $y = uv = (x + C)e^{-x}$.

в) Поділимо чисельник і знаменник правої частини рівняння на x. Одержимо рівняння, права частина якого є функція $\frac{y}{x}$:

$$y' = \frac{1 - 2\cdot\frac{y}{x}}{-2 - \frac{y}{x}}.$$

Таким чином маємо однорідне рівняння відносно змінних диференціального рівняння. Покладемо $\frac{y}{x} = u(x)$, і одержимо

$$y' = u'x + u; \quad u'x + u = \frac{1-2u}{-2-u} \Rightarrow u'x = \frac{1-2u}{-2-u} - u \Rightarrow u'x = \frac{1-2u+2u+u^2}{-2-u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1+u^2}{-2-u} \Rightarrow -\frac{u+2}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int\frac{u}{1+u^2}du - \int\frac{2}{1+u^2}du = \int\frac{dx}{x} + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| - 2arctgu = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow -2arctgu = \ln\left|Cx\sqrt{1+u^2}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Cx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = e^{-2arctg\frac{y}{x}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{C}e^{-2arctg\frac{y}{x}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{C^2}e^{-4arctg\frac{y}{x}} - x^2.$$

Сталу $\frac{1}{C^2}$ можна записати як C. В процесі розв'язання диференціального рівняння для зручності подальших викладок довільну сталу позначили через $\ln|C|$, тому що $\ln|C|$ набуває будь-яких значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Задача 2. Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку:

а) $x^2 y'' = y'^2$;
б) $y'' = 2yy'$.

Розв'язання.

а) Застосуємо заміну $z(x) = y'$, $z' = y''$, після чого отримаємо рівняння першого порядку відносно функції $z(x)$:

$$x^2 z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1 \Rightarrow z = \frac{x}{1 + C_1 x} \Rightarrow y' = \frac{x}{1 + C_1 x}.$$

Звідси,

$$y = \int \frac{x}{1 + C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} \int \left(1 - \frac{1}{1 + C_1 x} \right) dx = \frac{1}{C_1} \left(x - \frac{1}{C_1} \ln|1 + C_1 x| \right) + C_2.$$

б) Це рівняння не містить у явному вигляді незалежну змінну, тому доцільно використати заміну $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, $\frac{dp}{dy} = p'$. Після застосування цієї заміни отримаємо:

$$p'p = 2yp \Rightarrow p' = 2y \Rightarrow dp = 2ydy \Rightarrow p = y^2 + C_1.$$

Оскільки $y' = p(y)$, то маємо таке рівняння першого порядку: $y' = y^2 + C_1$. Після відокремлювання змінних та інтегрування отриманого рівняння, знайдемо загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + C_1} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \int dx.$$

В залежності від значення константи C_1, останнє рівняння має такий розв'язок: якщо константа C_1 додатна, розв'язком є

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}} arctg \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2;$$

якщо C_1 дорівнює 0 – ми отримуємо розв'язок

$$-\frac{1}{y} = x + C_2;$$

якщо ж константа C_1 від'ємна розв'язком диференціального рівняння є функція

$$\frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln\left| \frac{y - \sqrt{C_1}}{y + \sqrt{C_1}} \right| = x + C_2.$$

Задача 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам:

а) $y'' - 3y' + 2y = 4x - 2$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

б) $y'' + 4y = -2\sin x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання.

а) Початкове рівняння – це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

має корені $k_1 = 1, k_2 = 2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Оскільки 0 не є коренем характеристичного рівняння, а права частина – багаточлен першого степеня, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = Ax + B.$$

Продиференціюємо останнє співвідношення та підставимо його до початкового рівняння,

$$(y_{ч.н.})' = A,\ (y_{ч.н.})'' = 0,\ -3A + 2Ax + 2B = 4x - 2 \Rightarrow 2Ax + (2B - 3A) = 4x - 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2A = 4, \\ 2B - 3A = -2, \end{cases} \Rightarrow A = 2, B = 2.$$

Отже,

$$y_{ч.н.} = 2x + 2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x + 2,$$

а його похідна

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 2.$$

Для знаходження C_1 і C_2 скористуємось початковими умовами:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^{2\cdot 0} + 2\cdot 0 + 2 = 0, \\ \quad C_1 e^0 + 2C_2 e^{2\cdot 0} + 2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 0, \\ C_1 + 2C_2 + 2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y_{ч.н.} = -3e^x + e^{2x} + 2x + 2.$$

б) Як і в попередньому прикладі, спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' + 4y = 0,$$

характеристичне рівняння якого

$$k^2 + 4 = 0$$

має корені $k_{1,2} = \pm 2i$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{з.о.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння розшукуємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = A\sin x + B\cos x.$$

Продиференціюємо це співвідношення і підставимо його в початкове рівняння. При цьому одержимо

$$(y_{ч.н.})' = A\cos x - B\sin x, \quad (y_{ч.н.})'' = -A\sin x - B\cos x,$$

$$(-A\sin x - B\cos x) + 4(A\sin x + B\cos x) = -2\sin x \Rightarrow 3A\sin x + 3B\cos x = -2\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A = -2, \\ 3B = 0, \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{2}{3}, B = 0.$$

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{2}{3}\sin x .$$

Його похідна

$$(y_{з.н.})' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{2}{3}\cos x.$$

Для знаходження C_1 і C_2 скористуємось початковими умовами

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{2}{3}\sin 0 = 1, \\ -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = -\frac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв’язок має вигляд:

$$y_{ч.н.} = \cos 2x - \frac{2}{3}\sin x .$$

9. Ряди

Задача 1. Дослідити на збіжність ряди

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n(2n-1)}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4n}{2n^3 - 4n^2 + 3}$.

Розв’язання.

а) Для дослідження даного ряду скористаємося ознакою Даламбера

$$u_n = \frac{2^n}{4^n(2n-1)} = \frac{1}{2^n(2n-1)},\ u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(2(n+1)-1)} = \frac{1}{2^{n+1}(2n+1)},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}(2n+1)} \cdot \frac{2^n(2n-1)}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Звідси, оскільки $q<1$, робимо висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{4^n(2n-1)}$ – збіжний.

б) Порівняємо даний ряд з узагальненим гармонійним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

оскільки $p=2>1$, цей ряд є збіжним. Для порівняння цих рядів знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{-4n}{2n^3-4n^2+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n^2+3}{-4n^3}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, згідно з ознакою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4n}{2n^3-4n^2+3}$$

також збігається.

Задача 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{n^3}$; $\quad$ $б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)^2}$.

Розв’язання.

а) Даний ряд є знакозмінний. Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin 4n|}{n^3}.$$

Порівняємо цей ряд зі збіжним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ \ (p=3>1).$$

Врахуємо, що

$$\frac{|\sin 4n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$$

і отримаємо, що оскільки ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, є збіжним відповідно з ознакою порівняння, то заданий ряд є абсолютно збіжним.

б) Даний ряд є знакопереміжний, дослідимо його збіжність за ознакою Лейбниця:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(4n-1)^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0,$

2) $u_1 = \frac{1}{9} > u_2 = \frac{1}{49} > u_3 = \frac{1}{121} > \ldots$.

Оскільки обидві умови теореми виконуються, то досліджуваний ряд є збіжним. З'ясуємо, як він збігається: умовно чи абсолютно. Для цього складемо ряд із абсолютних величин членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2}$$

і дослідимо його збіжність за допомогою ознаки порівняння з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Маємо

$$u_n = \frac{1}{(4n-1)^2} < v_n = \frac{1}{n^2},$$

оскільки $(4n-1)^2 > n^2$.

Таким чином, згідно з ознакою порівняння, оскільки ряд v_n з більшими членами збігається ($p = 2 > 1$), то і ряд u_n з меншими членами ряду також збігається. І тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)^2}$ збігається абсолютно.

Задача 3. Знайти область збіжності степеневого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n(4n+1)}.$$

Розв’язання.

$$a_n=\frac{1}{2^n(4n+1)},\, a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}(4n+5)}.$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(4n+5)}{2^n(4n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(4n+5)}{(4n+1)}\right|=2,$$

тобто цей ряд є абсолютно збіжним на інтервалі (-2-R,-2+R)=(-4,0). Дослідимо збіжність на межах інтервалу.

При $x=-4$ одержимо знакопереміжний ряд вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n(4n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)}.$$

Дослідимо його збіжність за ознакою Лейбниця:

1) $u_1=\frac{1}{5}>u_2=\frac{1}{9}>u_3=\frac{1}{13}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(4n+1)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$

Оскільки умови теореми Лейбниця виконуються, то досліджуваний ряд є збіжним, тобто $x=-4$ належить області збіжності ряду.

Аналогічно перевіряємо другу межу інтервалу $x=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(4n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)}.$$

Щоб з’ясувати характер поведінки ряду скористаємось ознакою порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд зі сталим множником

$$\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Для порівняння рядів порівняємо їх загальні члени:

$$u_n = \frac{1}{4n+1} > v_n = \frac{1}{5n},$$

оскільки $4n+1 < 5n$.

Таким чином, згідно з ознакою порівняння, оскільки ряд v_n з меншими членами розбігається, то і ряд u_n з більшими членами ряду також розбігається. Отже, робимо висновок, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)}$$

розбігається, тобто $x=0$ не належить області збіжності ряду.

Відповідь: область збіжності ряду $[-4,0)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища та прикладна математика: навчальний посібник / Д. О. Торяник, М. С. Синєкоп та ін.: – Х.: ХДУХТ, 2014. – 330 с.
2. Вища математика: розв'язання задач та варіанти типових розрахунків: навчальний посібник / В. Г. Гула, О. П. Корж, М. С. Синєкоп та ін.: – Х.: ХДУХТ, 2010. – 351 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович : – М.: АСТ, Астрель, 2005.
4. Вища математика: вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних: навчальний посібник / В. В. Полевич, Л. О. Пархоменко: – Х.: ХДУХТ, 2010.
5. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М.: Физматлит, 2006. – 336с.
6. Вища математика: навчальний посібник для самостійного вивчання курсів / В. Г. Гула, М. С. Синєкоп та ін.: – Х.: ХДУХТ, 2007.
7. Данко Е.П. Высшая математика в упражнениях и задачах / Е. П. Данко , А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова: – М.: Оникс-21 век, 2008.
8. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Д. С. Кузнецова, Е. И. Шилкина и др. – Мн.: Высш. шк, 2001.
9. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский – М.: Дрофа, 2004. – 288с.
10. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский – М.: Дрофа, 2004. – 512с.
11. Романовский П. И. Общий курс математического анализа в сжатом изложении / П. И. Романовский – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1996. – 332 с.
12. Методичні вказівки для організації самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика» за темою «Геометричні й фізичні додатки визначеного інтегралу» для студентів інженерних спеціальностей / Укладачі: Н. Я. Голубєва, В. В. Полевич, Д. О. Торяник: – Х.: ХДАТОХ, 2003.
13. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу «Математика для економістів». Розділ: «Криві другого порядку» / Укладачі: А. О. Півненко, М. С. Синєкоп: – Х.: ХДАТОХ, 2002.
14. Методичні вказівки для організації самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з курсу «Вища математика». Тема : «Наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних» для спеціальності «Обладнання харчових виробництв» / Укладачі: Л. К. Кравченко, А. О. Півненко, М. С. Синкоп: – Х.: ХДУХТ, 2004.

15. Методичні вказівки з самостійної роботи студентів. Модуль №1: «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична Геометрія». Тематичні тести / Укладачі: Л. К. Кравченко, Н. Я. Голубєва, Д. О. Торяник: – Х.: ХДУХТ, 2008.
16. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика». Модуль №2: «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функцій однієї змінної та його застосування». Тестові завдання. Укладачі: Л. К. Кравченко, Н. Я. Голубєва, Д. О. Торяник: – Х.: ХДУХТ, 2009.
17. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика». Модуль №3: «Диференціальне числення функцій двох змінних». «Інтегрування функції однієї змінної». Тематичні тести. Укладачі: Л. К. Кравченко, Н. Я. Голубєва, Д. О. Торяник: – Х.: ХДУХТ, 2009.
18. Методичні вказівки: тематичні індивідуальні завдання та приклади розв’язання типових завдань з курсу «Вища математика». Укладачі: О. І. Радченко, В. Г. Гула: – Х.: ХДУХТ, 2009.
19. Методичні вказівки для організації самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з курсу «Вища та прикладна математика». Напрям підготовки 6.030510 Товарознавство і торговельне підприємництво / Укладачі: Д. О. Торяник, Н. В. Бойко: – Х.: ХДУХТ, 2011.
20. Вища математика. Тести до модульного контролю: навчальний посібник / М. С. Синєкоп, М. М. Вермійчук: – Х.: ХДУХТ, 2012. – 163 с.

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

ТОРЯНИК Дмитро Олександрович

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін проф. М.І. Погожих

Техн. редактор О.В. Щегельська

План 2017 р., поз. 28

Підп. до друку 26.07.2017 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об'єм даних 1,68 Мб. Тираж 100 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.