МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський державний університет харчування та торгівлі

Д. О. Торяник

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Харків
ХДУХТ
2019

УДК 512.64+514.74+517(075.8)
ББК 22.1я7
Т61

Рекомендовано до друку вченою радою Харківського державного університету харчування та торгівлі, протокол № 8 від 24.12.2018 р.

Торяник Д. О.
Т61 Вища математика [Електронний ресурс] : навч. посібник / Д. О. Торяник. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2019. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

ISBN

Посібник відповідає робочій програмі дисципліни «Вища математика», що викладається студентам першого курсу Навчально-наукового інституту харчових технологій та бізнесу. Він складається з теоретичного матеріалу, який містить основні поняття, визначення та формули, з індивідуальних завдань, прикладу розв'язання типового варіанта, додатків та списку використаних джерел.

Посібник також буде корисним студентам інших факультетів та спеціальностей, які вивчають відповідні теми з дисциплін «Вища математика» й «Вища та прикладна математика».

УДК 512.64+514.74+517(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою пропонованого видання є допомога студентам денного та заочного відділення навчально-наукового інституту харчових технологій та бізнесу правильно організувати свою самостійну роботу по оволодінню теоретичним матеріалом, необхідним для розв'язання задач з відповідних тем вищої математики, що вивчаються впродовж курсу «Вища математика». Посібник також буде корисним студентам інших факультетів, які вивчають відповідні теми з дисциплін «Вища математика» та «Вища та прикладна математика».

Посібник «Вища математика» базується на матеріалі посібника «Вища та прикладна математика. Індивідуальні завдання» адаптованого згідно з робочою програмою дисципліни «Вища математика», що викладається студентам першого курсу навчально-наукового інституту харчових технологій та бізнесу. Посібник складається з теоретичного матеріалу, який містить основні поняття, означення та формули, індивідуальних завдань, прикладу розв'язання типового варіанта та списку використаних джерел.

Індивідуальні завдання виконуються за варіантом, номер якого співпадає з номером студента за списком студентського журналу. Завдання потрібно виконувати в окремому зошиті, що здається на перевірку викладачеві, який веде практичні заняття. Перед розв'язанням задач слід підставити числові значення параметрів $a, b, c, m, n, k, N, x_1, x_2, P, P_1, P_2, P_3, P_4, \sigma, \delta$ з таблиць варіантів параметрів, які відповідають варіанту студента, до умов задач.

ТАБЛИЦЯ ВАРІАНТІВ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ 1-9

№ з/п	***a***	***b***	***c***	***m***	***n***	***k***	**№ з/п**	***a***	***b***	***c***	***m***	***n***	***k***
1	-2	3	1	-4	-1	-3	**16**	-3	2	-1	-2	4	-1
2	3	-1	-2	-3	2	1	**17**	2	-4	3	1	-1	2
3	2	5	-2	1	-4	3	**18**	-2	1	5	-4	1	-3
4	-3	2	4	-3	2	-1	**19**	-2	-3	1	-2	3	4
5	4	-3	3	2	1	-2	**20**	5	-2	-1	3	-2	-4
6	2	-4	-1	-2	3	1	**21**	3	5	-2	-1	3	2
7	-5	2	1	-1	4	2	**22**	-3	1	4	-1	2	-3
8	-2	1	3	4	-2	-1	**23**	2	4	-2	3	-5	2
9	2	-1	-5	3	1	-2	**24**	-2	-3	4	2	-1	-2
10	-4	2	1	-1	2	3	**25**	-3	4	1	-2	1	5
11	3	-3	-4	2	-1	2	**26**	2	-4	3	1	-1	-2
12	2	-2	3	5	4	-3	**27**	-3	2	-1	3	-2	1
13	-5	1	-2	1	-3	4	**28**	3	-3	2	-2	-1	4
14	-2	4	5	-3	-2	1	**29**	-4	-2	1	3	5	-1
15	2	3	-4	4	5	3	**30**	-2	4	3	-1	2	1

ТАБЛИЦЯ ВАРІАНТІВ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ 10

№ з/п	*Номер задачі*												
	1				**2**		**3**				**4**		
	N	***n***	***m***	***k***	P_1	P_2	P_1	P_2	P_3	P_4	***P***	***n***	***k***
1	20	5	7	3	0,75	0,85	0,6	0,4	0,95	0,98	0,1	6	3
2	25	10	8	4	0,55	0,45	0,55	0,45	0,8	0,7	0,2	5	2
3	23	7	10	5	0,6	0,7	0,65	0,35	0,96	0,9	0,25	7	3
4	27	4	5	2	0,85	0,65	0,75	0,25	0,75	0,7	0,3	8	3
5	15	5	4	2	0,65	0,95	0,56	0,44	0,85	0,8	0,2	7	2
6	17	4	5	3	0,9	0,8	0,7	0,3	0,8	0,9	0,3	6	2
7	19	3	5	2	0,7	0,75	0,52	0,48	0,85	0,7	0,5	7	3
8	20	4	7	4	0,75	0,8	0,35	0,65	0,8	0,95	0,3	6	2
9	16	3	5	2	0,85	0,95	0,33	0,67	0,55	0,6	0,1	5	3
10	18	4	6	3	0,75	0,9	0,34	0,66	0,65	0,7	0,2	6	3
11	14	4	5	2	0,45	0,65	0,51	0,49	0,85	0,75	0,4	7	4
12	16	5	4	2	0,95	0,9	0,54	0,46	0,95	0,85	0,3	5	2
13	21	6	5	3	0,6	0,5	0,47	0,53	0,92	0,83	0,25	8	4
14	22	5	6	4	0,65	0,75	0,39	0,61	0,75	0,77	0,15	7	3
15	24	6	5	3	0,75	0,95	0,38	0,62	0,94	0,8	0,1	7	2
16	25	5	7	4	0,55	0,6	0,37	0,63	0,92	0,9	0,2	7	4
17	26	6	5	3	0,65	0,7	0,47	0,53	0,82	0,8	0,3	7	3
18	17	5	6	3	0,65	0,6	0,7	0,3	0,85	0,78	0,35	5	2
19	18	6	5	4	0,85	0,8	0,71	0,29	0,59	0,65	0,4	6	3
20	20	5	7	3	0,35	0,45	0,72	0,28	0,67	0,7	0,45	8	3
21	21	5	4	2	0,55	0,65	0,73	0,27	0,55	0,7	0,25	6	3
22	23	7	5	3	0,8	0,6	0,74	0,26	0,65	0,75	0,1	8	3
23	15	5	4	3	0,7	0,55	0,75	0,25	0,75	0,9	0,15	6	4
24	16	6	5	2	0,9	0,75	0,76	0,24	0,84	0,8	0,2	5	3
25	17	8	6	4	0,8	0,65	0,77	0,23	0,9	0,95	0,4	5	3
26	27	4	5	2	0,85	0,65	0,75	0,25	0,75	0,7	0,3	8	3
27	16	3	5	2	0,85	0,95	0,33	0,67	0,55	0,6	0,1	5	3
28	14	4	5	2	0,45	0,65	0,51	0,49	0,85	0,75	0,4	7	4
29	21	5	4	2	0,55	0,65	0,73	0,27	0,55	0,7	0,25	6	3
30	26	6	5	3	0,65	0,7	0,47	0,53	0,82	0,8	0,3	7	3

№ з/п	Номер задачі							
	5		6	7				
	P	n	a	a	σ	x_1	x_2	δ
1	10	10	1	100	5	90	110	10
2	5	6	2	105	10	90	120	5
3	6	7	3	110	15	95	140	15
4	7	5	4	115	10	100	130	20
5	8	8	5	120	10	100	145	15
6	9	5	6	125	20	105	135	10
7	11	4	7	130	5	120	150	5
8	12	6	8	135	15	125	150	10
9	3	8	9	140	4	132	144	8
10	4	9	10	145	5	140	155	5
11	5	10	11	150	6	144	162	12
12	6	9	12	155	5	150	170	10
13	11	8	13	160	10	150	180	5
14	12	6	14	165	15	150	190	15
15	13	7	15	170	10	160	185	20
16	4	5	16	175	10	160	185	20
17	2	6	17	180	5	170	195	10
18	10	7	18	185	20	165	200	10
19	15	8	19	190	5	185	200	10
20	20	4	20	195	5	190	205	20
21	25	6	21	200	10	190	220	20
22	20	8	22	90	20	80	105	10
23	25	9	23	95	15	170	100	15
24	30	5	24	205	10	200	220	20
25	10	6	25	210	5	200	215	10
26	6	7	3	110	15	95	140	15
27	11	4	7	130	5	120	150	5
28	20	4	20	195	5	190	205	20
29	6	9	12	155	5	150	170	10
30	4	5	16	175	10	160	185	20

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ, ПРАВИЛА ТА ФОРМУЛИ

1. Елементи лінійної алгебри

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Матриця називається квадратною порядку n, якщо $m = n$.

Одиничною матрицею називається квадратна матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумою матриць A і B однакового розміру називається матриця C того ж самого розміру така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, де індекси i, j показують, що елемент матриці стоїть на перетині рядка з номером i та стовпця з номером j.

Добутком матриці A на число α називається матриця C така, що $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Добутком матриці A розміру $m \times p$ на матрицю B розміру $p \times n$ називається матриця C розміру $m \times n$ така, що $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$. Взагалі

$$AB \neq BA.$$

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність число, яке обчислюється за певним правилом та називається визначником або детермінантом матриці. Позначення визначника:

$$|A| = \det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

.

Визначник другого порядку знаходиться за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначник третього порядку обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Мінором M_{ij} квадратної матриці A порядку n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A визначається рівністю

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначник n-го порядку обчислюється методом розкладання матриці за елементами рядка або стовпця. Розкладання за елементами i-го рядка має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

де A_{ij} алгебраїчні доповнення елементів i-го рядка.

Визначники мають такі властивості:

1. Рівноправність рядків та стовпців: величина визначника не змінюється при транспонуванні.

2. Якщо поміняти місцями два рядка (стовпця) величина визначника змінить тільки знак.

3. Визначники з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнюють нулю.

4. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають загальний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то величина визначника також дорівнює нулю.

6. Визначник, який має два пропорційних рядка (стовпця), дорівнює нулю.

7. Якщо один з рядків (стовпців) визначника є лінійною комбінацією його інших рядків (стовпців), то визначник дорівнює нулю.

8. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

Квадратна матриця A називається виродженою, якщо $\det A = 0$, і невиродженою, якщо $\det A \neq 0$.

Оберненою до невиродженої матриці A називається матриця A^{-1} така, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, яка знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці.

Мінором M_k матриці A називається визначник k-го порядку, що утворений із її елементів, які стоять на перетині будь-яких k рядків і k стовпців матриці.

Рангом матриці A (позначається r або $rang\ A$) називається найвищий порядок мінору, відмінний від нуля.

Ранг матриці не змінюється при її елементарних перетвореннях, до яких відносяться:

а) заміна рядків стовпцями і навпаки;

б) перестановки рядків (стовпців) ;

в) відкидання рядку (стовпця), всі елементи якого дорівнюють нулю;

г) множення елементів рядка (стовпця) на одне і те ж число відмінне від нуля;

д) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) помножених на одне и те ж число.

Матриці, які утворюються в результаті елементарних перетворень, називаються еквівалентними, їх еквівалентність позначається значком ~.

Система лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

називається системою лінійних рівнянь. В матричній формі вона записується

$$AX = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ основна матриця системи, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ стовпець невідомих, а $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ стовпець правих частин.

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається набір чисел, які після підстановки їх замість невідомих у систему, перетворюють кожне рівняння системи на тотожність. Якщо система має лише один розв'язок, вона називається визначеною. Система, яка має хоча б один розв'язок, називається сумісною, а якщо не має жодного розв'язку – несумісною.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг основної матриці системи A дорівнював би рангу розширеної матриці

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник основної матриці якої відмінний від нуля, сумісна та визначена, розв'язок якої можна знайти методом Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

де Δ – визначник основної матриці системи, а Δ_i одержується із визначника Δ заміною *i*-го стовпця стовпцем правих частин. Розв'язок такої системи також можна отримати матричним способом за формулою

$$X = A^{-1}B,$$

де A^{-1} – обернена матриця основної матриці системи, а B – стовпець правих частин.

Для систем з довільною кількістю рівнянь та невідомих розв'язок системи можна знайти за методом Гауса, який полягає в послідовному виключенні змінних.

2. Елементи векторної алгебри

Вектором називається відрізок, який має напрямок. Якщо початок вектора знаходиться в точці A, а кінець – в точці B, то вектор позначається $\overrightarrow{AB}$, а довільні вектори позначаються $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...

Довжиною, або модулем вектора називається відстань між його початком і кінцем. Позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Два вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються колінеарними. Три вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах, називаються компланарними.

Два вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають рівні довжини.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\vec{c} = \alpha\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\alpha||\vec{a}|$, а напрямок співпадає з $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, та має протилежний напрямок, якщо $\alpha < 0$.

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який прямує з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, якщо вектор $\vec{b}$ починається з кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 1).

Сумою *n* векторів, які розміщені послідовно, називається вектор, який прямує з початку першого вектора з кінцем останнього вектора.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь *l* визначається формулою

$$a_l = np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

де φ – кут між вектором $\vec{a}$ та віссю *l*.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються лінійно залежними в n-вимірному просторі, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, що виконується рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0.$$

Якщо ця рівність виконується лише за умови рівності нулю всіх α_i, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними і утворюють в n-вимірному просторі базис, тобто будь-який вектор в цьому просторі може бути розкладений за векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Так в тривимірному просторі будь-який вектор $\vec{d}$ може бути розкладений за трьома лінійно незалежними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Числа α, β і γ називаються координатами вектора $\vec{d}$ в тривимірному базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Лінійно незалежні взаємно перпендикулярні вектори одиничної довжини називаються ортами та утворюють ортонормований базис. Таким базисом є прямокутна декартова система координат $Oxyz$, в якій положення точки в просторі визначається трьома числами – координатами x, y, z. В цій системі координат орти, напрями яких співпадають з напрямами координатних осей, позначають через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді будь-який вектор в просторі можна представити у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

або

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

де a_x, a_y, a_z координати вектора $\vec{a}$. Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$ – початок вектора, $B(x_2, y_2, z_2)$ – його кінець, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ визначаються за формулою

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Довжина вектора, якщо відомі його координати, обчислюються за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,.$$

Косинуси кутів, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами відповідних осей координат називаються напрямними косинусами і обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|};\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}\,.$$

Для напрямних косинусів завжди виконується рівність

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинуса кута φ між ними. Позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$. Тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\,.$$

Якщо вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ задані у координатному вигляді, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,.$$

Скалярний добуток має властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$; α – число,
3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;
4) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (умова перпендикулярності двох векторів);
5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Косинус кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ дорівнює

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, який задовольняє умовам:

1) довжина дорівнює $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
2) перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;
3) має такий напрям, що якщо дивитись з його кінця, то найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ спостерігається проти годинникової стрілки.

Позначається векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$. Якщо вектори задані координатами $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, а його половина – площі трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Векторний добуток має властивості:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
3) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$, α – число;
4) $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, що є результатом скалярного множення одного з них на векторний добуток двох інших. Позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Якщо $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ і навпаки.

Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, а $\frac{1}{6}$ його величини – об'єму трикутної піраміди, побудованих на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, як на ребрах.

3. Елементи аналітичної геометрії

Пряма лінія на площині

Будь-яке лінійне рівняння, що зв'язує між собою змінні x та y задає пряму лінію на площині. Найбільш загальний вигляд такого рівняння є

$$Ax+By+C=0.$$

Воно називається загальним рівнянням прямої на площині. Перпендикулярний до прямої вектор $\vec{n}=(A, B)$ називається нормальним вектором цієї прямої.

Різні види рівняння прямої на площині:

- $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A, B)$;
- $y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, $k=tg\varphi$, де φ кут між прямою та додатним напрямком осі Ox, b – точка перетину з віссю Oy;
- $y_0-y=k(x_0-x)$ – рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом k, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$;
- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – рівняння прямої у відрізках на осях, a і b – величини відрізків, які пряма відсікає на осях координат;
- $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}$ – канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{l}=(m, p)$, який називається напрямним вектором прямої;
- $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої що проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$.

Умови паралельності та перпендикулярності прямих та кут між ними визначаються умовами колінеарності та ортогональності нормалей цих прямих $\vec{n}_1=(A_1,B_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2)$ та кутом між ними. Якщо прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y=k_1x+b_1;\ y=k_2x+b_2,$$

то умова паралельності цих прямих буде

$$k_1 = k_2,$$

перпендикулярності

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

а кут між прямими визначається рівністю

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Площина в просторі

Будь-яке лінійне рівняння, що зв'язує між собою змінні x, y та z, задає площину у просторі. Найбільш загальний вигляд такого рівняння є

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Воно називається загальним рівнянням площини. Перпендикулярний до площини вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ називається нормальним вектором цієї площини.

Різні види рівняння площини:

- $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$;
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння площини у відрізках на осях, a, b і c – величини відрізків, які площина відсікає на осях координат;
- $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Умови паралельності, перпендикулярності площин та кут між ними визначаються умовами колінеарності, ортогональності та кутом між нормалями цих площин $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

перпендикулярності:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Кут між площинами

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма лінія в просторі

Пряма у просторі задається як лінія перетину двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1x + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2x + C_2x + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Різні види рівнянь прямої у просторі:

- $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{p} = \dfrac{z - z_0}{q}$ – канонічні рівняння прямої, що проходить

через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{l} = (m, p, q)$, який називається напрямним вектором прямої;

- $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – рівняння прямої що проходить через

дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$;

- $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = pt + y_0 \\ z = qt + z_0 \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої.

Умови паралельності, перпендикулярності прямих у просторі та кут між ними визначаються умовами колінеарності, ортогональності та кутом між напрямними векторами цих прямих $\vec{l}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ і $\vec{l}_2 = (m_2, p_2, q_2)$. Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

перпендикулярності:

$$m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0.$$

Кут між прямими

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\left|\vec{l}_1\right|\left|\vec{l}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2}\sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

Взаємне розташування прямої та площини у просторі

Нехай площина задана загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а пряма канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}.$$

Тоді площина і пряма будуть паралельними якщо нормальний вектор площини $\vec{n} = (A, B, C)$ та напрямний вектор прямої $\vec{l} = (m, p, q)$ перпендикулярні, тобто

$$Am + Bp + Cq = 0.$$

Умова перпендикулярності площини та прямої буде

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}.$$

Кут між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{n},\vec{l})}{|\vec{n}||\vec{l}|} = \frac{Am + Bp + Cq}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + p^2 + q^2}}$$

Криві другого порядку

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне рівняння еліпсу, симетричного відносно координатних осей має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Числа a і b називаються напівосями еліпса. При $a > b$ еліпс має вигляд, представлений на рис. 1.

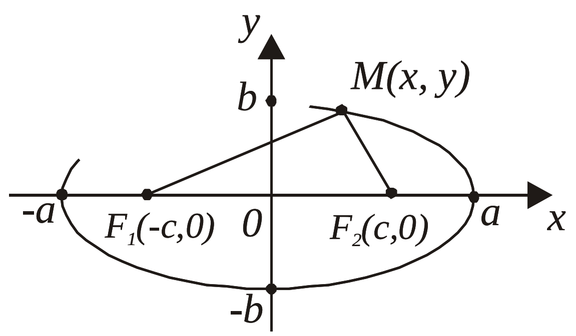

Рис. 1. Еліпс

Фокусна відстань такого еліпсу знаходиться за формулою

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\ .$$

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса і характеризує його форму. Ексцентриситет еліпса лежить в межах $0 < \varepsilon < 1$. Відстані від деякої точки $M(x, y)$ до фокусів знаходяться за формулами

$$|MF_1| = a + \varepsilon x;$$
$$|MF_2| = a - \varepsilon x.$$

Якщо $a = b$ (при цьому $\varepsilon = 0$), то маємо рівняння кола

$$x^2+y^2=a^2$$

з центром на початку координат, радіус якого дорівнює a.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне рівняння гіперболи, симетричної відносно координатних осей має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Число a називається дійсною, а b уявною напівосями гіперболи. Гіпербола має вигляд представлений на рис. 2.

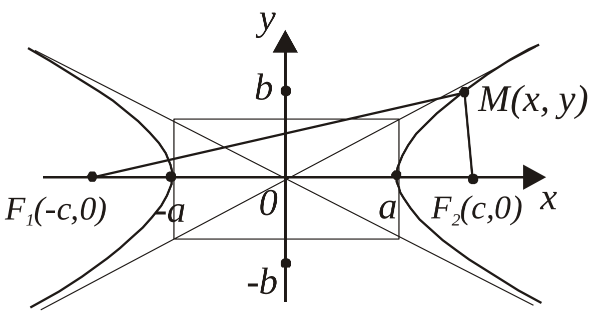

Рис. 2. Гіпербола

Гіпербола має дві асимптоти

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Фокусна відстань гіперболи знаходиться за формулою

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи.

Параболою називається геометричне місце точок, що рівновіддалені від фіксованої точки, яка називається фокусом, та фіксованої прямої, яка називається директрисою.

Канонічне рівняння параболи симетричної відносно осі Ox та з вершиною на початку координат має вигляд

$$y^2=2px,$$

де параметр p відстань від фокуса до директриси. Парабола має вигляд, представлений на рис. 3.

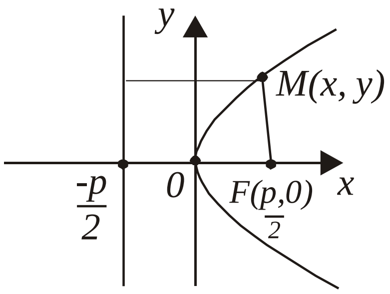

Рис. 3. Парабола

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Воно, в залежності від значень коефіцієнтів та співвідношення між ними, може бути приведено до одного з канонічних рівнянь ліній другого порядку: кола, еліпса, гіперболи або параболи.

4. Вступ до математичного аналізу

Множиною називається сукупність деяких об’єктів. Об’єкти, що утворюють множину, називаються елементами або точками цієї множини. Множини позначаються великими буквами, а їх елементи малими $A=(a,b,c,...)$; $A=\{x_n\}, n=1,2,...; A=\{x:...\}$ – елемент множини x має властивості, які вказано після двокрапки. Множина, елементами якої є усі дійсні числа, позначається як R. Множина, що не містить жодного елемента, називається пустою і позначається $\varnothing$. Якщо a є елемент множини A, то пишуть $a\in A$. Якщо b не є елементом множини A, то пишуть $b\notin A$. Якщо множина B є частиною множини A, то множина B називається підмножиною множини A і це позначається $B\subset A$.

Відрізняють такі числові множини:

- $[a,b]=\{x:a\le x\le b\}$ – відрізок;
- $(a,b)=\{x:a<x<b\}$ – інтервал, відкритий відрізок;
- $(-\infty,\infty)=\{x:-\infty<x<\infty\}$ – нескінченний інтервал;
- $\bigcup(c,\varepsilon)=\{x:|x-c|<\varepsilon\}=(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ – ε-окіл точки c;
- $\bigcup(\infty,\varepsilon)=\{x:|x|>\varepsilon\}$ – ε-окіл нескінченної точки;
- $\bigcup(+\infty,\varepsilon)=\{x:x>\varepsilon\}$ – ε-окіл точки $+\infty$;
- $\bigcup(-\infty,\varepsilon)=\{x:x<-\varepsilon\}$ – ε-окіл точки $-\infty$;

- $A\bigcup B=\{x: x\in A$ або $x\in B\}$ – об’єднання множин;
- $A\bigcap B=\{x: x\in A$ і $x\in B\}$ – перетин множин A і B.

Якщо кожному числу x з множини X поставлено у відповідність за деяким законом число y з множини Y, то закон цієї відповідності називається функцією та позначається $y=f(x)$. Множина X називається областю визначення функції, а множина Y – областю значень функції.

Існує декілька способів задання функції:

1) Аналітичний спосіб, коли функція задається формулою вигляду $y=f(x)$;

2) Табличний спосіб, коли вказані всі можливі значення змінної x та відповідні їм значення змінної y;

3) Графічний спосіб полягає в зображенні графіка функції – множини точок (x,y) площини.

Функція $y=f(x)$ називається парною (непарною), якщо для будь-якого $x\in X$ $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$). Якщо функція $f(x)$ не є парною чи непарною, то вона називається функцією загального виду.

Функція $y=f(x)$ називається періодичною з періодом $T\neq 0$, якщо для довільних x з області визначення функції $f(x+T)=f(x)$.

Нехай $Y=\{y: y=f(x), x\in X\}$. Функція $x=f^{-1}(y)$ називається оберненою до функції $y=f(x)$, якщо $X=\{x: x=f^{-1}(y), y\in Y\}$. Обернену функцію позначають $y=f^{-1}(x)$.

До основних елементарних функцій відносяться:

- степенева ($y=x^{\alpha}, \alpha\in R$);
- показникова ($y=a^{x}, a\neq 0, a\neq 1$);
- тригонометричні ($y=\sin x, y=\cos x, y=tgx, y=ctgx$);
- обернені функції ($y=\ln x, y=\arcsin x, y=\arccos x, y=arctgx, y=arcctgx$).

Функції, які створені із основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і суперпозицій, називаються елементарними.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки $x=a$, крім, можливо, самої точки a. Число A називається границею функції $y=f(x)$ при прямуванні x до a ($x\to a$), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0<|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначають цю границю функції так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

Якщо $x < a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a - 0$; якщо $x > a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a + 0$. Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ та $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ називають, відповідно, границею функції $y = f(x)$ зліва в точці a і границею функції $y = f(x)$ справа в точці *a*, або однобічними границями функції $y = f(x)$ в точці *a*. Для існування границі функції при $x \to a$ необхідно і достатньо, щоб $f(a-0) = f(a+0)$.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають границі при $x \to a$ і вони скінченні, то

1) $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$;

2) $\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$;

3) $\lim(cu) = c \lim u,\ c = const$;

4) $\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim u}{\lim v}$ при $\lim v \neq 0$;

5) $\lim\left(u^v\right) = \left(\lim u\right)^{\lim v}$.

Границя сталої функції $u(x) = c$ дорівнює самій сталій c, тобто $\lim c = c$.

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, а функція $\beta(x)$ – нескінченно великою при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = \infty$ (*a* – скінчене число або нескінченність). Нескінченно великі та нескінченно малі функції називаються еквівалентними при $x \to a$, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці.

Еквівалентними нескінченно малими при $x \to 0$ є наступні функції:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \mathrm{tg} x \sim \mathrm{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x).$$

При обчисленні границь необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням і вияснити, чи має місце невизначеність. До невизначених виразів відносяться: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$. Якщо в результаті підстановки граничного значення аргументу одержуємо невизначений вираз, то треба виконати тотожні перетворення, в результаті яких усувається невизначеність, а потім обчислити границю. При розкритті деяких невизначеностей використовують першу та другу важливі границі.

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ або, } \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Функція $y=f(x)$ називається неперервною при $x=a$, якщо виконані умови:

1) існують обидві однобічні границі $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;
2) вони дорівнюють одна одній;
3) значення функції в точці $x=a$ дорівнює значенню однобічних границь $f(a)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, то вона називається неперервною на цьому проміжку.

Якщо хоча б одна умова неперервності функції в точці не виконується то ця точка є точкою розриву даної функції:

1) точка $x=a$ є точкою усувного розриву функції $y=f(x)$, якщо обидві однобічні границі існують, дорівнюють одна одній але не дорівнюють значенню функції в цій точці;

2) точка $x=a$ є точкою розриву першого роду функції $y=f(x)$, якщо обидві однобічні границі існують але не дорівнюють одна одній;

3) точка $x=a$ є точкою розриву другого роду функції $y=f(x)$, якщо хоча б одна однобічна границя не існує або дорівнює нескінченості.

Асимптотою функції $y=f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається нескінчена гілка графіка функції.

Пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою функції $y=f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty.$$

Пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою функції $y=f(x)$, якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Пряма $y=b$ є горизонтальною асимптотою функції $y=f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$. Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти $y=kx+b$.

5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Границя відношення приросту функції $y=f(x)$ до приросту аргументу функції при прямуванні останнього до нуля називається похідною даної функції

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо зазначена границя існує, то функція $f(x)$ називається диференційовною, а операцію знаходження похідної – диференціюванням.

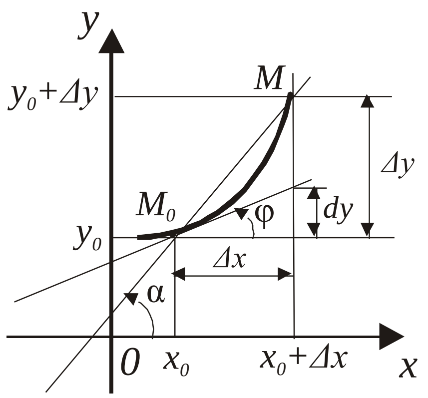

Рис. 4. Геометричний зміст похідної

Геометричний зміст похідної це тангенс кута нахилу дотичної до графіку функції $y=f(x)$ в точці (x_0, y_0). Розглянемо рис. 4. M_0M – січна, що проходить через дві точки $M_0(x_0,y_0)$ і $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ кривої $y=f(x)$, $tg\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x\to 0$ $M\to M_0$, а січна переходить в дотичну, що проходить через точку M_0 до кривої, при цьому $tg\alpha\to tg\varphi$, де φ – кут між додатним напрямом осі OX і дотичною, який відраховується проти ходу годинникової стрілки. Використовуючи рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

запишемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, що проходить через точку $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); \quad f'(x_0) = tg\varphi.$$

Похідна має властивості:

1) похідна сталої дорівнює нулю ($c' = 0$);

2) $(cf(x))' = cf'(x)$;

3) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

4) $(uv)' = u'v + uv'$;

5) $\frac{u}{v} = \frac{u'v + uv'}{v^2}$.

Похідні основних елементарних функцій:

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;

2) $(a^x)' = a^x \ln a$;

3) $(e^x)' = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

6) $(\sin x)' = \cos x$;

7) $(\cos x)' = -\sin x$;

8) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

9) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

10) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

11) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

12) $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$;

13) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Похідна складної функції $z = z(y(x))$:

$$z'(x) = z'(y)y'(x).$$

Якщо функція задана неявно $F(x, y) = 0$, то вона диференціюється за змінною x, вважаючи y деякою невідомою функцією змінної x: $y = f(x)$.

При параметричному заданні функції $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

похідна знаходиться за формулою

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

В деяких випадках, наприклад при диференціюванні функцій вигляду $y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$, вираз спочатку логарифмується, а потім знаходиться похідна неявно заданої функції.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина приросту функції, яка лінійна відносно $\Delta x, \Delta x \to 0$. Позначається $dy = f'(x_0)dx$. Тоді $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, де dy – диференціал функції, dx– диференціал незалежної змінної. Порівняння Δy з dy показує, що $\Delta y \approx dy$. Звідки $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ та $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малих приростах Δx аргументу x.

Похідна другого порядку визначається як похідна від похідної і позначається

$$y'' = (y')'.$$

Похідна третього порядку визначається як похідна від похідної другого порядку і т.д. Похідна порядку n буде

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Похідні можуть застосовуватись для розкриття невизначеностей вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ та $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ (правило Лопіталя). Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, обидві прямують до нуля або нескінченості при прямуванні до a, то має місце рівність

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

якщо остання границя існує (a – скінченне число або нескінченність). При розкритті невизначеностей вигляду $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}$ за правилом Лопіталя вони спочатку зводяться до невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$ шляхом алгебраїчних перетворень.

Функція $y=f(x)$ називається зростаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 та x_2 з цього інтервалу, таких що $x_2>x_1$ виконується нерівність $f(x_2)>f(x_1)$.

Функція $y=f(x)$ називається спадаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 та x_2 з цього інтервалу, таких що $x_2>x_1$ виконується нерівність $f(x_2)<f(x_1)$.

Ознаки зростання і спадання функції:

- якщо $f'(x)>0$ на (a,b), то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі;
- якщо $f'(x)<0$ на (a,b), то $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Інтервали зростання та спадання функції називаються інтервалами монотонності.

Функція $y=f(x)$ досягає в точці $x=x_0$ локального максимуму (max) (локального мінімуму (min)), якщо існує такий $\varepsilon-$окіл точки x_0 $U(x_0,\varepsilon)$, що для будь-якого $x_0\in U(x_0,\varepsilon)$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$. Точки максимуму і мінімуму функції $y=f(x)$ називаються точками локального екстремуму.

Необхідна умова екстремуму: якщо точка $x=x_0$ є точкою локального екстремуму функції $y=f(x)$, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називаються критичними точками.

Достатня умова екстремуму: якщо при переході через точку $x=x_0$ похідна функції $y=f(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції, а якщо з мінуса на плюс, то точкою мінімуму. Якщо похідна не змінює знак, то екстремуму немає.

Функція досягає на відрізку своїх найбільшого та найменшого значень або у критичних точках або на кінцях відрізку.

Функція $y=f(x)$ називається опуклою на інтервалі (a,b), якщо її графік на цьому інтервалі розташований нижче дотичних, проведених в будь-яких його точках.

Функція $y = f(x)$ називається угнутою на інтервалі (a, b), якщо її графік на цьому інтервалі розташований вище дотичних, проведених в будь-яких його точках.

Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка функції, в якій графік змінює свою опуклість на угнутість і навпаки, називається точкою перегину.

Достатня умова опуклості (угнутості) графіка функції: якщо друга похідна $f''(x)$ функції $y = f(x)$ на деякому інтервалі від'ємна $f''(x) < 0$ (додатна $f''(x) > 0$), то графік функції опуклий (угнутий) на цьому інтервалі.

Необхідна умова існування точки перегину: якщо точка $x = x_0$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, то друга похідна функції в цій точці дорівнює нулю.

Достатня умова існування точки перегину: якщо при переході через точку $x = x_0$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то ця точка є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Схема повного дослідження функції і побудови її графіка:

- визначити область існування функції;
- дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
- знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- дослідити точки розриву функції, якщо вони існують, знайти вертикальні асимптоти;
- знайти похилі асимптоти, а у випадку їх відсутності дослідити поведінку функції при $x \to \pm\infty$;
- визначити інтервали зростання та спадання функції та її екстремуми;
- визначити інтервали опуклості та угнутості графіка функції і його точки перегину;
- побудувати графік.

6. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Нехай існує дві множини дійсних чисел D і Z. Якщо кожній парі значень x і y з множини D поставлено у відповідність деяке значення z з множини Z, то закон цієї відповідності називається функцією двох змінних. Ця залежність записується у вигляді $z = f(x, y)$, графіком якої є деяка поверхня у просторі. Множина D називається областю визначення, а множина Z областю значень функції z. Областю визначення функції є деяка частина площини *XOY*, обмежена лініями, які можуть належати або не належати цій області. Тобто, якщо функція задана аналітичним виразом (формулою), то областю визначення слід вважати область існування її аналітичного виразу – множину всіх тих точок (x, y), в яких даний аналітичний вираз визначений і набуває тільки дійсних і скінченних значень.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x .$$

Ця границя обчислюється за умови $y = const$.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною y називається границя

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y ,$$

яка обчислюється за умови $x = const$.

Частинними похідними другого порядку є частинні похідні від частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Для усіх елементарних функцій $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, тому порядок диференціювання при знаходженні мішаної похідної не важливий. Другі похідні також записуються $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$.

Повним диференціалом функції двох змінних називається вираз

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy ,$$

де $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ – диференціали незалежних змінних. Повний диференціал використовується у наближених обчисленнях значень функцій, оскільки $\Delta z \approx dz$, а

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Похідною функції $z = f(x, y)$ в точці M за напрямом l (рис. 5) називається границя

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

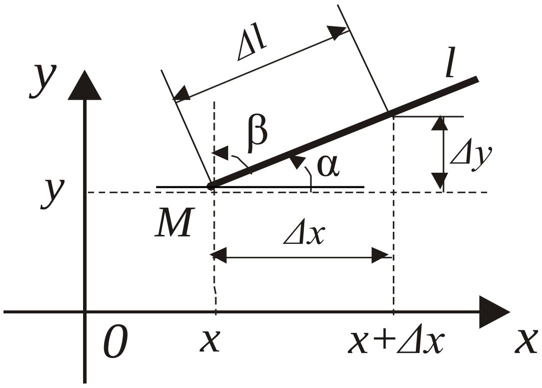

Рис. 5. Похідна за напрямом

Оскільки пряма l складає кут α з додатним напрямом осі Ox, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dl} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ називається вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, який позначається $\vec{\nabla} z$ (читається «набла» z) або $\overrightarrow{grad}\, z$. Аналогічно визначається градієнт функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} u = \overrightarrow{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$, якщо в будь-якому досить малому околі цієї точки $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$).

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо функція $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум, то частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю.

Достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має частинні похідні, що дорівнюють нулю і в цій точці існують частинні похідні другого порядку $A = \dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\,\partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}$,

$\Delta = A \cdot C - B^2$. Тоді, якщо

1) $\Delta > 0$ і $A < 0$ – точка M_0 є точкою *max*;
2) $\Delta > 0$ і $A > 0$ – точка M_0 є точкою *min*;
3) $\Delta < 0$ – екстремуму немає;
4) $\Delta = 0$ – необхідні додаткові дослідження.

Функція багатьох змінних досягає своїх найбільшого та найменшого значень в обмеженій замкненій області або в точках екстремуму, або на межі області.

7. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Функція $y = F(x)$ називається первісною функції $y = f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$. Тобто вона визначена з точністю до сталої.

Множина всіх первісних функції $y = f(x)$ називається невизначеним інтегралом

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, а $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Знаходження невизначеного інтегралу називається інтегруванням та є оберненим до диференціювання. Тому таблиця похідних основних елементарних функцій є основою для складання таблиці основних інтегралів:

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n-1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C$.

Невизначений інтеграл має властивості:

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

б) $\int df(x) = f(x) + C$;

в) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda = const$;

г) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Основні методи інтегрування:

1) безпосереднє інтегрування – приведення підінтегральної функції до суми або різниці функцій та застосування властивостей та таблиці невизначених інтегралів;

2) інтегрування частинами за формулою

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du;$$

3) інтегрування заміною змінної. Нехай $y = f(x)$ та $x = \varphi(t)$, тоді

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Розглянемо задачу знаходження площі плоскої фігури обмеженої зверху кривою $y = f(x)$, знизу віссю Ox та з боків прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 6). Розіб’ємо цю фігуру прямими перпендикулярними осі Ox на n частин. Тоді площа всієї фігури буде дорівнювати сумі частин, що представляють собою криволінійні трапеції, одна з сторін яких лежить на осі Ox. Позначимо ці відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i та замінимо площу криволінійної трапеції площею прямокутника з основою $[x_{i-1}, x_i]$ та висотою $f(\xi_i)$. Тоді площа всієї фігури буде наближено дорівнювати сумі $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ця сума називається інтегральною і залежить від розбиття відрізку $[a, b]$ та вибору точок ξ_i. Границя цієї суми при необмеженому зростанні кількості розбивань n та необмеженому зменшенні найбільшого з частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ називається визначеним інтегралом функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Число a називається нижньою, а число b – верхньою межею визначеного інтегралу.

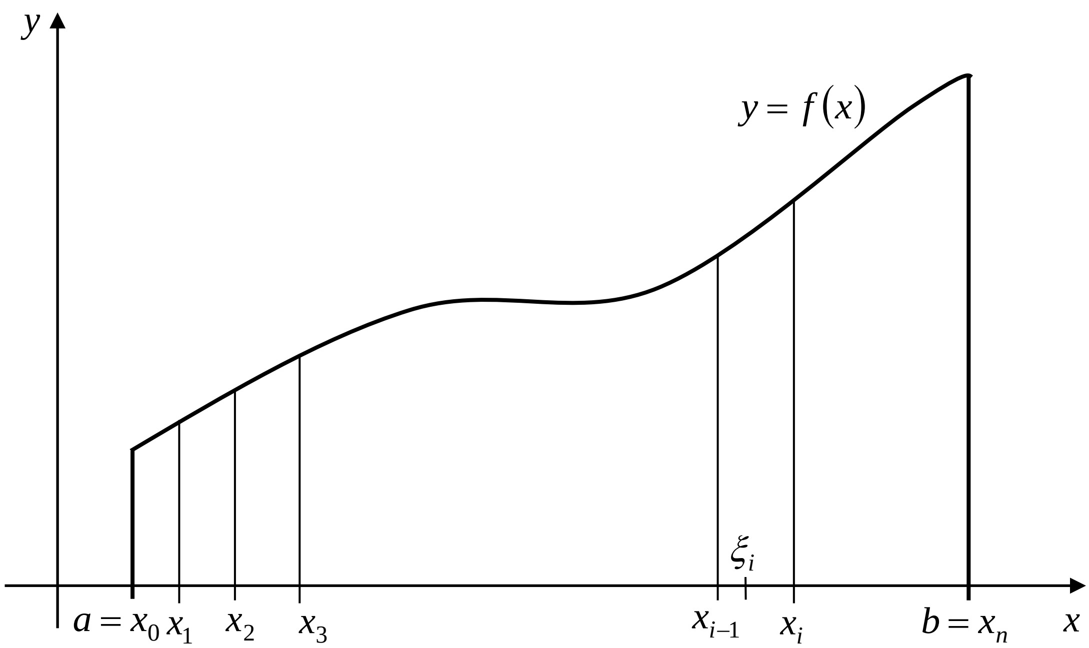

Рис. 6. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Визначений інтеграл має властивості:

а) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

б) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

в) $\int\limits_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx \pm \beta\int\limits_a^b g(x)dx,\ \alpha = const, \beta = const$

г) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Обчислюється визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбниця

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ первісна функції $y = f(x)$.

Основні методи обчислення визначеного інтегралу:

1) інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

2) заміна змінної

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t),\ \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Визначений інтеграл називається невласним, якщо хоча б одна з меж інтегрування є нескінченою (невласний інтеграл першого роду), або підінтегральна функція в околі деякої точки на проміжку інтегрування є необмеженою (невласний інтеграл другого роду).

Невласний інтеграл першого роду обчислюється за формулами

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називається збіжним, в протилежному випадку – розбіжним.

Нехай функція $y = f(x)$ необмежена в точці $c \in [a, b]$. Тоді інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є невласним інтегралом другого роду та обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Поняття збіжності цього інтегралу таке саме, як для невласного інтеграла першого роду.

Застосування визначеного інтегралу:

1. Обчислення площ плоских фігур. Нехай фігура обмежена з боків прямими $x = a$, $x = b$, а зверху та знизу кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ причому $f_1(x) \leq f_2(x)$ в кожній точці проміжку $[a, b]$, тоді площа цієї фігури знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx;$$

2. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, відрізками $x = a$ і $x = b$ та віссю Ox, знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

При обертанні криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = \varphi(y)$, відрізками прямих $y = c$ і $y = d$ і віссю Oy навколо осі Oy, об'єм тіла знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy;$$

3. Довжина плоских кривих обчислюється за формулами:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$ та

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

при параметричному заданні кривої $x = x(t),\ y = y(t)$.

8. Диференціальні рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує невідому функцію y, її похідні та незалежну змінну x. Порядок диференціального рівняння визначається порядком найвищої похідної, що входить до рівняння. Так диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Будь-яка функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє диференціальному рівнянню, тобто перетворює його на тотожність, називається розв'язком цього рівняння. Вираз $\Phi(x, y) = 0$, який неявно задає розв'язок рівняння, називається інтегралом цього рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається його інтегральною кривою. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається його інтегруванням.

Загальним розв'язком, або загальним інтегралом диференціального рівняння називають такий його розв'язок

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

або

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

який містить довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, кількість яких дорівнює порядку цього рівняння. Якщо всі сталі покласти рівними деяким значенням, то отримаємо розв'язок, який називається частинним. Задача знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння називається задачею Коши.

При цьому поряд з диференціальним рівнянням потрібно задати початкові умови:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.$$

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку є таким:

$$F(x,y,y')=0.$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно похідної, то воно набуває вигляду:

$$y'=f(x,y).$$

Рівняння вигляду

$$y'=f(x)$$

називається рівнянням з відокремленими змінними і має загальний розв'язок

$$y=\int f(x)dx+C.$$

Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням зі змінними що можна відокремити, якщо воно зводиться до вигляду:

$$P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0.$$

За допомогою алгебраїчних перетворень воно приводиться до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy=-\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx,$$

яке має розв'язок

$$\int\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy=-\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+C.$$

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке можна записати у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного і того ж порядку n, тобто

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y),\ Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x, y).$$

Шляхом заміни

$$\frac{y}{x} = t(x),$$

де $t = t(x)$ – невідома функція, це рівняння зводиться до рівняння зі змінними що можна відокремити.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x),$$

а рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

рівнянням Бернуллі. Обидва ці рівняння можуть бути розв’язані методом Бернуллі, який полягає в пошуку невідомої функції у вигляді добутку двох функцій

$$y = u(x)v(x).$$

Тоді

$$y' = u'v + v'u.$$

Підстановка цього виразу до лінійного диференціального рівняння перетворює його до вигляду

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x).$$

Оскільки невідому функцію y шукаємо, як добуток двох функцій, то одну з них можна вибрати довільно. Виберемо функцію $v(x)$ таку, щоб вираз в квадратних дужках дорівнював нулю. Тоді лінійне диференціальне рівняння розпадається на два диференціальних рівняння зі змінними, які можна відокремити:

$$v' + p(x)v = 0$$

та

$$u'v = q(x).$$

Ці рівняння легко розв'язуються і остаточно маємо

$$y = uv = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

При інтегруванні конкретного рівняння останньою формулою, як правило, не користуються, а послідовно виконують всі дії за вказаною схемою. За цією ж схемою інтегрують і рівняння Бернуллі.

Розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

є більш складним, але в деяких випадках порядок диференціального рівняння можна знизити. Розглянемо такі диференціальні рівняння:

1. Рівняння

$$y'' = f(x).$$

Розв'язок цього рівняння знаходимо шляхом послідовного інтегрування:

$$y' = \int f(x)dx + C_1;\ y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2.$$

2. Рівняння, що не містить явно шукану функцію:

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Зниження порядку такого рівняння досягається введенням нової шуканої функції

$$z(x) = y',\ z(x) = y''.$$

Тоді рівняння набуває вигляду

$$F(x,z,z')=0,$$

яке представляє собою рівняння першого порядку.

3. Рівняння, що не містить явно незалежну змінну x:

$$F(y,y',y'')=0.$$

В цьому випадку в якості нової функції беремо

$$p(y)=y',$$

а нової незалежної змінної: y. Тоді

$$y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p.$$

Така заміна змінних призводить до диференціального рівняння першого порядку:

$$F(y,p,p'p)=0.$$

Лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y''+py'+qy=0,$$

де p і q – дійсні числа. Його розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y=e^{kx}.$$

Після підстановки його до рівняння отримуємо квадратне рівняння

$$k^2+pk+q=0,$$

яке називається характеристичним. Загальний розв'язок лінійного рівняння, в залежності від коренів характеристичного рівняння, має вигляд:

а) корені дійсні і різні $k_1 \neq k_2$ (дискримінант характеристичного рівняння $D>0$)

$$y_{з.о.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

б) корені кратні $k_1 = k_2 = k$ (дискримінант характеристичного рівняння $D = 0$)

$$y_{з.о.} = e^{kx}(C_1 + xC_2);$$

в) корені комплексно-спряжені $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$ (дискримінант характеристичного рівняння $D > 0$)

$$y_{з.о.} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – деяка задана функція.

Теорема. Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукається виходячи з вигляду функції $f(x)$.

Розглянемо окремі випадки вигляду правої частини $f(x)$:

1. $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Тоді частинний розв'язок слід шукати у вигляді:

$$y_{ч.н.} = Q_n(x) x^r,$$

де $Q_n(x)$ – багаточлен з невідомими коефіцієнтами того ж степеня, що й багаточлен $P_n(x), r$ – кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють нулю.

2. $f(x) = ae^{\alpha x}$.

Тоді

$$y_{ч.н.} = Ae^{\alpha x} x^r,$$

де A – невідомий коефіцієнт, r – кількість коренів характеристичного рівняння, що дорівнюють α.

3. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{ч.н.} = Q_n(x)e^{\alpha x} x^r,$$

де $Q_n(x)$ – багаточлен з невідомими коефіцієнтами того ж степеня, що й багаточлен $P_n(x)$, r – кількість коренів характеристичного рівняння, що дорівнюють α.

4. $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^r,$$

де A і B – невідомі коефіцієнти, r – кратність кореня $\pm\beta i$ в характеристичному рівнянні, що дорівнюють βi.

Невизначені коефіцієнти знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку одержуємо із умов рівності коефіцієнтів подібних членів в правій і лівій частинах неоднорідного рівняння після підстановки в нього $y_{ч.н.}$ замість невідомої функції y.

9. Ряди

Вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається числовим рядом, а числа $u_1, u_2, \ldots$ – членами ряду. n-ий член ряду u_n називається загальним членом ряду і задає правило побудови всіх членів ряду.

Побудуємо таку послідовність

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1;\\
&S_2 = u_1 + u_2;\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3;\\
&\ldots\\
&S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i .
\end{aligned}$$

Тобто S_n представляє собою суму перших n членів ряду та називається частинною сумою ряду. Величина

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

називається сумою ряду, якщо границя існує та відмінна від нескінченості. Числовий ряд, який має суму, називається збіжним. В протилежному випадку – розбіжним.

Збіжні числові ряди мають властивості:

1) якщо до збіжного числового ряду додати або відняти скінчену кількість членів, то новий ряд також буде збігатись;

2) якщо кожний член збіжного числового ряду з сумою S помножити на одне і теж саме число A, то отриманий ряд також буде збігатись, а його сума дорівнювати $A \cdot S$;

3) якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються та їх суми відповідно дорівнюють S_u та S_v, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ також будуть збігатись, а їх суми дорівнювати $S_u + S_v$ та $S_u - S_v$.

Необхідна ознака збіжності ряду: якщо ряд збігається, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Якщо необхідна ознака не виконується, то ряд розбігається. На основі виконання необхідної ознаки не можливо зробити висновок про збіжність або розбіжність ряду.

Достатні ознаки збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами:

1. Ознака Даламбера. Нехай існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тоді ряд збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$, при $l=1$ збіжність ряду встановлюється за допомогою інших ознак.

2. Радикальна ознака Коши. Нехай існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. Тоді ряд збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$, при $l=1$ потрібне додаткове дослідження.

3. Інтегральна ознака Коши. Нехай функція $f(x)\geq 0$ неперервна на інтервалі $[1;+\infty)$, тоді невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ одночасно або збігаються, або розбігаються.

4. Ознака порівняння. Нехай задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, і виконується нерівність $u_n \leq v_n$. Тоді якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Для того щоб скористатися ознакою порівняння потрібно підібрати інший відомий ряд, з яким можна порівнювати досліджуємі ряди. Наприклад, узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},$$

який розбігається, якщо $\alpha \leq 1$ та збігається, якщо $\alpha > 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається знакозмінним, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні.

Окремим випадком знакозмінного ряду є знакопереміжний ряд, члени якого строго перемежаються за знаком: $u_1 - u_2 + u_3 - u_n + \ldots$, ($u_n > 0$).

Теорема Лейбниця: якщо в знакопереміжному ряді абсолютні величини ряду спадають $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > \ldots$, а загальний член прямує до нуля $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається, причому сума ряду не перевищує його першого члена: $S \leq u_1$.

Знакопереміжний ряд називається збіжним абсолютно, якщо він збігається за теоремою Лейбниця та збігається ряд складений з абсолютних величин.

Знакопереміжний ряд називається збіжним умовно, якщо він збігається за теоремою Лейбниця, а ряд, складений з абсолютних величин, розбігається.

Якщо членами ряду є функції $u_n(x)$ незалежної змінної x, то ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

називається функціональним. Множина значень змінної x, при яких цей ряд збігається, називається областю збіжності функціонального ряду.

Для знаходження області збіжності ряду можна застосовувати відомі ознаки збіжності числових рядів (Даламбера, Коші), вважаючи x фіксованою величиною.

Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-b)^n,$$

де b, a_n – дійсні числа, числа a_n називаються коефіцієнтами членів ряду. Якщо $a=0$, то маємо степеневий ряд за степенями x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ збігається в точці x_0, то він буде абсолютно та рівномірно збігатись в інтервалі $|x|<|x_0|$

Додатне число R називається радіусом збіжності степеневого ряду, якщо при $|x|<R$ ряд збігається абсолютно, а при $|x|>R$ розбігається. При $|x|=R$ збіжність степеневого ряду перевіряється підстановкою до степеневого ряду та дослідженні отриманих числових рядів. Радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулами

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

або

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

де a_n, a_{n+1} – коефіцієнти при n-ому і $(n+1)$-ому членах ряду.

Степеневий ряд можна почленно інтегрувати і диференціювати всередині його інтервалу збіжності. При цьому степеневі ряди, які будуть одержані, мають той же інтервал збіжності, що і вихідний ряд.

Якщо функція $y=f(x)$ має похідні будь-якого порядку в околі точки $x=a$, то її можна розкласти в степеневий ряд:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$

Цей ряд називається рядом Тейлора. В скороченому запису його можна представити

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Якщо $a=0$, то одержимо частковий випадок ряду Тейлора, який називається рядом Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

або

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Наведемо розкладання деяких важливих елементарних функцій в степеневі ряди.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Ці ряди мають область збіжності $-\infty < x < \infty$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n ;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} ;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} .$$

Ці ряди мають область збіжності $-1 < x < 1$.

Ряди Тейлора та Маклорена використовуються для наближених обчислень з будь-якої наперед заданою точністю значень функцій та визначених інтегралів.

10. Теорія ймовірностей

Теорія ймовірностей це математична наука, яка дозволяє по ймовірностям одних випадкових подій знаходити ймовірності інших випадкових подій, зв'язаних деяким чином з першими.

Випадкові події та їх класифікація

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття події.

Подія це будь-який факт, який може відбутися в результаті досліду або випробування.

Події позначаються великими літерами латинського алфавіту A, B, C, ...

Дослід або випробування це здійснення визначеного комплексу умов.

Стрілець стріляє по мішені, яка розділена на чотири частини. Постріл це випробування. Влучання у визначену частину мішені це подія.

В урні є кольорові кулі. З урни навмання беруть одну кулю. Витягування кулі з урни це випробування. Поява кулі визначеного кольору – подія.

Події можуть бути сумісними та несумісними.

Події називаються сумісними, якщо поява однієї з них супроводжується появою інших в одному і тому ж випробуванні. Події називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу інших в одному і тому ж випробуванні.

Технічний контроль перевіряє вироби на стандартність. Нестандартним може бути визнано виріб, який не відповідає розміру, кольору і т.д. Таким чином, виріб не відповідає розміру і виріб нестандартний є сумісні події.

В ящику знаходяться вироби. Навмання беруть один виріб. Поява стандартного виробу виключає появу нестандартного. Отже, події стандартний виріб і нестандартний виріб є несумісними.

Подія називається достовірною, якщо вона обов'язково відбудеться в умовах даного досліду.

Подія називається неможливою, якщо вона не може відбутися в умовах даного досліду.

Подія називається можливою або випадковою, якщо в результаті досліду вона може з'явитись, а може і не з'явитись.

Події називаються рівноможливими, якщо за умовами випробування ні одна з цих подій не є об'єктивно більш можливою ніж інша.

Поява тієї або іншої кількості очок на гральній кістці є події рівноможливі.

Важливим поняттям теорії ймовірностей є повна група подій. Декілька подій утворюють повну групу подій, якщо в результаті досліду обов'язково з'явиться хоча б одна з них.

При киданні гральної кістці події, які полягають у появі кількості очок 1, 2, 3, 4, 5, 6 утворюють повну групу.

Протилежною подією $\overline{A}$ зветься така подія, яка обов'язково повинна відбутися, якщо не відбулася деяка подія *A*.

Класичне означення ймовірності

Ймовірністю події зветься чисельна міра ступені об'єктивної можливості появи цієї події.

Випадок зветься сприятливим деякій події, якщо поява цього випадку призводить до появи даної події.

Ймовірність появи події *A* в даному досліді обчислюється, як відношення кількості випадків m, сприятливих появі цієї події, до загальної кількості всіх випадків n. Це є класичним означенням ймовірності. Таким чином ймовірність події *A* знаходиться за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

З формули випливає, що ймовірність події є додатне число, яке може змінюватись від 0 до 1. Оскільки $0 \le m \le n$, то $0 \le P(A) \le 1$.

Ймовірність має такі властивості:

1. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці.
2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.

3. Ймовірність появи подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці, оскільки поява хоча б однієї з них є достовірна подія.
4. Ймовірність появи протилежної події $\overline{A}$ дорівнює різниці між одиницею та ймовірністю появи події A

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A).$$

При обчисленні ймовірностей для підрахунку кількості випадків використовуються деякі формули комбінаторики.

Перестановкою n елементів називається комбінація з усіх цих елементів, що розташована у визначеному порядку. Кількість перестановок знаходиться за формулою:

$$A_n=n!\,.$$

Розміщенням m елементів з n називається будь-яка комбінація з m елементів вибраних з n та розташованих у визначеному порядку. Кількість розміщень знаходиться за формулою:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}\,.$$

Сполученням m елементів з n називається будь-яка комбінація з m елементів вибраних з n та розташованих в довільному порядку. Кількість сполучень знаходиться за формулою:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}\,.$$

На практиці часто класичне означення ймовірності не може бути застосовано за такими причинами:

1) класичне означення ймовірності припускає, що загальна кількість випадків повинна бути кінцевою, але частіше вона не обмежена;

2) часто не можливо представити результати досліду у вигляді рівноможливих.

Тому на практиці використовують статистичну ймовірність, яка збігається з теоретичною тільки за умови нескінченої кількості дослідів.

Статистична ймовірність події це відносна частота появи події A в n проведених дослідах

$$P^*(A)=\frac{m}{n}\,,$$

де m - кількість появ події A в n дослідах.

Поняття суми та добутку подій

Безпосередній підрахунок ймовірностей за класичним означенням під час розв'язання багатьох важливих задач є достатньо важким та тривалим. Тому потрібні методи обчислення ймовірностей подій, які за відомими ймовірностями одних подій, дозволять обчислити ймовірності інших подій. Ці методи пов'язані з використанням основних теорем теорії ймовірностей: теоремами додавання та множення ймовірностей.

Сформулюємо поняття суми та добутку подій.

Сумою двох подій A і B зветься подія C, яка складається з появи події A або події B, або обох цих подій. Іншими словами, подія C полягає в появі хоча б однієї з подій A і B.

Якщо події A і B несумісні, то поява цих подій одночасно відпадає, і сума подій A і B полягає в появі або подій A, або події B.

Сумою декількох подій зветься подія, яка складається з появи хоча б однієї з цих подій.

Добутком двох подій A і B зветься подія C, яка складається з сумісної появи подій A і B.

Добутком декількох подій зветься подія, яка складається з сумісної появи всіх цих подій.

На рис. 7 представлена геометрична інтерпретація суми та добутку подій.

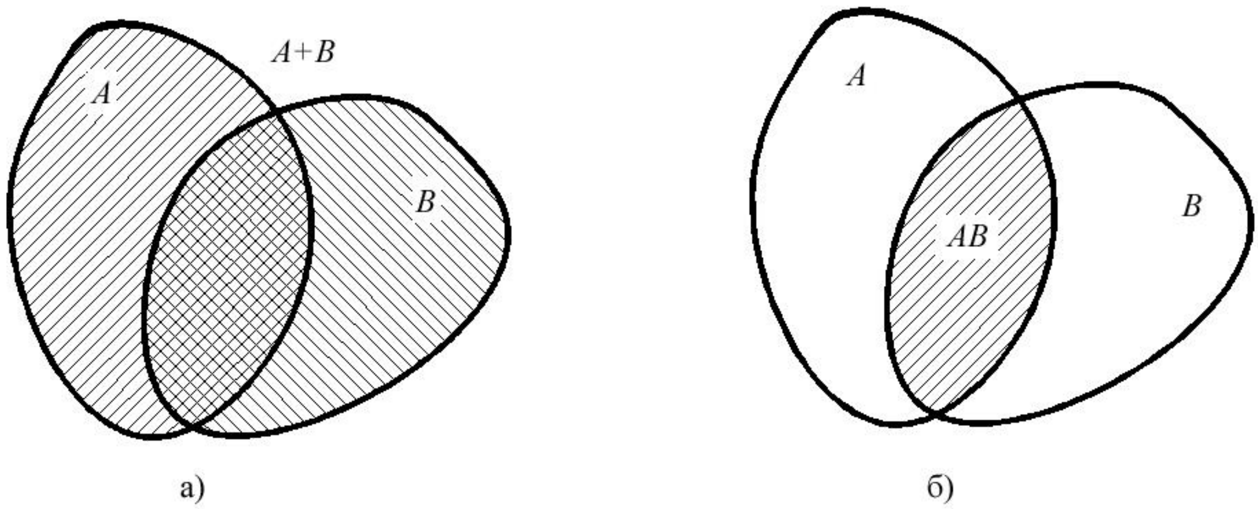

Рис. 7. Сума та добуток подій

Теореми додавання ймовірностей

<u>*Теорема 1*</u>**.** Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

<u>*Теорема 2.*</u> Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

<u>*Слідство 1.*</u> Якщо несумісні події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу, то сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

<u>*Слідство 2.*</u> Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

<u>*Теорема 3.*</u> Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих двох подій без ймовірності їх сумісної появи

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теореми множення ймовірностей

Дві події звуться незалежними, якщо поява однієї з них не змінює ймовірність появи іншої.

Декілька подій звуться незалежними в сукупності, якщо будь-яка з них не залежить від будь-якої комбінації інших.

Події звуться залежними, якщо поява однієї з них змінює ймовірність появи іншого.

Ймовірність події *B*, що обчислена в припущенні здійснення події *A*, зветься умовною ймовірністю події *B* і позначається $P_A(B)$.

<u>*Теорема 1.*</u> Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншого, обчислену за умови, що перша подія відбулася

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B),$$

Або

$$P(AB)=P(B)\cdot P_B(A).$$

<u>*Теорема 2.*</u> Ймовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності інших. Умовна ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулися.

<u>*Слідство 1.*</u> Якщо поява події *A* не залежить від події *B*, то і поява події *B* не залежить від події *A*.

<u>Слідство 2.</u> Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Формула повної ймовірності

Якщо подія *A* може відбутися тільки за умови появи однієї з подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність події *A* дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$ на відповідну умовну ймовірність появи події *A*:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A).$$

Ця формула носить назву формули повної ймовірності.

Формулу повної ймовірності можна вивести на підставі теорем додавання та множення ймовірностей.

Згідно умови подію *A* можна представити у вигляді несумісних комбінацій

$$A=B_1A+B_2A+\ldots+B_nA.$$

За теоремою про суму ймовірностей несумісних подій можна записати

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\ldots+P(B_nA).$$

За теоремою множення ймовірностей маємо

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Або

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A).$$

Формула Байєса або теорема гіпотез

Формула Байєса застосовується при розв’язанні практичних задач, коли подія *A,* що з'являється спільно з якою-небудь з подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу несумісних подій (ці події іноді називаються гіпотезами), відбулося і потрібно провести кількісну переоцінку ймовірності подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Апріорні (до досліду) ймовірності $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$

відомі. Потрібно обчислити апостеріорні (після досліду) ймовірності, тобто по суті потрібно знайти умовні ймовірності $P_A(B_1), P_A(B_2), \ldots, P_A(B_n)$.

Нехай подія *A* може відбутися за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots, B_n$, утворюючих повну групу. Ймовірність сумісної появи події *A з* будь-якою з цих подій (хай це буде подія B_k*)* згідно з теоремою множення ймовірностей визначиться таким чином:

$$P(AB_k) = P(A)P_A(B_k),$$

або

$$P(AB_k) = P(B_k)P_{B_k}(A).$$

Ліві частини цих виразів рівні, отже, рівні і праві частини, тому

$$P(A)P_A(B_k) = P(B_k)P_{B_k}(A).$$

Вирішуючи це рівняння відносно $P_{B_k}(A)$, за умови, що $P(A) \neq 0$, одержимо

$$P_{B_k}(A) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

Розкриваючи в останній рівності $P(A)$ за формулою повної ймовірності, маємо

$$P_{B_k}(A) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}.$$

Ця формула носить назву формули Байєса.

Формула Бернуллі

Розглянемо серію з n однакових незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A може або з'явитись з ймовірністю p, або не з'явитись з ймовірністю q ($p + q = 1$). Потрібно знайти ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A з'явиться рівно k разів. Оскільки ця подія полягає в тому, що в n випробуваннях подія A з'явиться k разів і не з'явиться $n - k$ разів, то її ймовірність можна знайти, як ймовірність добутку незалежних подій. В результаті застосування відповідної теореми множення ймовірностей отримуємо формулу Бернуллі:

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

Де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – кількість сполучень. Серія випробувань в кожному з яких подія A може або з'явитись, або не з'явитись і ймовірність не змінюється від випробування до випробування називається схемою випробувань Бернуллі.

Локальна теорема Лапласа

За формулою Бернуллі можна розрахувати точне значення ймовірності того, що в n випробуваннях деяка подія відбудеться рівно k разів. Але розрахунок такої ймовірності при великої кількості випробувань майже не можливо і для обчислення таких ймовірностей користуються наближеними формулами.

<u>*Теорема.*</u> Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно k разів, наближено дорівнює значенню функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

де $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Таким чином, ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно k разів, знаходиться за наближеною формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

де $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ для додатних значень x наведено у додатку 1. Для від'ємних значень x використовується та ж сама таблиця, оскільки функція $\varphi(x)$ парна. Для значень x більших 4 значення функції $\varphi(x)$ вважається рівним 0.

Інтегральна теорема Лапласа

При великій кількості досліджень більш інформативною є не ймовірність того, що подія відбудеться рівно деяку визначену кількість разів, а того що подія відбудеться не менше k_1 та не більше k_2 разів в серії з n випробувань.

Теорема. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, наближено дорівнює визначеному інтегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

де $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ та $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

На практиці для обчислення цієї ймовірності використовують формулу

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ знаходяться за таблицею (Додаток 2). В таблиці наведені значення функції $\Phi(x)$ для додатних значень x. Для від'ємних значень x використовується та ж сама таблиця, але значення функції $\Phi(x)$ беруться зі знаком мінус оскільки $\Phi(x)$ непарна. Для значень x більших 5 значення функції $\Phi(x)$ вважається рівним 0,5.

Формула Пуассона

Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні мала ($p < 0{,}01$), а кількість випробувань велика, то для обчислення ймовірності $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно k разів використовується наближена формула, яка зветься формулою Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де $\lambda = np$.

Найймовірніше число появ подій при повторних випробуваннях за схемою Бернуллі

Найймовірнішим числом появи події A в n незалежних випробуваннях зветься таке число k_0, для якого ймовірність, що відповідає цьому числу, перевищує або не менше ймовірності кожного з інших можливих чисел появи події A.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно k_0 разів за формулою Бернуллі буде

$$p_n(k_0)=C_n^{k_0}p^{k_0}q^{n-k_0}.$$

Згідно з означенням найймовірнішого числа, ймовірності появи події A k_0-1 та k_0+1 разів повинні не перевищувати ймовірність $p_n(k_0)$, тобто

$$p_n(k_0)\geq p_n(k_0-1),$$

$$p_n(k_0)\geq p_n(k_0+1).$$

Після використання формули Бернуллі маємо

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}p^{k_0}q^{n-k_0}\geq\frac{n!}{(k_0-1)!(n-k_0+1)!}p^{k_0-1}q^{n-k_0+1},$$

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}p^{k_0}q^{n-k_0}\geq\frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!}p^{k_0+1}q^{n-k_0-1}.$$

Розв'язуючи ці нерівності відносно k_0, отримаємо

$$k_0\geq np-q,\ k_0\leq np+p.$$

Після об'єднання цих нерівностей отримаємо подвійну нерівність, яка використовується для визначення найймовірнішого числа

$$np-q\leq k_0\leq np+p.$$

Оскільки подія в n випробуваннях може з'явитись тільки ціле число разів, то можуть бути такі випадки:

1) якщо $np-q$ - ціле число, то існує два значення найймовірнішого числа $k_0=np-q$ та $k_0'=np-q+1=np+p$;
2) якщо $np-q$ - дробове число, то існує одне найймовірніше число – ціле число, яке лежить між двома дробовими числами;
3) якщо np - ціле число, то існує одне найймовірніше число $k_0=np$.

Випадкові величини та задання законів їх розподілу

Випадковою зветься величина, яка приймає у випробуванні те або інше, але тільки одне, можливе значення, невідоме заздалегідь, яке залежить від випадкових обставин.

Випадкові величини можуть бути дискретними та неперервними.

Дискретною зветься випадкова величина, яка приймає скінчену або нескінчену лічильну множину значень.

Неперервною зветься випадкова величина, яка може приймати будь-які значення з деякого скінченого або нескінченого інтервалу.

Випадкові величини позначаються великими літерами кінця латинського алфавіту – X, Y, Z, а їх можливі значення – відповідними маленькими літерами – x, y, z.

Для задання випадкової величини потрібно перелічити всі її можливі значення, а також вказати як часто у досліді можуть з'явитись ті або інші значення при однакових умовах.

Законом розподілу випадкової величини зветься відповідність між можливими значеннями випадкової величини та відповідними значеннями ймовірностей.

Закон розподілу випадкової величини може бути заданим у вигляді таблиці, функції розподілу та щільності розподілу. Таблиця, яка вміщує можливі значення випадкової величини і відповідні ймовірності є простішою формою задання закону розподілу випадкової величини:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_{n-1}	p_n

Сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Табличне задання закону розподілу може бути використано тільки для дискретної випадкової величини з скінченою кількістю можливих значень і зветься рядом розподілу.

При графічному зображенні ряду розподілу в прямокутній системі координат по осі абсцис відкладають всі можливі значення випадкової величини, а по осі ординат відповідні ймовірності. Потім будують точки (x_i, p_i) і з'єднують їх відрізками прямих ліній. Отримана фігура зветься багатокутником розподілу (рис. 8).

Функція розподілу є найбільш загальною формою задання закону розподілу. Вона використовується для задання як дискретних, так і неперервних випадкових величин. Позначається вона через $F(x)$. Функція розподілу визначає ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення менше деякого фіксованого дійсного числа x

$$F(x) = P(X < x).$$

Функція розподілу також зветься інтегральною функцією розподілу.

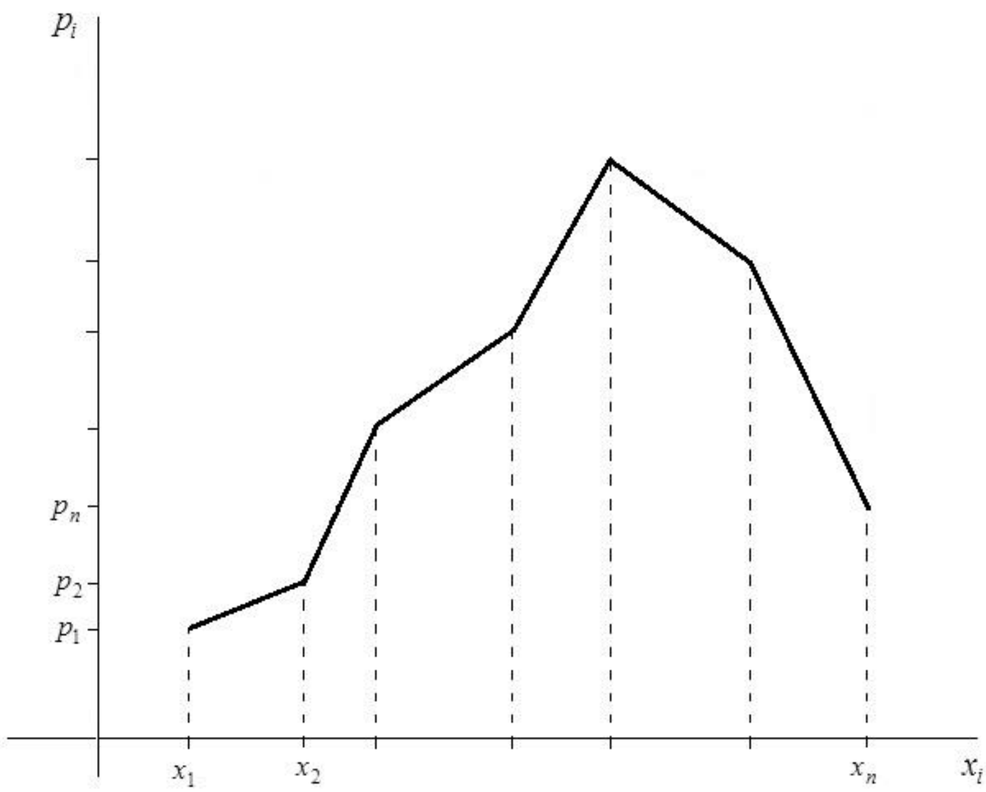

Рис. 8. Багатокутник розподілу

Для дискретної випадкової величини функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ p_1, & x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3; \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1, & x \ge x_n. \end{cases}$$

графік якої зображено на рис. 9.

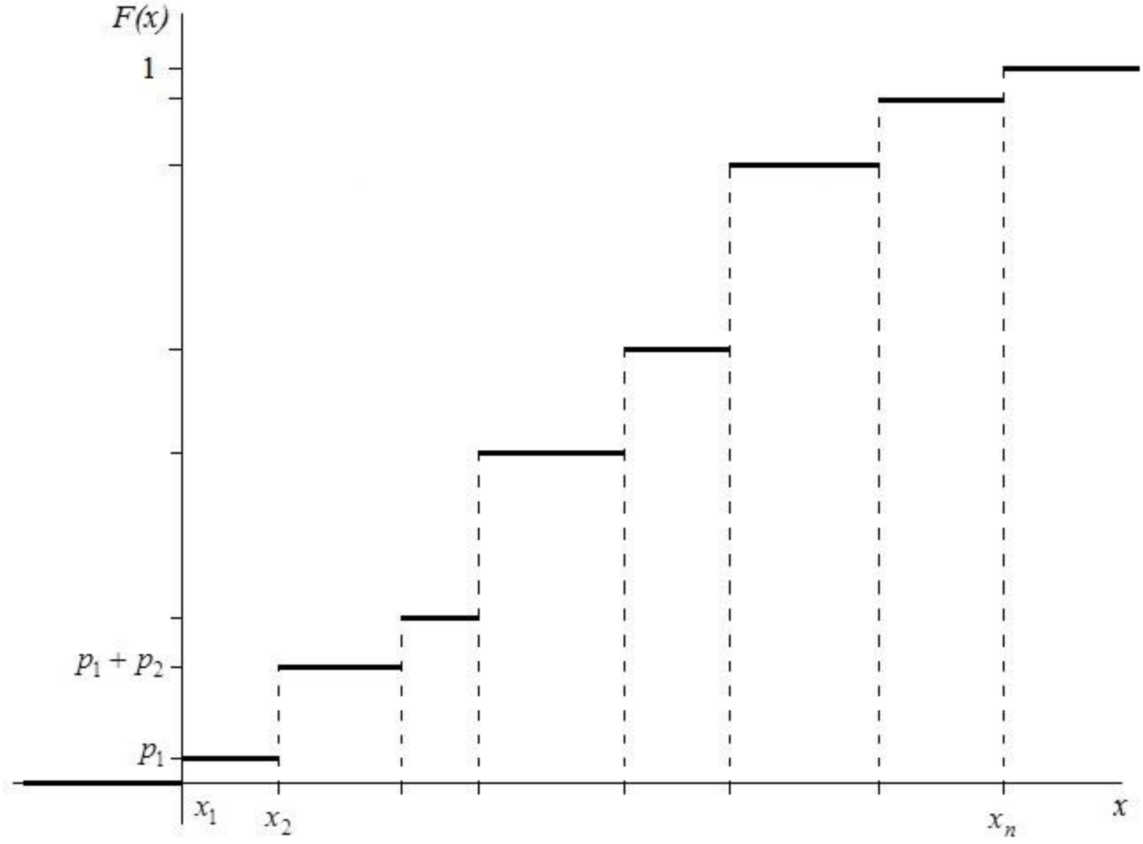

Рис. 9. Функція розподілу дискретної випадкової величини

Для неперервної випадкової величини функція розподілу $F(x)$ також є неперервною. Приблизний вигляд цієї функції показано на рис. 10.

Функція розподілу має такі властивості:

1) функція розподілу є невід'ємною функцією;
2) функція розподілу є неспадаючою функцією;
3) на $-\infty$ функція розподілу дорівнює 0;
4) на $+\infty$ функція розподілу дорівнює 1;
5) ймовірність того, що випадкова величина потрапляє в інтервал $x \in (\alpha, \beta)$ дорівнює різниці значень функції розподілу на верхній та нижній межах інтервалу:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Таким чином, функція розподілу є невід'ємною, неспадаючою функцією всі значення якої лежать в інтервалі $0 \le F(x) \le 1$.

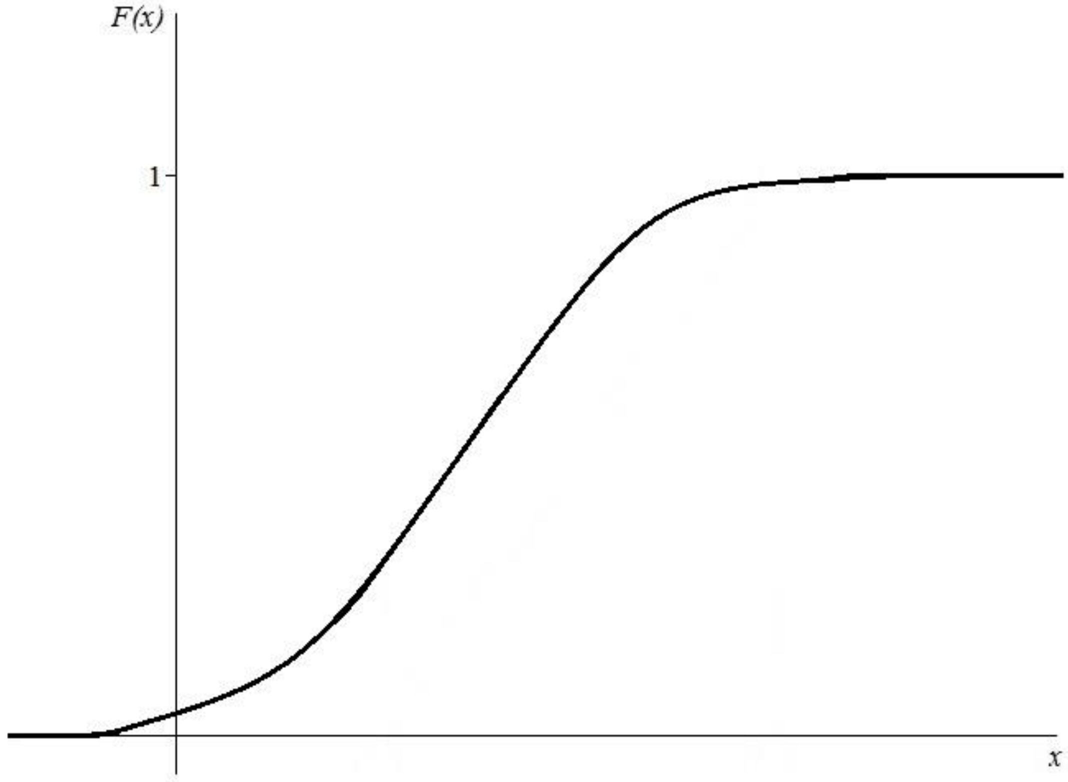

Рис. 10. Функція розподілу неперервної випадкової величини

Для задання неперервної випадкової величини крім функції розподілу використовується щільність розподілу або диференціальна функція розподілу, яка є похідною функції розподілу:

$$f(x) = F'(x).$$

Щільність розподілу має такі властивості:

1) щільність розподілу є невід'ємною функцією;
2) інтегральна функція розподілу випадкової величини дорівнює інтегралу від щільності розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx;$$

3) ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $x \in (\alpha, \beta)$ дорівнює інтегралу

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx;$$

4) невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює одиниці (умова нормування):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Потрібно відмітити, що ймовірність прийняття неперервною випадковою величиною деякого визначеного значення дорівнює нулю. Графік щільності розподілу (рис. 11) називається кривою розподілу.

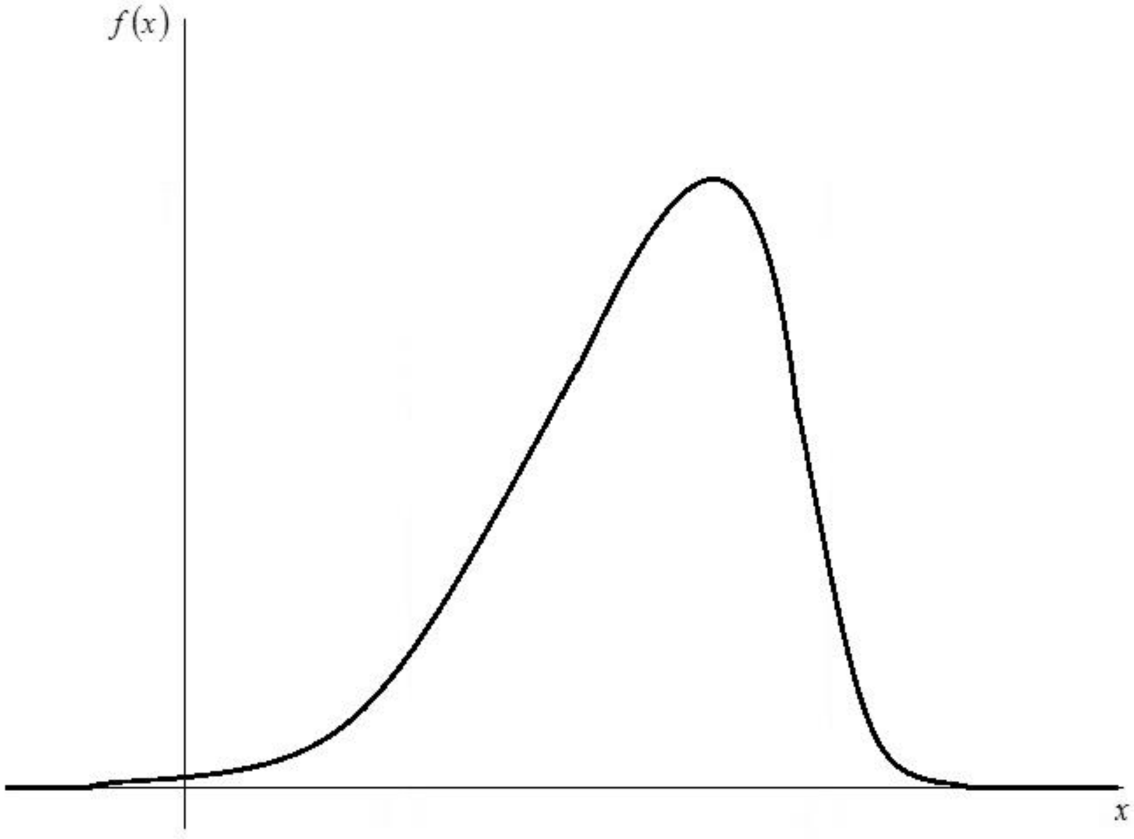

Рис. 11. Щільність розподілу неперервної випадкової величини

Числові характеристики випадкових величин

Розв’язання більшості практичних задач не потребує знання всіх можливих значень випадкової величини, а достатньо інформації, яку дають числові параметри, що називаються числовими характеристиками випадкової величини.

До числових характеристик відносяться: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти різних порядків, мода та медіана. Розглянемо основні з них.

Математичне сподівання визначає положення випадкової величини на числовій осі, тобто середнє значення навколо якого коливаються усі можливі значення випадкової величини.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини дорівнює сумі добутків всіх можливих значень випадкової величини на відповідні ймовірності їх появи:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,.$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини дорівнює невласному інтегралу:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \,,$$

де $f(x)$ - щільність розподілу випадкової величини.

Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини зосереджені в інтервалі (a,b), то

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx \,.$$

Математичне сподівання має властивості:

1) математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y);$$

2) математичне сподівання добутку двох випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(XY)=M(X)M(Y);$$

3) математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій

$$M(C)=C\,;$$

4) сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX)=CM(X);$$

5) математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання дорівнює нулю

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Дисперсія визначає відхилення випадкової величини від свого середнього значення і дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсія дискретної випадкової величини знаходиться за формулою

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i .$$

Для неперервної випадкової величини відповідна формула має вигляд

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx .$$

Дисперсія має властивості:

1) дисперсія сталої дорівнює нулю

$$D(C) = 0;$$

2) сталий множник можна виносити за знак дисперсії, якщо його піднести до квадрата

$$D(CX) = C^2 D(X);$$

3) дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y);$$

4) дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y);$$

5) дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин знаходиться за формулою

$$D(XY)=D(X)D(Y)+[M(X)]^2 D(Y)+[M(Y)]^2 D(X);$$

6) дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини та квадратом її математичного сподівання

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2.$$

При обчисленні дисперсій зручно користуватись останньою властивістю.

Квадратний корінь з дисперсії називається середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Середнє квадратичне відхилення так само як і дисперсія є мірою розсіяння випадкової величини навколо свого математичного сподівання але на відміну від останнього має розмірність випадкової величини.

Біноміальний закон розподілу

Біноміальним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи подій в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких подія може або з'явитись з ймовірністю p, або не з'явитись з ймовірністю $q=1-p$. Ймовірність можливого значення $X=k$ (k - число появи події) обчислюють за формулою Бернуллі:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Математичне сподівання біноміального розподілу:

$$M(X)=np.$$

Дисперсія знаходиться за формулою:

$$D(X)=npq.$$

Закон розподілу Пуассона

Пуассонівським називають закон розподілу дискретної випадкової величини, в якому ймовірності можливих значень випадкової величини визначаються за формулою Пуассона

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де k – число появи події в n незалежних випробуваннях, $\lambda = np$.

Числові характеристики розподілу Пуассона:

$$M(X)=D(X)=\lambda=np.$$

Рівномірний закон розподілу

Щільність розподілу неперервної випадкової величини розподіленої за рівномірним розподілом має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Рівномірному закону розподілу, наприклад, відповідає рух транспорту, який прямує по визначеному маршруту зі сталим інтервалом.

Функція рівномірного розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Графіки щільності та функції рівномірного розподілу зображені на рис. 12, 13.

Випадкова величина, що розподілена за рівномірним законом має такі числові характеристики:

$$M(X)=\frac{b+a}{2};$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

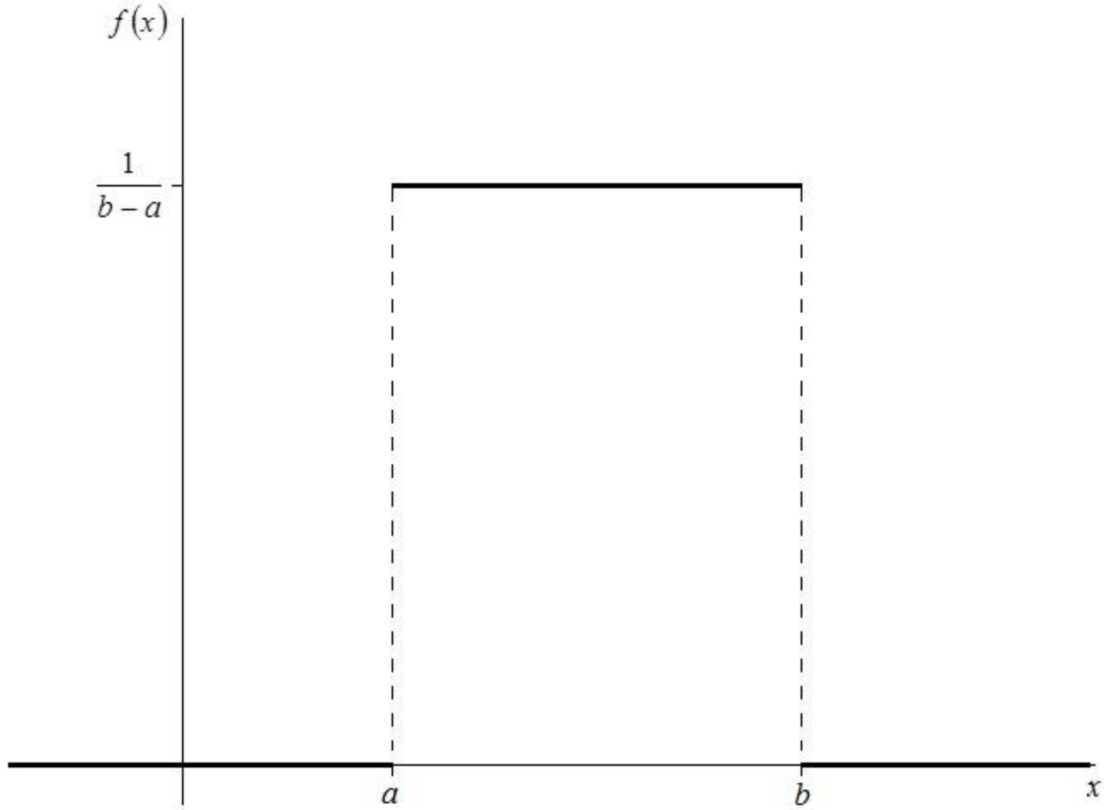

Рис. 12. Щільність рівномірного розподілу

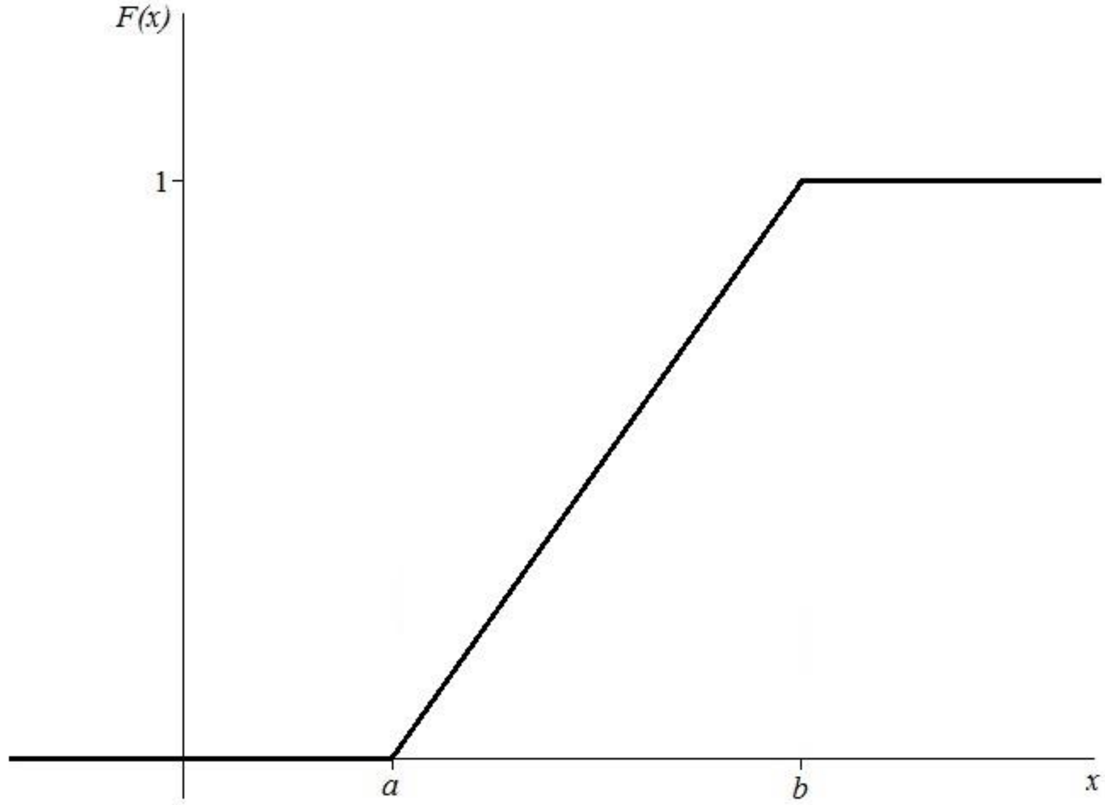

Рис. 13. Функція рівномірного закону розподілу

Показниковий закон розподілу

Неперервна випадкова величина розподілена за показниковим законом має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

де λ - деякий параметр більший нуля.

Функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Графіки щільності та функції розподілу випадкової величини розподіленої за показниковим законом зображені на рис. 14, 15.

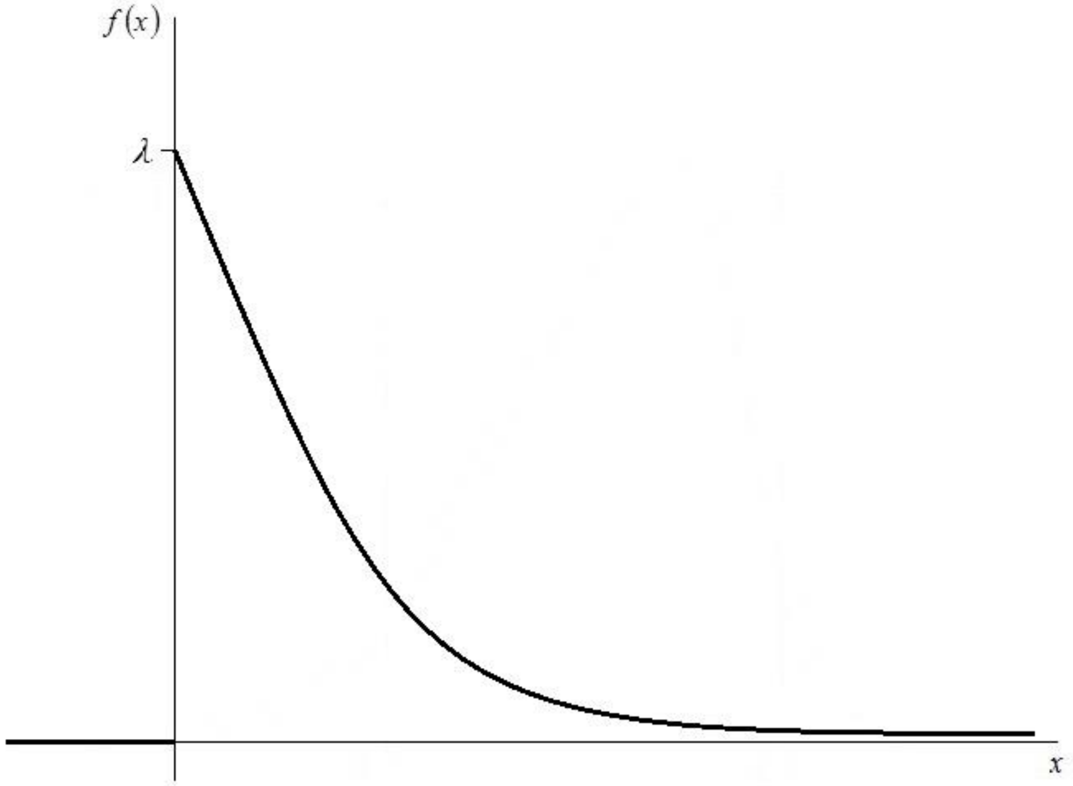

Рис. 14. Щільність показникового розподілу

Випадкова величина, що підпорядковується показниковому розподілу має числові характеристики:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

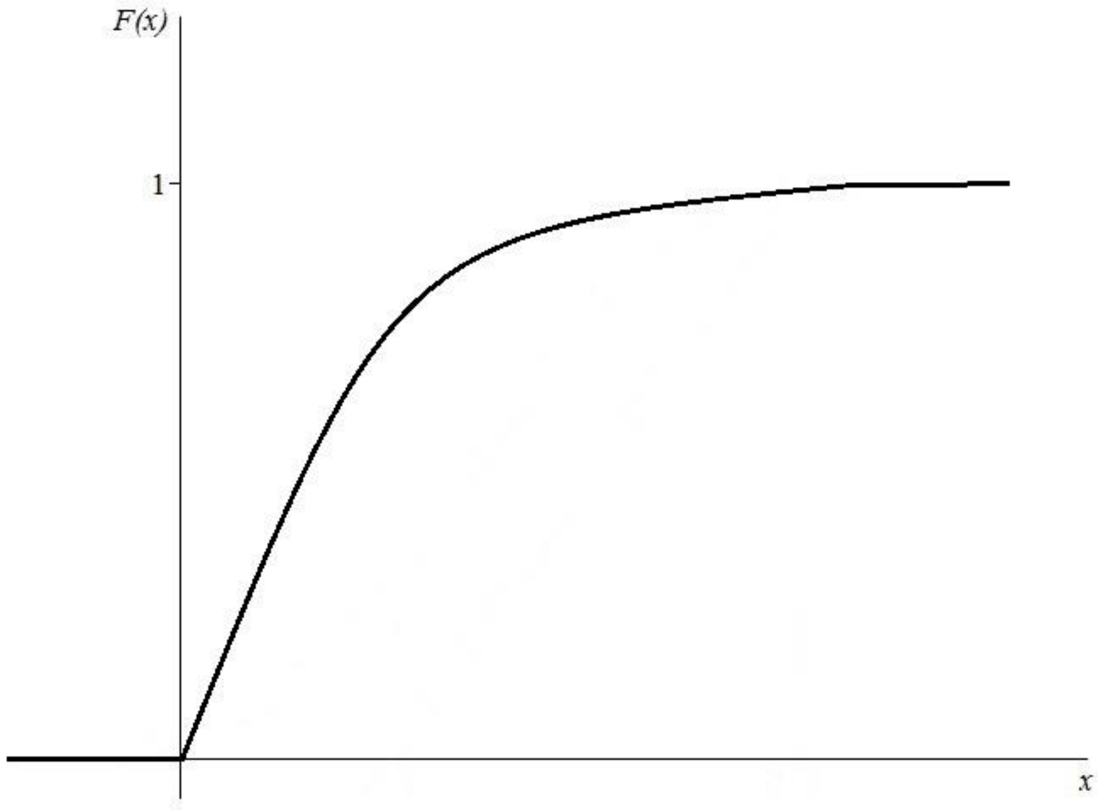

Рис. 15. Функція показникового розподілу

Нормальний закон розподілу

Серед розподілів неперервної випадкової величини центральне місце займає нормальний закон, щільність розподілу якого має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Відповідно функція розподілу виражається формулою

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Графік щільності нормального розподілу зветься нормальною кривою (рис. 16). Вона має форму дзвоноподібної фігури, яка симетрична відносно прямої, що проходить через точку $x=a$, і асимптотично наближується до осі абсцис при $x\to\pm\infty$. На рис. 17 показана інтегральна функція розподілу.

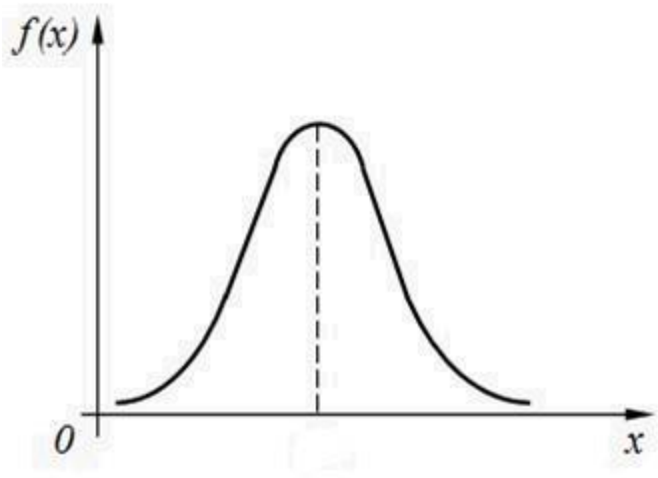

Рис. 16. Щільність нормального розподілу

Нормальний розподіл цілком визначається двома параметрами a і σ, де $a=M(X)$ – математичне сподівання, $\sigma=\sigma(X)$ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

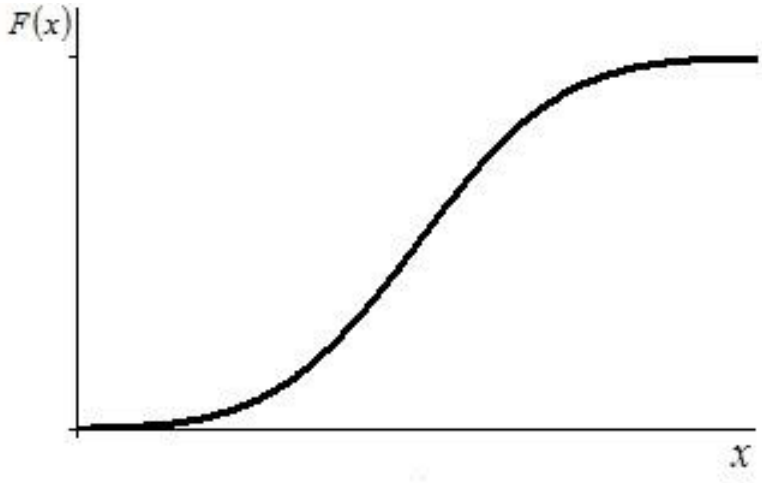

Рис. 17. Інтегральна функція розподілу нормального закону

Нормальний розподіл має такі властивості:

1. Щільність нормального розподілу визначена на всій осі Ox, тобто кожному значенню x відповідає деяке визначене значення функції.
2. При всіх значеннях x щільність приймає додатні значення, тобто нормальна крива розташована над віссю Ox.
3. Границя щільності при необмеженому зменшенні або зростанні x дорівнює 0

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0.$$

4. Щільність нормального розподілу в точці $x=a$ має максимум, який дорівнює

$$f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

В цьому не важко переконатися, якщо знайти першу похідну та прирівняти її до нуля.

5. Графік щільності $f(x)$ симетричний відносно прямої, що проходить через точку $x=a$ перпендикулярно осі Ox.

Звідси випливає рівність для нормально розподіленої величини моди, медіани та математичного сподівання.

6. Крива розподілу має дві точки перегину з координатами $\left(a-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ і $\left(a+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$.

7. Форма нормальної кривої не змінюється при зміні величини параметра a. При зменшенні або збільшенні математичного сподівання графік кривої зміщується вліво або вправо.

8. При зміні параметра σ змінюється форма кривої. Із зростанням σ максимальна ордината кривої зменшується, а із зменшенням σ - зростає.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина потрапить в заданий інтервал (α,β) знаходиться за формулою

$$P(\alpha < x < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа.

Ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від свого математичного сподівання за абсолютною величиною менше заданого додатного числа δ, визначається формулою

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Використовуючи останню формулу, можна отримати так зване правило трьох сигм, яке стверджує, що нормально розподілена випадкова величина практично не приймає значень поза інтервалом $(a-3\sigma;\, a+3\sigma)$, тобто

$$P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Елементи лінійної алгебри

Задача 1. Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & -c & -a \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} c & a \\ b & c \\ a & b \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} m & c & -n \\ n & -b & -m \\ k & a & c \end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix} a & -b & c & m \\ n & k & -a & b \\ -c & n & b & k \\ b & -m & n & a \end{pmatrix}.$$

Знайти:
а) $A+nC$; б) B^T ; в) $B^T B$; г) A^2; д) $|F|$.

Задача 2. Дано систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Довести її сумісність і розв’язати трьома способами – методом Гауса, за правилом Крамера, засобами матричного числення:

$$\begin{cases} mx+ay+cz=cn; \\ kx+ny+mz=ak; \\ nx-by-az=bm. \end{cases}$$

Задача 3. Дослідити сумісність та знайти загальний і один частинний розв’язок систем:

а) $\begin{cases} ax+by+cz=m, \\ (c-a)x+(n-b)y+(k-c)z=b, \\ cx+ny+kz=m-b; \end{cases}$

б) $\begin{cases} bx-cy-cnz=bm, \\ nx+cy-bcz=mn, \\ (n-b)x+2cy+c(n-b)z=m(n-b). \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри

Задача 1. Дано вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ такі, що $|\vec{x}|=|\vec{y}|=|c|$, $(\vec{x},\vec{y})=60^\circ$.
Знайти:
а) $(n\vec{x}+k\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})$;
б) $|(b\vec{x}+\vec{y})\times(a\vec{x}+m\vec{y})|$;
в) косинус кута між векторами $a\vec{x}+\vec{y}$ і $\vec{x}+a\vec{y}$.

Задача 2. Дано чотири точки: $A(m;c;-k-n)$; $B(m;k^2+k+c;0)$; $C(m+k+n;k+c;-k-n)$; $D(2m;c;m-k-n)\,(k\neq -n)$.
Знайти:
а) $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right|$; б) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}$; в) $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|$;
г) площу трикутника ABC;
д) об’єм піраміди $DABC$;
е) відстань від точки D до площини ABC.

3. Елементи аналітичної геометрії

Задача 1. Дано три точки: $M_1(c;b;c);M_2(n+c;b;n+c);M_3(c;m+b;a+c)$.
Написати:
а) рівняння площини, що проходить через ці три точки;
б) рівняння площини, що проходить через точки M_2 і M_3 паралельно вектору $\vec{q}=(n;-m;n)$;
в) рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно площинам $nx-my+(n-a)z+b=0$ і $nx+nz+k=0$.

Задача 2. Знайти відстань від точки $M(ac;ac;-c)$ до площини $ax+(a+1)y+(a^2+a)z+c(a+1)=0$.

Задача 3. Дано трикутник ABC з вершинами $A(b;-m);B(-m;-b)$ і $C(0;b)$.
Написати:
а) рівняння медіани AM;
б) рівняння висоти AD і знайти її довжину.

Задача 4. Знайти кут між прямою, що проходить через точки $A(a-m;b;n)$ і $B(a;b+c;n+m)$ та площиною $mx+cy+mz+k=0$.

Задача 5. Написати рівняння кола, що проходить через точку $(n;-m)$ з центром у точці $(m;n)$.

4. Вступ до математичного аналізу

Задача 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2-(a-1)x-a}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(kx+b)^2}{cx^2+n}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+bx}-\sqrt{1-bx}}{kx}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{cx-1}{cx+1}\right)^{kx}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\ln(1+nx)}$.

Задача 2. Дослідити функції на неперервність:

а) $y=e^{\frac{k}{x-m}}$ в точках $x_1=m, x_2=b, x_3=-n$;

б) $y=\begin{cases} x+b \quad при\, x\le k, \\ a \quad при\; k<x<k+2, \\ c^2-x^2 \quad при\; x\ge k+2. \end{cases}$.

5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1. Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ для функцій:

а) $y=\dfrac{\sqrt{a^2x^2-ax+1}}{x}$;

б) $\begin{cases} x=a\cos bt, \\ y=b\sin at. \end{cases}$;

в) $(x+a)^4+(y+b)^4=(x+a)^2(y+b)^2$;

г) $y=(arctg\, c^2 x)^{kx}$.

Задача 2. Обчислити похідну y' функцій:

а) $y=\left(ax-\dfrac{a}{k}\right)\cdot e^{kx-mk}$ у точці $x=m$;

б) $y=\ln(x^3-3c^2x)-\dfrac{nc}{x}$ у точці $x=c$.

Задача 3. Знайти похідну $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=e^{a(x+b)^2}$.

Задача 4. Обчислити задані границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx-kx}{nx-\sin nx}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(kx+c)}{cx^{m^2}+ax}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-\cos bx}{e^{nx}-\cos nx}$.

Задача 5. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y=(x-k+1)^3(x+a)$ у точці $x=k$.

Задача 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=e^{-m^2x^2}$ на проміжку $[-a^2,n^2]$.

Задача 7. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

а) $y=mx^3+kx^2$; б) $y=\dfrac{a}{x^2-(k+c)x+kc}$.

6. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Задача 1. Знайти область визначення функції і побудувати її на площині (x,y):

а) $z=\dfrac{a}{bx+cy}$; б) $z=\arcsin\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$.

Задача 2. Показати, що функція $z=k\sin^2(x-ay)$ задовольняє рівнянню $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; впевнитись в справедливості рівності $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Задача 3. Обчислити значення повного диференціала функції $z(x,y)$, що задана неявно рівнянням $ax^3-by^3+cxyz+cz^2=ab$, в точці $M_0(b,a,ab)$, якщо $\Delta x=-0{,}1; \Delta y=0{,}1$.

Задача 4. Дослідити на екстремум функцію $z=x^3-3bxy+y^3$.

Задача 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=xy-y^2-\frac{a}{3}(x-y)$ в області D, що обмежена лініями $x=0, y=0, x+y=a$.

7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Задача 1. Знайти невизначені інтеграли. В прикладі *б* результат перевірити диференціюванням.

а) $\int\frac{(\arcsin bx)^5}{\sqrt{1-(bx)^2}}dx$; б) $\int(mx+k)\sin(bx+a)dx$; в) $\int\frac{dx}{(x+m)\sqrt{x+n}}$;

г) $\int\frac{bx^2+2abx}{x^3-a^3}dx$; д) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2kx+b}}$; е) $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$.

Задача 2. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1\frac{nx+b}{|a|x+|k|}dx$; б) $\int_{-\left|\frac{n}{a}\right|}^{0}xe^{ax+n}dx$;

в) $\int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{k}}[a\sin(kx)+m\cos(kx)]dx$; г) $\int_{\frac{b}{|k|}}^{\frac{b}{|k|}+1}\sqrt{|k|x-b}\,dx$.

Задача 3. Обчислити площу фігури, що обмежена вказаними лініями. Зобразити ці лінії і фігуру, яку вони обмежують:

а) $y=x+b; y=0; x=1-b; x=3-b$;

б) $y=x^2+ax; y=x+a$.

8. Диференціальні рівняння

Задача 1. Розв’язати диференціальні рівняння першого порядку:

а) $y^a y'=b+kx$;
б) $y'+my=e^{nx}$;
в) $y'=\dfrac{ax+by}{bx-ay}$.

Задача 2. Розв’язати диференціальні рівняння другого порядку:

а) $x^k y''=y'^2$;
б) $y''=kyy'$.

Задача 3. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам:

а) $y''-(a+1)y'+ay=2ax-2$; $y(0)=0, y'(0)=a-1$;
б) $y''+a^2y=k\sin x$; $y(0)=1, y'(0)=\dfrac{k}{a^2-1}; (a\neq\pm1)$.

9. Ряди

Задача 1. Дослідити на збіжність ряди

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n}{|b|^n(2n-1)}$; *б)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{bn}{an^{k+1}+bn^k+|c|}$.

Задача 2. Дослідити на абсолютну збіжність ряди

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin|b|n}{n^{k+1}}$; *б)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(|b|n-1)^k}$.

Задача 3. Знайти область збіжності степеневого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+a)^n}{|a|^n(|b|n+1)}.$$

10. Теорія ймовірностей

Задача 1. Ящик з N однаковими виробами містить n бракованих. Випадково відібрані m виробів . Знайти ймовірність того, що серед них рівно k бракованих.

Задача 2. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатора. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює дорівнює P_1 для першого сигналізатора і P_2 – для другого. Знайти ймовірності, що при аварії: а) спрацюють обидва сигналізатори; б) не спрацює жоден; в) спрацює тільки один сигналізатор; г) спрацює хоча б один сигналізатор.

Задача 3. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох контролерів. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого контролера, дорівнює P_1; а до другого – P_2. Ймовірність того, що виріб буде визнано стандартним першим контролером, дорівнює P_3, а другим – P_4.

Знайти ймовірність того, що: а) виріб, що надійшов на перевірку, буде визнано стандартним; б)виріб перевірив другий контролер, якщо він був визнаний стандартним.

Задача 4. Ймовірність того, що взятий навмання виріб нестандартний, дорівнює Р. Знайти ймовірність того, що серед взятих *n* виробів виявиться: а) *k* нестандартних, б) не більше, ніж *k* нестандартних.

Задача 5. При виготовленні виробів брак складає Р%. Скласти закон розподілу числа бракованих виробів з узятих навмання n виробів. Знайти M(X), D(X) і побудувати графік інтегральної функції розподілу.

Задача 6. Дано інтегральну функцію розподілу випадкової величини Х

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le a, \\ \dfrac{x}{a}-1, & \text{при} \quad a<x\le 2a, \\ 1, & \text{при} \quad x>2a. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, M(X), D(X). Побудувати графіки F(x) і $f(x)$.

Задача 7. Автомат виготовляє деталі. Контролюється довжина деталі, яка є випадковою величиною Х, що розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням (проектна довжина) a і середнім квадратичним відхиленням σ. Визначити ймовірність того, що довжина взятої випадковим чином деталі: а) знаходиться в межах від X_1 до X_2; б) відхиляється від середньої довжини a не більше ніж на $\pm\delta$.

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Нехай $a=2;\ b=-3;\ c=1;\ m=-1;\ n=4;\ k=-5.$

1. Елементи лінійної алгебри

Задача 1. При заданих значеннях параметрів маємо:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -4\\ 4 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -1\\ 4 & -5 & -2 & -3\\ -1 & 4 & -3 & -5\\ -3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Знайти:
а) $A+4C$; б) B^T ; в) B^TB ; г) A^2; д) $|F|$.

Розв'язання

а) При додаванні двох матриць додаються їх відповідні елементи, а при множенні на число всі елементи матриці помножаються на це число. Тому

$$A+4C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1 & 1 & -4\\ 4 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 4 & -16\\ 16 & 12 & 4\\ 20 & 8 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+(-4) & -3+4 & 1+(-16)\\ 1+16 & 2+12 & -3+4\\ -3+20 & -1+8 & -2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -15\\ 17 & 14 & 1\\ 17 & 7 & 2\end{pmatrix}.$$

б) B^T є матриця транспонована до матриці B, тому її рядки є стовпцями матриці B зі збереженням порядку розміщення:

$$B^T=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

в) Оскільки матриця B^T має три стовпця, а матриця B три рядка, то вони є узгодженими, тому їх можна перемножити, причому результуюча матриця буде квадратною матрицею другого порядку

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+(-3)\cdot(-3)+2\cdot2 & 1\cdot2+(-3)\cdot1+2\cdot(-3) \\ 2\cdot1+1\cdot(-3)+(-3)\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+(-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}.$$

г) $$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot2+(-3)\cdot1+1\cdot(-3) \\ 1\cdot2+2\cdot1+(-3)\cdot(-3) \\ (-3)\cdot2+(-1)\cdot1+(-2)\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 2\cdot(-3)+(-3)\cdot2+1\cdot(-1) & 2\cdot1+(-3)\cdot(-3)+1\cdot(-2) \\ 1\cdot(-3)+2\cdot2+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot(-3)+(-3)\cdot(-2) \\ (-3)\cdot(-3)+(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-1) & (-3)\cdot1+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-2) \end{matrix} \Bigg) = \begin{pmatrix} -2 & -13 & 9 \\ 13 & 4 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

д) Спосіб І. Розкладемо визначник за елементами першого стовпця

$$|\mathrm{F}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \mathrm{a}_{11}\cdot \mathrm{A}_{11} + \mathrm{a}_{21}\cdot\mathrm{A}_{21} + \mathrm{A}_{31}\cdot\mathrm{A}_{31} + \mathrm{A}_{41}\cdot\mathrm{A}_{41}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента першого стовпця

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-3)\cdot2+4\cdot4\cdot(-3)+(-2)\cdot(-5)\cdot1-(-3)\cdot(-3)\cdot1-4\cdot(-5)\cdot(-5)-$$
$$-4\cdot(-2)\cdot2 = -101;$$

$$\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -[3\cdot(-3)\cdot2+4\cdot4\cdot(-1)+1\cdot1\cdot(-5)-1\cdot(-3)\cdot(-1)-4\cdot1\cdot2-4\cdot(-5)\cdot3] = -10;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot 2+(-5)\cdot 4\cdot(-1)+1\cdot(-3)\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot 1-4\cdot(-3)\cdot 3-$$

$$-(-5)\cdot 1\cdot 2=49;$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & -2 & -3\\ 4 & -3 & -5\end{vmatrix}=\left[3\cdot(-2)\cdot(-5)+1\cdot(-3)\cdot 4+(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)\cdot 4-1\cdot(-5)\cdot(-5)-\right.$$

$$\left.-3\cdot(-3)\cdot 3\right]=57.$$

Отже маємо $|F|=2\cdot(-101)+4\cdot(-10)+(-1)\cdot 49+(-3)\cdot 57=-462.$

Спосіб II. Використаємо метод зниження порядку, який базується на застосуванні правила обчислення визначників розкладанням за елементами деякого рядка (стовпця). Але при цьому заздалегідь, використовуючи властивість визначників про лінійну комбінацію елементів рядків (стовпців), перетворюємо в нулі усі, крім одного, елементи деякого рядка (стовпця). Нам зручно зробити це з першим рядком, залишивши тільки третій її елемент. Третій стовпець послідовно помножимо на (-2), (-3), 1 і додамо відповідно до першого, другого та четвертого стовпців

$$|F|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & -1\\ 4 & -5 & -2 & -3\\ -1 & 4 & -3 & -5\\ -3 & 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 1 & -2 & -5\\ 5 & 13 & -3 & -8\\ -11 & -11 & 4 & 6\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}8 & 1 & -5\\ 5 & 13 & -8\\ -11 & -11 & 6\end{vmatrix}.$$

Далі знову перетворюємо на нулі усі, окрім другого, елементи першого рядка

$$|F|=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5\\ 5 & 13 & -8\\ -11 & -11 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -99 & 13 & 57\\ 77 & -11 & -49\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-99 & 57\\ 77 & -49\end{vmatrix}=$$

$$-\left[(-99)\cdot(-49)-77\cdot 57\right]=-462.$$

Задача 2. Дано систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Довести її сумісність і розв'язати трьома способами – методом Гаусса, за правилом Крамера, засобами матричного числення:

$$\begin{cases} -x+2y+z=4, \\ -5x+4y-z=-10, \\ 4x+3y-2z=3. \end{cases}$$

Розв'язання

Спосіб І. Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до східчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків, які вказано справа, де S_i позначено і-й рядок матриці.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 4 & -1 & -10 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_2-5S_1 \\ S_3+4S_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & -30 \\ 0 & 11 & 2 & 19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_2:(-6) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 2 & 19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_3-11S_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -36 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_1\cdot(-1) \\ S_3:(-9) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Оскільки кількість ненульових рядків матриці системи і розширеної матриці співпадають, то ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці. За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має єдиний розв'язок. Таким чином, за методом Гаусса одержуємо перетворену систему у вигляді:

$$\begin{cases} x-2y-z=-4, \\ \quad y+z=5, \\ \qquad z=4. \end{cases}$$

Звідки $z=4,\ y=5-z=5-4=1,\ x=-4+2y+z=-4+2+4=2$.

Відповідь: (2, 1, 4).

Спосіб II. При розв’язуванні системи за правилом Крамера необхідно, щоб визначник системи Δ не дорівнював нулю. Знайдемо визначники $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$. Якщо $\Delta \neq 0$, то розв’язок системи визначимо за формулами:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -42 - 12 = -54,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -10 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \\ 11 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = -42 - 66 = -108,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -5 & -10 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -66 + 12 = -54,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & -10 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -30 \\ 0 & 11 & 29 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -6 & 30 \\ 11 & 29 \end{vmatrix} = -(114 + 330) = -216,$$

$$x = \frac{-108}{-54} = 2, \quad y = \frac{-54}{-54} = 1, \quad z = \frac{-216}{-54} = 4.$$

Відповідь: (2, 1, 4).

Спосіб III. Запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Розв’язання матричним способом можливо, лише коли матриця системи A не вироджена. В нашому випадку вона є такою, бо її визначник $|A| = \Delta = -54 \neq 0$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для цього відшукаємо алгебраїчні доповнення A_{ij} $(1 \le i \le 3, \cdots 1 \le j \le 3)$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5, \; A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-3) = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6, \; A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(10+4) = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2, \; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -(1+5) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 16 = -31, \; A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-3-8) = 11,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 10 = 6,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -5 & 7 & -6 \\ -14 & -2 & -6 \\ -31 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добуток $A^{-1}A$, щоб впевнитись, що матриця A^{-1} знайдена правильно:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -5 & 7 & -6 \\ -14 & -2 & -6 \\ -31 & 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -54 & 0 & 0 \\ 0 & -54 & 0 \\ 0 & 0 & -54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Тоді

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -5 & 7 & -6 \\ -14 & -2 & -6 \\ -31 & 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{54}\begin{pmatrix} -108 \\ -54 \\ -216 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: (2, 1, 4).

Задача 3. Дослідити сумісність та знайти загальний і один частинний розв’язок системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=-1, \\ -x+7y-6z=-3, \\ x+4y-5z=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x-y-4z=3, \\ 4x+y+3z=-4, \\ 7x+2y+7z=-7. \end{cases}$

Розв’язання

а) Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -6 & -3 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -6 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_2-2S_1 \\ S_3+S_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -11 & 11 & -5 \\ 0 & 11 & -11 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_3+S_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -11 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Тобто ранг основної матриці системи не дорівнює рангу розширеної матриці. За теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна.

Відповідь: система розв’язку не має.

б) Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -4 \\ 7 & 2 & 7 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_1+S_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -4 \\ 7 & 2 & 7 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_2-4S_1 \\ S_3-7S_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & 0 \end{array}\right)_{S_3-2S_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Одержали, що ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриц. За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна. Оскільки система містить 3 невідомих, а її ранг дорівнює 2, то маємо одну вільну невідому (3-2=1). Нехай вільною невідомою буде $z=t$, де $t\in R$. Тоді перетворена система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x-t=-1, \\ y+7t=0. \end{cases}$$

Звідки маємо $x=-1+t, y=-7t$, тобто загальний розв'язок системи $(-1+t; -7t; t)$. Для знаходження частинного розв'язку покладемо $t=2$. Тоді $x=-1+2=1,\ y=-7\cdot 2=-14,\ z=2$.

Відповідь: система сумісна; загальний розв'язок $(-1+t;\ -7t;\ t),\ t\in R$. Частинний розв'язок – $(1; -14;\ 2)$.

2. Елементи векторної алгебри

Задача 1. Дано вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ такі, що $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1,\ (\vec{x},\vec{y})=60^\circ$. Знайти:

а) скалярний добуток $(4\vec{x}-5\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})$;

б) модуль векторного добутку $(-3\vec{x}+\vec{y})\times(2\vec{x}-\vec{y})$;

в) косинус кута між векторами $2\vec{x}+\vec{y}$ і $\vec{x}+2\vec{y}$.

Розв'язання.

а) На підставі означення і властивостей скалярного добутку векторів маємо:

$$(4\vec{x}-5\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x}) = 4(\vec{x}\cdot\vec{y}) - 4(\vec{x}\cdot\vec{x}) - 5(\vec{y}\cdot\vec{y}) + 5(\vec{y}\cdot\vec{x}) = 4|\vec{x}||\vec{y}|\cos 60^\circ -$$

$$-4|\vec{x}|^2 - 5|\vec{y}|^2 + 5|\vec{y}||\vec{x}|\cos 60^\circ = 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 5\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{9}{2}$.

б) На підставі означення і властивостей векторного добутку двох векторів маємо:

$$|(-3\vec{x}+\vec{y})\times(2\vec{x}-\vec{y})| = |-6(\vec{x}\times\vec{x}) + 3(\vec{x}\times\vec{y}) + 2(\vec{y}\times\vec{x}) - \vec{y}\times\vec{y}| =$$

$$=\left|-6\cdot\vec{0}+3(\vec{x}\times\vec{y})-2(\vec{x}\times\vec{y})-\vec{0}\right|=|\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{x}||\vec{y}|\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) Для обчислення косинуса кута φ між заданими векторами скористаємося формулами

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ і } |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,.$$

Тоді

$$\cos\varphi=\frac{(2\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+2\vec{y})}{|2\vec{x}+\vec{y}||\vec{x}+2\vec{y}|}=\frac{2(\vec{x}\cdot\vec{x})+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{y}\cdot\vec{x})+2(\vec{y}\cdot\vec{y})}{\sqrt{(2\vec{x}+\vec{y})^2}\sqrt{(\vec{x}+2\vec{y})^2}}=$$

$$=\frac{2|\vec{x}|^2+5|\vec{x}||\vec{y}|\cos 60^\circ+2|\vec{y}|^2}{\sqrt{4\vec{x}^2+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+\vec{y}^2}\sqrt{\vec{x}^2+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+4\vec{y}^2}}=$$

$$=\frac{2+5\cdot\frac{1}{2}+2}{\sqrt{4|\vec{x}|^2+4|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos 60^\circ+|\vec{y}|^2}\sqrt{|\vec{x}|^2+4|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos 60^\circ+4|\vec{y}|^2}}=$$

$$=\frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{4+4\cdot\frac{1}{2}+1}\sqrt{1+4\cdot\frac{1}{2}+4}}=\frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{13}{14}.$$

Відповідь: $\frac{13}{14}$.

Задача 2. Дано чотири точки: $A(-1;1;1)$; $B(-1;21;\ 0)$; $C(-2;-4;1)$; $D(-2;1;0)$.

Знайти:

а) довжину $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$;

б) скалярний добуток $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}$;

в) модуль векторного добутку $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$

г) площу трикутника ABC;

д) об’єм піраміди $DABC$;

е) відстань від точки D до площини ABC.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}$, які задані координатами початку і кінця. Тоді

$$\overrightarrow{AC}=(-2-(-1);-4-1;1-1)=(-1;-5;0),$$

$$\overrightarrow{AB}=(-1-(-1);21-1;0-1)=(0;20;-1),$$

$$\overrightarrow{AD}=(-2-(-1);1-1;0-1)=(-1;0;-1),$$

$$\overrightarrow{CD}=(-2-(-2);1-(-4);0-1)=(0;5;-1).$$

Застосуємо правила дій над векторами, що задані координатами в ортонормованому базисі векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

а) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=(-1+0;-5+5;0-1)=(-1;0;-1)$,

$$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\sqrt{2}$.

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=(-1+0;0+20;-1+(-1))=(-1;20;-2)$,

$$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\cdot(-1)+20\cdot(-5)+(-2)\cdot 0=1-100=-99.$$

Відповідь: -99.

в)

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -5 & 0\\ 0 & 20 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 20 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 0 & 20\end{vmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}-20\vec{k}=(5;-1;-20);$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-20)^2}=\sqrt{426}.$$

Відповідь: $\sqrt{426}$.

г) Для знаходження площі трикутника скористуємось властивостями векторного добутку. Площа ΔABC дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$, який уже обчислено вище. Тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{426} \text{ (кв.од).}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{426}$ кв. од.

д) Об'єм піраміди обчислюємо через модуль мішаного добутку:

$$V_{піp} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{S_3 - S_2} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -20 + 5 = -15,$$

$$V_{піp} = \frac{1}{6}\left|-15\right| = \frac{5}{2} \text{ (куб. од.).}$$

Відповідь: $\frac{5}{2}$ куб. од.

е) Відстань від точки D до площини ABC дорівнює висоті піраміди $ABCD$. На рис. 7 вона позначена OD. Об'єм піраміди можна обчислити через її висоту за формулою:

$$V_{піp} = \frac{1}{3}S_{осн}H \Rightarrow H = OD = \frac{3V_{піp}}{S_{осн}}$$

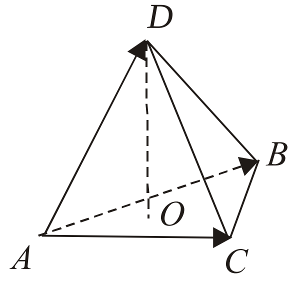

Рис. 18. Піраміда ABCD

Вище знайдено $V_{nip}=\frac{5}{2}$ куб.од., $S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{426}$ кв. од. Звідси

$$OD=\frac{3\cdot\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{426}}=\frac{15}{\sqrt{426}}\ \text{(лін. од.)}$$

Відповідь: $\frac{15}{\sqrt{426}}$ лін. од.

3. Елементи аналітичної геометрії

Задача 1. Дано три точки: $M_1(1;-3;1); M_2(5;-3;5); M_3(1;-4;3)$. Написати:
а) рівняння площини, що проходить через ці три точки;
б) рівняння площини, що проходить через точки M_2 і M_3 паралельно вектору $\vec{q}=(4;1;4)$;
в) рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно площинам $4x+y+2z-3=0$ і $4x+4z-5=0$.

Розв'язання

а) Запишемо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1); M_2(x_2;y_2;z_2); M_3(x_3;y_3;z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Підставимо в це рівняння відповідні значення $x_i, y_i, z_i\ (i=1,2,3)$ При цьому одержимо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 5-1 & -3+3 & 5-1 \\ 1-1 & -4+3 & 3-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1)-8(y+3)-4(z-1)=0\Rightarrow x-2y-z-6=0.$$

Відповідь: $x-2y-z-6=0$.

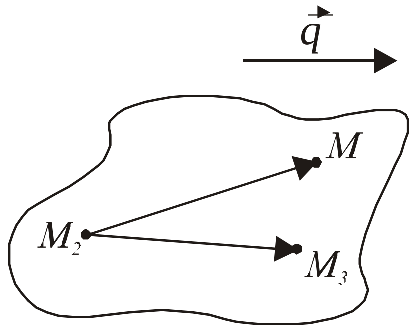

Рис. 19. Площина, паралельна вектору $\vec{q}$

б) Шукана площина проходить через точки $M_2(5;-3;5)\, i\, M_3(1;-4;3)$ і тоді в ній лежить вектор $\overrightarrow{M_2M_3}=(1-5;-4+3;3-5)=(-4;-1;-2)$. Якщо $M(x,y,z)$ – довільна точка цієї площини, то вектор $\overrightarrow{M_2M}=(x-5;y+3;z-5)$ також належатиме цій площині. За умовою вектор $\vec{q}=(4;1;4)$ паралельний шуканій площині. Тобто вектори $\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2M_3}$ і $\vec{q}$ компланарні (рис. 8), тобто їх мішаний добуток дорівнює нулю. Ця умова і визначає рівняння шуканої площини

$$\overrightarrow{M_2M}\cdot\overrightarrow{M_2M_3}\cdot\vec{q}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-5 & y+3 & z-5\\ -4 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-5)\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}+(z-5)\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-2(x-5)+8(y+3)=0\Rightarrow x-4y-17=0.$$

Відповідь: $x-4y-17=0$.

в) Шукана площина проходить через точку $M_1(1;-3;1)$ і якщо $M(x,y,z)$ – довільна її точка, то вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-1,y+3,z-1)$ лежатиме в цій площині. За умовою шукана площина перпендикулярна двом площинам, а це означає, що нормальні вектори цих площин $\vec{n}_1=(4,1,2)$ і $\vec{n}_2=(4,0,4)$ (рис. 9) будуть паралельні шуканій площині. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M},\vec{n}_1,\vec{n}_2$ – компланарні і їх мішаний добуток дорівнює нулю. Із цієї умови одержуємо рівняння шуканої площини.

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y+3 & z-1\\ 4 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4(x-1)-8(y+3)-4(z-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2y-z-6=0$$

Відповідь: $x-2y-z-6=0$.

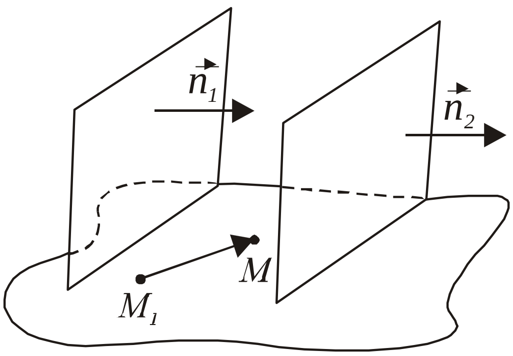

Рис. 20. Площина, перпендикулярна двом площинам

Задача 2. Знайти відстань від точки $M(2;2;-1)$ до площини $2x+3y+6z+3=0$.

Розв'язання.

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини, заданої рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, обчислюється за формулою

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

У нашому випадку

$$\rho=\frac{|2\cdot2+3\cdot2+6\cdot(-1)+3|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{7}{\sqrt{49}}=1 \text{ (лін. од.)}$$

Відповідь: 1 лін. од.

Задача 3. Дано трикутник ABC з вершинами $A(-3;1); B(1;3)$ і $C(0;-3)$. Написати:

а) рівняння медіани AM;

б) рівняння висоти AD і знайти її довжину.

Розв’язання.

а) Медіана AM проходить через дві точки $A(-3;1)$ і $M(x_M, y_M)$ і ділить сторону CB пополам. Тоді точка M є серединою відрізка CB і її координати знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2}, y_M = \frac{y_C + y_B}{2}.$$

Отже, $x_M = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $y_M = \frac{-3+3}{2} = 0$, $M(\frac{1}{2}, 0)$. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

У відповідності з цим рівняння медіани AM буде:

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \frac{x+3}{\frac{1}{2}+3} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \frac{2}{7}(x+3) = -(y-1) \Rightarrow 2x + 7y - 1 = 0.$$

Відповідь: $2x + 7y - 1 = 0$.

б) Висота трикутника AD, що проведена із вершини $A(-3,1)$, перпендикулярна стороні CB. Тоді її рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y - y_A = k_{AD}(x - x_A).$$

Оскільки прямі AD і CB перпендикулярні, то $k_{AD} = -\frac{1}{k_{CB}}$ (умова перпендикулярності). Рівняння прямої CB записуємо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $C(0,-3)$ і $B(1,3)$:

$$\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C} \Rightarrow \frac{x-0}{1-0} = \frac{y+3}{3+3} \Rightarrow 6x - y - 3 = 0 \Rightarrow k_{CB} = 6 \Rightarrow k_{AD} = -\frac{1}{6}.$$

Рівняння висоти AD набуває вигляду:

$$y - 1 = -\frac{1}{6}(x+3) \text{ або } x + 6y - 3 = 0.$$

Для знаходження довжини висоти AD скористуємося тим, що вона дорівнює відстані від точки A до прямої CD, яка обчислюється за формулою:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – точка, відстань від якої до прямої, заданої рівнянням $Ax+By+C=0$. Тоді довжина висоти AD буде дорівнювати:

$$AD=\frac{|6\cdot(-3)-1\cdot 1-3|}{\sqrt{6^2+1}}=\frac{22}{\sqrt{37}} \text{ (лін. од).}$$

Відповідь: $x+6y-3=0$; $\frac{22}{\sqrt{37}}$ лін. од.

Задача 4. Знайти кут між прямою, що проходить через точки $A(3;-3;4)$ і $B(2;-2;3)$ та площиною $-x+y-z-5=0$.

Розв'язання.

Якщо $\vec{n}=(A,B,C)$ – нормальний вектор площини, а $\vec{S}=(m,n,p)$ – напрямний вектор прямої, то величина кута φ між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{S}|}{|\vec{n}||\vec{S}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Для заданої площини нормальний вектор $\vec{n}=(-1;1;-1)$.

А за напрямний вектор заданої прямої можна взяти вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(2-3;-2-(-3);3-4)=(-1;1;-1).$$

Тоді $\sin\varphi=\frac{|(-1)(-1)+1\cdot 1+(-1)(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=1.$

Звідси $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Задача 5. Написати рівняння кола, що проходить через точку $(4;1)$ з центром у точці $(-1;4)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння кола у вигляді:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

де $(x_0;y_0)$ – координати центру кола, а R – його радіус. Оскільки центр шуканого кола задано, то рівняння набуває вигляду:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=R^2$$

і містить одне невідоме значення R. Підставимо в останнє рівняння координати точки, через яку проходить коло. Тоді $5^2+3^2=R^2 \Rightarrow R^2=34$. Таким чином

$$(x+1)^2+(y-4)^2=34.$$

Відповідь: $(x+1)^2+(y-4)^2=34$.

4. Вступ до математичного аналізу

Задача 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-5x-3)^2}{x^2+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-x)}{\ln(1+4x)}$.

Розв'язання.

а) Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладаємо чисельник і знаменник на найпростіші множники і одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x+1)}=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{3}$.

б) В цьому прикладі маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Спосіб 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x-3)^2}{x^2+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{25x^2+30x+9}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(25+30\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2})}{x^2(1+4\cdot\frac{1}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{25+30\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}}{1+4\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{25+30\cdot 0+9\cdot 0}{1+4\cdot 0}=\frac{25}{1}=25.$$

Скористались тим, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Спосіб 2. При розв’язанні цього прикладу можна скористатися еквівалентністю нескінченно великих величин, а саме:

$25x^2+30x+9\sim 25x^2$ при $x\to\infty$,

$x^2+4\sim x^2$ при $x\to\infty$.

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-5x-3)^2}{x^2+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^2+30x+9}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^2}{x^2}=25.$

Відповідь: 25.

в) У виразі $\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}$ помножимо чисельник і знаменник на спряжений чисельнику вираз $\sqrt{1-3x}+\sqrt{1-3x}$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x})(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1-3x-(1+3x)}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{-6x}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=$$

$$=\frac{6}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

г) Невизначеність $1^{-\infty}$. Перетворимо вираз $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}$ так, щоб скористатися другою важливою границею

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e.$$

$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2}{x+1}\cdot(-5x)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+1}}=$$

$$=e^{10\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}=e^{10\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}}=e^{10\cdot\frac{1}{1+0}}=e^{10}.$$

Відповідь: e^{10}.

д) При обчисленні цієї границі скористуємось еквівалентністю нескінченно малих величин

$$\sin(-x)_{x\to 0}\sim -x,\ \ln(1+4x)_{x\to 0}\sim 4x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

Задача 2. Дослідити задані функції на неперервність:

а) $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ в точках $x_1=-1, x_2=-3, x_3=-4$;

б) $y=\begin{cases} x-3 \ \ \text{при}\, x\le -5, \\ 2 \ \ \text{при}\ -5<x<-3. \\ 1-x^2 \ \ \text{при}\, x\ge -3 \end{cases}$

Розв’язання.

а) В точці $x_1=-1$ функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ має розрив, оскільки при $x=-1$ знаменник виразу $-\dfrac{5}{x+1}$ дорівнює нулю. Знайдемо границі зліва і справа від точки $x=-1$.

$$\lim_{x\to-1+0} y=\lim_{x\to-1+0} e^{-\frac{5}{x+1}}=0, \text{ тому що } \lim_{x\to-1+0}\left(-\frac{5}{x+1}\right)=\left(-\frac{5}{+0}\right)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to-1-0} y=\lim_{x\to-1-0} e^{-\frac{5}{x+1}}=+\infty, \text{ тому що } \lim_{x\to-1-0}\left(-\frac{5}{x+1}\right)=\left(-\frac{5}{-0}\right)=+\infty.$$

Таким чином, границя функції справа від точки $x=-1$ існує і дорівнює 0, границя зліва від точки $x=-1$ нескінченна і дорівнює $+\infty$. Отже, в точці $x=-1$ функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ має розрив другого роду (нескінченний).

При $x_2=-3$ і $x_3=-4$ функція неперервна, оскільки

$$\lim_{x\to-3} e^{-\frac{5}{x+1}}=e^{-\frac{5}{-3+1}}=e^{\frac{5}{2}}=y(-3);$$

$$\lim_{x\to-4} e^{-\frac{5}{x+1}}=e^{-\frac{5}{-4+1}}=e^{\frac{5}{3}}=y(-4).$$

Відповідь: функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ розривна в точці $x=-1$ і неперервна при $x_2=-3$ і $x_3=-4$.

б) Точки $x_1=-5$ і $x_2=-3$ є підозрілими на розрив. Обчислимо в цих точках однобічні границі і значення функції.

$$\lim_{x\to-5-0} f(x)=\lim_{x\to-5-0}(x-3)=-8;\ \lim_{x\to-5+0} f(x)=\lim_{x\to-5+0} 2=2;\ f(-5)=-5-3=-8.$$

Оскільки обидві однобічні границі існують, але $\lim\limits_{x\to-5-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-5+0} f(x)$, то в точці $x=-5$ маємо розрив I-го роду.

$$\lim_{x\to-3-0} f(x)=\lim_{x\to-3-0} 2=2;\ \lim_{x\to-3+0} f(x)=\lim_{x\to-3+0}(1-x^2)=1-9=-8;\ f(-3)=1-9=-8.$$

Одержали, що $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3+0} f(x)$, тобто в точці $x=-3$ функція також має розрив першого роду.

Відповідь: $x=-5$ і $x=-3$ є точками розриву I-го роду.

5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1. Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ для функцій:

а) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x}$; б) $\begin{cases} x=2\cos(-3t), \\ y=-3\sin 2t. \end{cases}$;

в) $(x+2)^4+(y-3)^4=(x+2)^2(y-3)^2$; г) $y=(arctg\,x)^{-5x}$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої функції, суми і частки, одержуємо:

$$y'=\frac{\left(\sqrt{4x^2-2x+1}\right)'x-x'\sqrt{4x^2-2x+1}}{x^2}=\frac{\dfrac{8x-2}{2\sqrt{4x^2-2x+1}}x-\sqrt{4x^2-2x+1}}{x^2}=$$

$$=\frac{4x^2-x-(4x^2-2x+1)}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}}=\frac{x-1}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}}.$$

Відповідь: $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

б) Формула для знаходження першої похідної функції, що задана параметрично, має вид:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Послідовно знаходимо

$$y'_t=-3\cos 2t\cdot 2=-6\cos 2t,$$

$$x'_t=2(-\sin(-3t))\cdot(-3)=-6\sin 3t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-6\cos 2t}{-6\sin 3t}=\frac{\cos 2t}{\sin 3t}.$$

Відповідь: $\dfrac{\cos 2t}{\sin 3t}$.

в) Для диференціювання функції, яка задана неявно, візьмемо похідні по x від обох частин рівності

$$4(x+2)^3+4(y-3)^3y'=2(x+2)(y-3)^2+2(y-3)y'(x+2)^2.$$

Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$2(y-3)^3y'-(y-3)y'(x+2)^2=(x+2)(y-3)^2-2(x+2)^3.$$

Звідки

$$y'=\frac{(x+2)\left[(y-3)^2-2(x+2)^2\right]}{(y-3)\left[2(y-3)^2-(x+2)^2\right]}.$$

Відповідь: $\dfrac{(x+2)\left[(y-3)^2-2(x+2)^2\right]}{(y-3)\left[2(y-3)^2-(x+2)^2\right]}$.

г) Для диференціювання степенево-показникових функцій можна скористатись логарифмічним диференціюванням. Прологарифмуємо обидві частини початкового виразу $\ln y=-5x\ln arctgx$. Візьмемо від обох частин рівності похідну по x:

$$\frac{1}{y}y'=-5\left(\ln arctgx+\frac{x}{arctgx(1+x^2)}\right).$$

Звідси

$$y'=-5y\left(\ln arctgx+\frac{x}{arctgx(1+x^2)}\right).$$

Відповідь: $-5(arctgx)^{-5x}\left(\ln arctgx+\dfrac{x}{(1+x^2)arctgx}\right)$.

Задача 2. Обчислити похідну y' функцій:

а) $y=\left(2x+\dfrac{2}{5}\right)\cdot e^{-5x-5}$ у точці $x=-1$;

б) $y=\ln(x^3-3x)-\dfrac{4}{x}$ у точці $x=1$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, показникової функції і добутку, одержуємо:

$$y' = 2e^{-5x-5} + \left(2x+\frac{2}{5}\right)e^{-5x-5}\cdot(-5) = e^{-5x-5}(2-10x-2) = -10xe^{-5x-5}.$$

Обчислюємо значення y' в точці $x=-1$:

$$y'(-1)=-10\cdot(-1)e^{-5(-1)-5}=10e^{5-5}=10e^0=10.$$

Відповідь: 10.

б) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої та логарифмічної функцій та суми, одержуємо:

$$y'=\frac{1}{x^3-3x}\cdot(3x^2-3)+\frac{4}{x^2}.$$

Обчислюємо значення похідної в точці $x=1$.

$$y'(1)=\frac{1}{1^3-3\cdot1}\cdot(3\cdot1-3)+\frac{4}{1}=-\frac{1}{2}\cdot0+4=4.$$

Відповідь: 4.

Задача 3. Знайти похідну $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=e^{2(x-3)^2}$.

Розв'язання.

Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої і показникової функцій, одержуємо:

$$y'=e^{2(x-3)^2}\cdot4(x-3),$$

$$y''=(y')'=4\left[e^{2(x-3)^2}\cdot4(x-3)^2+e^{2(x-3)^2}\right]=4e^{2(x-3)^2}\left[4(x-3)^2+1\right].$$

Відповідь: $4e^{2(x-3)^2}\left[4(x-3)^2+1\right]$.

Задача 4. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(-5x)+5x}{4x-\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(-5x+1)}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-\cos 3x}{e^{4x}-\cos 4x}$.

Розв'язання.

а) Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Застосовуємо правило Лопіталя тричі і одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(-5x)+5x}{4x-\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{[tg(-5x)+5x]'}{(4x-\sin 4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2(-5x)}(-5)+5}{4-4\cos 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5+5\cos^2 5x}{\cos^2 5x(4-4\cos 4x)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-1}{1-\cos 4x}=\frac{5}{4}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-1}{1-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 5x-1)'}{(1-\cos 4x)'}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 5x(-\sin 5x)5}{4\sin 4x}=\frac{5}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)\lim_{x\to 0}\cos 5x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=-\frac{25}{8}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sin 4x)'}=-\frac{25}{8}\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{4\cos 4x}=-\frac{125}{32}.$$

Відповідь: $-\dfrac{125}{32}$.

б) Маємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$. Застосовуємо правило Лопіталя і одержуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(-5x+1)}{3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(-5x+1))'}{(3x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-5}{1-5x}}{3}=\frac{-5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-5x}=\frac{5}{3}\cdot 0=0.$$

Відповідь: 0.

в) Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Застосовуємо правило Лопіталя і одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{e^{-3x}-\cos 3x}{e^{4x}-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-3x}-\cos 3x)'}{(e^{4x}-\cos 4x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3e^{-3x}+3\sin 3x}{4e^{4x}+4\sin 4x}=\frac{-3\cdot 1+3\cdot 0}{4\cdot 1+4\cdot 0}=-\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{3}{4}$.

Задача 5. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y=(x+6)^3(x+2)$ у точці $x=-5$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ записується формулою $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, де $y_0=f(x_0)$. Знайдемо y':

$$y'=3(x+6)^2(x+2)+(x+6)^3.$$

Обчислимо значення y і y' в точці $x=-5$:

$$y(-5)=(-5+6)^3(-5+2)=-3,$$

$$y'(-5)=3(-5+6)^2(-5+2)+(-5+6)^3=-9+1=-8.$$

Підставимо одержані значення у формулу

$$y+3=-8(x+5)\Rightarrow 8x+y+43=0.$$

Відповідь. Дотична має рівняння $8x+y+43=0$.

Задача 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=e^{-x^2}$ на проміжку $[-4,16]$.

Розв'язання.

Знайдемо критичні точки заданої функції. $y'=e^{-x^2}(-2x)\Rightarrow x=0$ – критична точка, яка належить проміжку [-4;16]. Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях проміжку [-4;16].

$$y(0)=e^0=1;\ y(-4)=e^{-16};\ y(16)=e^{-256}.$$

Тоді $y_{\text{найб}}$=1, $y_{\text{найм}}$=e^{-256}.

Відповідь: 1; e^{-256}.

Задача 7. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

а) $y=-x^3-5x^2$; б) $y=\dfrac{2}{x^2+4x-5}$.

Розв'язання.

а) Дана функція є многочленом, тому вона визначена та неперервна на всій числовій осі OX, тобто $x\in R$. Функція не є ні парною, ні непарною, оскільки

$$y(-x)=-(-x)^3-5(-x)^2=x^3-5x^2\neq\begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases}.$$

Для знаходження точок перетину графіка функції з осями координат покладемо

$$x=0\Rightarrow y=0; y=0\Rightarrow x=0\, i\, x=-5.$$

Функція неперіодична.

Знайдемо інтервали монотонності функції та екстремуми. Похідна

$$y'=-3x^2-10x=-x(3x+10)$$

дорівнює нулю при $x_1=-\dfrac{10}{3}$ і $x_2=0$.

Стаціонарні точки функції ділять числову вісь на три інтервали монотонності: $(-\infty;-\dfrac{10}{3}),(-\dfrac{10}{3};0),(0;\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному із цих інтервалів та екстремуми

x	$(-\infty;-\frac{10}{3})$	$-\frac{10}{3}$	$(-\frac{10}{3};0)$	0	$(0;\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	спадає	*min*	зростає	*max*	спадає

Отже, при $x=-\dfrac{10}{3}$ функція має мінімум, а при x=0 – максимум, причому

$$y_{\min}=y(-\frac{10}{3})=-\left(-\frac{10}{3}\right)^3-5\left(-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{1000}{27}-\frac{500}{9}=-\frac{500}{27}\approx-18{,}5;\ y_{\max}=y(0)=0.$$

Знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину. Друга похідна

$$y'' = -6x - 10$$

дорівнює нулю при $x = -\frac{5}{3}$. Ця точка ділить числову вісь на два інтервали: $(-\infty; -\frac{5}{3})$ та $(-\frac{5}{3}; \infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак другої похідної на кожному із цих інтервалів і точку перегину

x	$(-\infty; -\frac{5}{3})$	$-\frac{5}{3}$	$(-\frac{5}{3}; \infty)$
y''	+	0	-
y	угнута	перегин	опукла

Отже, при $x = -\frac{5}{3}$ маємо точку перегину, причому

$$y(-\frac{5}{3}) = -\left(-\frac{5}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{125}{27} - \frac{125}{9} = -\frac{250}{27} \approx -9.$$

Графік функції вертикальних асимптот не має, оскільки функція визначена для всіх $x \in R$. Для визначення рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$ скористуємося формулами

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Маємо $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^3 - 5x^2}{x} = \mp\infty$, що свідчить про відсутність похилих асимптот.

Встановимо поведінку функції на нескінченності: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (-x^3 - 5x^2) = \mp\infty$. На основі отриманих даних будуємо графік функції.

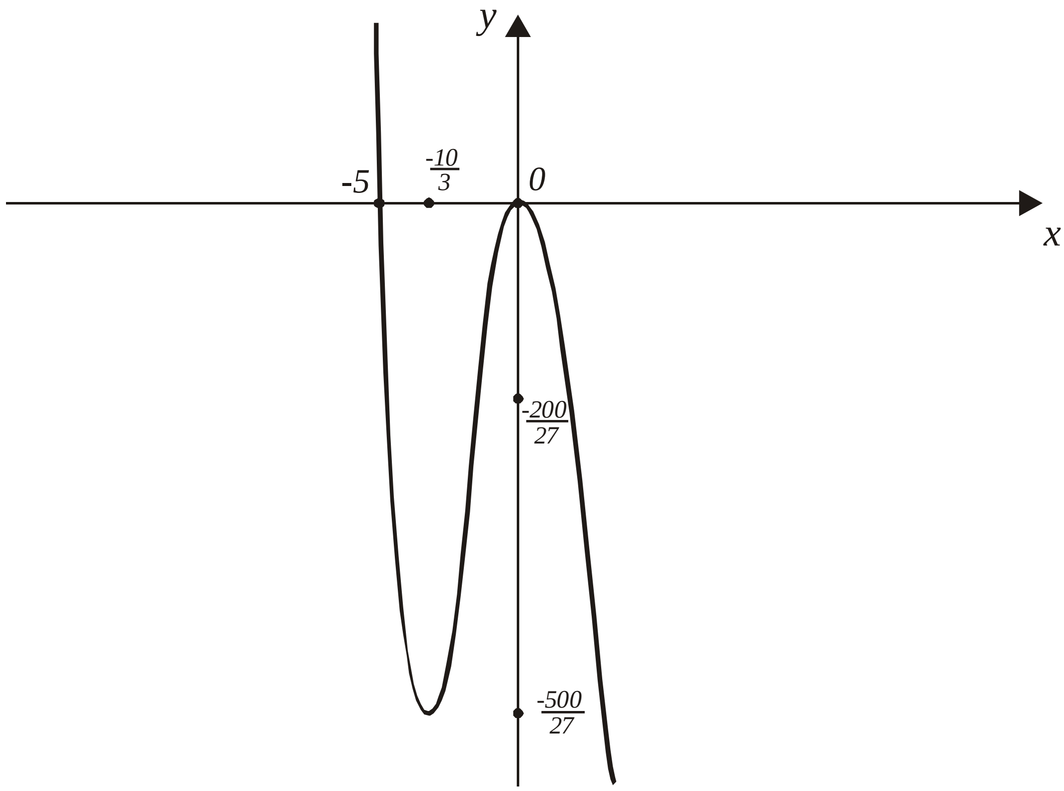

Рис. 21. Графік функції $\mathbf{y=-x^3-5x^2}$

б) Дана функція визначена при всіх значеннях аргументу, крім тих, при яких знаменник x^2+4x-5 дорівнює нулю, тобто при $x=-5$ і $x=1$. Таким чином, область визначення складається із трьох інтервалів: $(-\infty;-5)\cup(-5;1)\cup(1;\infty)$.

Функція $y=\dfrac{2}{x^2+4x-5}$ не є парною або непарною. З віссю OX графік функції не перетинається. Якщо $x=0$, то $y=-\dfrac{2}{5}$. Функція неперіодична.

Функція має нескінченні розриви при $x=-5$ і $x=1$, причому

$$\lim_{x\to-5-0} f(x)=\lim_{x\to-5-0}\frac{2}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to-5-0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{(-0)(-6)}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-5+0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{(+0)(-6)}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{6(-0)}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{2}{(x+5)(x-1)} = \left(\frac{2}{6(+0)}\right) = +\infty.$$

При всіх інших значеннях аргументу функція неперервна.

Оскільки в точках $x=-5$ і $x=1$ функція має нескінченний розрив, то прямі $x=-5$ і $x=1$ є вертикальні асимптоти для графіка функції. Для визначення рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$ скористуємося формулами

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-kx].$$

Маємо

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2+4x-5}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x(x^2+4x-5)} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2+4x-5} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0.$$

Отже, графік функції похилої асимптоти не має, а пряма $y=0$ є його горизонтальною асимптотою.

Знайдемо інтервали монотонності функції та точки екстремуму. Похідна

$$y' = -\frac{2(2x+4)}{(x^2+4x-5)^2}$$

дорівнює нулю при $x=-2$, та нескінченості при $x=-5$ і $x=1$, які не належать області визначення, отже, ці точки не підлягають дослідженню на екстремум.

Розіб'ємо числову вісь на чотири інтервали: $(-\infty;5),(-5;-2),(-2;1),(1;\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів та точки екстремуму.

x	$(-\infty;-5)$	-5	(-5; 2)	-2	(-2; 1)	1	$(1;\infty)$
y'	+	не існує	+	0	-	не існує	-
y	зростає	не існує	зростає	*max*	спадає	не існує	спадає

Отже, при $x=-2$ функція має максимум

$$y_{\max} = y(-2) = \frac{2}{(-2)^2+4(-2)-5} = -\frac{2}{9}.$$

Знайдемо інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції. Друга похідна

$$y'' = -2\frac{2(x^2+4x-5)^2 - 2(x^2+4x-5)(2x+4)^2}{(x^2+4x-5)^4} = -4\cdot\frac{x^2+4x-5-4x^2-16x-16}{(x^2+4x-5)^3} =$$

$$= -4\frac{-3x^2-12x-21}{(x^2+4x-5)^3} = 12\frac{x^2+4x+7}{(x^2+4x-5)^3}$$

не дорівнює нулю при будь-якому x і нескінченості при $x=-5$ і $x=1$. Отже, точок перегину графік функції не має. Складемо таблицю для визначення інтервалів опуклості і угнутості

x	$(-\infty;-5)$	(-5; 1)	$(1;+\infty)$
y''	+	-	-
y	угнута	опукла	угнута

На основі отриманих даних будуємо графік функції.

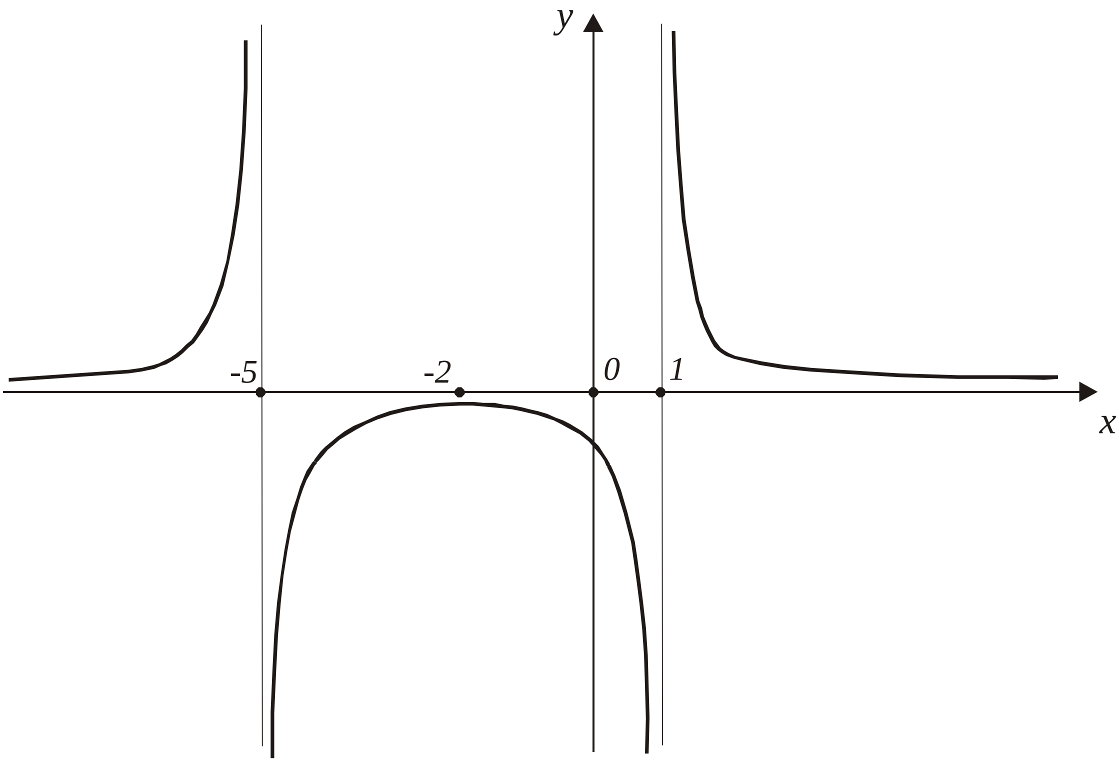

Рис. 22. Графік функції $\mathbf{y = \dfrac{2}{x^2+4x-5}}$

6. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Нехай $a = 2; b = -4; c = 3; m = 1; n = -1; k = 2.$

Задача 1. Знайти область визначення функції і побудувати її на площині (x, y):

а) $z = \dfrac{2}{-4x+3y}$; б) $z = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16}\right)$.

Розв'язання.

а) Область визначення D даної функції – множина тих точок (x, y) площини Oxy, в яких знаменник не дорівнює нулю, тобто $-4x+3y \neq 0$. Рівняння $y = \dfrac{4}{3}x$ задає пряму лінію, в точках якої вираз $\dfrac{2}{-4x+3y}$ не має змісту. Область D є відкритою і її можна задати за допомогою системи нерівностей:

$$D = \left\{-\infty < x < \infty;\ y \neq \frac{4}{3}x\right\};$$

б) Оскільки функція $y = \arcsin x$ є визначеною при $-1 \le x \le 1$, то враховуючи, що

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \ge 0,$$

робимо висновок: область визначення D є множина точок, координати яких задовольняють умові

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 1.$$

Щоб зобразити область D, знайдемо її межу. Рівняння межі

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Це рівняння визначає на площині Oxy еліпс з напівосями $a = 2$ та $b = 4$. даний еліпс ділить всю площину на дві частини. Для точок однієї з цих частин

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}<1,$$

а для іншої –

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}>1.$$

Щоб виявити, яка з частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умові

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\le 1,$$

достатньо перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки, яка не лежить на еліпсі. Наприклад, точка $O(0;0)$ належить області D, тому що $\frac{0}{4}+\frac{0}{16}=0<1$. Отже, внутрішніми точками області D є точки області, обмеженої еліпсом. Сам еліпс також належить області D, тому що для точок еліпсу $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$. Це замкнена область, що зображена на рис.12.

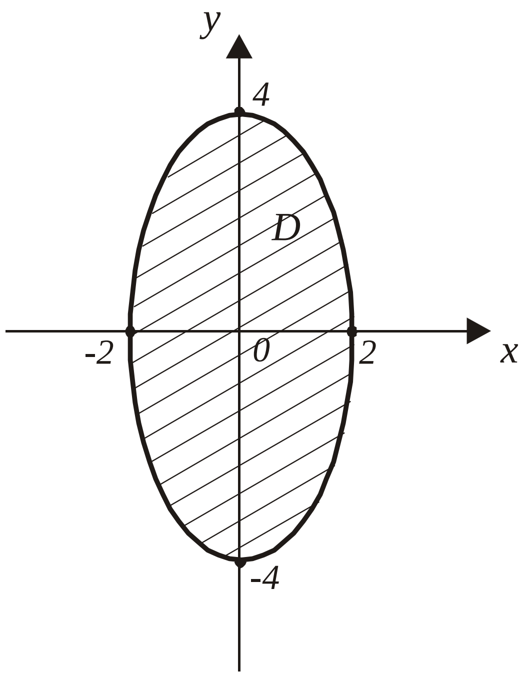

Рис.23. Область визначення функції $\mathbf{z=\arcsin\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\right)}$

Задача 2. Показати, що функція $z=-2\sin^2(x-2y)$ задовольняє рівнянню $4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ та впевнитись, що виконується рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання.

Оскільки z функція двох змінних x і y, то знайдемо частинні похідні першого і другого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2\cdot 2\sin(x-2y)\cdot\cos(x-2y)=-2\sin 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\cos 2(x-2y)\cdot 2=-4\cos 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-2\cos 2(x-2y)\cdot(-4)=8\cos 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\cdot 2\sin(x-2y)\cos(x-2y)(-2)=4\sin 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\cos 2(x-2y)(-4)=-16\cos 2(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=4\cos 2(x-2y)\cdot 2=8\cos 2(x-2y).$$

Підставимо одержані значення похідних в задане рівняння

$$4\cdot(-4\cos 2(x-2y))=-16\cos 2(x-2y),$$

$$-16\cos 2(x-2y)\equiv-16\cos 2(x-2y).$$

Одержали тотожність, тобто функція задовольняє заданому рівнянню

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8\cos 2(x-2y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

то бачимо, що для даної функції має місце рівність мішаних похідних другого порядку.

Задача 3. Обчислити значення повного диференціала функції $z(x,y)$, що задана неявно рівнянням $2x^3 + 4y^3 + 3xyz + 3z^2 + 8 = 0$, в точці $M_0(-4{,}2{,}-8)$, якщо $\Delta x = -0{,}1;\ \Delta y = 0{,}1$.

Розв'язання.

Позначимо ліву частину даного рівняння через $F(x,y,z)$. Тоді

$$F(x,y,z) = 2x^3 + 4y^3 + 3xyz + 3z^2 + 8,$$

$$F'_x(x,y,z) = 6x^2 + 3yz,\ F'_y(x,y,z) = 12y^2 + 3xz,\ F'_z(x,y,z) = 3xy + 6z.$$

Далі скориставшись формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},$$

отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6x^2 + 3xz}{3xy + 6z} = -\frac{2x^2 + yz}{xy + 2z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{12y^2 + 3xz}{3xy + 6z} = -\frac{4y^2 + xz}{xy + 2z}.$$

Отже, повний диференціал дорівнює

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = -\frac{(2x^2 + yz)\Delta x + (4y^2 + xz)\Delta y}{xy + 2z}.$$

Обчислимо тепер значення повного диференціала в точці M_0:

$$dz\big|_{M_0} = -\frac{[2(-4)^2 + 2(-8)](-0{,}1) + [4\cdot 2^2 + (-4)(-8)]\cdot 0{,}1}{[(-4)\cdot 2 + 2(-8)]} = \frac{2}{15}.$$

Відповідь: $\frac{2}{15}$.

Задача 4. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 12xy + y^3$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 12y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 12x + 3y^2.$$

Точки можливого екстремуму визначимо із системи:

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y = 0, \\ 12x + 3y^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y = 0, \\ 4x + y^2 = 0. \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо дві стаціонарні точки заданої функції $M_1(0;0),\ M_2(-4;-4)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

В точці M_1 маємо:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0;\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = 12;\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 - 144 = -144 < 0,$$

це означає, що точка $M_1(0;0)$ не є екстремальною.

В точці M_2 маємо:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6(-4) = -24 < 0;\ \ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = 12;\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 6(-4) = -24;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-24)(-24) - 144 = 332 > 0.$$

Отже, в точці M_2 одержали: $\Delta = 332 > 0,\ A = -24 < 0$. Таким чином, в точці M_2 маємо максимум. В цій точці $z_{\max} = 64$.

Відповідь: $z_{\max} = z(-4, -4) = 64$.

Задача 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy - y^2 - \frac{2}{3}(x - y)$ в області D, що обмежена лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

Розв'язання.

Задана область є трикутник (рис. 13). Функція є неперервною на замкненій обмеженій області, а тому досягає на ній свого найбільшого і найменшого значень. Ці значення треба шукати в точках можливого екстремуму як в середині області, так і в точках можливого екстремуму на межі області ($x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$).

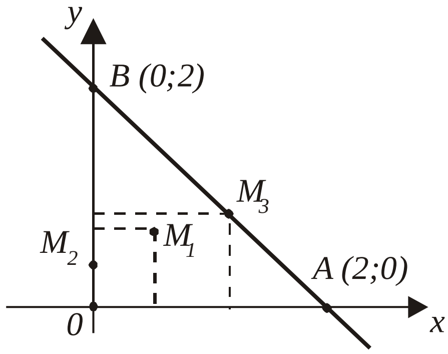

Рис. 24. Область, яка обмежена лініями $\mathbf{x = 0, y = 0, x + y = 2}$

1) Знайдемо стаціонарні точки, як розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - \dfrac{2}{3} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - 2y + \dfrac{2}{3} = 0. \end{cases}$$

Звідси $y_1 = \frac{2}{3},\ x_1 = \frac{2}{3}$. Таким чином, одержуємо точку $M_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, яка належить заданій області. Обчислюємо

$$z(M_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Дослідження на екстремум робити не обов'язково.

2) Дослідимо функцію на межі області, тобто на відрізках *OB, OA, AB*.

OB: $x = 0;\ z = -y^2 + \frac{2}{3}y$. Задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції однієї змінної на відрізку $0 \le y \le 2$.

$$\frac{dz}{dy} = -2y + \frac{2}{3} = 0,\ y_2 = \frac{1}{3},\ x_2 = 0.$$

Таким чином одержали точку $M_2\left(0; \frac{1}{3}\right)$. Обчислюємо

$$z(M_2) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

На кінцях відрізку $0 \le y \le 2$ $z(O) = 0;\ z(B) = -4 + \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$.

OA: $y = 0;\ z = -\frac{2}{3}x;\ 0 \le x \le 2$. В даному випадку функція $z(x)$ не має стаціонарних точок. Обчислюємо $z(A) = -\frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3}$.

AB: $y + x = 2$ $0 \le x \le 2$; при $y = 2 - x$ маємо $z = -2x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{8}{3}$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції однієї змінної на відрізку $0 \le x \le 2$.

$$\frac{dz}{dx} = -4x + \frac{14}{3},\ x_3 = \frac{7}{6},\ y_3 = \frac{5}{6}.$$

Таким чином одержали точку $M_3\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right)$. Обчислюємо

$$z(M_3) = \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{7}{6} - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{18}.$$

3) Порівнюючи всі одержані результати, робимо висновок, що $z_{найб} = \frac{1}{9}$ досягається в граничній точці $M_2\left(0; \frac{1}{3}\right)$; $z_{найм} = -\frac{8}{3}$ – в граничній точці $B(0;2)$.

Відповідь: $z_{найм} = z(0;2) = -\frac{8}{3}$, $z_{найб} = z\left(0; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$.

7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Задача 1. Знайти невизначені інтеграли. В прикладі *б* результат перевірити диференціюванням.

а) $\int \frac{[\arcsin(-4x)]^5}{\sqrt{1-16x^2}}dx$; б) $\int (x-2)\sin(-4x+2)dx$; в) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}$;

г) $\int \frac{-4x^2-16x}{x^3-8}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-4}}$; е) $\int \frac{dx}{\mathbf{2}\cos x - 4\sin x}$.

Розв'язання.

а) Враховуючи непарність функції $\arcsin x$, перепишемо інтеграл у вигляді:

$$I = \int \frac{[\arcsin(-4x)]^5}{\sqrt{1-16x^2}}dx = -\int \frac{(\arcsin 4x)^5}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

Відмітимо, що $\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}} = \frac{1}{4}d(\arcsin 4x)$. Звідси

$$I = -\frac{1}{4}\int (\arcsin 4x)^5 d(\arcsin 4x) = -\frac{1}{4}\int t^5 dt = -\frac{1}{4}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{24}(\arcsin 4x)^6 + C.$$

б) Скористуємося формулою інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$. Покладемо $u = x-2, dv = \sin(-4x+2)dx.$ Звідси $du = dx,$

$$v = \int \sin(-4x+2)dx = -\frac{1}{4}\int \sin(-4x+2)d(-4x+2) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \sin t dt = -\frac{1}{4}(-\cos t) = \frac{1}{4}\cos(-4x+2).$$

Остаточно одержуємо:

$$I = \int (x-2)\sin(-4x+2)dx = (x-2)\cdot\frac{1}{4}\cos(-4x+2) - \frac{1}{4}\int \cos(-4x+2)dx =$$

$$=\frac{1}{4}(x-2)\cos(-4x+2)-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)\int\cos(-4x+2)d(-4x+2)=$$

$$=\frac{1}{4}(x-2)\cos(-4x+2)+\frac{1}{16}\sin(-4x+2)+C.$$

За означенням первісної $\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow F'(x)=f(x)$. Перевіримо одержаний результат. Для цього знайдемо похідну:

$$F'(x)=\frac{1}{4}\big(1\cdot\cos(-4x+2)+(x-2)(-\sin(-4x+2))(-4)\big)+\frac{1}{16}\cos(-4x+2)(-4)=$$

$$=\frac{1}{4}\cos(-4x+2)+(x-2)\sin(-4x+2)-\frac{1}{4}\cos(-4x+2)=(x-2)\sin(-4x+2).$$

в) Зробимо заміну змінної: $x-1=t^2\Rightarrow x=t^2+1\Rightarrow dx=2tdt$, $x+1=t^2+2, t=\sqrt{x-1}$. Тоді

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}=\int\frac{2tdt}{(t^2+2)t}=2\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\sqrt{2}arctg\,\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}+C.$$

г) Перетворимо знаменник підінтегральної функції: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{-4x^2-16x}{x^3-8}=\frac{-4x^2-16x}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)=-4x^2-16x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+4A-2C=-4x^2-16x.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A,B,C одержуємо систему рівнянь із умови рівності двох багаточленів:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{c} A+B=-4, \\ 2A-2B+C=-16, \\ 4A-2C=0. \end{array}\right. \\ x & \\ x^0 & \end{array}$$

Із першого і третього рівнянь маємо $C=2A,\ B=-4-A$. Підставляючи ці вирази в друге рівняння системи, одержуємо рівняння відносно A:

$$2A+8+2A=-16 \Rightarrow 6A=-24 \Rightarrow A=-4.$$

Тоді $C=-8, B=0$. Отже,

$$\frac{-4x^2-16x}{x^3-8}=-\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2+2x+4}.$$

Підставимо отримане розкладання дробово-раціонального виразу до інтегралу та знайдемо його

$$I=\int\frac{-4x^2-16x}{x^3-8}dx=-\left(\int\frac{4}{x-2}dx+\int\frac{8}{(x^2+2x+1)+3}dx\right)=$$

$$=-\left[4\int\frac{dx}{x-2}+8\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right]=-4\ln|x-2|-\frac{8}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

д) Перетворимо вираз під коренем

$$x^2-4x-4=(x^2-4x+4)-8=(x-2)^2-8.$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-8}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-8}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-8}}=$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right|+C=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-4}\right|+C.$$

е) Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$tg\,\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2arctg\,t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$2\cos x-4\sin x=\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}-\frac{8t}{1+t^2}=\frac{2-2t^2-8t}{1+t^2}.$$

Тоді

$$I=\int\frac{dx}{2\cos x-4\sin x}=\int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2-2t^2-8t}=\int\frac{dt}{1-t^2-4t}=-\int\frac{dt}{t^2+4t+4-5}=$$

$$=-\int\frac{dt}{(t+2)^2-(\sqrt{5})^2}=-\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-(\sqrt{5})^2}=-\int\frac{du}{u^2-(\sqrt{5})^2}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}\right|+C.$$

Задача 2. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int\limits_0^1\frac{-x-4}{2x+2}dx$; б) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}xe^{2x-1}dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[2\sin(-2x)+\cos(-2x)]dx$; г) $\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{2x+4}dx$.

Розв'язання

а) Перетворимо підінтегральну функцію, тому що вона є неправильним дробом:

$$\frac{-x-4}{2x+2}=-\frac{1}{2}\frac{x+4}{x+1}=-\frac{1}{2}\frac{(x+1)+3}{x+1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{3}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{x+1}\right).$$

Тоді

$$I=\int\limits_0^1\frac{-x-4}{2x+2}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1+\frac{3}{x+1}\right)dx=-\frac{1}{2}\left(x+3\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+3\ln 2-0-3\ln 1\right)=-\frac{1}{2}(1+3\ln 2).$$

б) Скористуємось формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du\,.$$

Покладемо $u = x, dv = e^{2x-1}dx$. Звідси $du = dx$,

$$v = \int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x-1}d(2x-1) = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2x-1}.$$

Остаточно маємо:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x-1}dx = \frac{1}{2}xe^{2x-1}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\left[0\cdot e^{2\cdot 0-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}\left(e^{2\cdot 0-1} - e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}\right) = \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{4}e^{-2} = -\frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2}.$$

в) Обчислимо інтеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} [2\sin(-2x) + \cos(-2x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} (\cos 2x - 2\sin 2x)dx = \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(-\pi) + \cos(-\pi) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

г) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\sqrt{2x+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}(2x+4)^{\frac{1}{2}}d(2x+4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$

Задача 3. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$; б) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2}$.

Розв'язання.

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-2b} - e^{-2\cdot 0}\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$

б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{4-\varepsilon}(x-4)^{-2}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Bigg|_0^{4-\varepsilon} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{4-\varepsilon-4} - \frac{1}{0-4}\right) =$

$= -\left(-\infty + \frac{1}{4}\right) = +\infty$.

Задача 4. Обчислити площу фігури, що обмежена вказаними лініями. Зобразити ці лінії і фігуру, яку вони обмежують:

а) $y = x-4;\ y=0;\ x=5;\ \ x=7$;

б) $y = x^2+2x;\ \ y = x+2$.

Розв'язання.

а) Виконаємо побудову. Всі задані лінії є прямі, фігура представляє собою трапецію, зверху обмежену прямою $y = x-4$, а з боків прямими $x=5, x=7$.

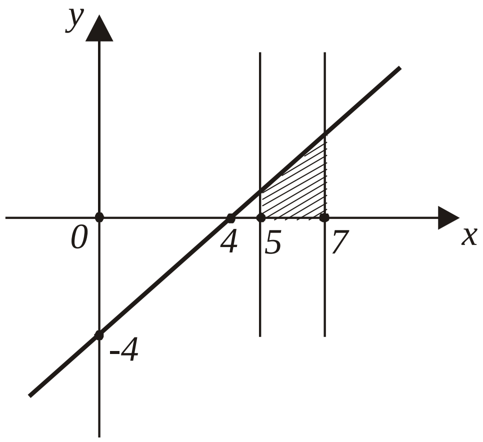

Рис. 25. Фігура, що задана прямими лініями

Тому

$S = \int\limits_5^7 (x-4)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_5^7 = \frac{49}{2} - 28 - \left(\frac{25}{2} - 20\right) = 4$ (кв.од.)

б) Виконаємо побудову. $y = x^2+2x$ – парабола, яка перетинає вісь OX в точках $x=0$ і $x=-2$, $y=x+2$ – пряма, яка перетинає вісь OX в точці $x=-2$, а вісь OY – в точці $y=2$. Одержана фігура зверху обмежена прямою $y=x+2$, а знизу параболою $y=x^2+2x$.

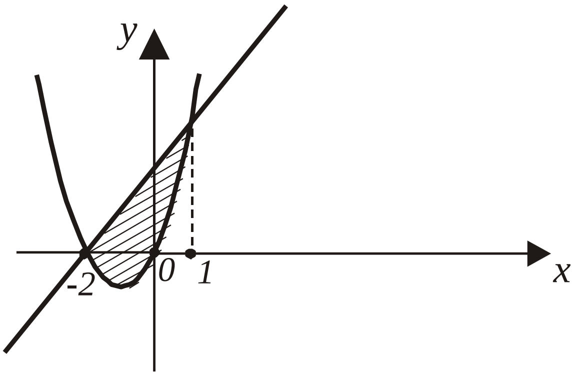

Рис. 26. Фігура, що задана перетином прямої та параболи

Площу обчислимо за формулою:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)dx\,.$$

Знайдемо межі інтегрування, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ y = x + 2, \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

Тоді

$$S = \int_{-2}^{1} \left[(x+2) - (x^2 + 2x)\right]dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 6 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}(\text{кв.од})$$

8. Диференціальні рівняння

Задача 1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

а) $y^2 y' = -4 - 2x$;

б) $y' + y = e^{-x}$;

в) $y' = \dfrac{x - 2y}{-2x + y}$.

Розв'язання.

а) Маємо диференціальне рівняння зі змінними які можна відокремити, оскільки його можна записати у вигляді:

$$y' = \frac{-2}{y^2}(2+x).$$

Перепишемо його в диференціальній формі і проінтегруємо:

$$y^2 dy = -2(2+x)dx;$$

$$\int y^2 dy = -2\int (2+x)dx + C \Rightarrow \frac{y^3}{3} = -2\left(2x + \frac{x^2}{2}\right) + C.$$

Одержали загальний інтеграл заданого рівняння, де C – довільна стала.

б) Покладемо $y = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$. Підставимо y і y' в рівняння і одержимо

$$u'v + v'u + uv = e^{-x} \Rightarrow u'v + u(v' + v) = e^{-x}.$$

На підставі довільності функцій $u(x)$ і $v(x)$ можна покласти $v' + v = 0$. Приходимо до наступної системи рівнянь для знаходження u і v:

$$\begin{cases} v' + v = 0; \\ u'v = e^{-x}. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи знаходимо функцію $v(x)$, а із другого – функцію $u(x)$.

Розв'яжемо перше рівняння.

$$\frac{dv}{dx} + v = 0 \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \quad \Rightarrow \ln|v| = -x \Rightarrow v = e^{-x}.$$

Підставимо $v(x)$ в друге рівняння системи

$$u'e^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow u' = 1 \quad \Rightarrow u = \int dx + C = x + C.$$

Звідси $y = uv = (x + C)e^{-x}$.

в) Поділимо чисельник і знаменник правої частини рівняння на x. Одержимо рівняння, права частина якого є функція $\dfrac{y}{x}$:

$$y' = \frac{1 - 2\cdot\dfrac{y}{x}}{-2 - \dfrac{y}{x}}.$$

Таким чином маємо однорідне рівняння відносно змінних диференціального рівняння. Покладемо $\dfrac{y}{x} = u(x)$, і одержимо

$$y' = u'x + u; \quad u'x + u = \frac{1-2u}{-2-u} \Rightarrow u'x = \frac{1-2u}{-2-u} - u \Rightarrow u'x = \frac{1-2u+2u+u^2}{-2-u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1+u^2}{-2-u} \Rightarrow -\frac{u+2}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \frac{u}{1+u^2}du - \int \frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| - 2arctgu = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow -2arctgu = \ln\left|Cx\sqrt{1+u^2}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Cx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = e^{-2arctg\frac{y}{x}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{C}e^{-2arctg\frac{y}{x}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{C^2}e^{-4arctg\frac{y}{x}} - x^2.$$

Сталу $\dfrac{1}{C^2}$ можна записати як C. В процесі розв’язання диференціального рівняння для зручності подальших викладок довільну сталу позначили через $\ln|C|$, тому що $\ln|C|$ набуває будь-яких значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Задача 2. Розв’язати диференціальні рівняння другого порядку:

а) $x^2 y'' = y'^2$;
б) $y'' = 2yy'$.

Розв’язання.

а) Застосуємо заміну $z(x) = y'$, $z' = y''$, після чого отримаємо рівняння першого порядку відносно функції $z(x)$:

$$x^2 z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1 \Rightarrow z = \frac{x}{1 + C_1 x} \Rightarrow y' = \frac{x}{1 + C_1 x}.$$

Звідси,

$$y = \int \frac{x}{1 + C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} \int \left(1 - \frac{1}{1 + C_1 x} \right) dx = \frac{1}{C_1} \left(x - \frac{1}{C_1} \ln|1 + C_1 x| \right) + C_2.$$

б) Це рівняння не містить у явному вигляді незалежну змінну, тому доцільно використати заміну $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, $\frac{dp}{dy} = p'$. Після застосування цієї заміни отримаємо:

$$p'p = 2yp \Rightarrow p' = 2y \Rightarrow dp = 2ydy \Rightarrow p = y^2 + C_1.$$

Оскільки $y' = p(y)$, то маємо таке рівняння першого порядку: $y' = y^2 + C_1$. Після відокремлювання змінних та інтегрування отриманого рівняння, знайдемо загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + C_1} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \int dx.$$

В залежності від значення константи C_1, останнє рівняння має такий розв'язок: якщо константа C_1 додатна, розв'язком є

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}} arctg \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2;$$

якщо C_1 дорівнює 0 – ми отримуємо розв'язок

$$-\frac{1}{y} = x + C_2;$$

якщо ж константа C_1 від'ємна розв'язком диференціального рівняння є функція

$$\frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{C_1}}{y + \sqrt{C_1}} \right| = x + C_2.$$

Задача 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам:

а) $y'' - 3y' + 2y = 4x - 2$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

б) $y'' + 4y = -2\sin x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання.

а) Початкове рівняння – це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

має корені $k_1 = 1, k_2 = 2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Оскільки 0 не є коренем характеристичного рівняння, а права частина – багаточлен першого степеня, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = Ax + B.$$

Продиференціюємо останнє співвідношення та підставимо його до початкового рівняння,

$$(y_{ч.н.})' = A,\ (y_{ч.н.})'' = 0,\ -3A + 2Ax + 2B = 4x - 2 \Rightarrow 2Ax + (2B - 3A) = 4x - 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2A = 4, \\ 2B - 3A = -2, \end{cases} \Rightarrow A = 2, B = 2.$$

Отже,

$$y_{ч.н.} = 2x + 2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x + 2,$$

а його похідна

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 2.$$

Для знаходження C_1 і C_2 скористуємось початковими умовами:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^{2\cdot 0} + 2\cdot 0 + 2 = 0, \\ C_1 e^0 + 2C_2 e^{2\cdot 0} + 2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 0, \\ C_1 + 2C_2 + 2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y_{ч.н.} = -3e^x + e^{2x} + 2x + 2.$$

б) Як і в попередньому прикладі, спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' + 4y = 0,$$

характеристичне рівняння якого

$$k^2 + 4 = 0$$

має корені $k_{1,2} = \pm 2i$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{з.о.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння розшукуємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = A\sin x + B\cos x.$$

Продиференціюємо це співвідношення і підставимо його в початкове рівняння. При цьому одержимо

$$(y_{ч.н.})' = A\cos x - B\sin x, \quad (y_{ч.н.})'' = -A\sin x - B\cos x,$$

$$(-A\sin x - B\cos x) + 4(A\sin x + B\cos x) = -2\sin x \Rightarrow 3A\sin x + 3B\cos x = -2\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A = -2, \\ 3B = 0, \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{2}{3}, B = 0.$$

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{2}{3}\sin x.$$

Його похідна

$$(y_{з.н.})' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{2}{3}\cos x.$$

Для знаходження C_1 і C_2 скористуємось початковими умовами

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \dfrac{2}{3}\sin 0 = 1, \\ -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 - \dfrac{2}{3}\cos 0 = -\dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв’язок має вигляд:

$$y_{ч.н.} = \cos 2x - \frac{2}{3}\sin x.$$

9. Ряди

Задача 1. Дослідити на збіжність ряди

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n(2n-1)};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4n}{2n^3 - 4n^2 + 3}.$$

Розв’язання.

а) Для дослідження даного ряду скористаємося ознакою Даламбера

$$u_n = \frac{2^n}{4^n(2n-1)} = \frac{1}{2^n(2n-1)},\ u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(2(n+1)-1)} = \frac{1}{2^{n+1}(2n+1)},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}(2n+1)} \cdot \frac{2^n(2n-1)}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Звідси, оскільки $q<1$, робимо висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{4^n(2n-1)}$ – збіжний.

б) Порівняємо даний ряд з узагальненим гармонійним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

оскільки $p=2>1$, цей ряд є збіжним. Для порівняння цих рядів знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{-4n}{2n^3-4n^2+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n^2+3}{-4n^3}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, згідно з ознакою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4n}{2n^3-4n^2+3}$$

також збігається.

Задача 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{n^3}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)^2}$.

Розв'язання.

а) Даний ряд є знакозмінний. Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin 4n|}{n^3}.$$

Порівняємо цей ряд зі збіжним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ \ (p=3>1).$$

Врахуємо, що

$$\frac{|\sin 4n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$$

і отримаємо, що оскільки ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, є збіжним відповідно з ознакою порівняння, то заданий ряд є абсолютно збіжним.

б) Даний ряд є знакопереміжний, дослідимо його збіжність за ознакою Лейбниця:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(4n-1)^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0,$

2) $u_1 = \frac{1}{9} > u_2 = \frac{1}{49} > u_3 = \frac{1}{121} > \ldots$.

Оскільки обидві умови теореми виконуються, то досліджуваний ряд є збіжним. З'ясуємо, як він збігається: умовно чи абсолютно. Для цього складемо ряд із абсолютних величин членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2}$$

і дослідимо його збіжність за допомогою ознаки порівняння з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Маємо

$$u_n = \frac{1}{(4n-1)^2} < v_n = \frac{1}{n^2},$$

оскільки $(4n-1)^2 > n^2$.

Таким чином, згідно з ознакою порівняння, оскільки ряд v_n з більшими членами збігається ($p = 2 > 1$), то і ряд u_n з меншими членами ряду також збігається. І тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)^2}$ збігається абсолютно.

Задача 3. Знайти область збіжності степеневого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n(4n+1)}.$$

Розв’язання.

$$a_n=\frac{1}{2^n(4n+1)},\, a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}(4n+5)}.$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(4n+5)}{2^n(4n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(4n+5)}{(4n+1)}\right|=2,$$

тобто цей ряд є абсолютно збіжним на інтервалі (-2-R,-2+R)=(-4,0). Дослідимо збіжність на межах інтервалу.

При $x=-4$ одержимо знакопереміжний ряд вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n(4n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)}.$$

Дослідимо його збіжність за ознакою Лейбниця:

1) $u_1=\dfrac{1}{5}>u_2=\dfrac{1}{9}>u_3=\dfrac{1}{13}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(4n+1)}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0.$

Оскільки умови теореми Лейбниця виконуються, то досліджуваний ряд є збіжним, тобто $x=-4$ належить області збіжності ряду.

Аналогічно перевіряємо другу межу інтервалу $x=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(4n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)}.$$

Щоб з’ясувати характер поведінки ряду скористаємось ознакою порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд зі сталим множником

$$\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Для порівняння рядів порівняємо їх загальні члени:

$$u_n = \frac{1}{4n+1} > v_n = \frac{1}{5n},$$

оскільки $4n+1<5n$.

Таким чином, згідно з ознакою порівняння, оскільки ряд v_n з меншими членами розбігається, то і ряд u_n з більшими членами ряду також розбігається. Отже, робимо висновок, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)}$$

розбігається, тобто $x=0$ не належить області збіжності ряду.

Відповідь: область збіжності ряду $[-4,0)$.

10. Теорія ймовірностей

Задача 1. Ящик з 30 однаковими виробами містить 9 бракованих. Випадково відібрані 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них рівно 2 бракованих.

Розв'язання.

Загальне число можливих елементарних випадків дорівнює числу способів, якими можна вибрати 6 виробів з 30, тобто дорівнює C_{30}^{6} - числу комбінацій з 30 елементів по 6.

Число випадків, що сприяють появі події: серед 6 виробів рівно 2 бракованих; причому 2 бракованих виробів можна вибрати з 9 бракованих виробів C_9^2 способами; при цьому інші 6-2=4 виробів повинні бути не бракованими, які вибираються з загальної кількості 30-9=21 не бракованих виробів C_{21}^4 способами. Отже, число сприятливих випадків дорівнює $C_9^2\cdot C_{21}^4$.

Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа випадків, сприятливих появі події, до числа всіх елементарних випадків:

$$P=\frac{C_9^2\cdot C_{21}^4}{C_{30}^6}=\frac{\dfrac{9!}{2!(9-2)!}\cdot\dfrac{21!}{4!(21-4)!}}{\dfrac{30!}{6!(30-6)!}}=\frac{9!\cdot 21!\cdot 6!\cdot 24!}{2!\cdot 7!\cdot 4!\cdot 17!\cdot 30!}.$$

Враховуючи, що

$$9! = 7! \cdot 8 \cdot 9;\ 21! = 17! \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21;\ 6! = 4! \cdot 5 \cdot 6;\ 30! = 24! \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30,$$

маємо

$$P = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17! \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 24!}{2! \cdot 7! \cdot 4! \cdot 17! \cdot 24! \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} =$$

$$= \frac{2 \cdot 18 \cdot 19}{5 \cdot 13 \cdot 29} = \frac{684}{1885} \approx 0{,}36.$$

Задача 2. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатора. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює дорівнює $P_1 = 0{,}8$ – для першого сигналізатора і $P_2 = 0{,}9$ – для другого. Знайти ймовірність, що при аварії:

а) спрацюють обидва сигналізатори;

б) не спрацює жоден;

в) спрацює тільки один сигналізатор;

г) спрацює хоча б один сигналізатор.

Розв'язання.

Позначимо події:

A – спрацює перший сигналізатор;

$\overline{A}$ – перший сигналізатор не спрацює;

B – спрацює другий сигналізатор;

$\overline{B}$ – другий сигналізатор не спрацює.

Тоді

$$P(A) = 0{,}8;\ P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;\ P(B) = 0{,}9;\ P(\overline{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

а) Подія AB полягає в тому, що спрацювали обидва сигналізатори. Оскільки, події A та B незалежні за умовою задачі, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72.$$

б) Подія $\overline{A}\overline{B}$ полягає в не спрацьовуванні обох сигналізаторів. Оскільки події $\overline{A}$ та $\overline{B}$ також незалежні, то

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02.$$

в) Подія $A\overline{B} + \overline{A}B$ полягає в тому, що мало місце спрацьовування тільки одного сигналізатора, або першого, або другого, причому інший сигналізатор не спрацював. Події $A\overline{B}$ і $\overline{A}B$ несумісні, тому за теоремою суми двох несумісних подій маємо

$$P\left(A\overline{B}+\overline{A}B\right)=P\left(A\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}B\right).$$

Події A і $\overline{B}$, а також $\overline{A}$ і B незалежні, отже,

$$P\left(A\overline{B}\right)=P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)=0{,}8\cdot 0{,}1=0{,}08;$$
$$P\left(\overline{A}B\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}18;$$
$$P\left(A\overline{B}+\overline{A}B\right)=0{,}08+0{,}18=0{,}26.$$

г) Нехай P – ймовірність того, що має місце хоча б одне спрацювання. Ця подія є протилежною події $\overline{A}\overline{B}$ – не спрацював жодний сигналізатор. Тоді, маємо

$$P=1-P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=1-0{,}02=0{,}98.$$

Задача 3. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох контролерів. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого контролера, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Ймовірність того, що виріб буде визнано стандартним першим контролером, дорівнює 0,9, а другим – 0,98.

Знайти ймовірність того, що:

а) виріб, що надійшов на перевірку, буде визнано стандартним;

б) виріб перевірив другий контролер, якщо його визнано стандартним.

Розв'язання.

Позначимо події:

A – виріб при перевірці визнано стандартним;

B_1 – виріб перевірив перший контролер;

B_2 – виріб перевірив другий контролер.

Події B_1 і B_2 несумісні і утворюють повну групу ($P(B_1)+P(B_2)=1$). Кожна з цих подій призводить до появи події A.

а) Для знаходження ймовірності події A застосуємо формулу повної ймовірності. Умовна ймовірність того, що виріб буде визнано стандартним за умови перевірки його першим контролером $P_{B_1}(A)=0{,}9$. Для другого контролера умовна ймовірність $P_{B_2}(A)=0{,}98$. Ймовірності $P(B_1)$ та $P(B_2)$ того, що виріб потрапить до першого та другого контролерів дорівнюють відповідно 0,55 та 0,45. Таким чином маємо:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_1}(A)=0{,}55\cdot 0{,}95+0{,}45\cdot 0{,}98=0{,}495+0{,}441=0{,}936.$$

б) За умовою задачі необхідно знайти умовну ймовірність $P_A(B_2)$ того, що виріб визнаний стандартним другим контролером. Згідно з формулою Бейєса маємо

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,45\cdot 0,98}{0,936}\approx 0,471.$$

Задача 4. Ймовірність того, що навмання взятий виріб нестандартний, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед взятих п'яти виробів виявиться:

а) два нестандартних;

б) не більше двох нестандартних.

Розв'язання.

За умовою

$$n=5;\quad k=2;\quad p=0,1;\quad q=1-p=1-0,1=0,9.$$

а) Скористаємось формулою Бернуллі

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

$$P_5(2)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot(0,1)^2\cdot(0,9)^3=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 0,01\cdot 0,729=0,0729.$$

б) Подія A – не більше двох нестандартних виробів, є сумою трьох несумісних подій: жодного нестандартного, одне стандартне і два нестандартних. Тому

$$P(A)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2).$$

$$P_5(0)=(0,9)^5=0,59049;$$

$$P_5(1)=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot 0,1\cdot(0,9)^4=0,32805;$$

$$P_5(2)=0,0729 \text{ (знайдено вище).}$$

Таким чином,

$$P(A)=0,59049+0,32805+0,0729=0,99144.$$

Задача 5. При виготовленні виробів брак складає 5%. Скласти закон розподілу числа бракованих виробів з 6-ти взятих навмання. Знайти M(X), D(X) і побудувати графік інтегральної функції розподілу.

Розв'язання.

Випадкова величина X – число бракованих виробів – може приймати значення: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Відповідні ймовірності обчислимо за формулою Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

За умовою задачі $n = 6$; $p = 0{,}05$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.
Маємо:

$$P_6(0) = C_6^0 q^6 = (0{,}95)^6 \approx 0{,}7351;$$
$$P_6(1) = C_6^1 pq^5 = 6 \cdot 0{,}05 \cdot (0{,}95)^5 \approx 0{,}2321;$$
$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = 15 \cdot (0{,}05)^2 \cdot (0{,}95)^4 \approx 0{,}0305;$$
$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = 20 \cdot (0{,}05)^3 \cdot (0{,}95)^3 \approx 0{,}0022;$$
$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = 15 \cdot (0{,}05)^4 \cdot (0{,}95)^2 \approx 0{,}0001;$$
$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q = 6 \cdot (0{,}05)^5 \cdot 0{,}95 \approx 0;$$
$$P_6(6) = C_6^6 p^6 = (0{,}05)^6 \approx 0.$$

Отриманий закон розподілу є біноміальним і має вигляд

x	0	1	2	3	4	5	6
p	0,7351	0,2321	0,0305	0,0022	0,0001	0	0

Перевіримо виконання умови

$$\sum_{i=1}^{7} p_i = 1.$$
$$0{,}7351 + 0{,}2321 + 0{,}0305 + 0{,}0022 + 0{,}0001 + 0 + 0 = 1.$$

Таким чином закон розподілу знайдено вірно.
Математичне сподівання та дисперсія біноміального розподілу знаходяться за формулами

$$M(x) = np;$$
$$D(x) = npq.$$

Отже, маємо:

$$M(x) = 6 \cdot 0{,}05 = 0{,}3;$$
$$D(x) = 6 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}285.$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу. Оскільки вона знаходиться для дискретного закону розподілу за формулою

$$F(x) = P(x < X),$$

то маємо:

1. В інтервалі $x \le 0$ $F(x) = 0$;
2. В інтервалі $0 < x \le 1$ $F(x) = 0{,}7351$;
3. В інтервалі $1 < x \le 2$ $F(x) = 0{,}7351 + 0{,}2321 = 0{,}9672$;
4. В інтервалі $2 < x \le 3$ $F(x) = 0{,}7351 + 0{,}2321 + 0{,}0305 = 0{,}9977$;
5. В інтервалі $3 < x \le 4$ $F(x) = 0{,}7351 + 0{,}2321 + 0{,}0305 + 0{,}0022 = 0{,}9999$;
6. В інтервалі $4 < x \le 5$
   $$F(x) = 0{,}7351 + 0{,}2321 + 0{,}0305 + 0{,}0022 + 0{,}0001 = 1;$$
7. В інтервалі $5 < x \le 6$
   $$F(x) = 0{,}7351 + 0{,}2321 + 0{,}0305 + 0{,}0022 + 0{,}0001 + 0 = 1;$$
8. В інтервалі $x > 6$
   $$F(x) = 0{,}7351 + 0{,}2321 + 0{,}0305 + 0{,}0022 + 0{,}0001 + 0 + 0 = 1.$$

Таким чином, інтегральна функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}7351, & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}9672, & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}9977, & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}9999, & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{при} \quad 4 < x \le 5, \\ 1, & \text{при} \quad 5 < x \le 6, \\ 1, & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

Побудуємо графік інтегральної функції розподілу

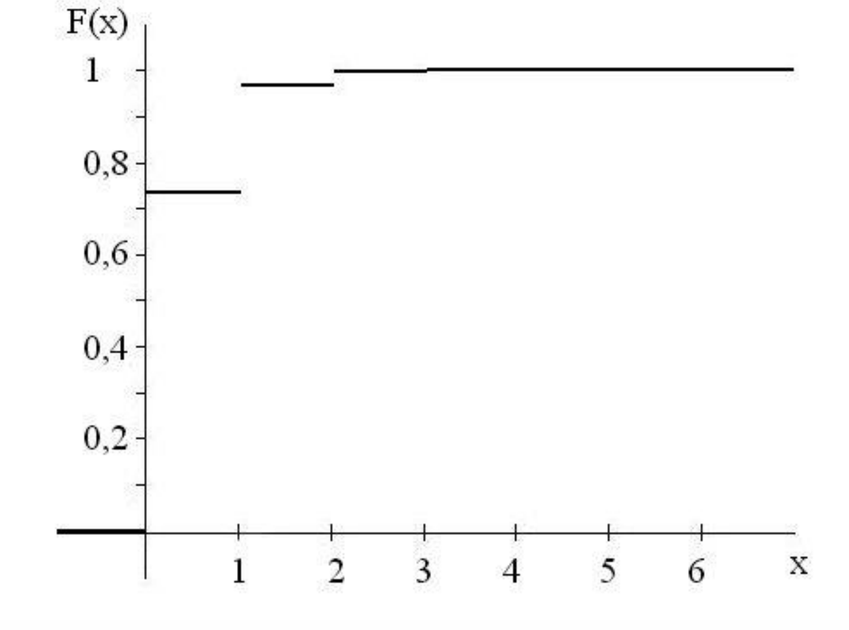

Рис. 27. Інтегральна функція розподілу

Задача 6. Дано інтегральну функцію розподілу випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 2, \\ \frac{1}{2}x-1, & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 1, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, $M(x)$, $D(x)$. Побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язання.

Знайдемо диференціальну функцію (щільність розподілу) неперервної випадкової величини:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 0, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання неперервної випадкової величини заданою на інтервалі за формулою

$$M(x)=\int_a^b xf(x)dx .$$

Маємо

$$M(x)=\int_2^4 xf(x)dx=\int_2^4 \frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_2^3=\frac{1}{4}(4^2-2^2)=3.$$

Дисперсію шукаємо за формулою

$$D(x)=M(x^2)-[M(x)]^2.$$

Оскільки

$$M(x^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_2^4 x^2\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_2^4=\frac{1}{6}(4^3-2^3)=\frac{28}{3},$$

то

$$D(x)=\frac{28}{3}-3^2=\frac{1}{3}.$$

Побудуємо графіки інтегральної функції розподілу $F(x)$ та щільності розподілу $f(x)$.

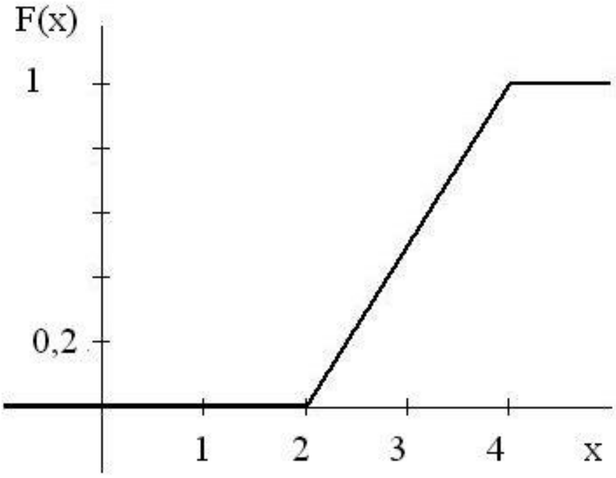

Рис. 28. Інтегральна функція розподілу

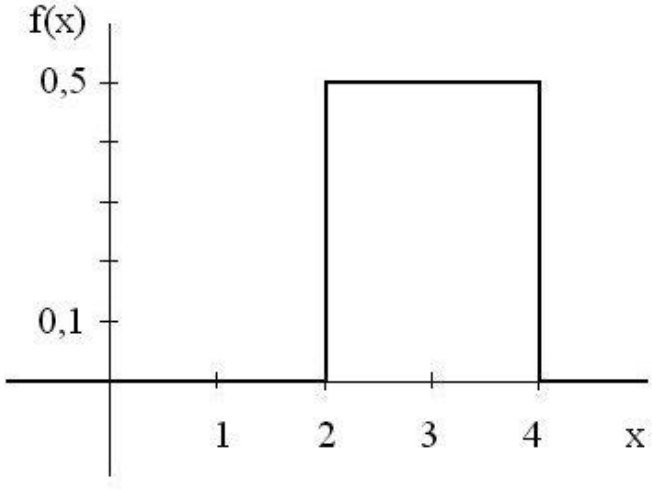

Рис. 29. Щільність розподілу

Задача 7. Автомат виготовляє деталі. Контролюється довжина деталі, яка є випадковою величиною X, що розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням (проектна довжина) $a = 140$ мм і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 16$ мм. Визначити ймовірність того, що довжина взятої випадковим чином деталі:

а) знаходиться в межах від $x_1 = 124$ мм до $x_2 = 148$ мм;

б) відхиляється від середньої довжини $a = 140$ мм не більше, ніж на $\delta = \pm 8$ мм.

Розв'язання.

а) Ймовірність того, що довжина взятої деталі знаходиться в інтервалі (124; 148) знайдемо за формулою

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Таким чином,

$$P(124 < x < 148) = \Phi\left(\frac{148 - 140}{16}\right) - \Phi\left(\frac{124 - 140}{16}\right) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(0{,}5) + \Phi(1) = 0{,}1915 + 0{,}3413 = 0{,}5328.$$

Значення функції $\Phi(x)$ знаходимо за таблицею значень функції Лапласа (додаток), причому, враховано непарність функції $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

б) Ймовірність того, що довжина взятої деталі відхиляється від a не більше, ніж на δ, знайдемо за формулою:

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

За умовою задачі $\delta=8$, $\sigma=16$. Отже, маємо:

$$P(|x-140|<\delta)=2\Phi\left(\frac{8}{16}\right)=2\Phi(0.5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383.$$

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	2637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2732	2943	2920
0,8	2887	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2492	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2546	2251	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2012	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	1781	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1561	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1354	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1163	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	3980	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043

Продовження таблиці значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
8,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,19	0,0753	0,38	0,1480	0,57	0,2157
0,01	0,0040	0,20	0,0793	0,39	0,1517	0,58	0,2190
0,02	0,0080	0,21	0,0832	0,40	0,1554	0,59	0,2224
0,03	0,0120	0,22	0,0871	0,41	0,1591	0,60	0,2257
0,04	0,0160	0,23	0,0910	0,42	0,1628	0,61	0,2291
0,05	0,0199	0,24	0,0948	0,43	0,1664	0,62	0,2324
0,06	0,0239	0,25	0,0987	0,44	0,1700	0,63	0,2357
0,07	0,0279	0,26	0,1026	0,45	0,1736	0,64	0,2389
0,08	0,0319	0,27	0,1064	0.46	0,1772	0,65	0,2422
0,09	0,0359	0.28	0,1103	0,47	0,1808	0,66	0,2454
0,10	0,0398	0,29	0,1141	0,48	0,1844	0,67	0,2486
0,11	0,0438	0,30	0,1179	0,49	0.1879	0,68	0,2517
0,12	0,0478	0.31	0,1217	0,50	0,1915	0,69	0,2549
0,13	0,0517	0,32	0,1255	0,51	0,1950	0,70	0,2580
0,14	0,0557	0,33	0,1293	0,52	0,1985	0,71	0,2611
0,15	0,0596	0,34	0,1331	0,53	0,2019	0,72	0,2642
0,16	0,0636	0,35	0,1368	0,54	0,2054	0,73	0,2673
0,17	0,0675	0,36	0,1406	0,55	0,2088	0,74	0,2703
0,18	0,0714	0,37	0,1443	0,56	0,2123	0,75	0,2734

Продовження таблиці значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,76	0,2764	1,14	0,3729	1,52	0,4357	1,90	0,4713
0,77	0,2794	1,15	0,3749	1,53	0,4370	1,91	0,4719
0,78	0,2823	1,16	0.3770	1,54	0,4382	1,92	0,4726
0,79	0,2852	1,17	0,3790	1,55	0,4394	1,93	0,4732
0,80	0,2881	1,18	0,3810	1,56	0,4406	1,94	0.4738
0,81	0,2910	1,19	0,3830	1,57	0,4418	1,95	0,4744
0,82	0,2939	1,20	0,3849	1,58	0,4429	1,96	0,4750
0.83	0,2967	1,21	0,3869	1,59	0,4441	1,97	0,4756
0,84	0,2995	1,22	0,3883	1,60	0,4452	1,98	0,4761
0,85	0,3023	1,23	0,3907	1,61	0,4463	1,99	0,4767
0,86	0,3051	1,24	0,3925	1,62	0,4474	2,00	0,4772
0,87	0,3078	1,25	0,3944	1,63	0,4484	2,02	0,4783
0,88	0,3106	1,26	0,3962	1,64	0,4495	2,04	0,4793
0,89	0,3133	1,27	0,3980	1,65	0,4505	2,06	0,4803
0,90	0.3159	1,28	0,3997	1,66	0,4515	2,08	0,4812
0,91	0,3186	1,29	0,4015	1,67	0,4525	2,10	0,4821
0,92	0,3212	1,30	0,4032	1,68	0,4535	2,12	0,4830
0,93	0,3238	1,31	0,4049	1,69	0,4545	2,14	0,4838
0,94	0,3264	1,32	0,4066	1,70	0,4554	2,16	0,4846
0,95	0,3289	1,33	0,4082	1,71	0,4564	2,18	0,4854
0,96	0,3315	1,34	0,4099	1,72	0,4573	2,20	0,4861
0,97	0,3340	1,35	0,4115	1,73	0,4582	2,22	0,4868
0,98	0,3365	1,36	0,4131	1,74	0,4591	2,24	0,4875
0,99	0,3389	1,37	0,4147	1,75	0,4599	2,26	0,4881
1,00	0,3413	1,38	0,4162	1,76	0,4608	2,28	0,4887
1,01	0,3438	1,39	0,4177	1,77	0,4616	2,30	0,4893
1,02	0,3461	1,40	0,4192	1,78	0,4625	2,32	0,4898
1,03	0,3486	1,41	0,4207	1,79	0,4633	2,34	0,4904
1,04	0,3508	1,42	0,4222	1,80	0,4641	2,36	0,4909
1,05	0,3531	1,43	0,4236	1,81	0,4649	2,38	0,4913
1,06	0,3554	1,44	0,4251	1,82	0,4656	2,40	0,4918
1,07	0,3577	1,45	0,4265	1,83	0,4664	2,42	0,4922
1,08	0,3599	1,46	0,4279	1,84	0,4671	2,44	0,4927
1,09	0,3621	1,47	0,4292	1,85	0,4678	2,46	0,4931
1,10	0,3643	1,48	0,4306	1,86	0,4686	2,48	0,4934
1,11	0,3665	1,49	0,4319	1,87	0,4693	2,50	0,4938
1,12	0,3686	1,50	0,4332	1,88	0,4699	2,52	0,4941
1,13	0,3708	1,51	0,4345	1,89	0,4706	2,54	0,4945

Продовження таблиці значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,56	0,4948	2,72	0,4967	2,88	0,4980	3,40	0,49966
2,58	0,4951	2,74	0,4969	2,90	0.4981	3,60	0,499841
2,60	0,4953	2,76	0,4971	2,92	0,4982	3,80	0,499928
2,62	0,4956	2,78	0,4973	2,94	0,4984	4,00	0,499968
2,64	0,4959	2,80	0,4974	2,96	0,4985	4,50	0,499997
2,66	0,4961	2,82	0,4976	2,98	0,4986	5,00	0,499997
2,68	0,4963	2,84	0,4977	3,00	0,49865	>5,00	0,500000
2,70	0,4965	2,86	0,4979	3,20	0,49931		

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища та прикладна математика. Індивідуальні завдання: навчальний посібник / Д. О. Торяник.: – Х.: ХДУХТ, 2017. – 110 с.
2. Вища та прикладна математика: навчальний посібник / Д. О. Торяник, М. С. Синєкоп та ін.: – Х.: ХДУХТ, 2014. – 330 с.
3. Вища математика: розв’язання задач та варіанти типових розрахунків: навчальний посібник / В. Г. Гула, О. П. Корж, М. С. Синєкоп та ін.: – Х.: ХДУХТ, 2010. – 351 с.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович : – М.: АСТ, Астрель, 2005.
5. Вища математика: вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних: навчальний посібник / В. В. Полевич, Л. О. Пархоменко: – Х.: ХДУХТ, 2010.
6. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М.: Физматлит, 2006. – 336с.
6. Вища математика: навчальний посібник для самостійного вивчання курсів / В. Г. Гула, М. С. Синєкоп та ін.: – Х.: ХДУХТ, 2007.
7. Данко Е.П. Высшая математика в упражнениях и задачах / Е. П. Данко , А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова: – М.: Оникс-21 век, 2008.
8. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Д. С. Кузнецова, Е. И. Шилкина и др. – Мн.: Высш. шк, 2001.
9. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский – М.: Дрофа, 2004. – 288с.
10. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский – М.: Дрофа, 2004. – 512с.
11. Романовский П. И. Общий курс математического анализа в сжатом изложении / П. И. Романовский – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1996. – 332 с.
12. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2014. – 479 с.
13. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 406 с.
14. Методичні вказівки для організації самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика» за темою «Геометричні й фізичні додатки визначеного інтегралу» для студентів інженерних спеціальностей / Укладачі: Н. Я. Голубєва, В. В. Полевич, Д. О. Торяник: – Х.: ХДАТОХ, 2003.

15. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу «Математика для економістів». Розділ: «Криві другого порядку» / Укладачі: А. О. Півненко, М. С. Синєкоп: – Х.: ХДАТОХ, 2002.

16. Методичні вказівки для організації самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з курсу «Вища математика». Тема : «Наближені методи розв’язання диференціальних рівнянь в частинних похідних» для спеціальності «Обладнання харчових виробництв» / Укладачі: Л. К. Кравченко, А. О. Півненко, М. С. Синкоп: – Х.: ХДУХТ, 2004.

17. Методичні вказівки з самостійної роботи студентів. Модуль №1: «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична Геометрія». Тематичні тести / Укладачі: Л. К. Кравченко, Н. Я. Голубєва, Д. О. Торяник: – Х.: ХДУХТ, 2008.

18. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика». Модуль №2: «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функцій однієї змінної та його застосування». Тестові завдання. Укладачі: Л. К. Кравченко, Н. Я. Голубєва, Д. О. Торяник: – Х.: ХДУХТ, 2009.

19. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика». Модуль №3: «Диференціальне числення функцій двох змінних». «Інтегрування функції однієї змінної». Тематичні тести. Укладачі: Л. К. Кравченко, Н. Я. Голубєва, Д. О. Торяник: – Х.: ХДУХТ, 2009.

20. Методичні вказівки: тематичні індивідуальні завдання та приклади розв’язання типових завдань з курсу «Вища математика». Укладачі: О. І. Радченко, В. Г. Гула: – Х.: ХДУХТ, 2009.

21. Методичні вказівки для організації самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з курсу «Вища та прикладна математика». Напрям підготовки 6.030510 Товарознавство і торговельне підприємництво / Укладачі: Д. О. Торяник, Н. В. Бойко: – Х.: ХДУХТ, 2011.

22. Вища математика. Тести до модульного контролю: навчальний посібник / М. С. Синєкоп, М. М. Вермійчук: – Х.: ХДУХТ, 2012. – 163 с.

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

ТОРЯНИК Дмитро Олександрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних
та інженерно-технічних дисциплін проф. М. І. Погожих
Видано в авторській редакції

План 2019 р., поз. 86

Підп. до друку 05.06.2019 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об'єм даних 5,46 Мб. Тираж 20 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.