МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський державний університет харчування та торгівлі

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОСТАТИКА: ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Навчальний посібник

Харків
ХДУХТ
2019

УДК 531/534
ББК 22.2+22.3
П43

Рецензенти:
д-р техн. наук, проф. О. М. Шаніна,
д-р техн. наук, доц. А. Б. Горальчук

Рекомендовано до видання вченою радою ХДУХТ,
протокол № 8 від «24» грудня 2018 року

Погожих М. І.
П43 Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка. Електростатика [Електронний ресурс] : навч. посібник / М. І. Погожих, А. О. Пак, Л. В. Купріянова. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2019. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Навчальний посібник орієнтовано на студентів скороченої форми навчання спеціальностей 142 «Енергетичне машинобудування» та 131 «Прикладна механіка» ступеня освіти бакалавр. Посібник складається із шести розділів, у яких викладено основи механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, електростатики; наведено приклади розв'язання типових задач.

Посібник спрямований на поглиблення розуміння фізичних явищ, які є фундаментальною базою, без якої не можлива успішна діяльність майбутнього інженера.

УДК 531/534
ББК 22.2+22.3

ЗМІСТ

ВСТУП

Вивчення дисципліни «Фізика» призначено для студентів, що навчаються за спеціальностями 142 «Енергетичне машинобудування», 131 «Прикладна механіка».

Мета викладання фізики полягає у створенні передумов для подальшої широкої підготовки студентів у частині технічних дисциплін, володінні фундаментальними поняттями та теоріями класичної та сучасної фізики. Формуванні наукового світогляду та сучасного фізичного мислення.

Фізика викладається на 1 курсі факультету обладнання та технічного сервісу для студентів скороченої форми навчання. Курс фізики повинен забезпечити майбутньому інженеру-механіку основу його теоретичної підготовки, яка дозволяє грамотно орієнтуватись у стрімкому потоці наукової і технічної інформації.

Курс фізики разом з курсами вищої математики і теоретичної механіки становить основу теоретичної підготовки інженерів, є фундаментальною базою, без якої неможлива успішна діяльність інженера. Основне завдання полягає у тому, щоб дати студенту сучасні уявлення про фізичні явища та процеси, найважливіші закони, фундаментальні фізичні поняття, теорію, досліди та факти класичної та сучасної фізики, сучасні методи дослідження фізичних явищ.

Студент повинен володіти методами та навичками розв’язання конкретних задач, застосовувати одержані знання для ефективного опанування інших дисциплін і подальшої практичної діяльності, використовувати фізичну апаратуру у відповідності з вимогами метрології.

РОЗДІЛ 1.
КІНЕМАТИКА

1.1. Основні визначення, закони та рівняння

Механічним рухом називається переміщення тіл, або частин того ж самого тіла в просторі та часі відносно один одного. Описати механічний рух означає у будь-який момент часу знайти місце розташування тіла або системи тіл у просторі.

Абсолютно тверде тіло – будь-яке за природою тіло, геометрична форма і розміри якого в процесі механічного руху не змінюються.

Абсолютно пружне тіло – будь-яке тіло, що приймає первісні геометричну форму і розміри після зняття механічної дії.

Матеріальна точка – будь-яке тіло, розмірами якого в умовах даного механічного руху можна знехтувати.

Механічна система – будь-який набір взаємодіючих чи не взаємодіючих тіл що рухаються, штучно відокремлених у просторі.

Механічна дія – будь-яка взаємодія двох чи декількох тіл, що приводить до зміни механічного руху.

Система відліку – це тіло відліку, жорстко закріплена до нього система координат та годинник.

Число ступенів вільності – число незалежних координат, за допомогою яких можна описати усі види руху, у яких бере участь тіло або точка.

У будь-який момент часу матеріальна точка має координати: x, y, z. Задавши величини кожної координати, можна однозначно характеризувати розташування точки відносно початку координат (тіла відліку). Прямокутна система координат пов’язана з полярною співвідношенням:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,,$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти одиничної довжини за координатами.

Якщо точка рухається у просторі, то кожна з складових швидкості за координатами може змінюватися за своїм законом, що відбивається у *принципі незалежності руху:*

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z,$$

де $\vec{v}$ – результуюча швидкість у просторі.

Середня швидкість – це векторна величина, яка характеризує деякий середній темп руху:

$$< v >= \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Миттєва швидкість – це швидкість точки у певний момент часу за величиною і напрямком:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

Швидкість вимірюється – $[v]_{SI} = м / с$.

Середнє прискорення скалярна величина, яка характеризує середній темп зміни швидкості:

$$< a >= \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|v_1 - v|}{\Delta t},$$

Прискорення вимірюється – $[a]_{SI} = м / с^2$.

Миттєве прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Повне прискорення характеризує темп зміни швидкості як за величиною, так і за напрямком:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}.$$

Перша складова (тангенціальне прискорення) відповідає за зміну величини швидкості, а вектор $\vec{a}_\tau$ співпадає з напрямком швидкості. Друга складова – ($\vec{a}_n$), нормальне прискорення, характеризує зміну напрямку швидкості і спрямована перпендикулярно до вектора швидкості:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тангенціальне прискорення:

$$\mathrm{a}_\tau = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}};$$

нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Виходячи із наведених визначень *основні рівняння кінематики* поступального руху матеріальної точки при сталому прискоренні виглядають наступним чином:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$v(t) = v_0 + at.$$

Обертальний рух відносно нерухомої осі – це такий рух, при якому усі точки абсолютно твердого тіла описують кола, центри яких лежать на нерухомій прямій, що називається віссю обертання. Для опису кінематики матеріальної точки, що здійснює обертальний рух, як і в кінематиці поступального руху, вводяться поняття кутове прискорення і кутова швидкість.

Кутова швидкість – векторна величина, яка дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Якщо $\omega = const$, то обертання рівномірне і його можна характеризувати *періодом обертання T. Період обертання* це час, за який точка здійснює один повний оберт. Оскільки за визначенням, за час $\Delta t = T$ тіло змінить своє положення на $\Delta \varphi = 2\pi$, тоді, за визначенням:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Число повних обертів, здійснених тілом під час рівномірного руху по колу за одиницю часу називається *частотою обертання.*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \ \omega = 2\pi\nu,$$

де ν - частота обертання, 1/с.

Зв'язок між кутовою та лінійною швидкістю:

$$v = \omega R .$$

Кутовим прискоренням називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} .$$

Зв'язок між величинами кутових характеристик руху та лінійних знаходяться з використанням їх уявлень:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon ,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2 .$$

Для рівномірного обертального руху основні кінетичні рівняння отримуються з використанням наступних перетворень:

$$S = v \cdot t = R \cdot \omega \cdot t = R \cdot \varphi ,$$

$$v = R\omega ,\ a_n = \omega^2 R ,\ \varphi = \omega \cdot t .$$

Для обертального руху з постійним кутовим прискоренням ($\varepsilon = const$):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\varepsilon} \cdot t ,$$

$$\varphi = \omega_o t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Використовуючи отримані кінематичні рівняння можна описати рух твердого тіла або точки навколо нерухомої осі.

1.2. Приклади розв'язання задач

1.1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухався із швидкістю $v_1 = 80 км/год$, а другу половину часу – зі швидкістю $v_2 = 40 км/год$. Яка середня швидкість v руху автомобіля?

Розв'язання

Середня швидкість визначається виразом: $\bar{v} = \frac{s}{t}$, де $s = s_1 + s_2 = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}$, оскільки $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$. Тобто $s = \frac{t}{2}(v_1 + v_2)$, звідси $v = \frac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 60 \,{}^{км}\!/_{год}$.

1.2. Першу половину свого шляху автомобіль рухався із швидкістю $v_1 = 80 км/год$, а другу половину часу – з швидкістю $v_2 = 40 км/год$. Яка середня швидкість v руху автомобіля?

Розв'язання

Середня швидкість визначається виразом:

$$v = \frac{s}{t}, \tag{1}$$

де $t = t_1 + t_2$, $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$. Тоді $t_1 = \frac{s}{2v_1}; t_2 = \frac{s}{2v_2}$, звідки

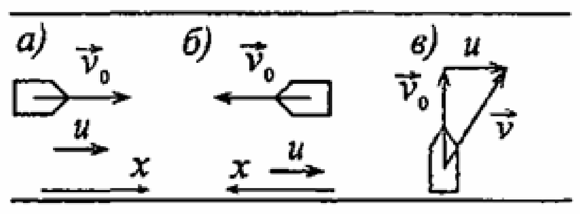
$$t = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1 v_2}. \tag{2}$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо $v = \frac{s2v_1v_2}{s(v_1+v_2)} = \frac{2v_1v_2}{(v_1+v_2)}$,

$v = \frac{2 \cdot 80 \cdot 40}{80+40} \approx 53{,}3 км/год$.

1.3. Знайти швидкість v відносно берега річки: а) човна, що йде за течією; б) човна, що йде проти течії; в) човна, що йде під кутом $\alpha = 90^\circ$ до течії. Швидкість течії річки u = 1 м/с , швидкість човна відносно води v_0 = 2 м/с.

Розв'язання:



а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, або в проекції на вісь х: $v = v_0 + u = 3 м/с$.

б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, або в проекції на вісь х: $v = v_0 - u = 1 м/с$.

в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, склавши вектори за правилом трикутників, отримаємо $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24 м/с$.

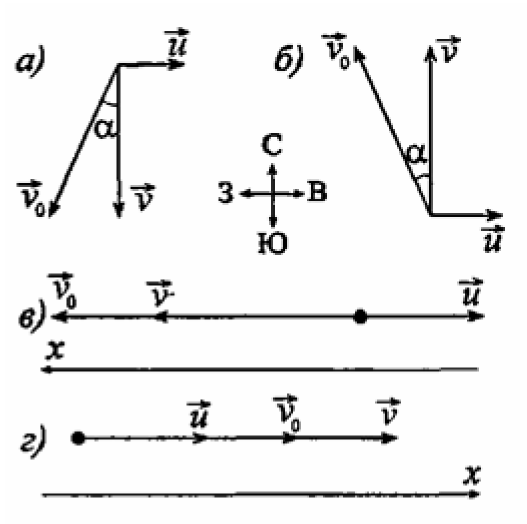
1.4. Літак летить відносно повітря з швидкістю $v_0 = 800 км/год$. Вітер дме із заходу на схід з швидкістю $u = 15 м/с$. З якою швидкістю v літак рухатиметься щодо землі і під яким кутом α до меридіану треба тримати курс, щоб переміщення було: а) на південь; б) на північ; в) на захід; г) на схід?

Розв'язання

а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в скалярному вигляді: $v = \sqrt{v^2 - u^2}$ Підставляючи числові дані і враховуючи, що $u = 15м/с = 54км/год$, отримуємо $v = 798\,км/год$.

З малюнка видно, що $v = v_0\,cos\alpha$, $cos\alpha = \frac{v}{v_0}$, $cos\alpha = 0{,}998$, $\alpha = 4°$.

Курс на південний захід.



б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в скалярному вигляді: $v = \sqrt{v^2 - u^2}$ або $v = 798\,км/год$. Оскільки $v = v_0\,cos\alpha$, то $cos\alpha = \frac{v}{v_0}, cos\alpha = 0{,}998$, $\alpha = 4°$.

Курс на північний захід.

в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в проекції на вісь х: $v = v_0 - u = 800 - 54 = 746\,{}^{км}\!/_{год}$.

Курс на захід.

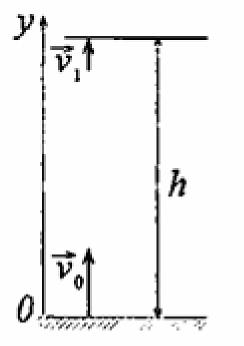
г) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в проекції на вісь у: $v = v_0 + u = 800 + 54 = 854\,{}^{км}\!/_{год}$.

Курс на схід.

1.5. Тіло, кинуте вертикально вгору, повернулося на землю через час t=3 с. Яка була початкова швидкість v_0 тіла і на яку висоту h воно піднялось?

Розв'язання

Запишемо рівняння кінематики в проекціях на вісь у: $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, $v(t) = v_0 - gt$. У найвищій точці підйому маємо $y(t_1) = h$; $v(t_1) = 0$, тобто $h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$ і $0 = v_0 - gt_1$, де $t_1 = \frac{t}{2}$ – час підйому. Звідки $v_0 = gt_1$, $v_0 = \frac{gt}{2}$, $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$; $h = \frac{gt_1^2}{8}$.



Підставляючи числові дані, отримаємо $v_0 = 14{,}7 м/с$; $h = 11 м$.

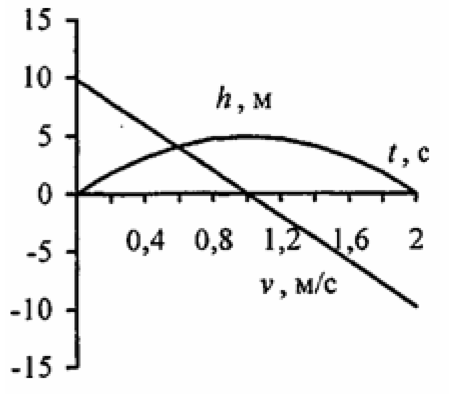
1.6. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 9{,}8 м/с$. Побудувати графік залежності висоти h і швидкості v від часу t для інтервалу $0 \le t \le 2с$ через 0,2с .

Розв'язання

Залежність швидкості і висоти від часу виражається наступними формулами $v = v_0 - gt$, $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Для заданого інтервалу складемо таблицю і побудуємо графік.

t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
V, м/с	9,8	7,8	5,9	3,9	2,0	0	-2,0	-3,9	-5,9	-7,8	-9,8
Н, м	0	1,8	3,1	4,1	4,7	4,9	4,7	4,1	3,1	1,8	0

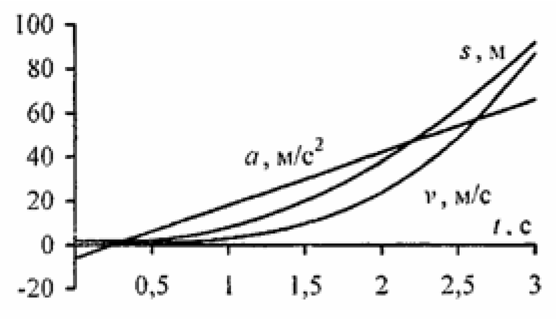


1.7. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t дається рівнянням $s = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2м/с$, $B = 3м/с^2$ та $C = 4м/с^3$. Знайти: а) залежність швидкості v і прискорення a від часу t; б) відстань s, пройдене тілом, швидкість v і прискорення a тіла через час t=2с після початку руху. Побудувати графік залежності шляху s, швидкості s і прискорення s від часу t для інтервалу $0 \le t \le 3с$ через 0,5 с.

Розв'язання

1) Швидкість тіла $v = \dfrac{dS}{dt}$, $s = At - 2Bt \ + 3Ct^2$, $s = 2 - 6t \ + 12t^2 м/с$.

Прискорення тіла $a = \dfrac{dv}{dt} = -2B + 6Ct$; $a = -6 + 24t \ м/с$.



2)Відстань, пройдена тілом $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Тоді через час t=2 с маємо s=24 м; v=38 м/с; a=42 м/с^2.

1.8. З башти заввишки $h = 25$ м горизонтально кинутий камінь із швидкістю $v_x = 15 м/с$. Який час t камінь буде рухатися? На якій відстані l

від підніжжя башти він впаде на землю? З якою швидкістю v він впаде на землю? Який кут φ складе траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на землю?

Розв'язання

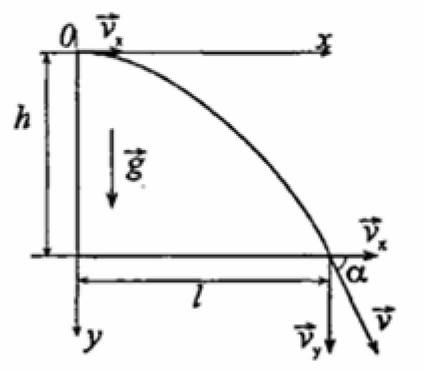
Переміщення каменя по вертикалі

$$S_y = h = \frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

по горизонталі

$$S_x = l = v_x t. \qquad (2)$$

З рівняння (1): $t = \sqrt{2h/g}$, t=2,26 с. З рівняння (2): $l = v_x t$, l=33,9 м. Швидкість каменя $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Вертикальна складова швидкості $v_y = gt$, отже $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$.



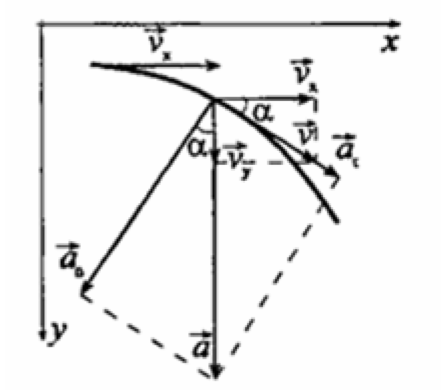
Шуканий кут φ - кут між напрямами вектора швидкості $\vec{v}$ і вектора її горизонтальної складової $\vec{v}_x$. З малюнка видно, що $cos\varphi = \frac{v_x}{v}$;

$cos\varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}$, $cos\varphi = 0{,}56$; $\varphi = 56°$

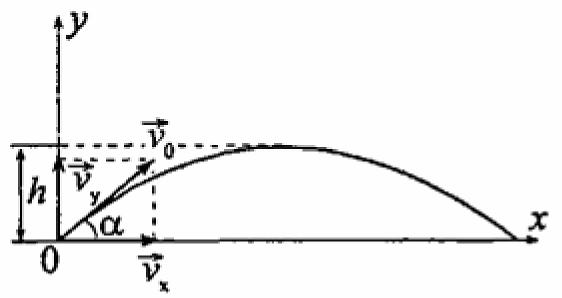
1.9. Камінь кинутий горизонтально із швидкістю юшок $v_x = 15 м/с$. Знайти нормальне a_x і тангенціальне a_τ, прискорення каменя через час t = 1 с після початку руху.

Розв'язання

Наведемо рисунок



Повне прискорення каменя $a = g;$ $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$. Повна швидкість $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.



З рисунка видно, що $cos\,\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{g}$, $sin\,\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g}$. Тоді

$a_n = \frac{gv_x}{v} = \frac{gv_x}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}$, $a_\tau = \frac{gv_y}{v} = \frac{gv_y}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}$. $a_n \approx 8{,}2\,м/c^2$, $a_\tau \approx 5{,}4\,м/c^2$

1.10. Тіло кинуте із швидкістю v_0 під кутом до горизонту. Час польоту t=2,2 с. На яку висоту h підніметься тіло?

Розв'язання

Переміщення по вертикалі

$$S_y = (v_0\,sin\,\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

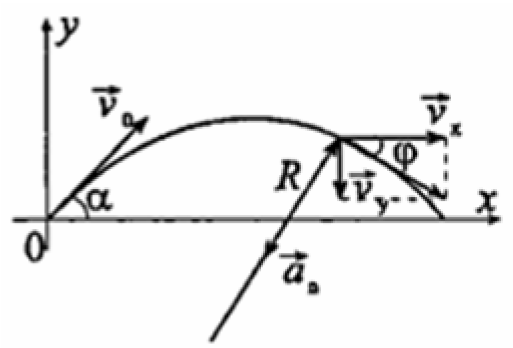
Позначимо t_1 – час підйому тіла на висоту h. Тоді з (1) отримаємо $h = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{g t_1^2}{2}$. У верхній точці $v_y = 0$, але $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1$, отже $v_0 \sin\alpha = g t_1$. Тоді $h = g t_1^2 - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{g t_1^2}{2}$. Оскільки $t_1 = \frac{t}{2}$, то $h = \frac{g t_1^2}{8}$.

$$h = \frac{9{,}8 \cdot 2{,}2^2}{8} = 5{,}9 м$$

1.11. Тіло кинуте із швидкістю $v_0 = 10 м/с$ під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту. Знайти радіус кривизни R траєкторії тіла через час t=1 с після початку руху.

Розв'язання:

Знайдемо час, за яке тіло підніметься до верхньої точки траєкторії. Вертикальна складова його швидкості $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1$. У верхній точці траєкторії $v_y = 0$, тому $v_0 \sin\alpha = g t_1$, звідки $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $t_1 = 0{,}7$ с, тобто при t = 1 с тіло знаходиться вже на спуску, таким чином можна вважати, що тіло кинули горизонтально із швидкістю $v_x = v_0 \cos\alpha$.



Нормальне прискорення тіла $a_n = \frac{v^2}{R}$, де $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. З рисунка видно, що $a_n = g \sin\varphi$, $\sin\varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$. Тоді $a_n = g \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$,

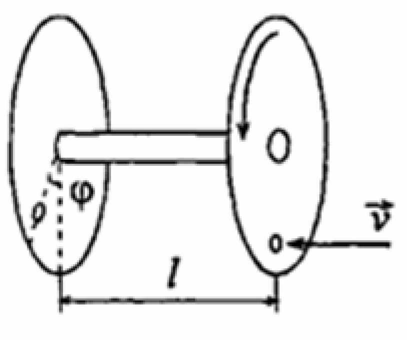
$R = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{(v_x^2 + v_y^{\ 2})\sqrt{v_x^2 + v_y^{\ 2}}}{v_x g}$ Обчислимо окремо v_x та v_y

$v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{2} м/с$, $v_y = g(t - t_1) = 3 м/с$. Підставивши числові значення, отримаємо $R \approx 6{,}3 м$.

1.12. Вісь з двома дисками, розташованими на відстані l = 0,5 м один від одного, обертається з частотою n = 1600 об/хв. Куля, що летить уздовж осі, пробиває обидва диски; при цьому отвір від кулі в другому диску зміщений щодо отвору в першому диску на кут $\varphi = 12°$. Знайти швидкість v кулі.

Розв'язання

Рівняння обертального руху $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega} t + \dfrac{\vec{\beta} t^2}{2}$.



Виберемо $\varphi_0 = 0$. Із умови задачі видно, що рух здійснюється з постійною кутовою швидкістю $\omega = 2\pi n$, отже, кутове прискорення рівне 0, тобто зсув $\varphi = \omega t$, звідки

$$t = \frac{\varphi}{\omega}, \tag{1}$$

$$\omega = 2\pi n. \tag{2}$$

Швидкість кулі

$$v = \frac{l}{t} \tag{3}$$

Підставивши (2) в (1), а потім (1) в (3) отримаємо: $v = \frac{l \cdot 2\pi n}{\varphi}$. Провівши обчислення, знайдемо швидкість кулі $v = 419$ м/с.

1.13. Колесо, обертаючись рівноприскорено, через час t = 1 хв після початку обертання набуває частоти n = 720 об/хв. Знайти кутове прискорення ε колеса і число оборотів N колеса за цей час.

Розв'язання

Кутова швидкість колеса $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t$. У скалярному вигляді при $\omega_0 = 0$ отримаємо $\omega = \varepsilon t$, крім того, $\omega = 2\pi n$. Звідси $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{n \cdot 2\pi}{t}$, $\varepsilon = 1{,}25$ рад/с^2.

1.14. Точка рухається по колу радіусом R = 20 см з постійним тангенціальним прискоренням a_τ = 5 см/с^2. Через який час *t* після початку руху нормальне прискорення a_n точки буде: а) рівно тангенціальному; б) удвічі більше тангенціального?

Розв'язання

За умовою, обертання є рівноприскореним, тому, $a_\tau = \frac{v}{t}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; звідси $t = \frac{v}{a_\tau}, v = \sqrt{a_n R}$. Тоді $t = \frac{\sqrt{a_n R}}{a_\tau}$. 1) Якщо $a_n = a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2$с; 2) якщо $a_n = 2a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{5}} = 2{,}8$ с.

РОЗДІЛ 2

ДИНАМІКА

2.1. Основні визначення, закони та рівняння

Динаміка вивчає рух у зв'язку з причинами, що спричиняють цей рух.

Сила ($\vec{F}$) – векторна величина, що характеризує механічну дію за величиною та напрямком.

Силове поле – простір, у кожній точці якого діє визначена за величиною, напрямком та природою сила.

Маса тіла (m) – фізична величина, яка є однією з основних характеристик матерії та яка визначає інерційні (інерційна маса) та гравітаційні (гравітаційна маса) властивості матерії.

Імпульс (*кількість руху*) тіла $\vec{p}$ – векторна величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}\,.$$

І закон Ньютона: будь-яке тіло рухається прямолінійно і рівномірно або знаходиться в стані спокою нескінченно довго, поки до нього не прикладено механічної дії.

ІІ закон Ньютона: Матеріальна точка набуває прискорення уздовж результуючої усіх сил, що діють на точку, величина якого прямо пропорційна величині сили та обернено пропорційна масі точки:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\,.$$

III закон Ньютона: Будь-які два тіла взаємодіють одне з одним з силами рівними за величиною та протилежними за напрямком:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, з якою I тіло діє на II тіло; $\vec{F}_{21}$ – сила, з якою II тіло діє на I тіло

Робота (*A*) – це кількісна характеристика процесу обміну енергією між взаємодіючими тілами.

Елементарна робота dA знаходиться як:

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = F \cdot dr \cdot cos\,\alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$, вимірюється $[dA]_{SI} = Н \cdot м = Дж$.

Робота сили при переміщенні:

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F_S dS,$$

при $F = const$:

$$A = FS\,cos\,\alpha.$$

Властивості роботи:

1. $dA = 0$, якщо $\alpha = 90^o = \frac{\pi}{2}$. Сила, що діє під таким кутом називається *нормальною (центральною)*. При дії нормальної сили робота не здійснюється.

2. Робота може бути позитивною, $dA > 0$, якщо $0 < \alpha < \pi/2$. Тоді робота здійснюється над тілом, а сила називається прискорюючою.

3. Робота може бути негативною, $dA < 0$, якщо $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Тоді робота виконується тілом, а сила називається гальмуючою.

Енергія – універсальна кількісна міра руху та взаємодії всіх видів матерії.

Енергія ділиться:

- за видами у зв’язку з природою руху: *механічна, електрична, электро-механічна, ядерна та ін.*;

- за характером щодо механічного руху: *кінетична, потенційна;*

- за відношенням до системи, що розглядається: *внутрішня,* яка характеризує енергію руху і взаємодії часток самої системи; *зовнішня,* яка характеризує енергію системи в цілому, в тому числі її енергію у зовнішньому силовому полі; *повна* – сума внутрішньої і зовнішньої енергії системи.

Механічна енергія тіла має два види: кінетичну та потенціальну.

Кінетична енергія тіла є мірою його механічного руху та визначається роботою, яку необхідно виконати, щоб викликати даний рух:

$$W_k = \frac{mv^2}{2},$$

Потенціальна енергія – це енергія, пов’язана з місцем розташування тіла (або пробника) у даній точці силового поля. Тому не тільки тіло, а й саме поле може мати потенціальну енергію. Величина потенціальної енергії визначається як робота, яку потрібно виконати під час переміщення тіла (пробника) з даної точки в нескінченність:

$$W_n = A_{1\infty},\ dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}\,).$$

Потенціальна в гравітаційному полі:

$$W_p = mgh.$$

Закон збереження енергії: в замкненій системі тіл, між якими діють тільки консервативні сили, механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом:

$$W = W_k + W_p = const.$$

Закон збереження імпульсу: імпульс механічної замкненої системи з часом не змінюється:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_n v_n = const.$$

2.2. Приклади розв'язання задач

2.1. Якої маси m_x баласт треба скинути з аеростата, що рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматися з тією ж швидкістю? Маса аеростата з баластом m=1600 кг, підйомна сила аеростата $F=12$ кН. Вважати, що сила опору $F_{опор.}$ повітря однакова при підйомі та спуску.

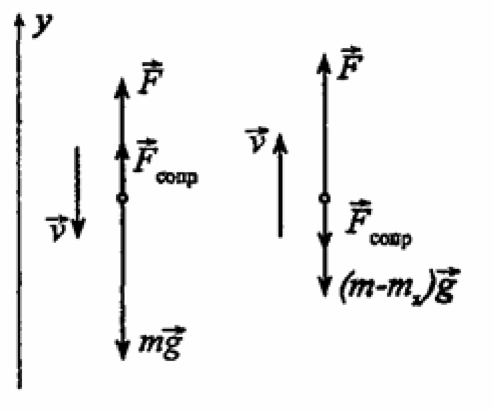
Розв'язання

По другому закону Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{опор.} = 0; \\ \vec{F} + \vec{F}_{опор.} + (m - m_x)\vec{g} = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

або в проекціях на вісь y:

$$\begin{cases} F - mg + F_{опор} = 0 \\ F - F_{опор} - (m - m_x)g = 0 \end{cases}. \tag{2}$$



Перше рівняння отриманої системи (2) описує рух аеростату, що опускається, друге – аеростату, що піднімається. Розкривши дужки і склавши перше рівняння з другим, отримаємо: $m_x = \frac{2(mg - F)}{g} = 2(m - \frac{F}{g})$; $m_x = 752$ кг.

2.2. До нитки підвішений вантаж масою $m = 1$ кг Знайти силу натягнення нитки Т, якщо нитку з вантажем: а) піднімати з прискоренням a=5 м/с^2; б) опускати з тим же прискоренням $a = 5$ м/с^2.

Розв'язання

В обох випадках, а і б, використаємо другий закон Ньютона.

1) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ або $T - mg = ma$, звідси $T = ma_1 + mg = m(a_1 + g)$; Т=14,8 Н.

2) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ або $-mg + T = -ma_2$, звідси $T = mg - ma_2 = m(g - a_2)$ Т=4,8 Н.

2.3. Автомобіль масою m = 1020 кг, рухаючись рівноуповільнено, зупинився через час t = 5 с, пройшовши шлях s = 25 м. Знайти початкову швидкість v_0 автомобіля і силу гальмування F.

Розв'язання

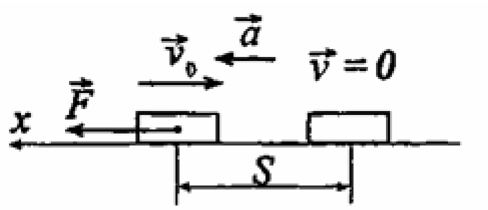
По другому закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ або в проекції на вісь *x:*

$$F = ma. \qquad (1)$$

Рівняння руху при рівноуповільненому русі автомобіля мають вид:

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \qquad (2)$$

$$v_0 - at. \qquad (3)$$



Оскільки кінцева швидкість автомобіля v=0, то з (3) початкова швидкість автомобіля $v_0 = at$. Підставляючи цей вираз у (2), знайдемо

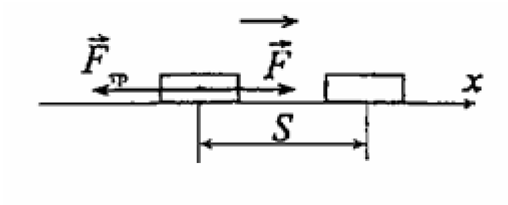
$$a = \frac{2S}{t^2}. \qquad (4)$$

Підставивши (4) в (1), отримаємо: $F = \frac{2Sm}{t^2}; F = 2{,}04$ кН.

2.4. Яку силу F треба прикласти до вагону, що стоїть на рейках, щоб вагон почав рухатися рівноприскорено і за час t = 30 с пройшов шлях s = 11 м? Маса вагону m = 16 т. Під час руху на вагон діє сила тертя $F_{тер.}$, яка дорівнює 0,05 діючої на нього сили тяжіння mg.

Розв'язання

По другому закону Ньютона $\vec{F} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}$ або в проекції на вісь x: $F - F_{тер.} = ma$, звідки $F = ma + F_{тер.}$.



Оскільки рух рівноприскорений і v_0=0, то шлях $S = at^2/2$, звідки $a = \frac{2S}{t^2}$.

За умовою $F_{тер.}$= 0,05 mg, тоді $F = m \cdot \frac{2S}{t^2} + 0{,}05mg; F = 8{,}2$кН.

2.5. Тіло масою m=0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху s від часу t дається рівнянням $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де С = 5 м/с^2 і D = 1 м/с^3. Знайти силу F, що діє на тіло в кінці першої секунди руху.

Розв'язання

По другому закону Ньютона $F = ma$, де $a = d^2s / dt^2$.

$\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 2C - 6Dt = a$ звідси $F = m(2c - 6Dt); F = 2$Н.

2.6. Молекула масою m = 4,65·10^{-26} кг, що летить із швидкістю v = 600 м/с, ударяється об стінку судини під кутом α = 60° до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти імпульс сили $F\Delta t$, отриманий стінкою під час удару.

Розв'язання

По другому закону Ньютона $F\Delta t$=$m\Delta v$. Вважаючи позитивним напрям нормалі, зовнішній до стінки, отримаємо: $\Delta v = v_2 \cos\alpha - (-v_1 \cos\alpha)$; $\Delta v = v_2 \cos\alpha + v_1 \cos\alpha$.

Таким чином, отримаємо $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$; $F\Delta t$=2,8·10 - 23Н·с.

2.7. Струмінь води перерізом S = 6 см^2 ударяється об стінку під кутом α = 60° до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти силу F, що діє на стінку, якщо відомо, що швидкість руху води в струмені v=12 м/с.

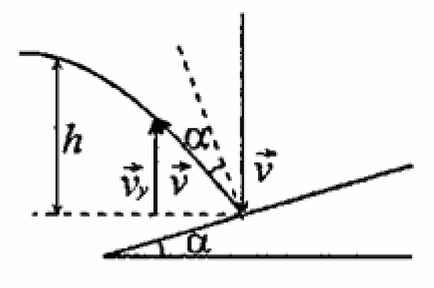
Розв'язання

За час Δt об стінку ударяється маса води:

$$m = lS\rho = Sv\Delta t\rho\,, \qquad (1)$$

де S – поперечний переріз струменя, ρ – густина води. За законом збереження імпульсу $F\Delta t = m\Delta v$, звідки

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t}. \qquad (2)$$



Маємо $\Delta v = v_1 cos\alpha - (-v_2 cos\alpha) = cos\alpha(v_1 + v_2)$. За умовою $v_1 = v_2 = v$, звідси

$$\Delta v = 2v\,cos\,\alpha\,. \qquad (3)$$

Підставляючи (1) і (3) в (2), отримаємо $F = \dfrac{Sv\Delta t\rho \cdot 2v\,cos\,\alpha}{\Delta t} = 2Sv^2\rho\,cos\,\alpha = 86$ Н.

2.8. Куля на нитці підвішена до стелі трамвайного вагону. Вагон гальмує, і його швидкість за час t=3 с рівномірно зменшується від v_1 = 18 км/ч до v_2 = 6 км/ч. На який кут відхилиться при цьому нитка з кулею?

Розв'язання

Розглянемо положення кулі щодо системи відліку, пов'язаної із стелею вагону. Оскільки вагон рухається з прискоренням, то система є неінерціальною. Рівняння руху у векторній формі:

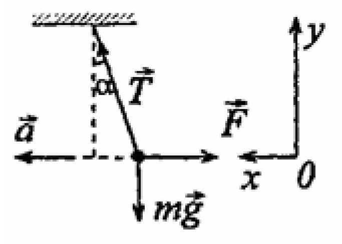
$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0, \qquad (1)$$

де $F = -ma$, тоді рівняння (1) в проекціях на вісь *x*:

$$T \sin\alpha = ma \qquad (2)$$

і на вісь *y*:

$$T \cos\alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

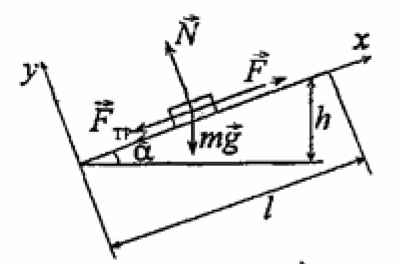


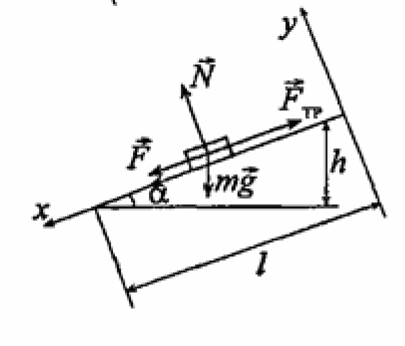
Розділивши (2) на (3), отримаємо $tg\alpha = \dfrac{a}{g}$, звідки $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$ або враховуючи, що $a = \dfrac{\Delta v}{t}, \alpha = arctg(\Delta v / gt)$. Підставляючи числові дані, отримаємо $\alpha \approx 6^\circ$.

2.9. На автомобіль масою m = 1 т під час руху діє сила тертя $F_{тер}$, рівна 0,1 його ваги. Знайти силу тяги F, що розвивається мотором автомобіля, якщо автомобіль рухається з постійною швидкістю: а) в гору з ухилом 1 м на кожних 25 м шляху; б) під гору з тим же ухилом.

Розв'язання

Рівняння руху автомобіля у векторній формі $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + F_{тер} + \vec{F}$; $v = const$, отже $a = 0$.





1) У проекції на вісь x: $0 = -mg\,sin\,\alpha - F_{тер.} + F$; на вісь y: $0 = N - mg\,cos\,\alpha$, де $sin\,\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}04$, $cos\,\alpha = 0{,}999$, звідки $N = mg\,cos\,\alpha$. $F_{тер.} = kN = kmg\,cos\,\alpha$; $F = mg\,sin\,\alpha + kmg\,cos\,\alpha$; $F = mg(sin\,\alpha + k\,cos\,\alpha)$ або F = 1,37 кН.

2) У проекції на вісь x: $0 = F + mg\,sin\,\alpha - F_{тер.}$, на вісь y: $N = mg\,cos\,\alpha$. $F = F_{тер.} - mg\,sin\,\alpha;$ $F = kmg\,cos\,\alpha - mg\,sin\,\alpha;$ $F = mg(k\,cos\,\alpha - sin\,\alpha).$ F = 590 Н.

2.10. Невагомий блок укріплений у вершині похилої площини, що складає з горизонтом кут α = 30°. Гирі 1 і 2 однакової маса $m_1 = m_2 = 1$ кг звязані ниткою і перекинуті через блок. Знайти прискорення a, з яким рухаються гирі, і силу натягнення нитки T. Тертям гирі об похилу площину і тертям в блоці нехтувати.

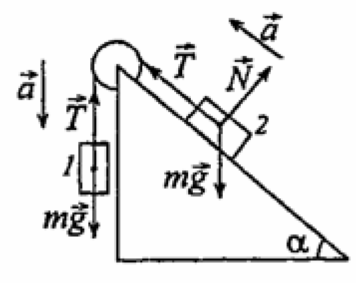
Розв'язання

Нехай $m_1 = m_2 = m$. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для першої і другої гирі в проекціях на напрям їх руху з урахуванням $T_1 = T_2 = T$:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - mg\,sin\,\alpha = ma \end{cases}. \qquad (1)$$

З першого рівняння системи (1) маємо

$$T = m(g - a). \tag{2}$$



Підставимо (2) в (1), отримаємо: $g(1 - sin\alpha) + 2a$, звідки $a = g(1 - sin\alpha)/2$. Підставимо числові значення, отримаємо: a = 2,45 м/с^2 і Т = 7,35 Н.

2.11. При підйомі вантажу масою m = 2 кг на висоту h = 1 м сила F здійснює роботу A = 78,5 Дж. З яким прискоренням a піднімається вантаж?

Розв'язання

По другому закону Ньютона в проекції на напрям рухи вантажу маємо $ma = F - mg$, звідки $F = ma + mg$.

За умовою роботу A здійснює сила F, отже

$$A = Fh\cos 0 = Fh = mah + mgh, \tag{1}$$

тобто робота A йде на збільшення потенційної енергії вантажу і на надання йому прискорення. З рівняння (1) знайдемо $a = \dfrac{A - mgh}{hm}$; a = 29,4 м/с^2.

2.12. Яку роботу A необхідно виконати, щоб змусити тіло масою m=2кг: а) збільшити швидкість v_1=2 м/с до v_2=5 м/с; б) зупинитися при початковій швидкості v_0=8 м/с?

Розв'язання

Виконана робота піде па приріст кінетичної енергії:

а) $A_1 = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$; $A_1 = \dfrac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$; $A_1 = 21$ Дж;

б) $A_2 = W_{k2} - W_{k1}$. Оскільки $W_{k2} = 0$ то $A_2 = -W_{k1} = -mv_0^2 / 2$; $A = -6{,}4$. Знак «-» говорить про те, що робота здійснюється силою тертя.

2.13. Знайти роботу А, яку необхідно виконати, щоб збільшити швидкість руху тіла масою m = 1 т від v_1 = 2 м/с до v_2 = 6 м/с на шляху s = 10м. На всьому шляху діє сила тертя $F_{тер.}$ = 2 Н.

Розв'язання

Частина виконаної роботи піде на приріст кінетичної енергії, а інша частина – на подолання сили тертя. $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + A_{тер.}$, де $A_{тер.} = F_{тер.} \cdot s$, тоді $A = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + F_{тер.}s; A = 16{,}02$ кДж.

2.14. Яку масу m бензину витрачає двигун автомобіля на шляху s = 100 км, якщо при потужності двигуна N = 11 кВт швидкість його руху v = 30 км/ч? К.п.д. двигуна η = 0,22, питома теплота згорання бензину q = 46 МДж/кг.

Розв'язання

При переміщенні автомобіля на відстань s його двигун здійснює роботу $A = \frac{Nt}{\eta} = \frac{Ns}{\eta v}$. При цьому витрачається маса бензину $m = \frac{A}{q} = \frac{Ns}{q\eta v}; m = 13$ кг.

2.15. Камінь падає з деякої висоти протягом часу t = 1,43 с. Знайти кінетичну $W_к$ і потенційну $W_п$ енергії каменя в середній точці шляху. Маса каменя m = 2кг

Розв'язання

У верхній точці камінь володів потенційною енергією $W_n = mgH$ де $H = \frac{gt^2}{2}$ (t – час падіння до землі). Потенційна енергія каменя в середній точці шляху $W_n = mgh$ де $h = \dfrac{H}{2}$. Таким чином $W_n = mg\dfrac{H}{2} = \dfrac{mg^2t^2}{4}; W_n = 98$ Дж. Кінетичну енергію камінь набув за рахунок спаду потенційної енергії. У середній точці шляху $W_к$=$W_п$=98 Дж, оскільки $mgH - mgh = mg\dfrac{H}{2} = W_k$.

2.16. Тіло масою m = 10 г рухається по колу радіусом R = 6,4 см. Знайти тангенціальне прискорення a_τ тіла, якщо відомо, що до кінця другого обороту після початку руху його кінетична енергія $W_к$ = 0,8 МДж.

Розв'язання

Знайдемо кутове прискорення:

$$a_\tau = \varepsilon R; \tag{1}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \tag{2}$$

Кутова швидкість $\omega = 2\pi n = \dfrac{2\pi N}{t}$, звідси

$$t = \frac{2\pi N}{\omega}. \tag{3}$$

З іншої сторони

$$\omega = \frac{v}{R}. \tag{4}$$

Швидкість знайдемо з рівняння кинетичної енергії: $W_k = \dfrac{mv^2}{2}$, звідси

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}. \tag{5}$$

Підставивши рівняння (5) в (4), отримаємо

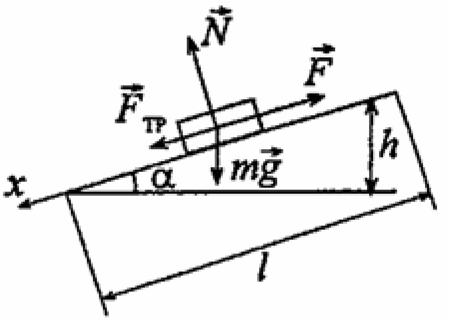
$$\omega = \sqrt{\frac{2W_k}{mR^2}}. \tag{6}$$

Підставивши рівняння (3) в (2), з урахуванням (6), знайдемо $\varepsilon = \frac{\omega^2}{2\pi N} = \frac{2W_k}{mR\pi N}$. Тоді з (1) $a_\tau = \frac{W_k R}{mR^2 \pi N} = \frac{W_k}{mR\pi N}; a_\tau \approx 0{,}2$м/с^2.

2.17. Автомобіль масою m = 2 т рухається в гору з ухилом 4 м на кожних 100 м шляху. Коефіцієнт тертя k = 0,08. Знайти роботу А, що здійснюється двигуном автомобіля на шляху s = 3 км., і потужність N що розвивається двигуном, якщо відомо, що шлях s = 3 км був пройдений за час t = 4 хв.

Розв'язання

У разі рівномірного руху автомобіля a=0, тоді згідно другому закону Ньютона сила тяги двигуна $F = F_{тер.} + mg\,sin\alpha$ або $F = mg(k\,cos\,\alpha + sin\,\alpha)$ де $sin\,\alpha = h/l$; $sin\alpha$ = 0,04; $cos\,\alpha$ = 0,999.

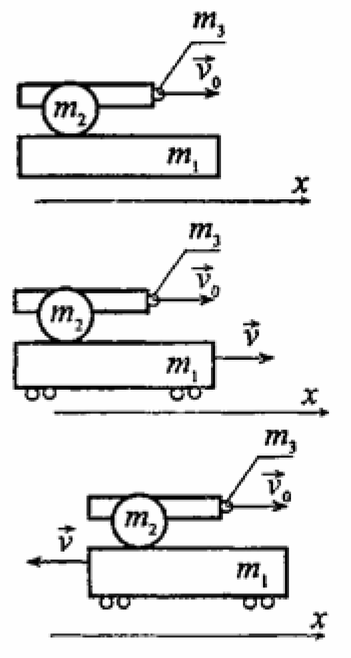


Робота сили F на шляху s: $A = Fs = mgs(k\,cos\,\alpha + sin\,\alpha)$; А = 7 МДж. Потужність двигуна $N = A/t$; N = 29,2 кВт.

2.18. На рейках стоїть платформа масою m_1 = 10 т. На платформі закріплено гармата масою m_2 = 5 т, з якого робиться постріл уздовж рейок. Маса снаряда m_3 = 100 кг; його початкова швидкість відносно гармати v_0 = 500 м/с. Знайти швидкість u платформи в перший момент після пострілу, якщо: а) платформа стоїть нерухомо; б) платформа рухалася із швидкістю v = 18 км/год і постріл був зроблений в напрямі, протилежному напряму її руху.

Розв'язання

1) При нерухомій платформі початкова швидкість снаряда відносно землі рівна його швидкості v_0 відносно гармати. Систему «платформа-гармата-снаряд» можна вважати замкненою в проекції на вісь x за умови, що силою тертя кочення платформи можна нехтувати.



Тоді в проекції на вісь x імпульс системи до пострілу $p = (m_1 + m_2 + m_3)v = 0$, оскільки $v = 0$. Імпульс системи після пострілу $p' = m_3 v_0 + (m_1 + m_2 +)u$. За законом збереження імпульсу $p = p'$ або $m_3 v_0 + (m_1 + m_2)u = 0$, звідки $u = \frac{m_3 v_0}{m_1 + m_2} = 5{,}14\ {км}/{год}$. Знак «-» вказує, що платформа почала рухатися в напрямі, протилежному напряму руху снаряда.

2) Якщо постріл був зроблений у напрямі руху платформи, то початкова швидкість снаряда відносно землі рівна $v_0 + v$. На підставі закону збереження імпульсу маємо

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = m_3(v_0 + v) + (m_1 + m_2)u \qquad (1),$$

звідки $u = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v - m_3(v_0 + v)}{m_1 + m_2}; u = 6 км/год$.

3) Якщо постріл був зроблений в напрямі, протилежному напряму руху платформи, то при $v_0>0$ маємо $v<0$. Тоді рівняння (1) має вигляд: $-(m_1+m_2+m_3)v = m_3(v_0 - v)+(m_1+m_2)u$, звідки

$$u = -\frac{(m_1+m_2+m_3)v + m_3(v_0 - v)}{m_1+m_2} = -30\ км/год$$

2.19. Ковзаняр масою $M = 70\ кг$, стоячи на ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямі камінь масою $m=3кг$ із швидкістю $v = 8\ м/с$. На яку відстань s відкотиться при цьому ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів об лід $k = 0,02$?

Розв'язання

Рух ковзаняра є рівноуповільненим, пройдений ним шлях $s = \dfrac{v_0^2}{2a}$. За законом збереження імпульсу $Mv_0 = mv$, звідки $v_0 = \dfrac{mv}{M}$.

Прискорення a можна знайти по другому закону Ньютона: $F_{тер} = ma$. Оскільки $F_{тер} = kmg$, то $ma = kmg$; $a = kg$. Підставивши отримані вирази в перше рівняння, отримаємо $s = \dfrac{m^2v^2}{2M^2kg}$; $s = 0,3м$.

2.20. Із гармати масою $m_1 = 5$ т вилітає снаряд масою $m_2 = 100$ кг. Кінетична енергія снаряда при вильоті $W_{k2}=7,5\ Мдж$. Яку кінетичну енергію W_{k1} отримує гармата унаслідок віддачі?

Розв'язання

Згідно закону збереження імпульсу $m_1v_1 = m_2v_2$. Кінетична енергія гармати відразу після пострілу $W_{k1} = \dfrac{m_1v_1^2}{2}$. Кінетична енергія снаряда

$W_{k2} = \dfrac{m_1 v_2^2}{2}$; $v_1 = \dfrac{m_2 v_2}{m_1}$,а $v_2^2 = \dfrac{2W_{k2}}{m_2}$ тоді $v_1^2 = \dfrac{m_2^2 2W_{k2}}{m_1^2 \cdot m_2}$. Таким чином, отримаємо $W_{k1} = \dfrac{m_1 2m_2 W_{k2}}{2m_1^2} = \dfrac{m_2}{m_1} W_{k2}; W_{k1} = 150 кДж$

2.21. Тіло масою m_1 = 5 кг ударяється об нерухоме тіло масою m_1 = 2,5 кг Кінетична енергія системи двох тіл безпосередньо після удару стала $W_к$ = 5 Дж. Вважаючи удар центральним і непружним, знайти кінетичну енергію $W_{к1}$ першого тіла до удару.

Розв'язання

Рух здійснюється уздовж горизонтальної осі. Згідно закону збереження імпульсу

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u, \tag{1}$$

де v_1 – швидкість першого тіла до удару, u – швидкість системи двох тіл після удару.

Кінетична енергія першого тіла до удару:

$$W_{k1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}. \tag{2}$$

З (1) $v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot u}{m_1}$.

Знайдемо u із виразу для кінетичної енергії системи двох тіл після удару: $W_k = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}$, звідки $u = \sqrt{\dfrac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}$, тоді

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}}{m_1}, \text{ або } v_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}}{m_1}. \tag{3}$$

Підставивши (3) в (2) отримаємо $W_{k1} = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}{2 \cdot m_1^2}$;

$W_{k1} = \frac{W_k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1}$. $W_{k1} = 7{,}5$ Дж.

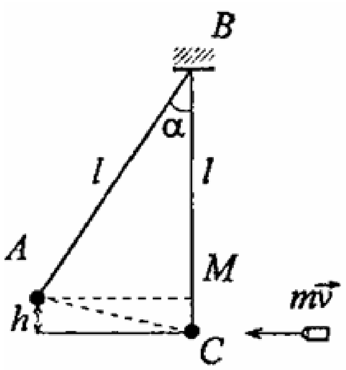
2.22. Куля, що летить горизонтально, потрапляє в тіло, підвішене на невагомому жорсткому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше за масу тіла. Відстань від центру тіла до точки підвісу стрижня $l = 1$ м. Знайти швидкість v кулі, якщо відомо, що стрижень з тілом відхилився від удару кулі на кут $\alpha = 10°$.

Розв'язання

Силу опору повітря не враховуємо, отже, систему «куля - тіло» можна вважати замкнутою. Запишемо закон збереження імпульсу і закон збереження енергії для даної системи:

$$mv = (m + M) \cdot u, \tag{1}$$

де u – швидкість тіла разом з кулею після удару.



У результаті взаємодії тіла з кулею, він набув кінетичну енергію, яка після відхилення стрижня на кут α перейшла в потенціальну енергію:

$$\frac{(m + M) \cdot u^2}{2} = (M + m) \cdot g \cdot h \tag{2}$$

З (1) виразимо u: $u=\dfrac{mv}{(m+M)}$, або $u=\dfrac{mv}{1001\cdot m}=\dfrac{v}{1001}$. З (2) отримаємо $\dfrac{u^2}{2}=g\cdot h$, $\dfrac{v^2}{2\cdot(1001)^2}=g\cdot h$. Знайдемо h: $BM=l\cdot cos\,\alpha$; $h=l-l\cdot cos\,\alpha=l\cdot(1-cos\,\alpha)$. Тоді $v=1001\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot l\cdot(1-cos\,\alpha)}$.

$v\approx 550$ м/с

2.23. На яку частину зменшиться вага тіла на екваторі унаслідок обертання Землі навколо осі?

Розв'язання

На екваторі на тіло діє сила тяжіння

$$F=G\cdot\frac{m\cdot M}{R^2}, \tag{1}$$

(M − маса Землі; m − маса тіла; R − радіус Землі; G − гравітаційна постійна) та сила реакції опори, при цьому тіло бере участь у добовому обертанні Землі і рухається по колу радіусом R. Запишемо рівняння на підставі другого закону Ньютона $F-N=m\omega^2 R$, де $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ − кутова швидкість; T − період обертання Землі навколо своєї осі (T=86400 с). Тоді $F-N=m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R$, звідки

$$N=F-m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R. \tag{2}$$

По третьому закону Ньютона вага тіла на екваторі:

$$P_E=N \tag{3}$$

Вага тіла, що покоїться, для будь-якої точки Землі чисельно рівна силі тяжіння

$$P=mg. \tag{4}$$

Відносна зміна ваги тіла:

$$\delta = \frac{P - P_E}{P} \tag{5}$$

Вирішуючи спільно рівняння (1) - (3), отримаємо

$$P_E = G\frac{m \cdot M}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}. \tag{6}$$

Підставляючи (4) і (6) в (5) отримаємо:

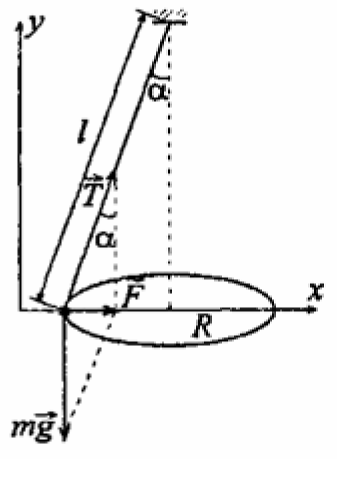
$$\delta = 1 - \frac{G \cdot M}{gR^2} - \frac{4\pi^2 R}{gT^2}. \tag{7}$$

Приймемо прискорення вільного падіння g=9,8 м/с. Підставляючи числові дані в (7), отримаємо δ = 0,34 %.

2.24. Гирка масою m = 50 г, прив'язана до нитки завдовжки l = 25 см, описує в горизонтальній площині коло. Частота обертання гирки n = 2 об/с. Знайти силу натягнення нитки Т.

Розв'язання

У горизонтальній площині на гирку діє сила $F = T \cdot sin\,\alpha$. Тоді за другим законом Ньютона $T \cdot sin\,\alpha = ma_n$, де $sin\,\alpha = \dfrac{R}{l}$.

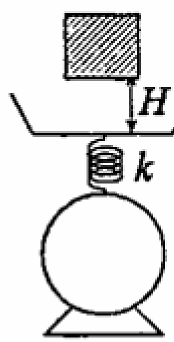


Враховуючи, що $a_n = \omega^2 R = (2\pi \cdot n)^2 R$, запишемо: $(2\pi \cdot n)^2 Rm = T\dfrac{R}{l}$, звідки $T = (2\pi \cdot n)^2 lm$. Т = 1,96 Н.

2.25. Груз масою m = 1 кг падає на чашку вагів з висоти Н = 10 см. Які показання вагів F у момент удару, якщо після заспокоєння гойдань чашка вагів опускається на h = 0,5 см?

Розв'язання

За законом збереження енергії у момент удару $W_{n1} = W_{n2}$, де $W_{n1} = mgH$, а $W_{n2} = \dfrac{kx_1^2}{2}$. Звідси $mgH = \dfrac{kx_1^2}{2}$; $x_1 = \sqrt{\dfrac{2mgH}{k}}$ – деформація пружини вагів у момент удару.



Після заспокоєння гойдань наступає рівновага $mg = F_2$, де $F_2 = kx_2$, за законом Гука, причому $x_2 = h$. Тоді $mg = kh$; $k = \dfrac{mg}{h}$. Свідчення вагів у момент удару $F = mg + F_1$, де $F_1 = kx_1 = k\sqrt{\dfrac{2mgH}{k}}$ – за законом Гука $F = mg + k\sqrt{\dfrac{2mgH}{k}}$; $F = mg + \sqrt{2mgHk}$; $F = mg + \sqrt{2mgH\dfrac{mg}{h}}$; $F = mg + mg\sqrt{\dfrac{2H}{h}}$; $F = mg\left(1 + \sqrt{\dfrac{2H}{h}}\right)$. Звідки $F = 72{,}5$ Н.

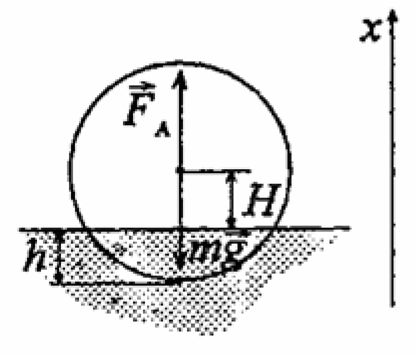
2.26. М’яч радіусом R = 10 см плаває у воді так, що його центр мас знаходиться на H=9 см вище за поверхню води. Яку роботу необхідно виконати, щоб занурити м’яч у воду до діаметральної площини?

Розв’язання

М’яч плаває, якщо сила тяжіння, що діє на нього, врівноважується силою Архімеда, тобто $mg = F_A$, або

$$mg = \rho_0 V_0 g , \qquad (1)$$

де V_0 – об’єм сегмента заввишки h, що знаходиться у воді в рівновазі, ρ_0 – щільність води, m – маса м’яча.



Очевидно, що $H + h = R$, тобто радіусу м’яча. Якщо тепер занурити м’яч у воду на глибину x, то сила Архімеда перевищить силу тяжіння, що діє на м’яч, і результуюча сила, що виштовхує м’яч з води, буде

$$F_x = F_A^{/} - mg . \qquad (2)$$

Проти цієї сили F_x і повинна бути виконана робота. Сила Архімеда:

$$F_A^{/} = \rho_0 V g , \qquad (3)$$

де V – об’єм сегмента заввишки $h + x$. З (1) - (3) маємо $F_x = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g (V - V_0) = \rho_0 g V_x$, V_x – об’єм кульового шару висотою x. Кульовий сегмент заввишки x має об’єм кульового шару $V_x = V - V_0 = \dfrac{\pi (x+h)^2}{3}(3R - (x+h)) - \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$. Тоді

$$F_x = \rho_0 g V_x = \frac{\pi \rho_0 g}{3}\left(3R(x+h)^2 - (x+h)^3 - h^2(3R - h)\right). \qquad (4)$$

Робота, яку необхідно виконати при зануренні м’яча до діаметральної площини, буде

$$A = \int_0^H F_x dx \,. \qquad (5)$$

Підставимо (4) в (5), проінтегруємо і врахуємо, що $H + h = R$, отримаємо, після підстановки даних завдання, А = 0,74 Дж.

2.27. Знайти силу гравітаційної взаємодії F між двома протонами, що знаходяться на відстані $r = 10^{-6}$ м один від одного. Маса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Розв’язання

Сила гравітаційної взаємодії виражається $F = G\frac{m^2}{r^2}$. Підставляючи числові дані, отримаємо : $F = 1{,}86 \cdot 10^{-11}$.

Порівняти прискорення вільного падіння у поверхні Місяця $g_Л$ з прискоренням вільного падіння у поверхні Землі $g_З$.

Розв’язання

Відповідно до закону усесвітнього тяжіння, тіло масою m, що знаходиться у поверхні Землі, притягується нею з силою $P = G\frac{m \cdot M_З}{R_З^2}$, де $M_З$ – маса Землі, $R_З$ – її радіус. З іншого боку, $P = mg$. Прирівнюючи ці величини, знайдемо, що $g_З = G\frac{M_З}{R_З^2}$. Прискорення вільного падіння у поверхні Місяця: $g_М = G\frac{M_М}{R_М^2}$, де $M_М$ і $R_М$ – маса і радіус Місяця. Звідси $\frac{g_М}{g_З} = \frac{M_М \cdot R_З^2}{R_М^2 \cdot M_З}$, $g_М = 0{,}165 \cdot g_З$.

2.28. Знайти лінійну швидкість *v* руху Землі по круговій орбіті.

Розв'язання

Лінійна швидкість руху по колу $v = \omega \cdot R$, де ω – частота обертання, R – відстань до Сонця. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, де T – період обертання Землі навколо Сонця. Звідси $v = 30$ км/с.

2.29. На якій висоті до від поверхні Землі прискорення вільного падіння $g = 1 \, м/с^2$?

Розв'язання

У поверхні Землі на тіло масою m діє сила $P = mg = G\frac{m \cdot M}{R^2}$, де M та R – маса та радіус Землі, а на висоті h – $P_h = mg_h = G\frac{m \cdot M}{(R+h)^2}$. Тоді $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$. Виразимо h: $(R+h)^2 = \frac{g \cdot R^2}{g_h}$; $h = \sqrt{\frac{g \cdot R^2}{g_h}} - R$. Підставимо числові значення та отримаємо: $h = 13590$ км.

РОЗДІЛ 3

ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

3.1. Основні визначення, закони та рівняння

Під час розгляду динаміки обертального руху матеріальної точки вводяться поняття, які мають фізичну аналогію з масою тіла в динаміці поступального руху.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називається добуток маси точки на квадрат відстані до осі обертання:

$$I = mr^2,$$

де I – момент інерції, вимірюється в кг·м^2.

Якщо розглядати тіло, що обертається, як сукупність матеріальних точок, то момент інерції тіла – це сума моментів інерцій усіх точок, що складають це тіло, відносно розглянутої осі:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 .$$

Якщо тіло однорідне, тобто є безперервний розподіл мас, ця сума зводиться до інтегралу:

$$I = \int_m r^2 dm,$$

де $m = f(r)$ - відома функція розподілу маси за координатами тіла. Інтегрування здійснюється за всім об'ємом тіла.

Момент інерції для тіл правильної геометричної форми:

1. однорідний циліндр (диск):

$$I = \frac{1}{2} mr^2;$$

2. однорідна куля:

$$I = \frac{2}{5} mr^2;$$

3. однорідний стрижень з віссю, що проходить через середину перпендикулярно до його довжини:

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

Якщо момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас – відомий, то момент інерції тіла щодо будь-якої іншої рівнобіжної осі визначається *теоремою Штейнера:* момент інерції тіла відносно будь-якої осі обертання I дорівнює його моменту інерції I_0 відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас тіла, складеному з добутком маси тіла m на квадрат відстані між осями a:

$$I = I_0 + ma^2,$$

де a – відстань від осі до центра тяжіння.

Кінетична енергія тіла, що обертається:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Якщо тіло до того ж бере участь і у поступальному русі (котиться), то

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = W_k^{пост} + W_k^{об} .$$

Момент сили – векторний добуток сили на радіус-вектор, що поєднує точку прикладання сили та вісь обертання:

$$\vec{M} = \left[\vec{F}, \vec{r}\right],$$

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} ,$$

де ε – кутове прискорення.

Модуль моменту сили є:

$$M = F \cdot r \cdot sin\,\alpha ,$$

де α – кут між $\vec{F}$ та $\vec{r}$.

Момент імпульсу матеріальної точки – векторний добуток імпульсу матеріальної точки на радіус-вектор її положення відносно осі обертання:

$$\vec{L}_i = [\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i],$$

$$\vec{L}_i = I_i \cdot \vec{\omega}_i .$$

Закон збереження моменту імпульсу: Момент імпульсу замкненої системи з часом не змінюється:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot \vec{\omega}_i = const .$$

3.2. Приклади розв'язання задач

3.1. Знайти момент інерції J і момент імпульсу L земної кулі відносно осі обертання.

Розв'язання

Момент інерції кулі $J = \frac{2}{5}MR^2$, підставляючи значення маси і радіуса Землі, отримаємо $J = 97{,}36 \cdot 10^{36}$ кг·м^2. Момент імпульсу $L = J \cdot \omega$, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$, отже, $L = \frac{2J\pi}{T}$. Період обертання Землі T = 24 години. Підставляючи числові дані, отримаємо $L = 7 \cdot 10^{33}\, кг \cdot м^2 / с$.

3.2. Маховик, момент інерції якого $J = 63{,}6$ кг·м^2 обертається з кутовою швидкістю ω = 31,4 рад/с. Знайти момент сил гальмування М, під дією якого маховик зупиняється через час t = 20 с. Маховик вважати однорідним диском.

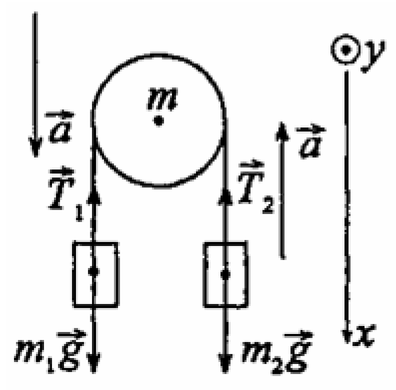
Розв'язання

Момент сил гальмування $M = J \cdot \varepsilon$, де ε – кутове прискорення, яке дорівнює $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, оскільки маховик обертається рівносповільнено. Тоді $M = \frac{\omega \cdot J}{t}$; $M \approx 100\, Н \cdot м$.

3.3. Дві гирі з масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг зв'язані ниткою, перекинутою через блок масою m=1 кг. Знайти прискорення a, з яким рухаються гирі, і сили натягнення T_1 і T_2 ниток, до яких підвішені гирі. Блок вважати однорідним диском. Тертям нехтувати.

Розв'язання

Запишемо у векторній формі рівняння поступального руху першої і другої гирі: $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$; $m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$ і рівняння обертального руху диска $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, де M_1 – момент сили натягнення нитки T_1, M_2 – момент сили натягнення нитки T_2.



Спроектуємо перші два рівняння на вісь x, а останнє на вісь y і додамо рівняння кінематичного зв'язку. Отримаємо систему 4 рівнянь:

$$m_1 a = m_1 g - T_1; \tag{1}$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2; \tag{2}$$

$$J\varepsilon = RT_1 - RT_2; \tag{3}$$

$$a = \varepsilon R. \tag{4}$$

Підставимо (4) в (3):

$$J\frac{a}{R} = R(T_1 - T_2). \tag{5}$$

Віднімемо (2) з (1), підставимо в отриманий вираз (5) і знайдемо:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} = 2{,}8\ м/с^2. \tag{6}$$

Підставляючи (6) в (1) і (2), отримаємо $T_1 = m_1(g - a)$; T_1 = 14 Н. $T_2 = m_2(g - a)$; T_2 = 12,6 Н.

3.4. Диск масою m = 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю v = 4 м/с. Знайти кінетичну енергію $W_к$ диска.

Розв'язання

У завданні розглядається так званий «плоский рух». Повна кінетична енергія диска складається з кінетичної енергії поступальної руху точки центру мас і кінетичної енергії обертання відносно осі, що проходить через центр мас: $W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$. Оскільки $J = \frac{mR^2}{2}$ і $\omega = \frac{v}{R}$, де m – маса диска, R – радіус диска, то $W_k = \frac{3mv^2}{4}$. $W_k = 24$ Дж.

3.5. Обруч та диск однакової маси $m_1 = m_2$ котяться без ковзання з однією і тією ж швидкістю v. Кінетична енергія обруча $W_{k1} = 40$ Н. Знайти кінетичну енергію W_{k2} диска.

Розв'язання

Припустимо $m_1 = m_2 = m$. Кінетична енергія обруча і диска складається з кінетичної енергії поступального руху і кінетичної енергії обертання:

$$W_{k1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2}, \tag{1}$$

$$W_{k2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2}. \tag{2}$$

Момент інерції обруча $J = mR_1^2$. Кутова швидкість $\omega_1 = \frac{v}{R_1}$. Момент інерції диска $J = \frac{1}{2}mR_2^2$; частота $\omega_2 = \frac{v}{R_2}$. Проведемо наступні перетворення: $J_1\omega_1^2 = mR_1^2\frac{v^2}{R_1^2} = mv^2$; $J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}mR_2^2\frac{v^2}{R_2^2} = \frac{1}{2}mv^2$. Тоді, з урахуванням (1) та (2), можна записати $W_{k1} = mv^2$, $W_{k2} = \frac{3mv^2}{4}$ або $W_{k2} = \frac{3W_{k1}}{4}$. $W_{k2} = 30$ Дж.

3.6. Кінетична енергія валу, що обертається з частотою n = 5 об/с, $W_k = 60$ Дж. Знайти момент імпульсу L валу.

Розв'язання

Момент імпульсу – вектор, напрям якого визначається за правилом векторного добутку $\vec{L} = \left\lfloor \vec{R} \times \vec{p} \right\rfloor$, де $\vec{p} = m\vec{v}$, а модуль рівний

$$L = Rp\,sin\,\alpha = mvR, \qquad (1)$$

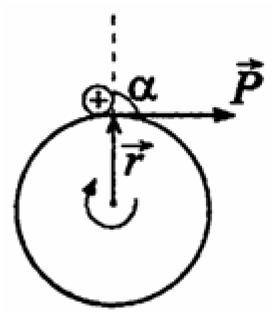
оскільки $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Кінетична енергія валу:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (2)$$

де

$$J = \frac{mR^2}{2}, \qquad (3)$$

$$\omega = 2\pi n. \qquad (4)$$



Вирішуючи спільно рівняння (2) - (4) отримаємо: $W_k = mR^2\pi^2 n^2$, звідки

$$m = \frac{W_k}{R^2\pi^2 n^2}, \qquad (5)$$

$$v = 2\pi nR. \qquad (6)$$

Підставивши (5) і (6) в (1), знайдемо $L = \frac{2W_k}{\pi n}$; $L = 7{,}6 \frac{кг \cdot м^2}{с}$.

3.7. Мідна куля радіусом R = 10 см обертається з частотою n = 2 об/с навколо осі, що проходить через її центр. Яку роботу А необхідно виконати, щоб збільшити кутову швидкість ω обертання кулі удвічі?

Розв'язання

Кінетична енергія обертання кулі $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$, де момент інерції кулі $J = \frac{2}{5}mR^2$. Робота зі збільшення кутової швидкості обертання кулі буде дорівнювати приросту її кінетичної енергії. $A = W_{k2} - W_{k1}$, де $W_{k1} = \frac{J{\omega_1}^2}{2}$; $W_{k2} = \frac{J{\omega_2}^2}{2} = \frac{4J\omega_1^2}{2}$. Звідси

$$A = \frac{4J\omega_1^2 - J\omega_1^2}{2} = \frac{3}{2}J\omega_1^2; \qquad (1)$$

$$\omega_1 = 2\pi n. \qquad (2)$$

Маса кулі $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3\ кг/м^3$, тоді

$$J = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho R^2 = \frac{8}{15}\pi R^2 \rho. \qquad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1), отримаємо $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15}\pi R^5 \rho 4\pi^2 n^2 = \frac{16}{15}\pi^3 R^5 \rho n^2$; А=34,1 Дж.

3.8. Колесо, обертаючись равноуповільнено, зменшило за час t = 1 хв. частоту обертання від n_1 = 300 об/хв. до n_2 = 180 об/хв. Момент інерції колеса $J = 2\,кг \cdot м^2$. Знайти кутове прискорення ε колеса, момент сил гальмування *M*, роботу *A* сил гальмування і число обертів *N*, зроблених колесом за час t = 1 хв.

Розв'язання

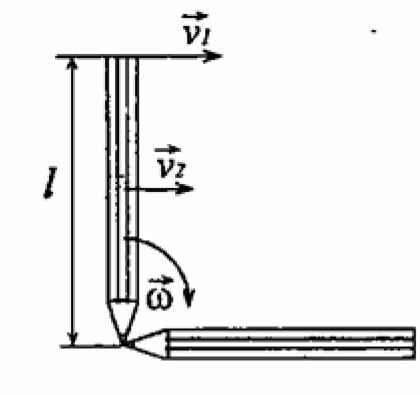
Перетворимо числові одиниці в систему СІ: t = 60 с, n_1 = 5 об/с, $n_2 = 3$ об/с. Оскільки обертання рівноуповільнене, то число обертів можна визначити так: $N = \dfrac{n_1 + n_2}{2} t$; $N = 240\,об$. Кутове прискорення $\varepsilon = \dfrac{\Delta\omega}{t}$. Маємо $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$, таким чином, $\varepsilon = \dfrac{2\pi(n_2 - n_1)}{t}$. Підставивши числові значення, отримаємо $\varepsilon = -0{,}21\,рад/с^2$. Момент сил гальмування $M = J\varepsilon$; M = 0,42 *Н·м*. Робота сил гальмування дорівнює приросту кінетичної енергії $-A = W_{k1} - W_{r2} = \dfrac{J\omega_2^2 - J\omega_1^2}{2}$;

$A = \dfrac{J}{2}\left((2\pi n_1)^2 - (2\pi n_2)^2\right) = 2\pi^2 J\left(n_1^2 - n_2^2\right)$; *A*=630 Дж.

3.9. Олівець завдовжки l = 15 см, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову швидкість ω і лінійну швидкість v матиме в кінці падіння середина і верхній кінець олівця?

Розв'язання

Розглянемо рух центру мас олівця.



У вертикальному положенні він має потенціальну енергію, яка при падінні переходить у кінетичну енергію обертання:

$$\frac{J\omega_1^2}{2} = mg\frac{l}{2}. \tag{1}$$

Момент інерції олівця відносно осі, що проходить через його кінець, знайдемо за теоремою Штейнера:

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2. \tag{2}$$

Підставивши (2) в (1), отримаємо $\frac{l\omega_1^2}{3} = g$, звідки $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$; $\omega_1 = 14\,{}^{рад}\!/_{с}$. Оскільки $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, а лінійна швидкість $v = \omega R$V, то швидкість кінця олівця $v_1 = \omega \cdot l = 2{,}1\,{}^{м}\!/_{с}$. Швидкість середини $v_2 = \omega \cdot \frac{l}{2} = 1{,}05\,{}^{м}\!/_{с}$.

3.10. Горизонтальна платформа масою m = 100 кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою $n_1 = 10$ об/хв. Людина масою $m_0 = 60$ кг стоїть при цьому на краю платформи. З якою частотою n_2 почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.

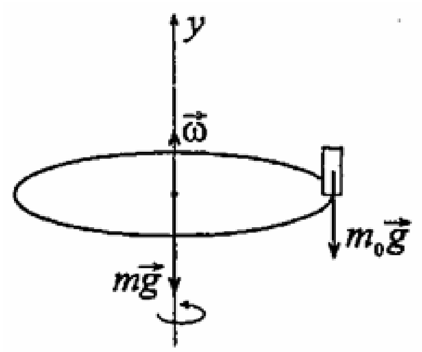
Розв'язання

Система «людина-платформа» замкнута в проекції на вісь y, оскільки моменти сил $M_{mg} = 0$ та $M_{m_0 g} = 0$ в проекції на цю вісь. Отже, можна скористатися законом збереження моменту імпульсу. У проекції на вісь y: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, де J_1 – момент інерції платформи з людиною, що стоїть на її краю, J_2 – момент інерції платформи з людиною, що стоїть в центрі, ω_1 та ω_2 – кутові швидкості платформи в обох випадках. Причому

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0 R^2, \qquad (1)$$

$$J_2 = \frac{mR^2}{2}, \qquad (2)$$

де R – радіус платформи.



Підставляючи (2) в (1) і враховуючи, що $\omega = 2\pi n$, де n – частота обертання платформи, отримаємо $\left(\frac{mR^2}{2} + m_0 R^2\right) 2\pi n_1 = 2\pi n_2 \frac{mR^2}{2}$;

$n_2 = n_1 \frac{mR^2 + 2m_0 R^2}{mR^2} = n_1 \frac{m + 2m_0}{m}$; $n_2 = 22\, ^{об}/_{хв.}$

3.11. Обруч діаметром D=56,5 см висить на цвяху, вбитому в стінку, і здійснює малі коливання в площині, паралельній стіні. Знайти період коливань T обруча.

Розв'язання

Центр мас знаходиться в центрі обруча, тоді період малих коливань $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mRg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mDg}}$, де $J = \frac{1}{2} m\left(R_1^2 + R_2^2\right)$, $R_1 = R_2$, таким чином, $J = mR^2 = m\frac{D^2}{4}$. Звідси $T = 2\pi\sqrt{\frac{2mD^2}{4mDg}} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{2g}}$; T = 1,5 с.

РОЗДІЛ 4

МЕХАНІКА ГАЗІВ ТА РІДИН

4.1. Основні визначення, закони та рівняння

Рідина – агрегатний стан речовини, при якому речовина має деякі властивості газоподібного і твердого агрегатних станів одночасно. Рідина завжди приймає форму посудини, у якій вона знаходиться, однак не обов'язково займає весь об'єм цієї посудини, що властиво газам. Рідині властива пластична деформація, тобто плин (течія).

Плинність - вільне переміщення частин тіла відносно самих себе.

Під плином рідини розуміють і плин газів, оскільки закони такого руху в рамках моделі і для рідкого агрегатного стану і для газоподібного однакові.

Рідина і газ – суцільні середовища, тобто не мають розривів густини.

Суцільне середовище – деякий обсяг простору, у якому основні фізичні властивості нерозривні для даного тіла чи силового поля.

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

де ρ – густина (кг/м^3), нерозривна функція в кожній точці простору.

Якщо в одному і тому ж середовищі густина міняється залежно від координат, то говорять про стисливість рідини, якщо густина не змінюється – рідину вважають *нестисливою.*

Умова нестисливості рідини:

$$grad\rho = 0.$$

Закон Паскаля: У кожній точці нестисливої рідини тиск однаковий.

Тиск – сила, що діє по нормалі до одиниці поверхні посудини та віднесена на одиницю площини поверхні:

$$p = \frac{F}{S_n}.$$

Тиск вимірюється у Н/м^2 (Па).

У полі сили тяжіння тиск стовпа рідини (*гідростатичний тиск*) висотою h буде визначатись:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Vg}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh.$$

Лінії, уздовж яких рухаються точки рідини називаються *лініями струму*. Сукупність ліній струму утворюють *трубку струму*. Швидкості кожної точки є дотичними до ліній струму.

Рівняння нерозривності: добуток швидкості плину нестисливої рідини на поперечний переріз трубки струму є величина постійна для даної трубки струму:

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 = const.$$

Сума динамічного, гідростатичного й статичного тисків називається *повним тиском*.

Рівняння Бернуллі: Для нестисливої рідини повний тиск є сталою величиною:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = const,$$

де $\dfrac{\rho V^2}{2}$ – *динамічний тиск,* зумовлений рухом рідини; ρgh – *гідростатичний тиск*, зумовлений зовнішнім силовим полем; p – *статичний тиск*, зумовлений тиском навколишнього середовища.

Якщо у рідині різні шари рухаються з різною швидкістю, то між ними виникає сила внутрішнього тертя, пропорційна площі поверхні шару та градієнту швидкості:

$$F = -\eta \frac{dv}{dz} \cdot S,$$

де η − коефіцієнт пропорційності, який характеризує властивості цієї рідини і називається коефіцієнтом внутрішнього тертя; $\dfrac{dv}{dz}$ − градієнт швидкості; S − площа дотичних шарів.

Коли маленька кулька повільно рухається у рідині, вона зустрічає опір, який обумовлений в’язкістю рідини. Стокс теоретично показав, що під час падіння кульки у безмежній рідині, коли не утворюються ніякі завихрення, сила тертя, яка діє на неї, визначається за формулою:

$$F = 6\pi\eta rv,$$

де v − швидкість падіння кульки (ця швидкість повинна бути малою); r − радіус кульки ($r<<R$); R − радіус сосуду, у якому падає кулька.

4.2. Приклади розв'язання задач

4.1. Знайти швидкість v руху вуглекислого газу по трубі, якщо відомо, що за час t=30 хв через поперечний переріз труби протікає маса газу m = 0,51 кг. Густина газу ρ = 7,5 кг/м^3. Діаметр труби D = 2 см.

Розв'язання

За час t через поперечний переріз труби проходить деякий об'єм газу циліндричної форми (маса цього об'єму газу нам відома)

$$V = \pi \frac{D^2}{4} l = \frac{m}{\rho}. \tag{1}$$

Швидкість течії вуглекислого газу $v = \frac{l}{t}$. З рівняння (1) знайдемо $l = \frac{4m}{\pi D^2 \rho}$, тоді $v = \frac{4m}{\pi D^2 \rho t}$; v=0,12 м/с.

4.2. В дні циліндричного сосуду діаметром D = 0,5 м є круглий отвір діаметром d = 1 см. Знайти залежність швидкості пониження рівня води в сосуді від висоти h. Знайти значення цієї швидкості для висоти h = 0,2 м.

Розв'язання

За теоремою Бернуллі $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}$ або

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2, \tag{1}$$

де v_1 – швидкість пониження рівня води в сосуді, v_2 – швидкість витікання води з отвору. В силу нерозривності струменя $v_1 S_1 = v_2 S_2$, звідки

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}, \tag{2}$$

де S_1 – площа поперечного перерізу сосуду, S_2 – площа поперечного перерізу отвору. Підставляючи (2) в (1), отримаємо $v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. Оскільки $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ і $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, то $v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. Оскільки а $d^4 << D^4$, то $v_1 \approx \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$. При h = 0,2 м швидкість v = 0,8 мм/с.

4.3. Кулька спливає з постійною швидкістю *v* в рідині, густина ρ_1 якої в 4 рази більше густини матеріалу кульки. У скільки разів сила тертя $F_{тер}$, що діє на спливаючу кульку, більше сили тяжіння mg, що діє на цю кульку?

Розв'язання

По другому закону Ньютона

$$F_A - mg - F_{тер} = 0, \tag{1}$$

де $F_A = \rho_1 V g$ – сила Архімеда. Враховуючи, що

$$m = \rho_2 V, \tag{2}$$

із (2) $V = \frac{m}{\rho_2}$, тоді

$$F_A = 4\rho_2 \frac{m}{\rho_2} g = 4mg. \tag{3}$$

Перетворюючи (1) з урахуванням (3) отримаємо $F_{тер} = 3mg$ або $\frac{F_{тер}}{mg} = 3$.

4.4. Сталева кулька діаметром d=1 мм падає з постійною швидкістю $v = 0{,}185$ см/с у великому сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну в'язкість η касторової олії.

Розв'язання

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона

$$mg - F_A - F = 0, \quad (1)$$

де маса кульки

$$m = p_c V = p_c \frac{\pi d^3}{6}. \quad (2)$$

Сила Архімеда:

$$F_A = p_M V g = p_M g \times \frac{\pi d^3}{6}. \quad (3)$$

Сила опору масла за законом Стокса:

$$F = 3\pi\eta d v. \quad (4)$$

Підставляючи рівняння (2)–(4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо $18\eta v = d^2 g \times (p_c - p_M)$, звідси $\eta = \frac{d^2 g(p_c - p_M)}{18v}$; $\eta = 2$ Па·с.

4.5. Пробкова кулька радіусом r = 5 мм спливає в сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну і кінематичну в'язкість касторової олії, якщо кулька спливає з постійною швидкістю v = 3,5 см/с.

Розв'язання

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона

$$F_A - F - mg = 0, \quad (1)$$

де маса кульки:

$$m = p_n V = p_n \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (2)$$

Сила Архімеда:

$$F_A = p_M V g = p_M \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (3)$$

Сила опору масла за законом Стокса

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (4)$$

Підставляючи рівняння (2)–(4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо $18\eta v = 4r^2 g(p_n - p_M)$, звідки динамічна в'язкість: $\eta = \dfrac{2r^2 g(p_n - p_M)}{9v}$; $\eta = 1{,}09$ Па·с. Кінематична в'язкість масла: $v = \eta / p_M$; $v = 12{,}1$ см^2/с.

РОЗДІЛ 5

МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ТА ТЕРМОДИНАМІКА

5.1. Основні визначення, закони та рівняння

В молекулярно-кінетичній теорії та термодинаміці використовується модель ідеального газу, яка задовольняє умовам:

1. Власний об'єм молекул газу (частинок термодинамічної системи) порівняно з розмірами посудини, де він знаходиться, значно менший.

2. Сили взаємодії між молекулами (частинками термодинамічної системи) відсутні.

3.Зіткнення молекул газу (частинок термодинамічної системи) – абсолютно пружні.

4. Відстань між окремими молекулами (частинками термодинамічної системи) набагато більша за розміри молекул (частинок).

Експеримент доводить, що модель ідеального газу може бути використана для більшості природних газів у *нормальних умовах*: P_0=1.013·10^5 Па, T_0 =273 К.

Експериментально встановлено наступні закони для ідеальних газів.

Закон Авогадро: Молі будь-яких газів з однаковою температурою та тиском займають однакові об'єми. За нормальних умов цей об'єм дорівнює $V = 22.4 \cdot 10^{-3}\, м^3$. При цьому в молі будь-якої речовини міститься N_A – молекул (частинок). N_A – число Авогадро дорівнює:

$$N_A=6.02\cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}.$$

Закон Дальтона: Тиск суміші ідеальних газів дорівнює додатку парціальних тисків цих газів:

$$P = \sum_{i=1}^{N} P_i \ .$$

Парціальний тиск – це тиск, що мав би газ, який є у суміші, якщо б він займав увесь об'єм посудини, де міститься, за температури суміші.

Основним рівнянням рівноважного стану ідеальних газів є *рівняння Клапейрона-Менделєєва*:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \ .$$

Основне рівняння МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} \ .$$

Середньоквадратична швидкість молекул ідеального газу:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \ .$$

Середньоарифметична швидкість молекул ідеального газу:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \ .$$

Тиск газу з висотою зменшується за законом експоненти та визначається *барометричною формулою:*

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{RT}}.$$

Розподіл молекул у зовнішньому силовому полі визначається *законом Больцмана:*

$$n = n_0 e^{-\frac{E_к}{kT}}.$$

Згідно цього закону концентрація молекул газу змінюється відповідно до відношення потенційної енергії молекул у зовнішньому полі до кінетичної енергії їх теплового руху. Тобто, за сталої температури концентрація газу більша там, де менша потенційна енергія молекул.

Залежно від способу обміну з оточуючим середовищем у термодинаміці відрізняють наступні види термодинамічних систем.

1. *Ізольована система*, яка не обмінюється із зовнішнім середовищем ні енергією ні речовиною (газ у термічно та механічноізольованому контейнері).

2. *Адіабатна система*, яка не обмінюється енергією із зовнішнім середовищем шляхом теплообміну (газ під поршнем у теплоізольованому контейнері).

3. *Закриті системи*, які не можуть обмінюватись речовиною, їх хімічний склад та маса не залежать від часу. Але можливий обмін енергією. Такі системи будемо розглядати далі (газ під поршнем у не ізольованому контейнері).

4. *Замкнута або механічно ізольована система*, яка не має обміну енергією із зовнішнім середовищем шляхом здійснення роботи (газ у посудині зі сталим об’ємом).

5. *Відкриті системи*, які можуть обмінюватися енергією та речовиною із зовнішнім середовищем (газ у неізольованому контейнері з отвором, живі організми, вода, що випаровується з посудини).

Фізичні величини, що характеризують становище термодинамічної системи, називаються *параметрами стану*. Параметри стану ділять на *екстенсивні* – що пропорційні кількості речовини в системі (V, ν, m), та *інтенсивні* – що не залежать від кількості речовини в системі (p, T).

Крім того, виділяють *зовнішні* параметри стану – фізичні величини, що визначаються тілами або полями, котрі є зовнішніми за відношенням до даної системи (об'єм), а також *внутрішні* параметри стану – фізичні величини, що залежать, як від розташування зовнішніх до системи тіл, так і від координат та швидкостей частинок, що складають саму систему (тиск, внутрішня енергія).

Внутрішня енергія є однозначною функцією стану термодинамічної системи і не залежить від того, яким чином цей стан досягнутий.

Внутрішня енергія ідеального газу, це кінетична енергія його молекул, бо інші види енергії не враховуються (молекули не взаємодіють):

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT \,.$$

Обмін енергією між закритою термодинамічною системою та зовнішнім середовищем може відбуватися двома різними способами: здійсненням механічної роботи та шляхом теплообміну.

Роботу над макроскопічно-нерухомою системою виконують зовнішні сили. При цьому потрібно, щоб здійснювалось змінювання форми, об'єму, тобто потрібно, щоб змінювались зовнішні параметри термодинамічної системи.

Теплообмін існує тоді коли система одержує чи віддає тепло. Для цього, як відомо, потрібна різниця температур між системою та зовнішнім середовищем. Прийнято виділяти наступні види теплообміну:

– *конвекція* – обмін теплотою завдяки відносного руху макроскопічних об'ємів речовини у навколишньому середовищі;

– *теплопровідність* – обмін теплотою завдяки руху атомів та молекул;

– *випромінювання* – обмін теплотою шляхом електромагнітного випроміню-вання.

Існує якісна нерівноцінність між роботою та теплотою, як засобами обміну енергією. Робота може призводити до зміни будь-якого виду енергії системи (внутрішньої, кінетичної, потенційної). Теплота призводить до зміни лише внутрішньої енергії системи.

І закон термодинаміки: Теплота, що надана системі витрачається на змінювання внутрішньої енергії системи та на здійснення системою роботи проти зовнішніх сил:

$$dQ = \delta U + dA \,.$$

ІІ закон термодинаміки.: Вічний двигун другого роду неможливий, тобто неможливий процес, єдиним результатом якого було б перетворення теплоти, одержаної від нагрівача, в еквівалентну до неї роботу.

Інше формулювання закону належить Клаузіусу: *Теплота ніколи не може самовільно переходити від тіла з нижчою температурою до тіла з більшою температурою без здійснення роботи зовнішніми силами*.

Математичне формулювання ІІ закону термодинаміки виглядає наступним чином: *Ентропія в замкненій системі за будь-яких процесів завжди зростає:*

$$dS = \int \frac{dQ}{T} \geq 0 \,.$$

Ентропія – міра безладу в термодинамічній системі. Повний порядок відповідає мінімуму ентропії. Тому фізичний сенс зростання ентропії такий: в ізольованій системі колектив частинок намагається перейти до стану, в якому за деяких умов можливий більший безлад. Максимальна ентропія відповідає повному хаосу в системі.

5.2. Приклади розв'язання задач

5.1. Яку температуру T має маса m = 2 г азоту, що займає об'єм V = 820см^3 при тиску p = 0,2 МПа.

Розв'язання:

Температуру азоту можна визначити з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{1}$$

звідки температура азоту:

$$T = \frac{pV\mu}{mR}. \tag{2}$$

Молярна маса азоту $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Підставляючи числові дані, отримаємо: $T = \dfrac{0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 820 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}028}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} = 280K$ або $T = 7\,°C$.

5.2. У скільки разів щільність повітря p_1, що заповнює приміщення взимку (t_1 = 7°C), більше його щільності p_2 влітку (t_2 = 37°C). Тиск газу вважати постійним.

Розв'язання

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона для першого стану

$$\frac{pV_1}{T_1} = \frac{m}{\mu} R, \quad (1)$$

для другого стану

$$\frac{pV_2}{T_2} = \frac{m}{\mu} R. \quad (2)$$

Розділивши (1) на (2), при $p = const$ маємо $\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m / p_1}{m / p_2} = \frac{p_2}{p_1}$, звідки $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_2}{T_1}$, де $T_1 =$ 280 K, $T_2 =$ 310 K. Тоді $p_1/p_2 = 1{,}1$.

5.3. Масу m = 5 г азоту, що знаходиться, в закритому сосуді об'ємом V = 4 л при температурі t = 20° С, нагрівають до температури t = 40° С. Знайти тиск p_1 і p_2 газу до і після нагрівання.

Розв'язання

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$. За умовою $m = const$, тоді для першого стану $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$, для другого стану $p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$, звідки $p_1 = \frac{mRT_1}{\mu V}$, $p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V}$. Підставляючи числові дані, отримаємо $p_1 = 108$ кПа; $p_1 = 116$ кПа.

5.4. Загальновідоме жартівливе питання: «Що важче: тонна свинцю або тонна пробки?» На скільки дійсна вага пробки, яка в повітрі важить 9,8 кН, більше дійсної ваги свинцю, який в повітрі важить також 9,8 кН? Температура повітря t = 17°С, тиск p = 100 кПа.

Розв'язання

На тіла, що знаходяться в повітрі, діє виштовхуюча сила Архімеда $F_A = \rho g V$, де ρ – густина повітря, V – об'єм тіла. Тобто тіло втрачає у вазі стільки, скільки важить повітря в об'ємі даного тіла. Об'єм свинцю $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$.

Повітря в даному об'ємі важить $m_1 g$. Відповідно до рівняння Менделєєва-Клапейрона $p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT$, звідки $m_1 = \frac{\mu p V_1}{RT}$. Тоді $m_1 g = \frac{\mu p m g}{RT} = \frac{\mu p m g}{\rho_1 RT}$.

Об'єм пробки $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$. Вага повітря в даному об'ємі $m_2 g = \frac{\mu p m g}{\rho_2 RT}$. Дійсна вага свинцю $P_1 = g(m + m_1)$, дійсна вага пробки $P_2 = g(m + m_2)$. Тоді $\Delta P = g(m_2 - m_1) = \frac{\mu p m g}{RT}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2}\right)$; $\Delta P = 58{,}6$ Н.

5.5. Якою повинна бути вага р оболонки дитячої повітряної кульки, наповненої воднем, щоб результуюча підйомна сила кульки F = 0, тобто щоб кулька знаходилася в зваженому стані? Повітря і водень знаходяься за нормальних умов. Тиск усередині кульки рівний зовнішньому тиску. Радіус кульки r=12,5 см.

Розв'язання

Результуюча підйомна сила $F = m_1 g - (m_2 g + P)$, де m_1 – маса повітря в об'ємі кульки, m_2 – маса водню в об'ємі кульки. Оскільки F = 0, то $P = g(m_1 - m_2)$. З рівняння Менделєєва-Клапейрона знайдемо $m = \frac{\mu \rho V}{RT}$. Тоді

$P = g\frac{pV}{RT}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{4\pi r^2 pg}{3RT}(\mu_1 - \mu_2)$; Р = 96 мН.

5.6. У закритому сосуді об'ємом V = 1 $м^3$ знаходиться маса m_1 = 1,6 кг кисню і маса m_2 = 0,9 кг води. Знайти тиск р в сосуді при температурі t = 500°C, знаючи, що при цій температурі вся вода перетворюється на пару.

Розв'язання

За законом Дальтона $p = p_1^{/} + p_2^{/}$, де згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона, $p_1 = \dfrac{m_1 RT}{\mu_1 V}$ – парціальний тиск кисню, μ_1 = 0,032 кг/моль; $p_2 = \dfrac{m_2 RT}{\mu_2 V}$ – парціальний тиск водяної пари, μ_1=0,018 кг/моль. Звідки $p = \dfrac{RT}{V}\left(\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$, p=640 кПа.

5.7. У сосуді об'ємом V = 0,5 л знаходиться маса m = 1 г пароподібного йоду (I_2). При температурі t = 1000°C тиск в сосуді p = 93,3 кПа. Знайти ступінь дисоціації α молекул йоду на атоми. Молярна маса молекул йоду μ = 0,254 кг/моль.

Розв'язання

Ступенем дисоціації α називають відношення числа молекул, що розпалися на атоми, до загального числа молекул газу, тобто ступінь дисоціації показує, яка частина молекул розпалася на атоми. В результаті дисоціації маємо $\nu_1 = \dfrac{2\alpha m}{\mu}$ атомарного йоду і $\nu_1 = \dfrac{(1-\alpha)m}{\mu}$ молекулярного йоду. Їх парціальний тиск

$$p_1 = \frac{2\alpha mRT}{\mu V}, \tag{1}$$

$$p_1 = \frac{(1-\alpha)mRT}{\mu V}. \tag{2}$$

Згідно із законом Дальтона $p_c = p_1 + p_2$. Підставляючи (1) і (2), отримаємо $p_c = \dfrac{mRT}{\mu V}(1+\alpha)$, звідки $\alpha = \dfrac{\mu p_c V}{mRT} - 1$; α=0,12.

5.8. У сосуді об'ємом V = 4 л знаходиться маса m = 1 г водню. Яке число молекул п містить одиниця об'єму сосуду?

Розв'язання

Число молекул водню *N*, що міститься у сосуді, можна знайти із співвідношення: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Тоді число молекул в одиниці об'єму $n = \frac{N}{V}$ або $n = \frac{mN_A}{\mu V}$; $n = 7{,}5 \cdot 10^{25}\ м^{-3}$.

5.9. Яке число молекул *N* знаходиться в кімнаті об'ємом V = 80 м^3 при температурі t = 17°С і тиску p = 100 кПа?

Розв'язання

Число молекул *N*, що знаходяться в кімнаті, можна знайти із співвідношення: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, звідки $\frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Тоді $N = \frac{pVN_A}{RT}$; $N = 2 \cdot 10^{27}$.

5.10. Знайти середню квадратичну швидкість $\langle v_{кв} \rangle$ молекул повітря при температурі t = 17°С. Молярна маса повітря μ = 0,029 кг/моль.

Розв'язання

Середня квадратична швидкість молекул $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Для молекул повітря $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 290}{0{,}029}} = 500\ {}^{м}\!/_{с}$.

5.11. Середня квадратична швидкість молекул деякого газу $\langle v_{кв} \rangle$=450 м/с. Тиск газу p = 50 кПа. Знайти густину ρ газу за цих умов.

Розв’язання

Тиск газу визначається основним рівнянням МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2}, \qquad (1)$$

де n – число молекул в одиниці об’єму, m_0 – маса молекули. Крім того, n і m_0 зв’язані співвідношенням: $n = \frac{\rho}{m_0}$. Тоді рівняння (1) можна записати таким чином: $p = \frac{\rho \langle v_{кв} \rangle}{3}$, звідки $\rho = \frac{3p}{\langle v_{кв} \rangle}$; ρ=0,74 кг/м^3.

5.12. Знайти енергію $W_{об}$ обертального руху молекул, що містяться в масі m = 1 кг азоту при температурі t = 7°C.

Розв’язання

Внутрішня енергія газу $W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$. Оскільки молекула азоту складається з двох атомів, то для неї кількість ступенів свободи обертального руху i=2. Тоді $W_{об} = \frac{m}{\mu} RT$; $W_{об} = 83$ кДж.

5.13. Знайти внутрішню енергію W двоатомного газу, що знаходиться в сосуді об’ємом V = 2 л під тиском p = 150 кПа.

Розв’язання

Згідно рівнянню стану ідеального газу

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \qquad (1)$$

Внутрішня енергія газу $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$, або з урахуванням (1) $W = \frac{i}{2}pV$. Для двоатомного газу кількість ступенів свободи i = 5, тоді $W = \frac{5}{2}pV$; W = 750 Дж.

5.14. Енергія поступального руху молекул азоту, що знаходиться в балоні об'єм V=20 л – W=5 кДж, а середня квадратична швидкість його молекул $\langle v_{кв} \rangle = 2 \cdot 10^3\ м/с$. Знайти масу m азоту в балоні і тиск p, під яким він знаходиться.

Розв'язання

Енергія поступального руху молекул азоту $W = \frac{m\langle v_{кв} \rangle^2}{2}$, звідки $m = \frac{2W}{\langle v_{rd} \rangle}$; m = 2,5 г. Згідно основному рівнянню МКТ

$$p = \frac{2}{3}n\frac{m_0\langle v_{кв} \rangle^2}{2}, \tag{1}$$

де n – число молекул в одиниці об'єму, m_0 – маса молекули. Очевидно, що добуток $n \cdot m_0 = \rho$ – густина азоту. Тоді $n \cdot m_0 \cdot V = \rho \cdot V = m$ – масі всього азоту, що знаходиться в балоні. Помноживши праву і ліву частини рівняння (1) на V, отримаємо $pV = \frac{2}{3}n\frac{m_0\langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3}m\frac{\langle v_{ка} \rangle^2}{2}$. Але $\frac{m\langle v_{кв} \rangle^2}{2} = W$, таким чином $pV = \frac{2}{3}W$, звідки $p = \frac{2W}{3V}$; p=167 кПа.

5.15. Маса m = 1 кг двоатомного газу знаходиться під тиском p = 80 кПа і має густина ρ = 4кг/м^3. Знайти енергію теплового руху W молекул газу за цих умов.

Розв'язання

Енергія теплового руху двоатомного газу $W = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT$. Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, тоді $W = \frac{5}{2}pV$. Оскільки $V = \frac{m}{\rho}$, то остаточно маємо $W = \frac{5}{2}\frac{pm}{\rho}$; W = 50 кДж.

5.16. Знайти питому теплоємність c кисню для: а) V = const; б) p = const.

Розв'язання

Молярна теплоємність C і питома теплоємність c зв'язані співвідношенням $C = \mu c$. Звідси $c = \frac{C}{\mu}$.

1) При V=const: $c_V = \frac{C_V}{\mu}$, де $C_V = \frac{i}{2}R$. Для кисню i = 5, отже, $C_V = \frac{5}{2}R$. Тоді питома теплоємність кисню при постійному об'ємі $c_V = \frac{5R}{2\mu}$; $c_V = 650\,{}^{Дж}\!/\!_{(кг \cdot К)}$.

2) При p = const: $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$. Звідси $c_p = \frac{7R}{2\mu}$; $c_p = 910\,{}^{Дж}\!/\!_{(кг \cdot К)}$.

5.17. Маса m = 10 г кисню знаходиться при тиску p = 0,3 МПа і температурі t = 10°C. Після нагрівання при p = const газ зайняв об'єм V_2 = 10 л. Знайти кількість теплоти отриману газом і енергію теплового руху молекул газу W до і після нагрівання.

Розв'язання

Енергія теплового руху молекул кисню до нагрівання

$$W_1 = \frac{5mRT_1}{2\mu}, \tag{1}$$

після нагрівання

$$W_2 = \frac{5mRT_2}{2\mu}. \tag{2}$$

При розширенні газу була здійснена робота

$$\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1). \tag{3}$$

Кількість теплоти, отримана газом відповідно до першого закону термодинаміки

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta A. \tag{4}$$

Зміна внутрішньої енергії газу:

$$\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R(T_1 - T_2). \tag{5}$$

Невідомі V_1 і T_2 можна знайти з рівнянь початкового і кінцевого станів газу:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1, \tag{6}$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2. \tag{7}$$

Із (6) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$. Із (7) $T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR}$. З рівняння (1) $W_1 = 1{,}8$ кДж. Підставивши (7) в (2), отримаємо $W_2 = \frac{5}{2}pV_2$; $W_2 = 7{,}6$ кДж. З (4), з урахуванням (3) і (6) $\Delta Q = (W_2 - W_1) + p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)$; $\Delta Q = 7{,}9$ кДж.

5.18. У сосуді об'ємом V = 0,1 м^3 знаходиться азот при тиску p = 0,1 МПа. Яку кількість теплоти Q необхідно передати азоту, щоб: а) при p = const об'єм збільшився удвічі; б) при V = const тиск збільшився удвічі?

Розв'язання

1) При p = const кількість теплоти:

$$Q = \Delta W + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T . \qquad (1)$$

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ і $pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$, звідки $p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ або $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{p\Delta V}{R}$. Тоді з (1) отримаємо $Q = \frac{C_p p\Delta V}{R} = 700$ Дж.

2) При V = const маємо

$$Q = \Delta W = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T . \qquad (2)$$

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $p_1V = \frac{m}{\mu} RT_1$ і $p_2V = \frac{m}{\mu} RT_2$, звідки $V\Delta p = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ або $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{V\Delta p}{R}$. Тоді з (2) отримаємо $Q = \frac{C_V V\Delta p}{R} = 500$ Дж.

5.19. При якій температурі T середня квадратична швидкість молекул азоту більше їх найбільш вірогідної швидкості на Δv = 50 м/с?

Розв'язання

За визначенням найбільш імовірної швидкості $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$, а середня квадратична $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. За умовами завдання $\langle v_{кв} \rangle = v_в + \Delta v$, тоді $\Delta v = \langle v_{кв} \rangle - v_в = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$. Звідси $\sqrt{\frac{RT}{\mu}} = \frac{\Delta v}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $T = \frac{\mu(\Delta v)^2}{R\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}$; T=83,37 K.

5.20. На якій висоті h тиск повітря складає 75% від тиску на рівні моря? Температуру повітря вважати постійною і рівною t = 0°С.

Розв'язання

Закон убування тиску газу з висотою в полі сили тяжіння дає барометрична формула: $p = p_0\, exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$, звідки $\frac{p}{p_0} = exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$.

Логарифмуючи обидві частини рівняння, отримаємо $ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\mu g h}{RT}$, звідки

$$h = -\frac{RT\, ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\mu g} = 2296 \text{ м.}$$

5.21. Знайти густину ρ повітря: а) у поверхні Землі; б) на висоті h = 4 км від поверхні Землі. Температуру повітря вважати постійною і рівною t = 0°С. Тиск повітря у поверхні Землі p_0 = 100 кПа.

Розв'язання

1) З рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ густина буде дорівнювати $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. У поверхні Землі $p = p_0$, тоді $\rho_1 = \frac{p_0\mu}{RT_1} = 1{,}278$ кг/м^3.

2) На висоті h_2=4км густина повітря $\rho_2 = \frac{p_2\mu}{RT_2}$. Для знаходження p_2 скористуємося барометричною формулою $p_2 = p_0\, exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_2}\right)$. Тоді $\rho_2 = \frac{p_0\mu}{RT_2} exp\left(-\frac{\mu gh_2}{RT_2}\right) = 0{,}744$ кг/м^3.

5.22. Знайти середню довжину вільного пробігу λ молекул вуглекислого газу при температурі t = 100°C і тиску p = 13,3 Па. Діаметр молекул вуглекислого газу σ = 0,32 нм.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул газу $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$, де $\bar{z} = \sqrt{2}\sigma^2 v\pi n$ – середнє число зіткнень кожної молекули з іншими в одиницю часу. Концентрація молекул $n = \frac{p}{kT}$, тоді $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2 n\pi} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi}$;

$$\bar{\lambda} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{\sqrt{2} \cdot 0{,}32^2 \cdot 10^{-18} \cdot 13{,}3 \cdot 3{,}14} = 850 \text{ мкм.}$$

5.23. Знайти середнє число зіткнень $\bar{z}$ в одиницю часу молекул вуглекислого газу при температурі t = 100°C, якщо середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$ =870 мкм.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$, де $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середня арифметична швидкість молекул. Тоді $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}{\bar{\lambda}} = 4{,}87 \cdot 10^5$ с$^{-1}$.

5.24. У сферичній колбі об'ємом V = 1 л знаходиться азот. При якій густині ρ азоту середня довжина вільного пробігу молекул азоту більше розмірів сосуду?

Розв'язання

Оскільки колба сферична, то її об'єм $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}$. Звідси діаметр колби $D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$. Середня довжина вільного пробігу молекул $\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho \cdot N_A}$. За умовою $\bar{\lambda} > D$, таким чином $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho \cdot N_A}$.

Звідки густина повинна бути $\rho < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho \cdot N_A \cdot \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}}$; $\rho < 9{,}38 \cdot 10^{-7}$ кг/м^3.

5.25. Знайти середнє число зіткнень $\bar{z}$ в одиницю часу молекул деякого газу, якщо середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$ = 5 мкм, а середня квадратична швидкість його молекул $\langle v_{кв} \rangle$= 500 м/с.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$. Тоді середнє число зіткненні в одиницю часу $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$. Оскільки середня квадратична швидкість молекул $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{kT}{m}}$, то $\sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{\langle v_{кв} \rangle}{\sqrt{3}}$. Середня арифметична швидкість молекул $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\langle v_{кв} \rangle$. Тоді $\bar{z} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\langle v_{кв} \rangle}{\bar{\lambda}} = 9{,}21 \cdot 10^{7}$ с$^{-1}$.

5.26. Знайти коефіцієнт дифузії D водню за нормальних умов, якщо середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$ = 0,16 мкм.

Розв'язання

За визначенням коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$, де $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середня арифметична швидкість молекул. Тоді коефіцієнт дифузії водню при нормальних умовах $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\bar{\lambda} = 9{,}06 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

5.27. Знайти масу m азоту, що пройшов унаслідок дифузії через площадку S = 0,01м^2 за час t = 10с, якщо градієнт густини в напрямі, перпендикулярному до площадки майданчика, $\frac{\Delta\rho}{\Delta x} = 1{,}26$ кг/м^4. Температура азоту t = 27°C. Середня довжина вільного пробігу молекул азоту $\bar{\lambda}$ = 10 мкм.

Розв'язання

Згідно із законом Фіка $m = -D\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$. Коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\bar{\lambda}$. Маса азоту $m = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\bar{\lambda}\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t = 19{,}9$ г.

5.28. Знайти діаметр σ молекули кисню, якщо при температурі t = 0°C в'язкість кисню η = 18,8 мкПа/с.

Розв'язання

Динамічна в'язкість кисню визначається співвідношенням

$$\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho, \qquad (1)$$

де $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середня арифметична швидкість молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi}$ – середня довжина вільного пробігу, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ – густина газу. Підставляючи дані вирази в (1), отримаємо $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$, звідки $\sigma = \sqrt{\frac{2k}{3\pi\eta} \cdot \sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}} = 0{,}3$ нм.

5.29. Знайти коефіцієнт дифузії D й і в'язкість η повітря при тиску p = 101,3 кПа і температурі t = 10°C. Діаметр молекул повітря σ = 0,3 нм.

Розв'язання

Коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $D = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ м^2/с. Крім того, коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$, а коефіцієнт в'язкості $\eta = \frac{1}{3\rho}\bar{v}\bar{\lambda}$. Таким чином, $\eta = \rho D$, де густину ρ можна виразити з рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, звідки $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. Тоді $\eta = \frac{p\mu}{RT}D = 18{,}2\,7$ мкПа·с.

5.30. У сосуді об'ємом V = 2 л знаходиться N = 4·10^{22} молекул двоатомного газу. Теплопровідність газу К = 14 мВт/(м·К). Знайти коефіцієнт дифузії D газу.

Розв'язання

Коефіцієнт теплопровідності $K = c_V \rho \bar{v} \lambda / 3$, а коефіцієнт дифузії $D = \bar{v} \lambda / 3$, отже, коефіцієнти теплопровідності і дифузії зв'язані співвідношенням $K = c_V \rho D$. Теплоємність при постійному об'ємі $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, де i=5, оскільки газ двоатомний. Число частинок в одиниці об'єму $n = \frac{\rho}{\mu} N_A$, а в об'ємі V – $N = nV = \frac{\rho V N_A}{\mu}$. Тоді $K = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\frac{\mu N}{V N_A} D = \frac{5kND}{2V}$; звідки $D = \frac{2VK}{5kN} = 2{,}02 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

5.31. Маса m = 6,5 г водню, що знаходиться при температурі t = 27°C, розширюється удвічі при p = const за рахунок притоку тепла ззовні. Знайти роботу A розширення газу, зміну ΔW внутрішньої енергії газу і кількість теплоти Q, передану газу.

Розв'язання

Робота розширення газу $A = p\int_V^{2V} dV = p(2V - V) = pV$. Відповідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, робота $A = \frac{m}{\mu}RT = 8{,}1$ Дж. Зміна внутрішньої енергії $\Delta W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$, де i=5. Оскільки p=const, то $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, отже, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2$. Звідси $T_2 = 2T_1$ і $\Delta T = T_2 - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1$. Тоді $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_1 = 20{,}25$ кДж. Згідно першому закону термодинаміки $Q = \Delta W + A = 28{,}35$ кДж.

5.32. При ізобарному розширенні двоатомного газу була здійснена робота A=156,8 Дж. Яка кількість теплоти Q була передана газу?

Розв'язання

Кількість теплоти, передана газу, $dQ = C_p dT$, звідки

$$Q = C_p \int_{T_1}^{T_2} dT = C_p (T_2 - T_1). \qquad (1)$$

Елементарна робота, що здійснюється при розширенні газу $dA = pdV$, тоді $A = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$. З рівняння Менделєєва-Клапейрона $p\Delta V = \nu R \Delta T$, тоді

$$A = \nu R (T_2 - T_1). \qquad (2)$$

Вирішуючи спільно (1) і (2), отримаємо $Q = C_p \frac{A}{\nu R}$, де $C_p = \nu \frac{7}{2} R$, звідки $Q = \frac{7}{2} A = 550$ Дж.

5.33. Об'єм V_1 = 7,5 л кисню адіабатично стискається до об'єму V_2 = 1 л, причому в кінці стиснення встановився тиск p_2 = 1,6 МПа. Під яким тиском p_2 знаходився газ до стиснення?

Розв'язання

Згідно рівнянню Пуассона $pV^\gamma = const$, де показник адіабати $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ для кисню $\gamma = 1{,}4$. Оскільки $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, то $p_1 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = 95$ кПа.

5.34. Ідеальна теплова машина, що працює по циклу Карно, за цикл отримує від нагрівача кількість теплоти Q_1 = 2,512 кДж. Температура нагрівача T_1 = 400 K, температура холодильника T_2 = 300 K. Знайти роботу A, здійснювану машиною за один цикл, і кількість теплоти, що віддається холодильнику за один цикл.

Розв'язання

Робота, що здійснюється тепловою машиною, визначається за формулою $A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1$, де Q_1 кількість теплоти, отримана машиною від нагрівача; Q_2 кількість теплоти, що віддається холодильнику, η – коефіцієнт корисної дії машини, який дорівнює $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}25$. Звідки A=630 Дж; $Q_2 = Q_1 - A = 1{,}88$ кДж.

5.35. Ідеальна холодильна машина, що працює по зворотному циклу Карно, здійснює за один цикл роботу A = 37 кДж. При цьому вона бере тепло від тіла з температурою t_2 = -10°C і передає тепло тілу з температурою t_1 = 17°C. Знайти к. к. д. η циклу, кількість теплоти Q_2, що відняте у холодного тіла за один цикл, і кількість теплоти Q_1, передане гарячішому тілу за один цикл.

Розв'язання

Оскільки холодильна машина працює по зворотному циклу, то для переходу тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого необхідно, щоб зовнішні сили виконали позитивну роботу. Кількість теплоти Q_2 відняте у холодного тіла, разом з роботою зовнішніх сил A дорівнює кількості теплоти Q_1 переданій більш нагрітому тілу, $Q_2 = Q_1 - A = \frac{A}{\eta} - A = \frac{1-\eta}{\eta} A$. Оскільки $\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = 0{,}093$, то $Q_2 = 360$ кДж; $Q_1 = Q_2 + A = 379$ кДж.

Таким чином холодильна машина за кожен цикл передає гарячішому тілу кількість теплоти 397кДж, з яких 37кДж за рахунок механічної роботи, а 360кДж від холодного тіла.

5.36. У циліндрах карбюраторного двигуна внутрішнього згоряння газ стискається політропічного до $V_2 = V_1/6$. Початковий тиск $p_1 = 90$ кПа, початкова температура $t_1 = 127°C$. Знайти тиск p_2 і температуру t_2 газу в циліндрах після стискання. Показник політропи n = 1,3.

Розв'язання

Рівняння політропічного процесу:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \qquad (1)$$

За умовою $V_2 = \frac{V_1}{6}$, таким чином, $p_1 V_1^n = p_2 \left(\frac{V_1}{6}\right)^n$, звідки $p_2 = p_1 \cdot 6^n = 934$ кПа. З рівняння політропічного процесу

$$T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_2^{n-1} \text{ або } T_1 V_1^{n-1} = T_2 \left(\frac{V_1}{6}\right)^{n-1} \qquad (2)$$

Звідки $T_2 = T_1 \cdot 6^{n-1} = 684{,}7$ К.

5.37. Знайти зміну ΔS ентропії при перетворенні маси = 1 г води (t = 0°C) в пару ($t_п$ = 100°C).

Розв'язання

Загальна зміна ентропії ΔS складається із зміни ентропії ΔS_1 при нагріванні маси m води від температури T до температури $T_п$ і зміни ентропії ΔS_2 при випаровуванні маси m води. $\Delta S_1 = mc\,ln\frac{T_n}{T}$, де c=4,19 кДж/(кг·К) – питома теплоємність води. $\Delta S_2 = \frac{mr}{T_n}$, де r = 2,26 МДж/кг – питома теплота пароутворення. Тоді $\Delta S = m\left(c\,ln\frac{T_n}{T} + \frac{r}{T_n}\right) = 7{,}4$ Дж/К.

5.38. Знайти зміну ΔS ентропії при плавленні маси m = 1 кг льоду (t = 0°C).

Розв'язання

При плавленні маси m льоду при температурі Т маємо $\Delta S = \dfrac{m\lambda}{T}$, де λ = 0,33 МДж/кг – питома теплота плавлення. ΔS = 1209 Дж/К.

5.39. Масу m = 640 г розплавленого свинцю при температурі плавлення $t_{пл}$ вилили на лід (t = 0°С). Знайти зміну ΔS ентропії при цьому процесі.

Розв'язання

Припустимо, що система «свинець-лід» замкнута, тобто втрат тепла в зовнішнє середовище не відбувається і вся пара, що утворилася, сконденсувалася і залишилася усередині системи у вигляді води. Тоді зміна ентропії системи ΔS складатиметься із зміни ентропії свинцю ΔS_1 при твердінні, зміни ентропії свинцю ΔS_2 при охолоджуванні до t = 0°С і зміни ентропії льоду при розтаванні ΔS_3. Тобто $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$. Завдання розглядаємо за умови, що кількість льоду достатня для підтримки температури t = 0°С. Температура плавлення свинцю T_1 = 600 К, температура льоду – T_2=273 К. Маємо $dS_1 = \dfrac{dQ_1}{T}$ або $\Delta S_1 = -\int_1^2 \dfrac{dQ_1}{T_1} = -\dfrac{m\lambda}{T_1}$, де λ = 22,6 кДж/кг – питома теплота плавлення (кристалізації) свинцю. $dS_2 = \dfrac{dQ_2}{T_2}$, звідки $\Delta S_2 = -\int_{T_1}^{T_2} \dfrac{mc_c dT}{T} = mc_c\, ln\dfrac{T_2}{T_1}$, де c_c = 126 Дж/(кг·К) – питома теплоємність свинцю. $dS_3 = \dfrac{dQ_3}{T}$ або $\Delta S_3 = \dfrac{Q_3}{T_2}$. Відповідно до закону збереження енергії $Q_3 = Q_1 + Q_2 = \lambda m + cm(T_1 - T_2)$, звідки $\Delta S_3 = \dfrac{\lambda n + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$. Отже, повна зміна ентропії системи

$\Delta S = -\frac{m\lambda}{T_1} + mc_c \, ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$. Підставляючи в отриману формулу числові дані, остаточно отримуємо ΔS = 62,2 Дж/К.

5.40. Маса m = 10 г кисню нагрівається від температури t_1 = 50°С до температури t_2 = 150°С. Знайти зміну ΔS ентропії, якщо нагрівання відбувається ізохорично.

Розв'язання

а) При ізохоричному нагріванні $dQ = c_V mdT$, тоді зміна ентропії $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = c_V m\int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\,ln\frac{T_2}{T_1}$. Оскільки кисень – двоатомний газ, то число мір свободи i = 5 і зміна ентропії $\Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\,ln\frac{T_2}{T_1} = 1{,}75$ Дж/К.

5.41. Яку температуру T має маса m = 2 г азоту, що займає об'єм V = 820 см^3 при тиску p = 0,2 МПа? Газ розглядати як: а) ідеальний; б) реальний.

Розв'язання

1) Ідеальні гази підпорядковуються рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, звідки $T = \frac{\mu pV}{mR} = 280$ К.

2) Реальні гази підпорядковуються рівнянню Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$, таким чином температура $T = \frac{\mu}{mR}\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = 280$ К. Таким чином при даному тиску газ поводиться як ідеальний.

5.42. Яку температуру T має маса m = 3,5 г кисню що займає об'єм V = 90 см^3 при тиску p = 2,8 МПа? Газ розглядати як: а) ідеальний; б) реальний.

Розв'язання

Якщо розглядати кисень в даних умовах як ідеальний газ, то його стан описується рівнянням Менделєєва-Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu} RT$, звідки $T = \frac{\mu p V}{mR} = 277$ К.

Якщо розглядати газ як реальний, то його стан описується рівнянням Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$, таким чином, температура $T = \frac{\mu}{mR}\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = 285{,}7$ К.

РОЗДІЛ 6

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

6.1. Основні визначення, закони та рівняння

Електростатика – розділ фізики, що вивчає взаємодію нерухомих зарядів.

Експериментально встановлено, що тіла заряджаються дискретно. Найменшим (елементарним) електричним зарядом володіє електрон. Його заряд становить – 1,6 10^{-19} Кл. Таким самим за величиною зарядом, але позитивним, володіє протон.

Точковим електричним зарядом називається заряджене тіло, геометричною формою та розміром якого в умовах даної задачі можна знехтувати.

Систему тіл або частинок називають *електрично ізольованою системою*, якщо між нею та зовнішніми тілами немає обміну електричним зарядом.

З*акон збереження заряду*: алгебраїчна сума електричних зарядів, що утворюють електрично ізольовану систему не змінюється за будь-яких процесів, що відбуваються всередині цієї системи.

Закон Кулона: сила електричної взаємодії двох точкових електричних зарядів, що знаходяться у вакуумі, прямо пропорційна добутку цих зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між зарядами і спрямована вздовж прямої, що їх з'єднує:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; ε *– відносної діелектрична проникність середовища*.

Напруженість електричного поля у даній точці – фізична величина, що визначається силою, яка діє на одиничний позитивний заряд, який розміщено у цій точці поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Точковий заряд створює напруженість електричного поля:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q \cdot q_0}{q_0 \cdot r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}.$$

Принцип суперпозиції: напруженість поля, що створене системою зарядів, дорівнює векторному додатку напруженості полів, що утворені кожним з окремих зарядів у даній точці:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i .$$

Теорема Остроградського-Гауса: потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчному додатку зарядів, що розміщено всередині цієї поверхні, поділеному на ε_0:

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i .$$

Якщо заряди рівномірно розподілені у деякому об'ємі V з густиною ρ_q, тоді

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_q dV ,$$

де ρ_q – об'ємна густина заряду:

$$\rho_q = \frac{dq}{dV} .$$

Згідно з теоремою Остроградського-Гауса розрахунок поля для різних тіл проводиться за формулами:

– поле зарядженої безмежної площини:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} ,$$

де поверхнева густина заряду дорівнює:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} ;$$

– сферична поверхня навколо зарядженої кулі:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ,$$

де r – відстань від центра кулі $(r \geq R)$;

– сферична поверхня всередині зарядженої кулі де $(r \leq R)$:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r,$$

– тонкий циліндр (або нитка):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r},$$

де τ – лінійна густина заряду.

Потенціалом електростатичного поля називається фізична величина, що дорівнює відношенню потенційної енергії пробного заряду, який розташовано у даній точці поля, до величини цього заряду.

Потенціал точкового заряду:

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Електричне поле існує не тільки у вакуумі, але й у певному середовищі, яке містить у собі заряди. Заряди у речовині можуть бути зв'язані та вільні. *Зв'язані заряди* - це такі, які складають елементарні частинки речовини і не можуть вільно рухатися в об'ємі речовини, стикатись та обмінюватись зарядом один з одним. Якщо у такій речовині утворити електричне поле, то упорядкованого потоку руху зарядів не буде.

Вільні заряди можуть рухатись в об'ємі речовини вільно, стикатись й обмінюватися зарядами один з одним. Під дією зовнішнього електричного поля вільні заряди починають рухатися упорядковано, утворюючи потік, що називається *електричним струмом*.

Таким чином, типи речовин відносно реакції зовнішнього електричного поля можна поділити на: *діелектрики*, що складаються зі зв'язаних зарядів; *провідники*, що мають вільний заряд і утворюють електричний струм.

Електроємність провідника – це величина, що дорівнює відношенню його заряду до його потенціалу:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Електроємність показує, який заряд треба додати провіднику, щоб його потенціал збільшився на 1В. Розмірність електроємності – Фарада: 1Ф=1Кл/1В.

Конденсатором називають систему із двох або більше провідників з розвинутими поверхнями, як правило подібними одна до одної. Електроємність провідника зростає, якщо до нього наблизити інший. Оскільки електричне поле майже цілком зосереджене між зарядженими провідниками, то конденсатор можна застосовувати для накопичення заряду.

Конденсатори бувають різної конструкції. Розраховують електроємності основних типів конденсаторів наступним чином:

– плоский конденсатор:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

де S - площа обкладин;

– циліндричний конденсатор:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{ln\frac{d_2}{d_1}},$$

де d_1 та d_2 – діаметри внутрішнього та зовнішнього циліндрів;

– сферичний конденсатор:

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{d_1 d_2}{d_1 - d_2},$$

де d_1 та d_2 – діаметри внутрішньої та зовнішньої сфери.

Ємність системи конденсаторів дорівнює:

при паралельному з'єднанні

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n;$$

при послідовному

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

Енергія зарядженого відокремленого провідника або конденсатора:

$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

6.2. Приклади розв'язання завдань

6.1. Знайти силу F притягання між ядром атома водню та електроном. Радіус атома водню $r = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ м; заряд ядра дорівнює по модулю і протилежний за знаком заряду електрона.

Розв'язання:

За законом Кулона сила електростатичної взаємодії між двома зарядженими тілами, розміри яких малі порівняно з відстанню між ними, визначається формулою: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$, де q_1 та q_2 – електричні заряди тіл; ε – відносна діелектрична проникність середовища; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-11}$ Ф/м –

електрична постійна. В умовах даної задачі $q_1 = q_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Підставивши числові значення, одержимо F = 92,3·10^{-9} Н.

6.2. Два точкових заряди, перебуваючи в повітрі (ε = 1) на відстані r_1 = 20 см один від одного, взаємодіють з деякою силою. На якій відстані r_2 потрібно помістити ці заряди в олії, щоб отримати ту ж силу взаємодії?

Розв’язання:

Відповідно до закону Кулона два точкові заряди в повітрі взаємодіють з силою $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (1), а в олії з силою $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (2). Прирівнявши праві частини рівнянь (1) і (2), знайдемо $r_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot r_1$. Діелектрична проникність повітря $\varepsilon_1 = 1$, діелектрична проникність олії $\varepsilon_2 = 5$. Підставивши числові значення, одержимо r_2= 8,94 см.

6.3. У скільки разів сила гравітаційного тяжіння між двома протонами менше сили їх електростатичного відштовхування? Заряд протона дорівнює по модулю і протилежний за знаком заряду електрона.

Розв’язання

Сила гравітаційного тяжіння $F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравітаційна постійна; m_1 і m_2 – маси частинок (для протонів $m = 1{,}6 \cdot 10^{-27}\,кг$). Сила електростатичного відштовхування у вакуумі $F_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$. Тоді $\frac{F_k}{F_g} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 G m^2} = 1{,}24 \cdot 10^{36}$.

6.4. Знайти напруженість Е електричного поля в точці, що лежить посередині між точковими зарядами q_1 = 8 нКл і q_2 = -6 нКл. Відстань між зарядами r = 10 см; ε = 1.

Розв'язання:

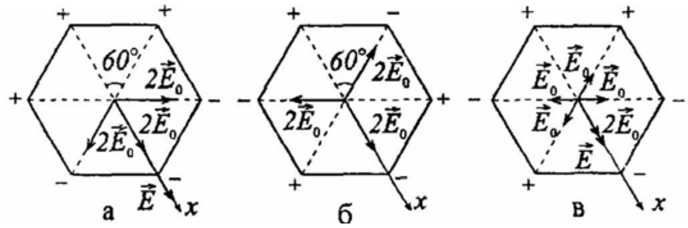
Згідно з принципом суперпозиції $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ або в проекції на вісь x: $E = E_1 + E_2$.

Напруженість електричного поля точкового заряду $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, де r – відстань від заряду до точки, в якій визначається напруженість. $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(r/2\right)^2} = \dfrac{q_1}{\pi\varepsilon_0 r^2}$; $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(r/2\right)^2} = \dfrac{q_2}{\pi\varepsilon_0 r^2}$. Сумарна напруженість $E = \dfrac{q_1 + |q_2|}{\pi\varepsilon_0 r^2}$ = 50,4 кВ / м.

6.5. У вершинах правильного шестикутника розташовані три позитивні і три негативні заряди. Знайти напруженість Е електричного поля в центрі шестикутника при різних комбінаціях в розташуванні цих зарядів. Кожен заряд q = 1,5 нКл; сторона шестикутника a = 3 см.

Розв'язання

Напруженість поля електричного заряду $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$. Знайдемо напруженість поля E_0 одного заряду: $E_0 = \dfrac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ (очевидно, що відстань від зарядів до центру шестикутника дорівнює стороні трикутника а, $E_0 = 15$ кВ/м. Згідно з принципом суперпозиції результуюча напруженість Е знаходиться за правилом векторного додавання $\vec{E} = \sum_{n=1}^{6} \vec{E}_n$, причому $E_1 = E_2 = \ldots = E_6 = E_0$. Розглянемо три варіанти розташування зарядів



а) у проекції на вісь x: $E = 2E_0 \cos 60^\circ + 2E_0 + 2E_0 \cos 60^\circ = 4E_0 = 60$ кВ/м;

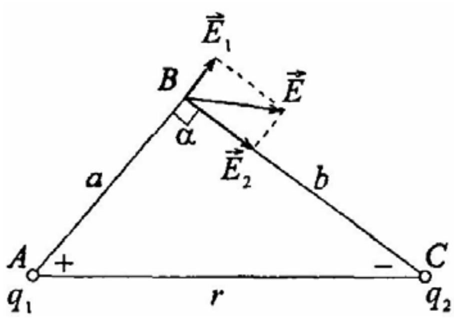
б) у проекції на вісь x: $E = -2E_0 \cos 60^\circ + 2E_0 - 2E_0 \cos 60^\circ = 0$;

в) у проекції на вісь x: $E = 2E_0 = 30$ кВ/м.

6.6. Два точкові заряди q_1 = 7,5 нКл і q_2 = -14,7 нКл розташовані на відстані r = 5 см. Знайти напруженість E електричного поля в точці, що знаходиться на відстанях a = 3 см від позитивного заряду і b = 4 см від негативного заряду.

Розв'язання

Сторони трикутника BCA (трикутник єгипетський) a, b і r задовольняють умові $r^2 = a^2 + b^2$, трикутник прямокутний, кут α = 90°.



Згідно з принципом суперпозиції результуюча напруженість у точці С: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, де E_1 – напруженість, створювана позитивним зарядом q_1, E_2 – напруженість, створювана негативним зарядом q_2.

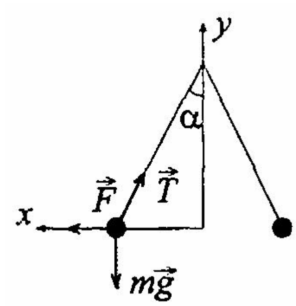
За правилом додавання двох взаємноперпендикулярних векторів у скалярному вигляді $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$. Оскільки, $E_1 = \dfrac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ а, $E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$,

то $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{q_1^2}{a^4} + \dfrac{q_2^2}{b^4}} = 112$ кВ/м.

6.7. Дві кульки однакових радіусу і маси підвішені на нитках однакової довжини, так, що їх поверхні стикаються. Який заряд q потрібно повідомити кулькам, щоб сила натягу ниток стала рівною Т = 98 мН? Відстань від центру кульки до точки підвісу l = 10 см; маса кожної кульки m = 5 г.

Розв'язання

Після надання кулькам заряду q, кожна з них відхилиться від вертикалі на кут α і зупиниться в положенні рівноваги.



Оскільки умови рівноваги для обох кульок однакові, розглянемо одну з них. За законом збереження заряду заряд q розподілиться на дві кульки рівномірно. Тоді кожна кулька отримає заряд $q_0 = \dfrac{q}{2}$. На кульку діють три сили: сила Кулона F, сила натягу нитки T і сила тяжіння mg. Умова рівноваги кульки $\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0$ чи в проекціях на вісь x: $F - T\sin\alpha = 0$ (1), на вісь y: $T\cos\alpha - mg = 0$ (2). Відстань між кульками дорівнює $2l\sin\alpha = 0$.

Кулонівська сила визначається формулою: $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \dfrac{q_0^2}{4l^2 \sin^2\alpha}$ (3).

Виражаємо величину $\sin\alpha$. З (2) $\cos\alpha = \dfrac{mg}{T}$ або $1 - \sin^2\alpha = \left(\dfrac{mg}{T}\right)^2$,

звідки $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{mg}{T}\right)^2}$ (4). З (1) знайдемо $F = T\sin\alpha$ (5). Прирівнявши праві частини рівнянь (5) і (3) і розділивши отриманий вираз на $\sin\alpha$, отримаємо $T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \dfrac{q_0^2}{4l^2 \sin^3\alpha}$. Підставивши в цей вираз рівняння (4), виразимо $q_0 = 4l\sqrt{\pi T\varepsilon\varepsilon_0\left(1 - \left(\dfrac{mg}{T}\right)\right)^3} = 5{,}32 \cdot 10^{-7}$ Кл. Тоді заряд, наданий обом кулькам, $q = 2q_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл.

6.8. З якою силою F_s на одиницю площі відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченно протяжні площини? Поверхнева густина заряду на площинах σ = 0,3 мКл/м^2.

Розв'язання

Напруженість поля нескінченної зарядженої площини $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. З іншого боку, $E = \dfrac{F}{q}$, де $q = \sigma S$. Прирівняємо $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{F}{\sigma S}$, звідси сила, що діє на одиницю площі площині $F_S = \dfrac{F}{S} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ = 5,1 Н / м.

6.9. У плоскому горизонтально розташованому конденсаторі заряджена крапелька ртуті знаходиться в рівновазі при напруженості електричного поля Е = 60 кВ/м. Заряд краплі $q = 3{,}84 \cdot 10^{-9}$ Кл. Знайти радіус R краплі.

Розв'язання

На крапельку ртуті в конденсаторі діє електростатична сила F (вгору) і сила тяжіння mg (вниз), які врівноважують одна одну, тобто $\vec{F} + m\vec{g} = 0$ або F=mg. Маса краплі $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Сила $F = Eq$. Тоді $Eq = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$, звідки $r = \sqrt[3]{\frac{3Eq}{4\pi\rho g}}$ = 0,44 мкм.

6.10. Дві кульки з зарядами q_1 = 6,66 нКл і q_2 = 13,33 нКл. Знаходяться на відстані r_1 = 40 см. Яку роботу А треба виконати, щоб зблизити їх до відстані r_2 = 25 см?

Розв'язання

Енергія електростатичної взаємодії кульок $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Для зближення кульок потрібно виконати роботу $A = \Delta W = W_2 - W_1$. Оскільки, $W_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$, а $W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}$, то робота $A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$=1,2 мкДж.

6.11. Яка робота А виконується при перенесенні точкового заряду q = 20 нКл з нескінченності в точку, що знаходиться на відстані r = 1 см від поверхні кулі радіусом R = 1 см з поверхневою густиною заряду σ = 10 мкКл/м^2?

Розв'язання

Робота з переміщення точкового заряду q з нескінченності в деяку точку М є потенціалом точки М, отже, $A = \varphi_M = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R + r)}$. Оскільки $q_0 = \sigma 4\pi R^2$, то $A = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 (R + r)}$= 113 мкДж.

6.12. Знайти швидкість v електрона, що пройшов різницю потенціалів U, рівну 5 В.

Розв'язання

Робота по переміщенню електрона з точки 1 в точку 2 дорівнює $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$. З іншого боку, робота A дорівнює приросту його кінетичної енергії $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$. Якщо $v_1 = 0$, то $A = \frac{mv_2^2}{2}$. Тоді $qU = \frac{mv_2^2}{2}$, звідки $v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$, де q – заряд, а m маса електрона. $v_2 = 1{,}33 \cdot 10^6$ м/с.

6.13. Різниця потенціалів між пластинами плоского конденсатора U = 90 В. Площа кожної пластини S = 60 см^2, її заряд q = 1 нКл. На якій відстані d одна від одної знаходяться пластини?

Розв'язання

Напруженість поля плоского конденсатора $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ (1). З іншого боку, $E = \frac{U}{d}$ (2). Прирівнявши (1) і (2), з урахуванням $\sigma = \frac{q}{S}$, отримаємо $\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{U}{d}$, звідки $d = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0 S}{q}$ = 4,78 мм.

6.14. Кулька радіусом R = 2 см заряджається негативно до потенціалу φ = 2кВ. Знайти масу m всіх електронів, що складають заряд, наданий кульці.

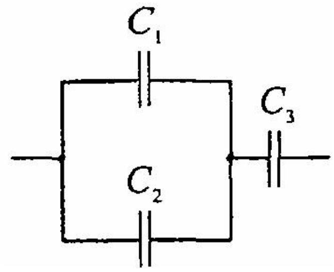
Розв'язання

Ємність кульки $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Після зарядки $q = C\varphi = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi$. Кількість електронів, що складають цей заряд $N = \frac{q}{e} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi}{e}$, де e заряд електрона. Маса всіх електронів $m = Nm_e = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi}{e} m_e$, де m_e маса електрона. $m = 2{,}5 \cdot 10^{-20}$ кг.

6.15. Знайти ємність С системи конденсаторів, зображеної на малюнку. Ємність кожного конденсатора С = 0,5 мкФ.

Розв'язання

Ємність паралельної ділянки $C_{12} = C_1 + C_2$.



Ємність всієї системи конденсаторів знайдемо із співвідношення $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$ або $\frac{1}{C} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{(C_1 + C_2)C_3}$. Звідси $C = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$ = 0,33 мкФ.

6.16. Куля радіусом R = 1 м заряджена до потенціалу U = 30 кВ. Знайти енергію W зарядженої кулі.

Розв'язання

Енергія зарядженої кулі $W = \frac{CU^2}{2}$, де ємність кулі $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Тоді $W = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2}{2} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2$ = 0,05 Дж.

Навчальне електронне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

ПОГОЖИХ Микола Іванович
ПАК Андрій Олегович
КУПРІЯНОВА Людмила Володимирівна

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОСТАТИКА: ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін проф. М. І. Погожих
Видано в авторській редакції

План 2019 р., поз. 84

Підп. до друку 25.02.2019 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об’єм даних 2,6 Мб. Тираж 20 прим.

Видавець та виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, м. Харків, 61051.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.