

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Харківський державний університет харчування та торгівлі

Д. О. Торяник, М. С. Софронова

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**  
**Деякі розділи математичного аналізу**

Навчальний посібник

Харків  
ХДУХТ  
2021

УДК 517(075.8)  
ББК 22.11я7  
Т61

Рецензенти:

д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій  
Харківського торговельно-економічного інституту Київського національного  
торговельно-економічного університету М. С. Синєкоп,  
д-р техн. наук, професор, проф. кафедри енергетичного машинобудування,  
інженерних та фізико-математичних дисциплін Харківського державного  
університету харчування та торгівлі М. І. Погожих

Рекомендовано до видання вченою радою ХДУХТ  
протокол № 9 від 18.02.2021 р.

**Торяник Д. О.** Вища математика. Деякі розділи математичного аналізу  
Т61 [Електронний ресурс] : навч. посібник / Д. О. Торяник, М. С. Софронова.  
– Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2021. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM);  
12 см. – Назва з тит. екрана.

ISBN

Навчальний посібник з курсу «Вища математика» містить стислий виклад розділів, необхідних для вивчення дисциплін технічних спеціальностей. Це кратні та поверхневі інтеграли, елементи теорії функції комплексної змінної, операційне числення тощо. У посібнику до кожного розділу наведено типові приклади та завдання для самостійної роботи.

Призначено для студентів інженерних та технологічних спеціальностей закладів вищої освіти.

УДК 517(075.8)  
ББК 22.11я7

© Торяник Д. О., Софронова М. С., 2021  
© Харківський державний університет  
харчування та торгівлі, 2021

ISBN

## ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник для вивчення курсу „Вища математика” розрахован для студентів технічних спеціальностей та має за мету формування у студентів знань, умінь та практичних навичок засвоєння програмного матеріалу.

Посібник складається з 12 тематичних розділів. У першому розділі надано означення та розглянуто питання обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат. Наведено формули заміни змінних у подвійному інтегралі і приклади його обчислення у полярній системі координат. Розглянуто застосування подвійного інтеграла в геометрії, механіці та фізиці. У другому розділі аналогічні питання розглядаються для потрійного інтеграла. Зокрема, наводяться формули для обчислення потрійного інтеграла в циліндричних і сферичних координатах. У третьому розділі надано означення та розглянуто питання обчислення криволінійних інтегралів по довжині дуги (першого роду). Наведено формули і приклади застосування цих інтегралів для визначення довжини дуги, маси матеріальної дуги, статистичних моментів плоскої дуги тощо. У четвертому розділі розглядаються означення, основні формули і приклади застосування криволінійних інтегралів другого роду. Зокрема, наведено формулу Гріна, умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування, а також формулу знаходження функції за її повним диференціалом. У п'ятому і шостому розділах розглядаються поверхневі інтеграли першого і другого роду відповідно. В цих розділах розглядаються означення, формули обчислення та застосування таких інтегралів. Зокрема, для поверхневих інтегралів другого роду наведено формули Гаусса-Остроградського та Стокса. У сьомому розділі розглядаються скалярні і векторні поля. Вводяться поняття похідної за напрямком, градієнта функції, потоку векторного поля через поверхню, дивергенції, циркуляції та ротору векторного поля, а також взаємозалежності між ними. Розглянуто приклади обчислення цих величин. У восьмому розділі нагадуються означення, властивості комплексних чисел та дій над ними. Вводяться поняття границі послідовності комплексних чисел. Розглядаються основні елементарні функції комплексної змінної, їх властивості, поняття границі і умови неперервності функції комплексної змінної. У дев'ятому розділі розглядаються поняття аналітичної функції. Тут, по-перше, дається означення похідної і диференціал функції комплексної змінної, випливає умова Коші-Рімана та встановлюється зв'язок аналітичних функцій з гармонічними. По-друге, вводиться поняття інтеграла від функції комплексної змінної і, зокрема, невизначеного інтеграла. Розглядаються умови незалежності інтеграла від шляху інтегрування. По-третє, розглядаються теореми Коші для похідних аналітичних функцій. Далі розглядаються питання розвинення

аналітичних функцій у ряди Тейлора і Лорана, вводиться поняття лишків і приводяться формули їх використання для обчислення інтегралів. У десятому розділі розглядається операційне числення. На ґрунті властивостей початкових функцій і їх зображень будується таблиця відповідності основних елементарних функцій і їх зображень. Наводяться приклади розв'язання диференціальних рівнянь методами операційного числення. У одинадцятому розділі розглядаються ряди Фур'є. Наведено розвинення різних функцій у ряди Фур'є, формули обчислення коефіцієнтів ряду і розглянуто властивості ряду Фур'є від періодичності функції. Також розглянуто ряди Фур'є у комплексній формі, формули обчислення коефіцієнтів таких рядів і приклади розвинення функцій у ряд Фур'є у комплексній формі. У дванадцятому розділі розглянуто деякі рівняння математичної фізики. Звернуто увагу на задачі, які мають аналітичну формулу розв'язку і використовуються в практиці інженерних розрахунків. Це рівняння коливальних, розповсюдження тепла та інші. До кожного розділу наведено типові приклади з детальними розв'язаннями, розгляд яких сприятиме засвоєнню теоретичного матеріалу, надбанню та засвоєнню навичок самостійної роботи. Пропонуються також завдання для самостійної роботи. Як правило, для розв'язання запропонованих задач використовуються всі підходи, які розглянуто в теоретичній частині. Пошук розв'язку зробить працю результативною, а ґрунтовні обмірковування стануть дійовим фактором у процесі самостійного вивчення курсу.

Запропонований посібник, на думку авторів, повинен сприяти більш глибокому розумінню основ вищої математики, надбанню досвіду використання математичних методів у моделюванні технологічних та інженерних процесів, їх аналізу, створить передумови для налагодження міждисциплінарних зв'язків (зі спеціальними дисциплінами).

## РОЗДІЛ 1. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

### Означення подвійного інтеграла та його обчислення в прямокутній системі координат

Нехай функція  $z = f(P) = f(x, y)$  задана в обмеженій замкненій області  $D$  площини  $xOy$ . Розіб'ємо цю область довільно на  $n$  клітин  $S_1, S_2, \dots, S_n$  так, щоб вони не мали загальних внутрішніх точок (рис. 1.1) і площі яких відповідно дорівнювали б  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ .

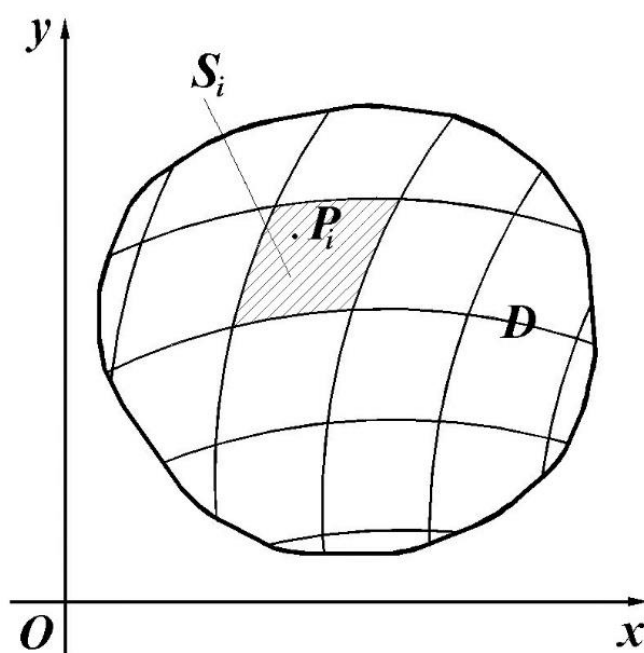


Рисунок 1.1 – Розбиття замкненої області  $D$

В кожній з клітин  $S_i, i = \overline{1, n}$ , візьмемо довільну точку  $P_i(x_i, y_i)$ . Матимемо  $n$  точок  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Обчислимо  $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ , значення заданої функції у цих точках і утворимо суму добутків виду  $f(P_i)\Delta S_i$ :

$$f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \dots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i.$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .

Якщо  $f(P) > 0$  в області  $D$ , то кожний доданок  $f(P_i)\Delta S_i$  цієї суми можна геометрично представити як об'єм циліндричного тіла, площа основи якого дорівнює  $\Delta S_i$ , а висота  $f(P_i)$ . Позначимо через  $\lambda_i$  діаметр клітини  $S_i$  (інакше –

відстань між її двома найбільш віддаленими точками), а через  $\lambda = \max \lambda_i$  – найбільший з діаметрів цих клітин даного розбиття.

**Означення.** Подвійним інтегралом від функції  $f(P)$  по області  $D$  називається скінчена границя інтегральних сум  $\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i$  за умови, що  $\lambda \rightarrow 0$ ,

тобто  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i$  яка не залежить ні від способу розбиття області  $D$  на клітини, ні від вибору точок  $P_i \in S_i, i = \overline{1, n}$ .

Подвійний інтеграл позначається  $\iint_D f(P)dS, \iint_D f(x, y)dS$ .

Отже, за означенням:  $\iint_D f(P)dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i$ .

Умова  $\lambda \rightarrow 0$  означає, що  $n \rightarrow \infty$ . Якщо така границя існує, то функція  $f(P)$  називається інтегрованою в області  $D$ . Будь-яка неперервна в обмеженій замкненій області  $D$  функція  $f(P)$  інтегрована в ній. Далі будемо розглядати лише неперервні функції.

Для подвійного інтеграла виконуються найпростіші властивості лінійності і адитивності, тобто

1)  $f(P) = C_1 f_1(P) + C_2 f_2(P)$ , де  $C_1$  і  $C_2$  – числа  $\Rightarrow$

$$\iint_D f(P)dS = C_1 \iint_D f_1(P)dS + C_2 \iint_D f_2(P)dS;$$

2) область  $D$  складається з двох областей  $D_1$  і  $D_2$  ( $D = D_1 \cup D_2$ )  $\Rightarrow$

$$\iint_D f(P)dS = \iint_{D_1} f(P)dS + \iint_{D_2} f(P)dS.$$

В декартових координатах елемент площі  $dS$  записується у вигляді  $dS = dxdy$ , а подвійний інтеграл позначається

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до повторного обчислення двох визначених інтегралів.

Припустимо, що область інтегрування  $D$  перетинається будь-якою прямою, що паралельна вісі  $Oy$ , не більше ніж в двох точках. Така область називається правильною або простою в напрямі вісі  $Ox$ . Нехай на межі області  $l$  найлівіша точка  $A$ , а найправіша –  $B$ . Позначимо їх абсиси через  $a$  і  $b$ . Точки  $A$  і  $B$  ділять контур  $l$  на нижню частину  $ACB$ , рівняння якої  $y = y_1(x)$  і верхню частину  $ADB$ , рівняння якої  $y = y_2(x)$  (рис. 1.2).

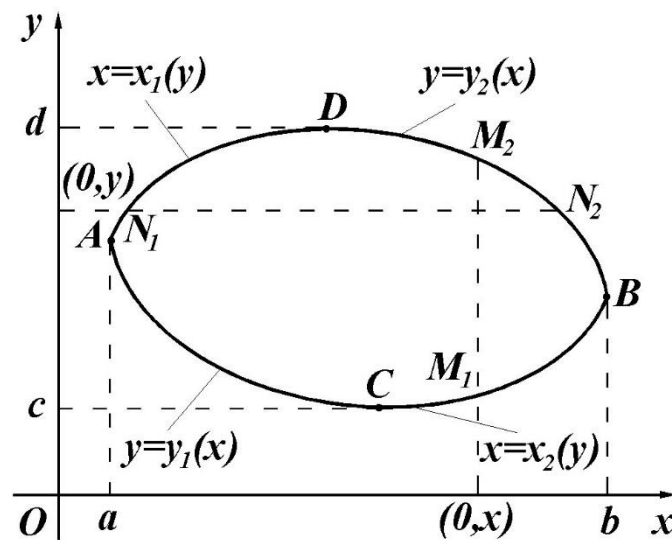


Рисунок 1.2 – Правильна область  $D$

В цьому випадку, якщо функція  $f(x, y)$  інтегрована в області  $D$  і  $\forall x \in [a, b]$  існує інтеграл  $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ , то подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.1)$$

Припустимо тепер, що область правильна в напрямі осі  $Oy$ . Позначимо проекцію області на вісь  $Oy$  через  $[c, d]$ . Нехай  $x = x_1(y)$  є рівняння лівої частини  $CAD$  контура  $l$ , а  $x = x_2(y)$  – рівняння правої частини  $CBD$  (рис. 1.2). Якщо функція  $f(x, y)$  інтегрована в області  $D$  і  $\forall y \in [c, d]$  існує інтеграл  $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ , то подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (1.2)$$

Інтеграл, що стоїть справа у формулах (1.1) і (1.2) називається повторним або двократним. Якщо область інтегрування є неправильною, то її можна розбити на правильні підобласті і, використовуючи властивість адитивності, обчислити інтеграл по кожній з них.

При обчисленні подвійного інтеграла важливо вірно розставити межі інтегрування, при цьому слід дотримуватись такої схеми.

1. Область  $D$  проектується на одну з вісей, наприклад  $Ox$ . Цим визначається відрізок  $[a, b]: a \leq x \leq b$  (рис. 1.2). Числа  $a$  і  $b$  будуть відповідно нижньою і верхньою межами у зовнішньому інтегралі в формулі (1.1), тобто у зовнішньому інтегралі межі завжди є сталими величинами.

2. Для знаходження меж інтегрування у внутрішньому інтегралі через будь-яку точку  $(x, 0) \in [a, b]$  проведемо пряму, що паралельна вісі  $Oy$ . Ця пряма перетне межу області  $D$  в точках  $M_1$  і  $M_2$ . Для знаходження координат точки входу  $M_1$  і виходу  $M_2$  необхідно розв'язати рівняння нижньої  $ACB$  і верхньої  $ADB$  ділянок межі області  $D$  відносно  $y$ :  $y = y_1(x)$  і  $y = y_2(x)$ . При цьому функції  $y = y_1(x)$  і  $y = y_2(x)$  на відрізку  $[a, b]$  неперервні, однозначні і зберігають аналітичний вираз.

Аналогічно визначаються межі інтегрування в повторному інтегралі (1.2), коли область інтегрування  $D$  проектується на вісь ординат.

У внутрішньому інтегралі межі інтегрування в загальному випадку є функції тієї змінної, по якій обчислюється зовнішній інтеграл і яка при обчисленні внутрішнього інтеграла залишається сталою.

Обчислення повторного інтеграла завжди розпочинається з обчислення внутрішнього інтеграла, для якого у випадку інтеграла (1.1)  $y$  є змінною, а  $x$  – сталою величиною. Після знаходження первісної межі внутрішнього інтеграла підставляються замість змінної  $y$ . В результаті цього приходимо до визначеного інтеграла по змінній  $x$ .

В окремому випадку області інтегрування – прямокутнику, що обмежений прямими  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ) і  $y = c, y = d$  ( $c < d$ ), межі інтегрування у внутрішньому і зовнішньому інтегралах формул (1.1) і (1.2) є сталі, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (1.3)$$



або

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1.4)$$

Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна в області  $D$ , то значення повторного інтеграла не залежить від порядку інтегрування. При цьому для зменшення кількості обчислень слід вибрати, якщо це можливо, такий порядок інтегрування, при якому не доводиться розбивати область інтегрування на частини.

Розглянемо це на прикладах.

**Приклад 1.** Обчислити подвійний інтеграл  $I = \iint_D (x + y^3) dx dy$  по прямокутній області  $D$ , що обмежена прямими  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .

*Розв'язання.* Обчислимо даний інтеграл за формулою (1.3)

$$I = \int_1^2 dx \int_0^2 (x + y^3) dy.$$

Обчислення цього повторного інтегралу розпочинаємо з обчислення внутрішнього інтегралу, для якого  $y$  є змінною, а  $x$  сталою величиною

$$\int_0^2 (x + y^3) dy = \left( xy + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = x \cdot 2 + \frac{2^4}{4} = 2x + 4.$$

Одержану функцію від  $x$  інтегруємо по відрізку  $[1; 2]$ :

$$\int_1^2 (2x + 4) dx = \left( 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^2 = 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 - 4 = 7.$$

Як правило, обчислення внутрішнього інтегралу не виконують окремо, а всі викладки записують в один рядок таким чином

$$\begin{aligned} I = \iint_D (x + y^3) dx dy &= \int_1^2 dx \int_0^2 (x + y^3) dy = \int_1^2 \left( xy + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 dx = \int_1^2 (2x + 4) dx = \\ &= (x^2 + 4x) \Big|_1^2 = 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 - 4 = 7. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислити подвійний інтеграл  $I = \iint_D y dx dy$ , якщо область

інтегрування  $D$ , обмежена прямою  $y = 4 - x$  і параболою  $y^2 = 2x$ .

*Розв'язання.* Знаходимо точки перетину заданих ліній  $A(2;2)$  і  $B(8;-4)$ , розв'язуючи сумісно їх рівняння. Скористуємось спочатку формулою (1.2). Спроектуємо область  $D$  на вісь  $Oy$ , вона проектується у відрізок  $[-4;2]$ . Якщо через будь-яку точку цього відрізка провести пряму паралельну вісі  $Ox$ , то вона перетне область тільки в двох точках  $N_1$  кривої  $y^2 = 2x$  і  $N_2$  прямої  $y = 4 - x$  (рис. 1.3).

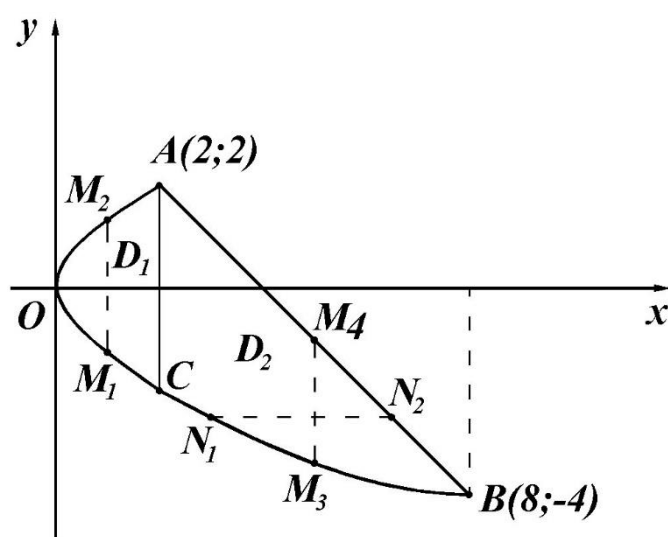


Рисунок 1.3 – Область інтегрування  $D$  у прикладі 2

Розв'яжемо рівняння цих ліній відносно  $x$ :  $x_1 = \frac{y^2}{2}$ ,  $x_2 = 4 - y$ . Подвійний інтеграл зводиться до двократного

$$I = \iint_D y dx dy = \int_{-4}^2 y dy \int_{y^2/2}^{4-y} dx.$$

Для внутрішнього інтеграла  $x$  є змінною, а  $y$  – сталою величиною. В результаті приходимо до визначеного інтегралу по змінній  $y$  в межах від  $-4$  до  $2$ . Таким чином,

$$I = \int_{-4}^2 y \left( x \Big|_{y^2/2}^{4-y} \right) dy = \int_{-4}^2 y \left( 4 - y - \frac{y^2}{2} \right) dy = \int_{-4}^2 \left( 4y - y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy =$$

$$= \left( 2y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \right) \Big|_{-4}^2 = -18.$$

Обчислимо інтеграл, спроектувавши область  $D$  на вісь  $Ox$ . В цьому випадку необхідно розбити область інтегрування прямою  $AC$  (рис. 1.3) на дві частини  $D_1$  і  $D_2$ , оскільки права межа області складається з двох ділянок, які мають різні рівняння:  $OA - y = \sqrt{2x}$  і  $AB - y = 4 - x$ . Інтеграл по області  $D$  згідно властивості адитивності представимо у вигляді суми інтегралів по областям  $D_1$  і  $D_2$

$$I = \iint_D y dx dy = \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} y dx dy.$$

Проекція  $D_1$  на вісь  $Ox$  є відрізок  $[0;2]$  і будь-яка пряма  $x = const, x \in [0;2]$ , перетинає область в точках  $M_1$  кривої  $y = -\sqrt{2x}$  і  $M_2$  кривої  $y = \sqrt{2x}$ . Тому

$$\iint_{D_1} y dx dy = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy = 0, \text{ оскільки внутрішній інтеграл } \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy = 0, \text{ як інтеграл в}$$

симетричних межах від непарної функції.

Проекція області  $D_2$  на вісь  $Ox$  є відрізок  $[2;8]$  і будь-яка пряма  $x = const, x \in [2;8]$ , перетинає область в точках  $M_3$  кривої  $y = -\sqrt{2x}$  і  $M_4$  кривої  $y = 4 - x$ . Тому

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} y dx dy &= \int_2^8 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{4-x} y dy = \int_2^8 \left( \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{2x}}^{4-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_2^8 \left[ (4-x)^2 - (-\sqrt{2x})^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^8 (16 - 8x + x^2 - 2x) dx = \frac{1}{2} \left( 16x - 5x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^8 = -18. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Обчислити інтеграл  $I = \iint_D \sqrt{x} y dx dy$ , якщо область інтегрування  $D$  задається нерівностями  $x \geq 0, y \geq x^2, y \leq 2 - x^2$  (рис. 1.4).

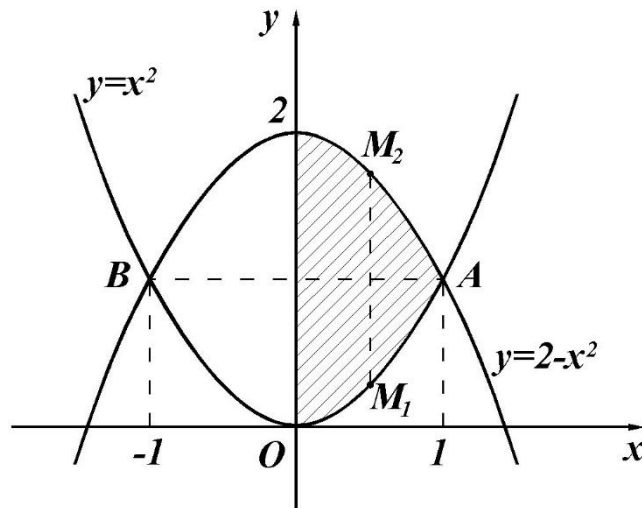


Рисунок 1.4 – Область інтегрування  $D$  у прикладі 3

*Розв'язання.* Знаходимо точки перетину парабол  $y = x^2$  і  $y = 2 - x^2$ , розв'язуючи сумісно рівняння цих ліній. Одержимо  $A(1;1)$ ,  $B(-1;1)$ . Спочатку скористуємось формулою (1.1). Спроекуємо область  $D$  на вісь  $Ox$ , матимемо при цьому відрізок  $[0;1]$ . Вертикальна пряма при будь-якому сталому значенні  $x$  перетне  $D$  тільки в двох точках: в точці  $M_1$  кривої  $y_1 = x^2$  і  $M_2$  кривої  $y_2 = 2 - x^2$ , при цьому аналітичні вирази функцій  $y_1$  і  $y_2$  для всіх  $x \in [0;1]$  залишаються незмінними. Тоді

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \sqrt{x} y dx dy = \int_0^1 \sqrt{x} dx \int_{x^2}^{2-x^2} y dy = \int_0^1 \sqrt{x} \left( \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{2-x^2} \right) dx = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{1}{2} \left( (2-x^2)^2 - x^4 \right) dx = \\
 &= 2 \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt{x^5}) dx = \int_0^1 (2x^{1/2} - 2x^{5/2}) dx = \left( \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{4}{7} x^{7/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{21}.
 \end{aligned}$$

Далі скористаємось формулою (1.2). Для цього спроекуємо область  $D$  на вісь  $Oy$ , тобто внутрішній інтеграл візьмемо по  $x$ , а зовнішній по  $y$ . Проекцією буде відрізок  $[0;2]$ . При змінюванні  $y$  від 0 до 2 ділянки правої межі визначаються різними рівняннями  $y = x^2$  і  $y = 2 - x^2$ , тому інтеграл по області  $D$  слід представити у вигляді суми інтегралів по областях  $D_1$  і  $D_2$ . Оскільки зараз внутрішні інтеграли будуть обчислюватись по змінній  $x$  при сталому значенні змінної  $y$ , то рівняння ліній, що обмежують кожену з областей  $D_1$  і  $D_2$  повинні бути розв'язані відносно цієї змінної. Оскільки  $x \geq 0$ , то  $x_1 = \sqrt{y}$ ;  $x_2 = \sqrt{2 - y}$ . Тоді

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x} y dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} \sqrt{x} y dx = \int_0^1 y \left( \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{y}} \right) dy + \int_1^2 y \left( \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{2-y}} \right) dy = \\
&= \frac{2}{3} \left( \int_0^1 y^{7/4} dy - \int_1^2 ((2-y)-2)(2-y)^{3/4} dy \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left( \frac{4}{11} y^{11/4} \Big|_0^1 - \int_1^2 ((2-y)^{7/4} - 2(2-y)^{3/4}) dy \right) = \\
&\frac{2}{3} \left( \frac{4}{11} + \frac{4}{11} (2-y)^{11/4} \Big|_1^2 - \frac{8}{7} (2-y)^{7/4} \Big|_1^2 \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{4}{11} - \frac{4}{11} + \frac{8}{7} \right) = \frac{16}{21}.
\end{aligned}$$

### Заміна змінних в подвійному інтегралі.

#### Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат

При обчисленні подвійних інтегралів інколи необхідно зробити заміну змінних.

Нехай функції

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (1.5)$$

визначені на всій площині  $xOy$  або в деякій її області  $D$  і мають неперервні частинні похідні. Припустимо також, що систему рівнянь (1.5) можна однозначно розв'язати відносно  $x$  і  $y$ :

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v); \end{cases} \quad (1.6)$$

тоді кожній точці  $M(x, y)$  із області  $D$  буде взаємно однозначно відповідати пара чисел  $(u, v)$ , які називаються криволінійними координатами цієї точки. Якщо область  $D$  розміщена в тій частині площини  $xOy$ , в якій введено криволінійні координати  $u, v$ , то справедлива наступна формула:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv, \quad (1.7)$$

де  $D'$  – область зміни криволінійних координат  $u$  і  $v$ , що відповідає області  $D$ , а  $J(u, v)$  - якобіан перетворення (1.6):

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Часто обчислення подвійного інтеграла спрощується заміною прямокутних координат  $x$  і  $y$  полярними координатами за формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.8)$$

Система (1.8) здійснює перехід від прямокутних координат до  $\rho$  і  $\varphi$  при умові, що полюс розміщено на початку координат і полярна вісь напрямлена вздовж вісі  $Ox$  (рис. 1.5).

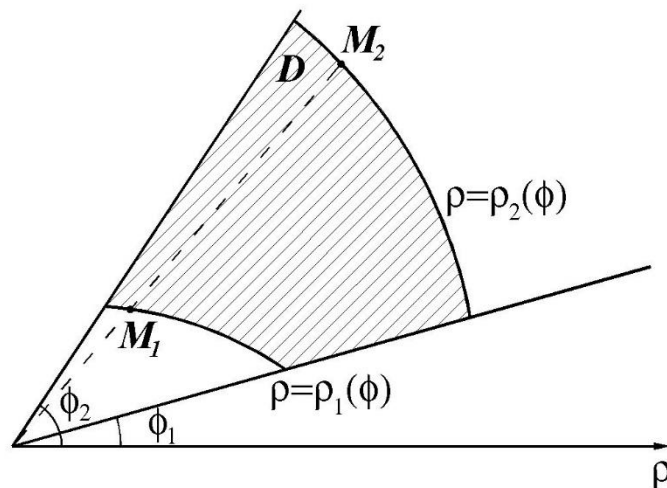


Рисунок 1.5 – Перехід до полярної системи координат

В цьому випадку якобіан дорівнює

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \quad (1.9)$$

Таким чином,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[\rho \cos \phi, \rho \sin \phi] \rho d\rho d\phi. \quad (1.10)$$

Якщо область інтегрування  $D$  обмежена променями, що утворюють з полярною віссю кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  ( $\varphi_1 < \varphi_2$ ) та двома кривими  $\rho = \rho_1(\varphi)$  і  $\rho = \rho_2(\varphi)$  ( $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ ) (рис. 1.5) і функції  $\rho = \rho_1(\varphi)$  і  $\rho = \rho_2(\varphi)$  в проміжку  $[\varphi_1, \varphi_2]$  неперервні, однозначні і зберігають аналітичний вираз, то відповідні цій області полярні координати змінюються у межах

$$D' : \{\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2; \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\},$$

і тоді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f[\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi] \rho d\rho. \quad (1.11)$$

Інтеграл в правій частині цієї формули – повторний. У внутрішньому інтегралі змінну  $\varphi$  треба розглядати як сталу величину, а  $\rho$  – змінну. Для визначення меж внутрішнього інтеграла по змінній  $\rho$  (полярного радіуса) проведемо з полюса  $O$  будь-який промінь  $\varphi = \text{const}$ ,  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ . В точці входу  $M_1$  цього променя в область інтегрування  $\rho = \rho_1(\varphi)$ , а в точці  $M_2$  – виходу його із області  $\rho = \rho_2(\varphi)$ .

Якщо область  $D$  містить початок координат, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f[\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi] \rho d\rho, \quad (1.12)$$

де  $\rho = \rho(\varphi)$  – полярне рівняння кривої, що обмежує область  $D$ .

Якщо область інтегрування є круг з центром на початку координат і радіуса  $R$ , то межі інтегрування в полярній системі координат, як внутрішнього так і зовнішнього інтегралів, будуть сталими, тобто

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f[\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi] \rho d\rho. \quad (1.13)$$

Формулами (1.11)-(1.13) зручно користуватись при розв'язанні задач, коли область  $D$  є круг або сектор круга.

**Приклад 1.** Обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} dx dy$ , якщо

область  $D$  обмежена колом  $x^2 + y^2 = 1$ .

*Розв'язання.* Область  $D$  є круг радіуса 1 з центром на початку координат. Введемо полярні координати за формулами (1.11)-(1.13). В полярних координатах  $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$ , а рівняння кола набуває вигляду  $\rho = 1$ . Тоді за формулою (1.13) одержуємо

$$\iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \right|_0^1 = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

**Приклад 2.** Обчислити  $\iint_D x dx dy$ , де область  $D$  обмежена колом

$$x^2 + y^2 = ax.$$

*Розв'язання.* Рівняння кола у полярній системі координат має вигляд  $\rho^2 = a\rho \cos \varphi$  або  $\rho = a \cos \varphi$ . Кут  $\varphi$  змінюється від  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ . При кожному фіксованому значенні  $\varphi$  змінна  $\rho$  змінюється від 0 до  $a \cos \varphi$  (рис. 1.6).

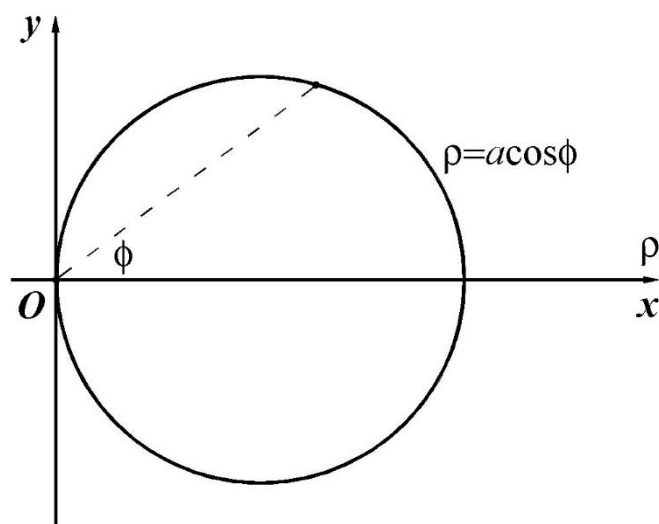


Рисунок 1.6 – Коло у полярній системі координат

Тоді

$$\iint_D x dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho \cos \varphi \rho d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 d\rho =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{a \cos \varphi} \right) d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{2a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \\
&= \left| \cos^4 \varphi = (\cos^2 \varphi)^2 = \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) = \right. \\
&= \left. \frac{1}{4} \left( 1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) \right| = \\
&= \frac{a^3}{6} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{a^3}{6} \left( \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{8}.
\end{aligned}$$

При обчисленні зовнішнього інтеграла врахована властивість симетрії підінтегральної функції: якщо  $f(x)$  парна на симетричному відрізку  $[-a, a]$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

### Застосування подвійних інтегралів в геометрії

1. *Обчислення площ плоских областей.* Площа  $S$  плоскої області  $D$  на площині  $xOy$  обчислюється за формулою

$$S = \iint_D dx dy. \tag{1.14}$$

2. *Обчислення об'ємів.* Об'єм циліндричного тіла, яке обмежене зверху поверхнею  $z = f(x, y)$ , а знизу областю  $D$  площини  $xOy$ , з боків циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні вісі  $Oz$  і з напрямною – межею області  $D$  (рис. 1.7), знаходиться за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \tag{1.15}$$

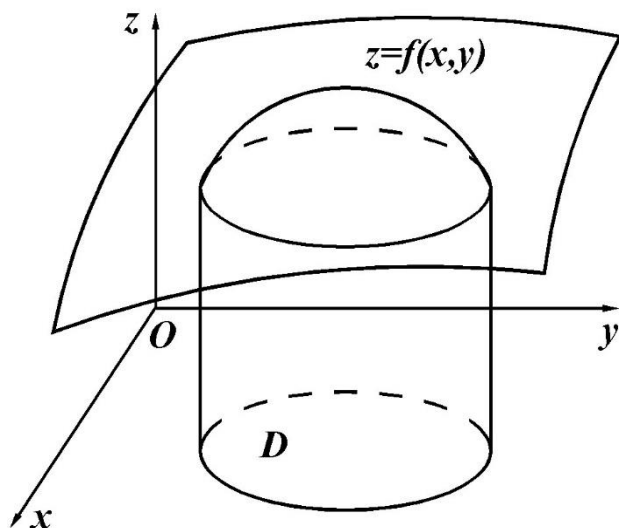


Рисунок 1.7 – Циліндричне тіло

3. *Обчислення площі поверхні.* Нехай поверхня  $\sigma$ , що задана рівнянням  $z = f(x, y)$ , проектується на площину  $xOy$  в область  $D$  (рис. 1.7). Тоді її площу  $S$  знаходять за формулою

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (1.16)$$

**Приклад 1.** Обчислити площу області  $D$ , яка обмежена лініями  $y = x^2 - 1$  та  $y=2$ .

*Розв'язання.* Знайдемо точки перетину даних ліній, сумісно розв'язуючи їх рівняння –  $A(-\sqrt{3};2)$ ,  $A(\sqrt{3};2)$ . Область  $D$  (рис. 1.8) симетрична відносно вісі  $Oy$ , тому достатньо обчислити площу правої частини області  $D$  і результат подвоїти. Права частина області  $D$  проектується на вісь  $Ox$  у відрізок  $[0; \sqrt{3}]$  і має нижньою межею параболу  $y = x^2 - 1$ , а верхньою – пряму  $y=2$ .

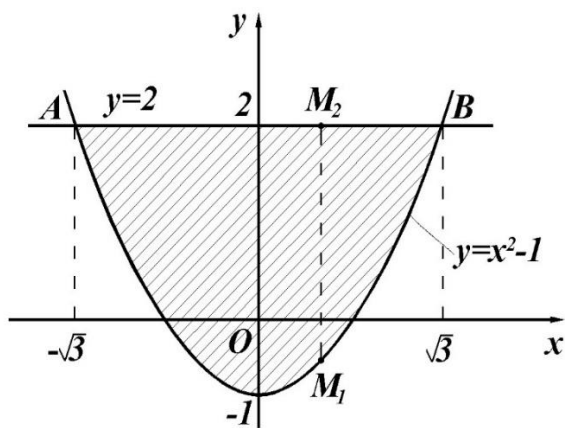


Рисунок 1.8 – Область  $D$  у прикладі 1

В результаті цього маємо

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2-1}^2 dy = \int_0^{\sqrt{3}} y \Big|_{x^2-1}^2 dx = \int_0^{\sqrt{3}} (2 - x^2 + 1) dx = \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = \\ &= \left( 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

звідки  $S = 4\sqrt{3}$  кв. од.

**Приклад 2.** Обчислити об'єм тіла, яке обмежено площинами  $z = 0$ ,  $y + z = 2$  і циліндром  $y = x^2$ .

*Розв'язання.* Задане тіло (рис. 1.9) зверху обмежено площиною  $z = 2 - y$ .

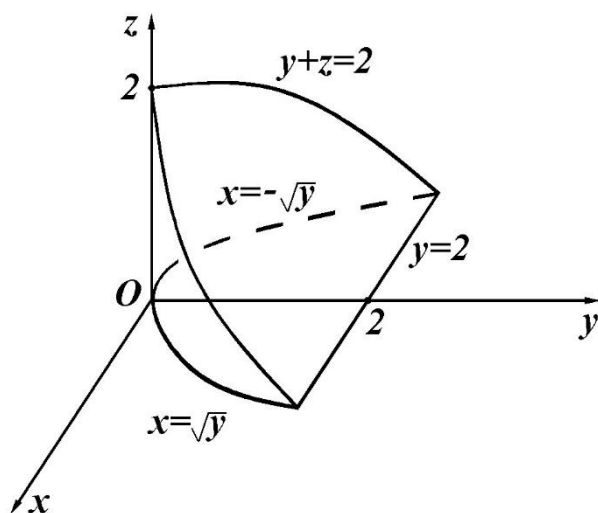


Рисунок 1.9 – Тіло у прикладі 2

Тому

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D z dx dy = \\ &= \iint_D (2 - y) dx dy. \end{aligned}$$

Область  $D$  є параболічний сегмент  $AOB$ , обмежений в площині  $xOy$  прямою  $y = 2$  і параболою  $y = x^2$ . Зручно спроектувати область  $D$ , на вісь  $Oy$ . Тоді слід розв'язати рівняння параболі відносно  $x$ :  $x = \pm\sqrt{y}$ . З врахуванням симетрії тіла відносно площини  $yOz$  одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} (2-y) dx = \int_0^2 (2-y) x \Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^2 (2-y) \sqrt{y} dy = \int_0^2 \left( 2y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \\ &= \left( \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} 2^{\frac{5}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = 4\sqrt{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{16\sqrt{2}}{15}, \end{aligned}$$

звідки  $V = \frac{32\sqrt{2}}{15}$  куб. од.

**Приклад 3.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого площиною  $z=0$  і параболоїдом  $z=3-x^2-y^2$ .

*Розв'язання.* Зверху задане тіло (рис. 1.10) обмежено параболоїдом  $z=3-x^2-y^2$ , тому

$$V = \iint_D z dx dy = \iint_D (3-x^2-y^2) dx dy.$$

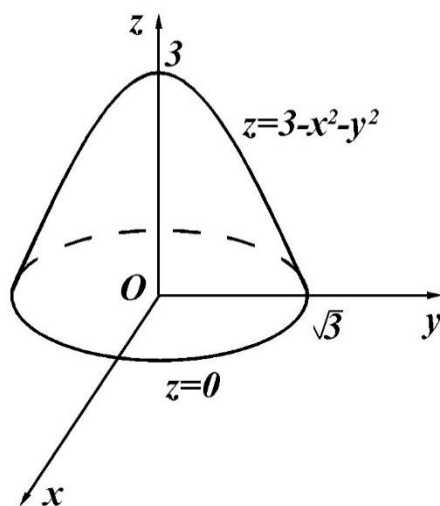


Рисунок 1.10 – Тіло у прикладі 3

Область  $D$  є круг, межу якого  $x^2 + y^2 = 3$  одержимо, якщо підставимо  $z=0$  в рівняння  $z=3-x^2-y^2$ . В полярних координатах рівняння цього кола  $\rho^2=3$  або  $\rho=\sqrt{3}$ . Враховуючи симетрію тіла відносно площин  $xOz$  і  $yOz$ , знайдемо

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (3-\rho^2) \rho d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(3-\rho^2)^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} d\varphi =$$

$$= \frac{9}{4} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{9}{4} \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{8},$$

звідки  $V = \frac{9\pi}{2}$  куб. од.

**Приклад 4.** Обчислити площу частини поверхні циліндра  $z^2 = 4x$ , яка лежить в першому октанті, вирізана циліндром  $y^2 = 4x$  і площиною  $x = 1$ .

*Розв'язання.* Із рівняння поверхні  $z^2 = 4x$  для першого октанта маємо

$$z = 2\sqrt{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Область  $D$  (рис. 1.11) є параболічний сегмент, обмежений в площині  $xOy$  параболою  $y^2 = 4x$  або  $y = 2\sqrt{x}$  і прямою  $x = 1$ .

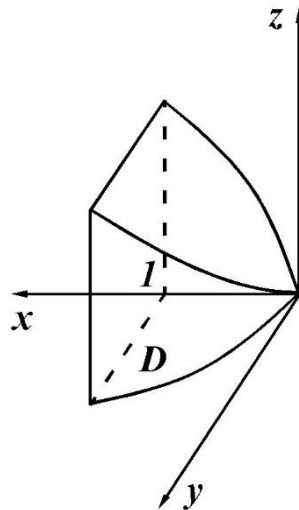


Рисунок 1.11 – Область  $D$  у прикладі 4

Тоді

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \cdot y \Big|_0^{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1) \text{ (кв. од.)}.$$

### Застосування подвійного інтеграла в механіці та фізиці

Нехай  $D$  – плоска пластинка, яка лежить в площині  $xOy$ , а  $\gamma(x, y)$  – поверхнева густина деякої величини (кількість величини, що припадає на одиницю площі пластинки), тоді

$$\iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

дає сумарне значення цієї величини в області  $D$ .

Якщо  $\gamma(x, y)$  - поверхнева густина електричного заряду, то формула

$$q = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

визначає заряд пластинки  $D$ . Якщо  $\gamma(x, y)$  – поверхнева густина маси, то:

1) масу  $m$  пластинки обчислюють за формулою

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy; \quad (1.17)$$

2) статичні моменти  $M_x$  і  $M_y$  пластинки відносно координатних осей  $Ox$  і  $Oy$  знаходять за формулами

$$M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy, \quad (1.18)$$

$$M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy; \quad (1.19)$$

3) координати центра мас  $x_c$  і  $y_c$  – за формулами

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_D x \gamma(x, y) dx dy = \frac{M_y}{m}, \quad (1.20)$$

$$y_c = \frac{1}{m} \iint_D y \gamma(x, y) dx dy = \frac{M_x}{m}. \quad (1.21)$$

Правильність обчислень координат центра мас перевіряють виходячи з того, що повинні виконуватись умови  $x_1 \leq x_c \leq x_2$ ,  $y_1 \leq y_c \leq y_2$ , де  $x_1$ ,  $y_1$  – мінімальні, а  $x_2$ ,  $y_2$  – максимальні значення координат точок області  $D$ ;

4) моменти інерції  $J_x$ ,  $J_y$  і  $J_0$  пластинки відповідно відносно координатних осей  $Ox$ ,  $Oy$  і початку координат – за формулами

$$J_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad (1.22)$$

$$J_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad (1.23)$$

$$J_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy. \quad (1.24)$$

Для однорідних пластинок  $\gamma(x, y) = const$ . В такому випадку, як правило, вважають  $\gamma(x, y) = 1$ .

**Приклад 1.** Знайти масу пластинки, обмеженої лініями  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , якщо поверхнева густина у кожній її точці дорівнює ординаті цієї точки.

*Розв'язання.* Область  $D$  в даному випадку – це чверть еліпса (рис. 1.12).

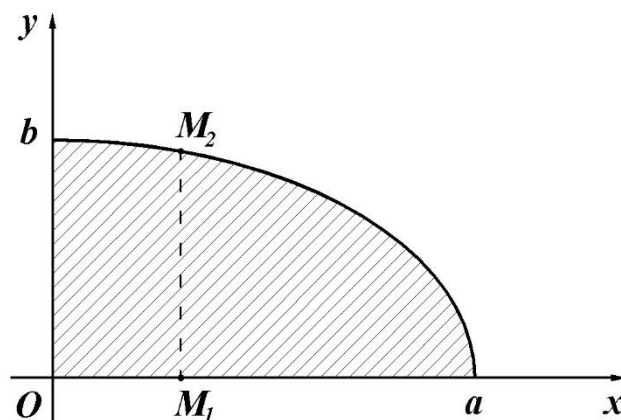


Рисунок 1.12 – Область  $D$  у прикладі 1

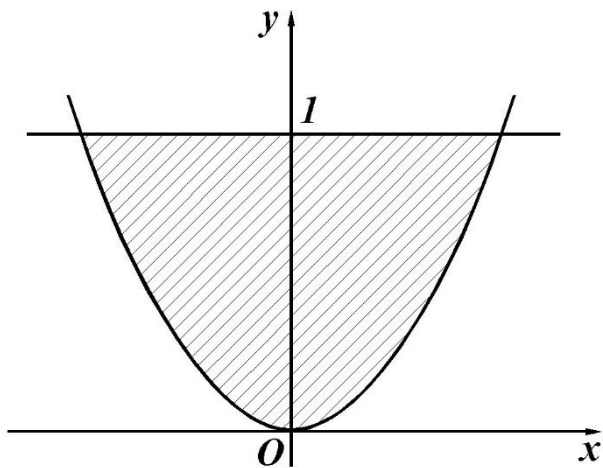
Тоді

$$\begin{aligned}
m &= \iint_D \gamma(x, y) dx dy = \iint_D y dx dy = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y dy = \int_0^a \frac{y^2}{2} \Big|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx = \\
&= \frac{b^2}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{b^2}{2} \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = \frac{b^2}{2} \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{ab^2}{3}.
\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти координати центра мас однорідної пластинки, обмеженої лініями  $y = x^2$  і  $y = 1$  (рис. 1.13).

*Розв'язання.* Оскільки пластинка симетрична відносно осі  $Oy$ , то  $x_c = 0$ . Для знаходження  $y_c$  обчислимо  $M_x$  і  $m$ .

$$\begin{aligned}
M_x &= \iint_D y dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y dx = 2 \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} y dx = \\
&= 2 \int_0^1 y \left(x \Big|_0^{\sqrt{y}}\right) dy = 2 \int_0^1 y \sqrt{y} dy = 2 \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{4}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$



**Рисунок 1.13 – Область  $D$  у прикладі 2**

$$m = \iint_D dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 2 \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = 2 \int_0^1 \left(x \Big|_0^{\sqrt{y}}\right) dy = 2 \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Остаточно, за формулою (1.21)  $y_c = \frac{3}{5}$ .



**Приклад 3.** Знайти статичний момент однорідного півкруга радіуса  $R$  відносно діаметра.

*Розв'язання.* Помістимо початок координат в середину діаметра півкруга, а вісь  $Oy$  направимо по діаметру (рис. 1.14). Тоді статичний момент півкруга відносно діаметра буде дорівнювати статичному моменту півкруга відносно вісі  $Ox$ .

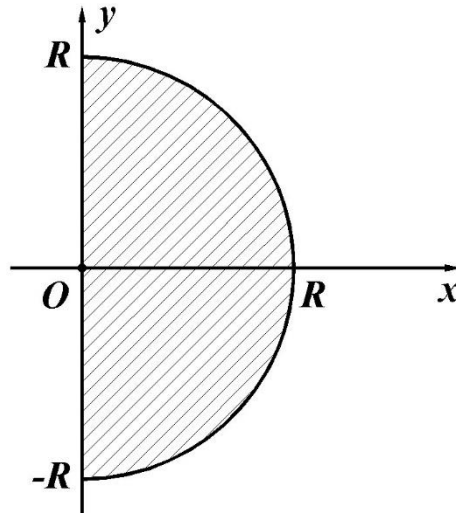


Рисунок 1.14 – Область  $D$  у прикладі 3

Враховуючи те, що рівняння кола, що обмежує півкруг, буде  $x^2 + y^2 = R^2$ , а в полярних координатах  $\rho = R$ , за формулою (1.19) маємо

$$\begin{aligned} M_d = M_y &= \iint_D x \gamma(x, y) dx dy = \iint_D x dx dy = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R d\varphi = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{R^3}{3} \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{R^3}{3} (1 + 1) = \frac{2R^3}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 4.** Знайти момент інерції квадрата зі стороною 2, поверхнева густина якого пропорційна  $y$ , відносно однієї із вершин.

*Розв'язання.* Помістимо початок координат в одну з вершин квадрата, а координатні вісі направимо по двом суміжним сторонам (рис. 1.15).

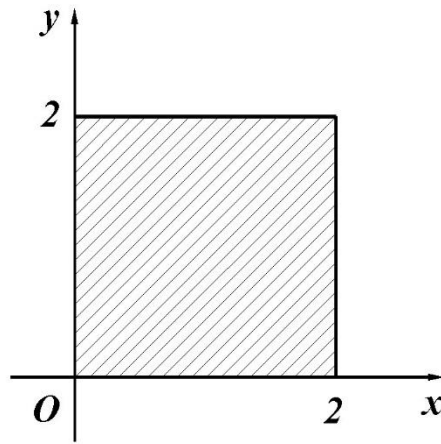


Рисунок 1.15 – Область  $D$  у прикладі 4

Тоді шуканий момент інерції буде дорівнювати моменту інерції квадрата відносно початку координат, тобто

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) k y dx dy = \\
 &= k \int_0^2 dx \int_0^2 (x^2 y + y^3) dy = k \int_0^2 \left( \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 dx = \\
 &= k \int_0^2 (2x^2 + 4) dx = k \left( \frac{2}{3} x^3 + 4x \right) \Big|_0^2 = k \left( \frac{16}{3} + 8 \right) = \frac{40}{3} k.
 \end{aligned}$$

**Завдання для самостійного розв'язання до розділу 1**

1. Побудувати область  $D$ , яка задана обмежуючими її лініями, і обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

- |                                     |                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1.1. $f(x, y) = 2x + 1$ ,           | $D: y^2 = x + 1, x = 0$ .        |
| 1.2. $f(x, y) = \sqrt{9 + x + y}$ , | $D: x = 0, y = 0, x + y = 3$ .   |
| 1.3. $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ ,    | $D: xy = 1, y = x, x = 3$ .      |
| 1.4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ,    | $D: x = 0, y = 0, y = 2$ .       |
| 1.5. $f(x, y) = \sin(x + y)$ ,      | $D: y = 0, y = x, x + y = \pi$ . |

2. Побудувати область  $D$ , яка задана нерівністю або системою нерівностей і обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , застосовуючи полярні координати.

2.1.  $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ ,  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

2.2.  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $D$  – кільце  $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ .

2.3.  $f(x, y) = 1 - 2x - 3y$ ,  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

2.4.  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ ,  $D$  – півкруг  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \geq 0. \end{cases}$

2.5.  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $D$  – чверть кільця  $\begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$

3. Визначити координати центра мас пластинки  $D$ , обмеженої заданими лініями, якщо поверхнева густина маси задана функцією  $\gamma(x, y)$ .

3.1.  $\gamma(x, y) = x^2$ ;  $D$ :  $y^2 = 4x + 4$ ,  $y^2 = -2x + 4$ .

3.2.  $\gamma(x, y) = x$ ;  $D$ :  $xy = 6$ ,  $x + y = 7$ .

3.3.  $\gamma(x, y) = y^2$ ;  $D$ :  $x^2 = 4y - 4$ ,  $x^2 = -2y - 4$ .

3.4.  $\gamma(x, y) = \text{const}$ ;  $D$ :  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ .

3.5.  $\gamma(x, y) = xy$ ;  $D$ :  $x = 3y^2$ ,  $x - 12y = 0$ .

4. Обчислити площу плоскої області  $D$ , обмеженої заданими лініями.

4.1.  $D$ :  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^3$ .

4.2.  $D$ :  $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ .

4.3.  $D$ :  $y = x + 1$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ .

4.4.  $D$ :  $x^2 = 4y$ ,  $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ .

4.5.  $D$ :  $xy = 6$ ,  $x + y - 7 = 0$ .

## РОЗДІЛ 2. ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

### Означення потрійного інтеграла та його обчислення в прямокутній системі координат

Нехай функція  $f(M) = f(x, y, z)$  задана в деякій обмеженій замкненій просторовій області  $V$ . Розіб'ємо цю область на  $n$  довільних частинних областей  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , що не мають спільних внутрішніх точок і об'єми, яких позначимо відповідно  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ . В кожній області  $V_i (i=1, n)$  довільно виберемо точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  і помножимо значення функції  $f(M_i)$  в цій точці на об'єм  $\Delta V_i$  області  $V_i$ . Сума таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i = f(M_1) \Delta V_1 + \dots + f(M_n) \Delta V_n \quad (2.1)$$

по всім областям називається *інтегральною сумою* для функції  $f(x, y, z)$  по області  $V$ . Позначимо через  $\lambda$  найбільший із діаметрів областей  $V_i$  (діаметр області  $V_i$  – відстань між її найбільш віддаленими точками).

*Означення.* Потрійним інтегралом  $\iiint_V f(M) dV$  від функції  $f(M)$  по області

$V$  називається скінченна границя послідовності інтегральних сум  $I_n$  за умови, що  $\lambda \rightarrow 0$ , тобто  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i$ , яка не залежить від способу розбиття області  $V$  на частинні області  $V_i$  і вибору точок  $M_i \in V_i, i=1, 2, \dots, n$ .

Потрійний інтеграл позначається  $\iiint_V f(M) dV, \iiint_V f(x, y, z) dV$ .

Отже, за означенням  $\iiint_V f(M) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i$ . Умова  $\lambda \rightarrow 0$  означає,

що  $n \rightarrow \infty$ .

Якщо така границя існує, то функція  $f(M)$  називається інтегрованою в області  $V$ . Будь-яка неперервна в обмеженій замкненій області  $V$  функція  $f(M)$  інтегрована в ній. Далі ми будемо розглядати тільки неперервні функції.

Потрійний інтеграл має ті ж властивості, що і подвійний.

В декартових координатах елемент об'єму  $dV$  записується у вигляді  $dV = dx dy dz$ , а потрійний інтеграл позначається :

$$\iiint_V f(M)dV = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz. \quad (2.2)$$

Обчислення потрійного інтеграла в декартовій системі координат зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції  $D$  об'єму  $V$  на будь-яку координатну площину і внутрішнього інтеграла по третій змінній.

Нехай  $V$  проектується в область  $D$  на площині  $xOy$  так, що будь-яка пряма, яка паралельна вісі  $Oz$  проходить всередині області  $D$ , перетинає область  $V$  рівно в двох точках. Така область називається правильною відносно вісі  $Oz$ . В загальному випадку ця область обмежена зверху поверхнею  $z = z_2(x, y)$ , знизу – поверхнею  $z = z_1(x, y)$  і з боків – циліндричною поверхнею з твірними, які паралельні вісі  $Oz$  (рис. 2.1).

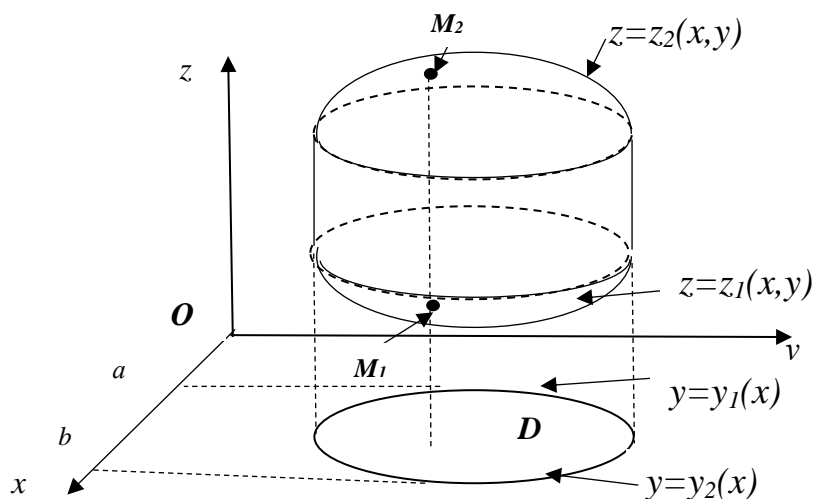


Рисунок 2.1 – Приклад просторової області  $V$

В окремих випадках бічна поверхня циліндричного тіла може перетворитися в лінію (рис. 2.2).

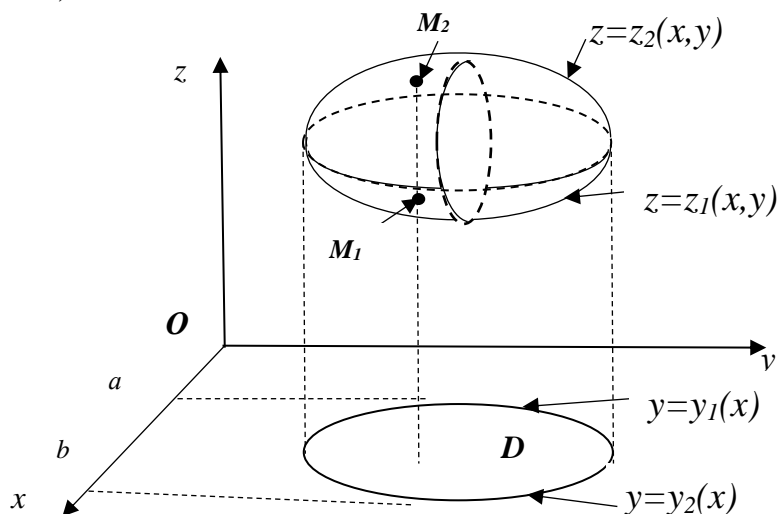


Рисунок 2.2 – Приклад просторової області  $V$

При цьому будь-яка пряма, що паралельна вісі  $Oz$  має точку входу  $M_1$  в область  $V$ , що належить поверхні  $z = z_1(x, y)$  і точку виходу  $M_2$ , що належить поверхні  $z = z_2(x, y)$  із цієї області (рис.2.1 і 2.2). Тому змінна  $z$  змінюється в межах від  $z_1(x, y)$  до  $z_2(x, y)$ . Функції  $z_1(x, y)$  і  $z_2(x, y)$  вважаємо неперервними. Потрійний інтеграл по такій області обчислюється за формулою:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dx dy dz \quad (2.3)$$

Тут внутрішній інтеграл  $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y) dz$  береться по змінній  $z$  при

фіксованих, але довільних в  $D$  значеннях  $x$  і  $y$  від нижньої межі області  $V$  до її верхньої межі (тобто по відріжку  $M_1 M_2$  (рис.2.1)). В результаті одержуємо деяку функцію від  $x$  і  $y$ , яка потім інтегрується по області  $D$ .

Враховуючи правила обчислення подвійного інтеграла останню формулу можна записати у вигляді

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.4)$$

Якщо область  $V$  є неправильною, то її розбивають на скінчену кількість правильних областей, і обчислюють інтеграл, використовуючи властивість адитивності потрійного інтеграла.

Якщо областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, обмежений площинами  $x=a$ ,  $x=b$ , ( $a < b$ ),  $y=c$ ,  $y=d$  ( $c < d$ ),  $z=m$ ,  $z=n$  ( $m < n$ ), то межі інтегрування будуть сталими, тобто:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^n f(x, y, z) dz. \quad (2.5)$$

**Приклад 1.** Обчислити потрійний інтеграл  $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$  по області  $V$ , що обмежена площинами  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ ,  $y=1$ ,  $z=0$ ,  $z=1$ .

*Розв'язання.* Обчислимо даний інтеграл за формулою (2.5):

$$\iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz.$$

Внутрішній інтеграл обчислюємо, вважаючи  $x$  і  $y$  сталими:

$$\int_0^1 (x + y + z) dy = \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 = x + y + \frac{1}{2}.$$

Одержану функцію від  $x$  і  $y$  інтегруємо по  $y$ , вважаючи  $x$  сталою:

$$\int_0^1 \left( x + y + \frac{1}{2} \right) dy = \left( xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \right) \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x + 1.$$

Одержану функцію від  $x$  інтегруємо по  $x$ :

$$\int_0^1 (x + 1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Для скороченого запису всі обчислення можна записати в один рядок:

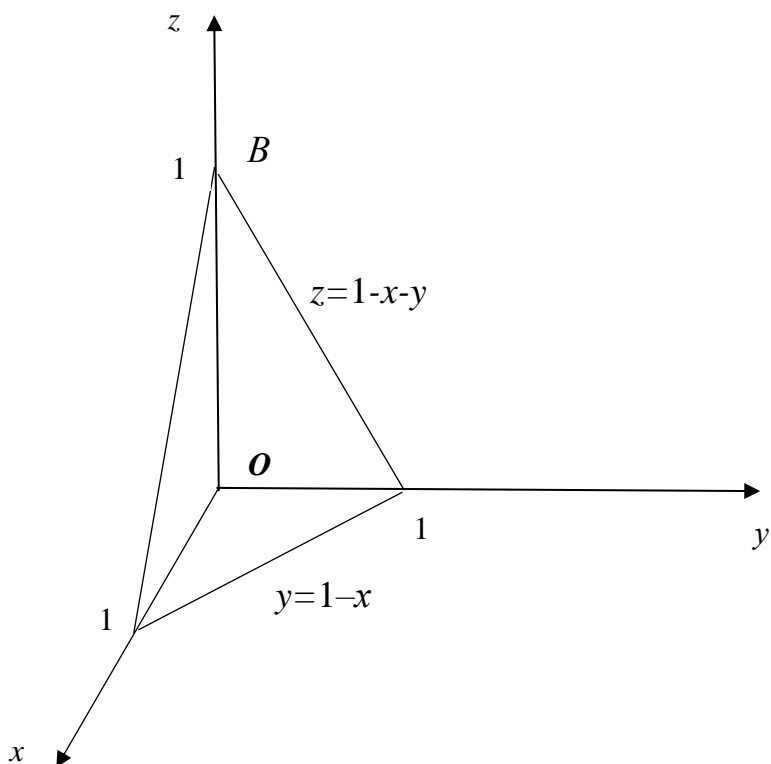
$$\begin{aligned} \iiint_V (x + y + z) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left( x + y + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 \left( xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \right) \Big|_0^1 dx = \\ &= \int_0^1 \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 (x + 1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислити потрійний інтеграл  $\iiint_V (1-x)yz dx dy dz$ , якщо

область  $V$  обмежена площинами  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  і  $z=1-x-y$  (рис.2.3).

*Розв'язання.* Область  $V$  має нижню межу  $z = 0$ , і верхню межу  $z=1-x-y$ . Отже, змінна  $z$  змінюється в межах від 0 до точок площини  $z=1-x-y$ . Проекцією області  $V$  на площину  $xOy$  є трикутник  $AOC$  (область  $D$ ), який проектується у відрізок  $[0;1]$  вісі  $Ox$  і має межі  $y=0$  і  $y=1-x$ . Перейдемо до повторного інтегрування і одержимо:

$$\iiint_V (1-x)yz dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy \int_0^{1-x-y} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) dx \int_0^{1-x} yz^2 \Big|_0^{1-x-y} dy =$$



**Рисунок 2.3 – Область V у прикладі 2**

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) dx \int_0^{1-x} \left[ (1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3 \right] dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) \left[ (1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x) \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right] \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{24} \int_0^1 (1-x)^5 dx = -\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{6} (1-x)^6 \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{24 \cdot 6} = \frac{1}{144}.
 \end{aligned}$$

### **Потрійний інтеграл в циліндричних і сферичних системах координат**

В багатьох задачах обчислення потрійних інтегралів зручно виконувати в циліндричній або сферичній системах координат.

Питання про зміну змінних в потрійному інтегралі вирішується тим же шляхом що і у випадку подвійного інтеграла.

Нехай:



$$\begin{cases} u = u(x, y, z), \\ v = v(x, y, z), \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad (2.6)$$

функції, що визначені у всьому просторі або в деякій його області  $V$  і мають неперервні частинні похідні в області  $V$ . Припустимо також, що цю систему можна однозначно розв'язати відносно  $x, y$  і  $z$ :

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \quad (2.7)$$

Тоді кожній точці  $M(x, y, z)$ , із області  $D$  буде взаємно однозначно відповідати трійка чисел  $(u, v, w)$ , які називаються криволінійними координатами цієї точки. Якщо область  $V$  розміщена в тій частині простору, в якій введено криволінійні координати  $u, v, w$ , то справедлива формула:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J(u, v, w)| du dv dw, \end{aligned} \quad (2.8)$$

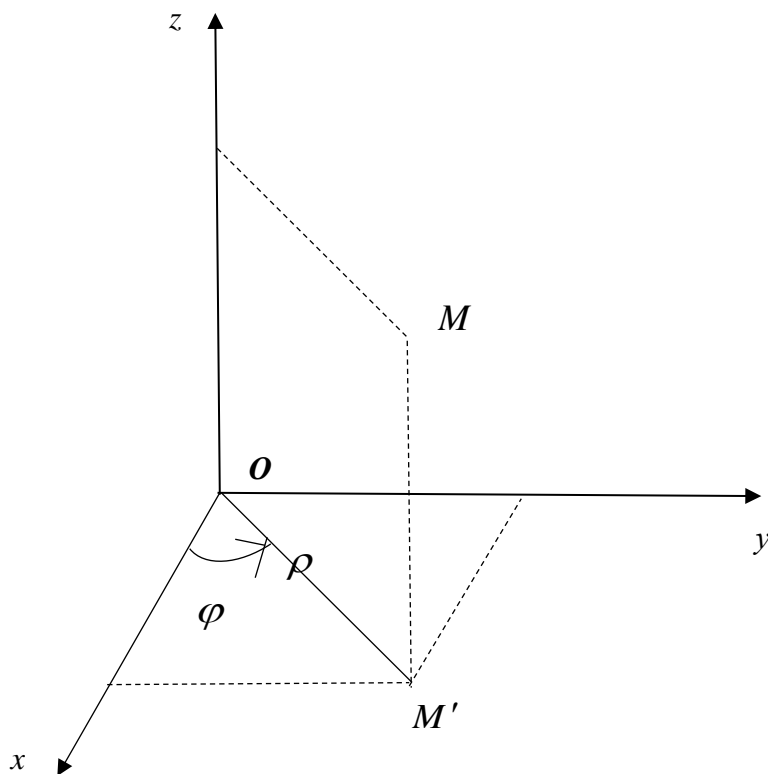
де  $V'$  – область зміни криволінійних координат  $u, v, w$ , що відповідає області  $V$ ,  $J(u, v, w)$  – якобіан перетворення (2.7)

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

В циліндричній системі координат положення точки  $M$  визначається полярними координатами  $\varphi, \rho$  її проекції  $M'$  на площину  $xOy$  і аплікатою  $z$  (рис.2.4). Формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні координати мають вигляд

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (2.9)$$

де  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ( $-\pi < \varphi \leq \pi$ ),  $0 \leq \rho < +\infty$ ,  $-\infty < z < +\infty$ ,  $|J| = \rho$ .



**Рисунок 2.4 – Циліндрична система координат**

Тоді в потрійному інтегралі перехід від прямокутних координат  $(x, y, z)$  до циліндричних координат  $(\varphi, \rho, z)$  відбувається за формулою

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\varphi d\rho dz, \quad (2.10)$$

де  $V'$  – область змінювання циліндричних координат, що відповідає об'єму  $V$  в декартових координатах.

Якщо областю інтегрування є кутовий циліндр з віссю  $Oz$ , то потрійний інтеграл по цій області в циліндричній системі координат матиме сталі межі по всім змінним, тобто

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^H f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz \quad (2.11)$$

Сферичні координати точки  $M$  області  $V$  позначаються через  $\rho, \varphi, \theta$ , де  $\rho$  – відстань від початку координат до точки  $M(x, y, z)$ ,  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\varphi$  – кут між додатним напрямком вісі  $Ox$  і проекцією радіус-вектора  $\overline{OM}$  на площину  $xOy$ , а  $\theta$  – кут між додатним напрямком вісі  $Oz$  і радіус-вектором  $\overline{OM}$  (рис 2.5).

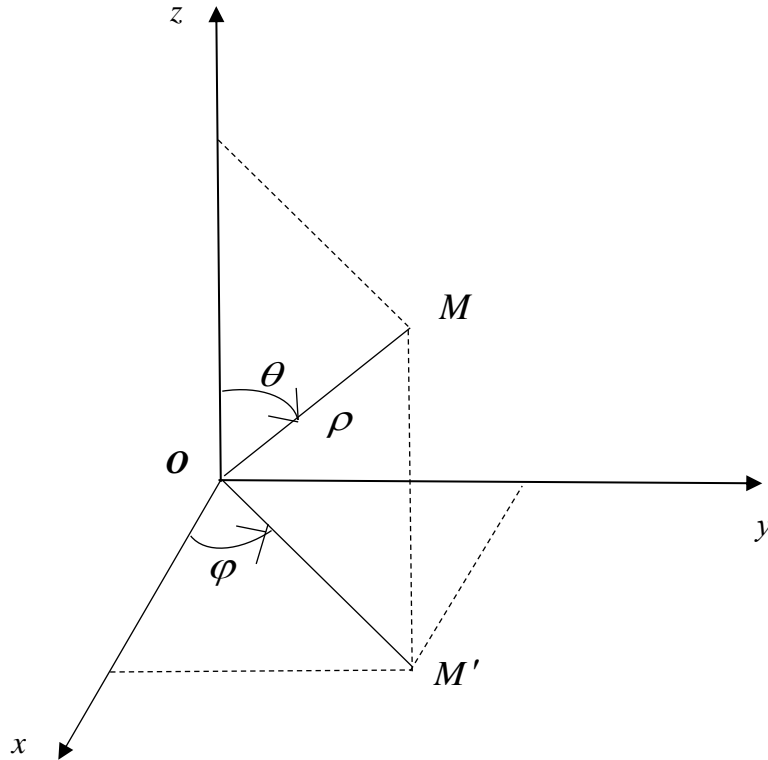


Рисунок 2.5 – Сферична система координат

Сферичні координати  $\rho, \varphi, \theta$  пов'язані з прямокутними координатами співвідношеннями:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta, \quad (2.12)$$

де  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  або  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  або  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ,  $|J| = \rho^2 \sin \theta$ .

Перехід у потрібному інтегралі до сферичних координат відбувається за формулою:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V'} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho, \end{aligned} \quad (2.13)$$

де  $V'$  – область змінювання сферичних координат, що відповідає об'єму  $V$ .

Якщо областю інтегрування є куля з центром у початку координат і радіусом  $R$ , то потрібний інтеграл по цій області в сферичній системі координат матиме сталі межі інтегрування по всім змінним, тобто

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) d\rho. \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Приклад 1.** Обчислити  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , де  $V$  – частина області, обмежена сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  і параболоїдом  $x^2 + y^2 = 3z$ , яка розміщена в першому октанті (рис. 2.6).

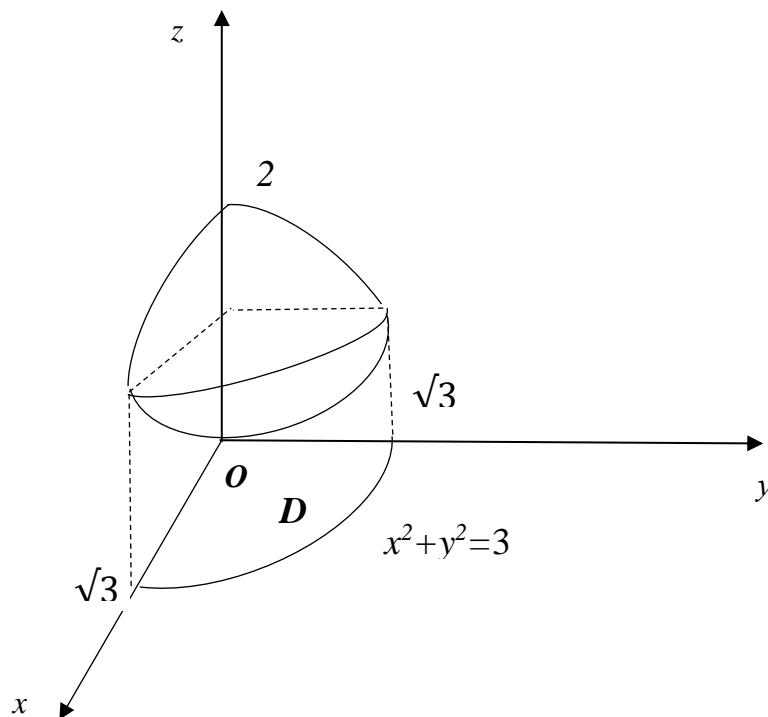


Рисунок 2.6 – Область  $V$  у прикладі 1

*Розв'язання.* Перший спосіб.

Обчислимо інтеграл в прямокутній системі координат. Спочатку знайдемо лінію перетину сфери і параболоїда. Для цього розв'яжемо сумісно рівняння, якими вони задаються:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \Rightarrow z^2 + 3z - 4 \Rightarrow \begin{cases} z_1=1, \\ z_2=-4 \end{cases} \Rightarrow z=1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3.$$

Тобто, поверхні перетинаються по колу радіуса  $R = \sqrt{3}$ , яке лежить в площині  $z=1$ . Тоді об'єм  $V$  буде проектуватися на площину  $xOy$  в чверть круга  $D$  цього ж радіуса, який міститься в першому квадранті (рис. 2.6). Визначимося з межами інтегрування. Оскільки  $D$  – це чверть круга першого квадранта, то  $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{3-x^2}$ .  $z$  змінюється від точок параболоїда  $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$  до точок сфери, яка міститься над площиною  $xOy$ , тобто  $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ .

Тепер перейдемо до повторного інтегрування в заданому потрійному інтегралі:

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_0^{\sqrt{3-x^2}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} y dy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} y x^2 \left| \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{3} \right. dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} y (4-x^2-y-\frac{(x^2+y^2)^2}{3}) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} y (4-x^2-y-\frac{x^4}{9}-\frac{2x^2y^2}{9}-\frac{y^4}{9}) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{3-x^2}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} (4y-x^2y-y^3-\frac{1}{9}x^4y-\frac{2}{9}x^2y^3-\frac{1}{9}y^5) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} x (2y^2-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}-\frac{x^4y^2}{18}-\frac{x^2y^4}{18}-\frac{y^6}{54}) \Big|_0^{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} x (2(3-x^2)- \\ &-\frac{1}{2}x^2(3-x^2)-\frac{1}{4}(3-x^2)^2-\frac{1}{18}x^4(3-x^2)-\frac{1}{18}x^2(3-x^2)^2-\frac{1}{54}(3-x^2)^3) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (\frac{13}{4}x-2x^3+\frac{x^5}{4}+\frac{x^7}{54}) dx = \frac{27}{32}. \end{aligned}$$

Другий спосіб. Обчислимо інтеграл в циліндричній системі координат:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi z d\varphi d\rho dz,$$

де  $V'$  – область змінювання циліндричних координат точок області  $V$ .

Оскільки проекція  $V$  на площину  $xOy$  лежить в першому квадранті, то  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Межа проекції – коло  $x^2 + y^2 = 3$ , яке в полярній системі має рівняння  $\rho = \sqrt{3}$ . Отже,  $0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$ . Рівняння параболоїда в циліндричній системі координат

набував вигляду  $z = \frac{\rho^2}{3}$ , а рівняння частини сфери, що знаходиться над

площиною  $xOy - z = \sqrt{4 - \rho^2}$ . Тоді  $\frac{\rho^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}$ . Після розстановки меж

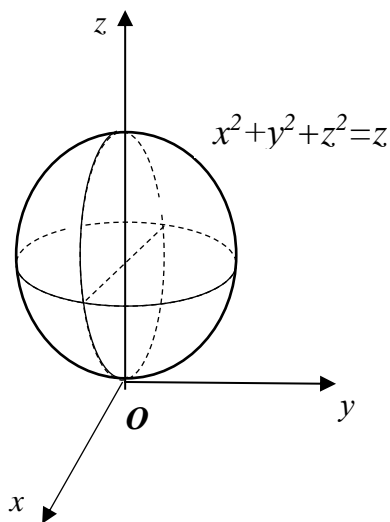
інтегрування маємо:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 z^2 \Bigg|_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 (4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9}) d\rho = \frac{27}{32}.$$

**Приклад 2.** Обчислити потрійний інтеграл  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , якщо

область  $V$  обмежена сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  (рис 2.7).



### Рисунок 2.7 – Область $V$ у прикладі 2

*Розв'язання.* Область  $V$  знизу і зверху обмежена сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ . Тому для обчислення інтеграла доцільно ввести сферичні координати. Оскільки

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \\ &= \rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \rho^2, \end{aligned}$$

то

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{V'} \rho \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho.$$

В області  $V$   $\varphi$  змінюється від 0 до  $2\pi$ ;  $\theta$  – від 0 до  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\rho$  – від 0 до  $\cos \theta$ , оскільки рівняння заданої сфери має вигляд  $\rho^2 = \rho \cos \theta$  або  $\rho = \cos \theta$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \iiint_{V'} \rho^3 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} \rho^3 d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^4 \theta d\theta = \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d \cos \theta = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \\ &= -\frac{1}{20} \int_0^{2\pi} (\cos^5 \frac{\pi}{2} - \cos^5 \theta) d\varphi = \frac{1}{20} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

### Геометричне, механічне і фізичне застосування потрійного інтеграла

1. Об'єм просторового тіла знаходиться за формулою

$$V = \iiint_V dx dy dz \quad (2.15)$$

В циліндричних та сферичних координатах відповідно маємо

$$V = \iiint_{V^i} \rho d\varphi d\rho dz \quad (2.16)$$

$$V = \iiint_V \rho^2 \sin \theta d\varphi d\rho d\theta. \quad (2.17)$$

2. Маса тіла змінної густини  $\gamma(x, y, z)$  обчислюється за формулою

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.18)$$

Якщо задана густина якої-небудь величини (наприклад, електричного заряду), то сама величина, що зосереджена у даному об'ємі буде обчислюватись за формулою (2.18).

3. Статичні моменти  $M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}$  тіла  $V$  відносно координатних площин  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$  обчислюються за відповідними формулами:

$$M_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$M_{xz} = \iiint_V y\gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (2.19)$$

$$M_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

4. Моменти інерції  $J_x, J_y, J_z$  відносно координатних осей  $Ox, Oy, Oz$ ;  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  відносно координатних площин  $xOy, xOz, yOz$ ;  $J_0$  відносно початку координат відповідно знаходяться за формулами

$$J_x = \iiint_V (z^2 + y^2)\gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$J_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (2.20)$$



$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$J_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$J_{xz} = \iiint_V y^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (2.21)$$

$$J_{yz} = \iiint_V x^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$J_o = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.22)$$

5. Координати центра мас тіла  $V$  з густиною  $\gamma(x, y, z)$  можна обчислити за формулами

$$x_c = \frac{\iiint_V x \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz} = \frac{M_{yz}}{m};$$

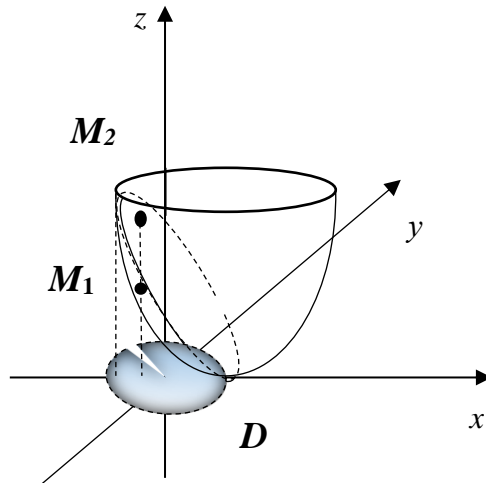
$$y_c = \frac{\iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz} = \frac{M_{xz}}{m}; \quad (2.23)$$

$$z_c = \frac{\iiint_V z \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Для однорідного тіла ( $\gamma(x, y, z) = \text{const} = c$ ) всі ці формули спрощуються, оскільки в цьому випадку можна вважати, що  $\gamma(x, y, z) = 1$ . Якщо однорідне тіло симетричне відносно якої-небудь площини, то центр мас лежить у цій площині (останнє допоможе перевірити правильність обчислень).

**Приклад 1.** Обчислити об'єм тіла  $V$ , що обмежене поверхнями: параболоїдом  $(x-1)^2 + y^2 = z$  і площиною  $2x + z = 2$  (рис.2.8)

*Розв'язання.* Знайдемо рівняння проєкції лінії перетину параболоїда  $(x-1)^2 + y^2 = z$  з площиною  $2x + z = 2$  на площину  $xOy$ . На проєкції лінії перетину аплікати співпадають ( $z = 0$ ), то одержуємо  $(x-1)^2 + y^2 = 2 - 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .



**Рисунок 2.8 –Тіло V у прикладі 1**

Отже, тіло  $V$  проєкується на круг  $D_{xy}$ :  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Тоді доцільно перейти до циліндричних координат. Рівняння межі  $D_{xy}$  в циліндричних координатах:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow \rho = 1;$$

рівняння площини:

$$z = 2(1 - \rho \cos \varphi);$$

рівняння параболоїда:

$$z = \rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1.$$

При цьому  $\rho$  і  $\varphi$  змінюються в межах  $0 \leq \rho \leq 1$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , а  $z$  змінюється від  $z_1 = \rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1$  ( $M_1$  – точка входу в просторову область  $V$ ) до  $z_2 = 2(1 - \rho \cos \varphi)$  ( $M_2$  – точка виходу із просторової області  $V$ ). Об'єм тіла в циліндричних координатах буде дорівнювати:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_V \rho d\varphi d\rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2-2\rho\cos\varphi+1}^{2(1-\rho\cos\varphi)} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho z \Big|_{\rho^2-2\rho\cos\varphi+1}^{2(1-\rho\cos\varphi)} d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(2-2\rho\cos\varphi-\rho^2+2\rho\cos\varphi-1)d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho-\rho^3)d\rho = \\
&= \varphi \Big|_0^{2\pi} \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ (куб.од.)}.
\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти масу тіла з густиною  $\gamma = x + y + z$ , обмеженого площинами  $x=0, x=2, y=0, y=1, z=0, z=1$ .

*Розв'язання.* Тіло, масу якого необхідно знайти, є прямокутний паралелепіпед  $V$ . За формулою (2.18) маємо

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z) dz = \int_0^2 dx \int_0^1 \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^2 dx \int_0^1 \left( x + y + \frac{1}{2} \right) dy = \\
&= \int_0^2 \left( xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^2 \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^2 (x+1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = 4.
\end{aligned}$$

**Приклад 3.** Знайти заряд  $Q$ , зосереджений об'ємі  $V$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0; x^2 + y^2 \leq 2x; x \geq 0$ ; якщо задано об'ємна густина заряду  $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

*Розв'язання.* Спочатку побудуємо область інтегрування та її проекції на координатні площини. Перше і друге рівняння задають півкулю з центром на початку координат і радіусом 2, а саме верхню її частину ( $z \geq 0$ ). Оскільки рівняння  $x^2 + y^2 = 2x$  не містить змінної  $z$ , то воно задає циліндричну поверхню з твірною, що паралельна вісі  $Oz$ , напрямна якої визначає і проекцію на площину  $Oxy$ . Таким чином, проекцією області інтегрування є круг (рис 2.9), канонічне рівняння межі якого одержимо, якщо виділимо повний квадрат:  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  Звідси  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ . Отже, це круг з центром у точці  $(1;0)$  і радіусом 1. Враховуючи умову  $y \geq 0$  маємо, що область  $D$  на площині  $xOy$  – це верхня частина круга, а об'ємна область  $V$  – це частина півкулі, яка вирізана даним напівциліндром (рис 2.10).

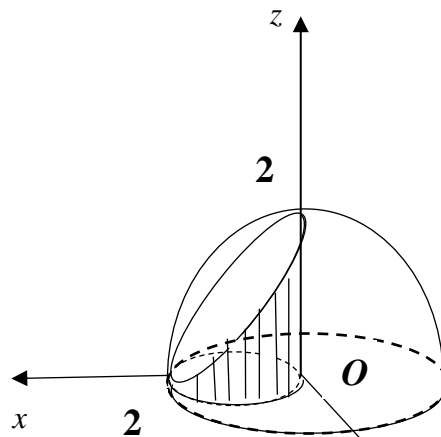
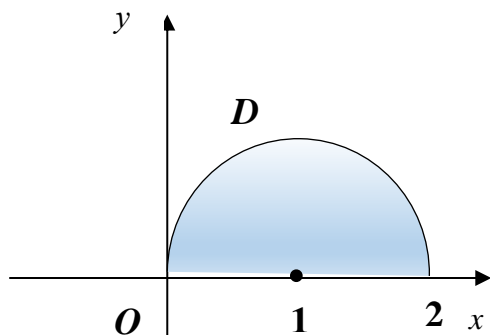


Рисунок 2.9 – Область  $D$  у прикладі 3Рисунок 2.10 – Область  $V$  у прикладі 3

Потрійний інтеграл залишимо у вигляді трикратного, розставивши відповідно межі інтегрування:

$$Q = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2z-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz. \quad (2.24)$$

Межі інтегрування визначили як вирази для  $z$  з двох перших рівнянь умови прикладу, для  $y$  – з двох інших рівнянь, для  $x$  – найменше і найбільше значення в області  $D$ .

Для обчислення інтеграла (2.24) доцільно перейти до циліндричних координат:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . Виразивши рівняння поверхні та рівняння межі області  $D$  в нових координатах, визначаємо межі інтегрування.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \sqrt{4 - \rho^2};$$

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho \cos \varphi \Leftrightarrow \rho_i = 0; \rho_z = 2 \cos \varphi.$$

З геометричних міркувань (рис 2.9) знаходимо, що  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Таким чином,

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^3 \Big|_0^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \sqrt{1-\rho^2} \rho^3 d\rho = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{4-\rho^2}, \rho^2 = 4-t^2; \rho d\rho = -tdt \\ \rho_1=0 \Rightarrow t_1=2, \rho_2=2 \cos \varphi \Rightarrow t_2=2 \sin \varphi \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (4-t^2)t(-tdt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^2 (4t^2-t^4)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) \Big|_{2\sin\varphi}^2 d\varphi = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{32}{3}\sin^3\varphi - \frac{32}{5}\sin^5\varphi\right)\right) d\varphi = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi + \frac{1}{5}\sin^5\varphi\right) d\varphi = \\
&= 32 \left(\frac{2}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi) d\varphi + \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi d\varphi\right) = \\
&= 32 \left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi + \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi d\varphi\right) = \\
&= 32 \left(\frac{2}{15} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\varphi) d\cos\varphi - \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\varphi)^2 d\cos\varphi\right) = \\
&= 32 \left(\frac{\pi}{15} + \frac{1}{3} \left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5} \left(\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos^3\varphi + \frac{1}{5}\cos^5\varphi\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \\
&= 32 \left(\frac{\pi}{15} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)\right) = 32 \left(\frac{\pi}{15} - \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15}\right) = 32 \frac{15\pi - 26}{225}.
\end{aligned}$$

**Приклад 4.** Знайти момент інерції однорідного тіла ( $\gamma(x,y,z) \equiv 1$ ), обмеженого сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  і конусом  $x^2 + y^2 = z^2$ , відносно вісі  $Oz$ .

*Розв'язання.* Побудуємо це тіло. Для цього знайдемо лінію перетину поверхонь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow 2z^2 = 2z \Rightarrow z = 1,$$

тобто ця лінія є коло радіуса 1, що лежить у площині  $z=1$ . Проекція тіла на площину  $xOy$  є круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Зверху тіло обмежено сферою

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$  з центром в точці  $(0,0,1)$  і радіусом 1. Знизу конічною поверхнею (рис. 2.11).

Момент інерції обчислюється за формулою:

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Перейдемо до сферичних координат, тоді всі межі інтегрування будуть сталими. Межі інтегрування для  $\theta$  визначаються за допомогою рівняння

$x^2 + y^2 = z^2$ , поклавши  $x=0$  (або  $y=0$ ) одержуємо, що  $y = z \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ , тобто

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Підінтегральний вираз при цьому:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \theta.$$

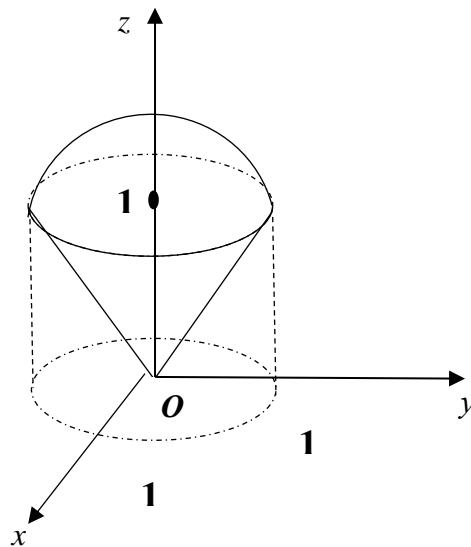


Рисунок 2.11 – Однорідне тіло у прикладі 4

Рівняння сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  в сферичних координатах набуває вигляду:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = 2\rho \cos \theta \Rightarrow \rho^2 = 2\rho \cos \theta \Rightarrow \rho = 2 \cos \theta,$$

тобто  $\rho$  змінюється в межах  $0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta$ .

$$\begin{aligned}
J_z &= \iiint_V \rho^2 \sin^2 \theta \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\cos \theta} \rho^4 d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^{2\cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \frac{32 \cos^5 \theta}{5} d\theta = \\
&= \frac{32}{5} \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \cos^5 \theta d\theta = \frac{64\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \cos^5 \theta d\theta = \\
&= \left. \begin{aligned} &t = \operatorname{tg} \theta, \theta = \operatorname{arctg} t, d\theta = \frac{dt}{1+t^2} \\ &\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{t}{1+t^2}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{1+t^2} \\ &\theta_1 = \theta \Rightarrow t_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_2 = 1 \end{aligned} \right| = \\
&= \frac{64\pi}{5} \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^5} dt = \left. \begin{aligned} &1+t^2 = z, t^2 = z-1, t dt = \frac{1}{2} dz \\ &t_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1, t_2 = 1 \Rightarrow z_2 = 2 \end{aligned} \right| = \\
&= \frac{64\pi}{5} \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{z-1}{z^5} dz = \frac{32\pi}{5} \int_1^2 \left( \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) dz = \frac{32\pi}{5} \left( -\frac{1}{3z^3} + \frac{1}{4z^4} \right) \Big|_1^2 = \\
&= \frac{32\pi}{5} \left[ \left( -\frac{1}{24} + \frac{1}{64} \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{32\pi}{5} \cdot \frac{11}{192} = \frac{11\pi}{30}.
\end{aligned}$$

**Приклад 5.** Визначити момент інерції однорідної піраміди відносно координатної площини  $xOy$ , якщо піраміда обмежена площинами  $x+y+z=1$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ .

*Розв'язання.* Момент інерції відносно координатної площини  $xOy$  обчислюється за формулою:

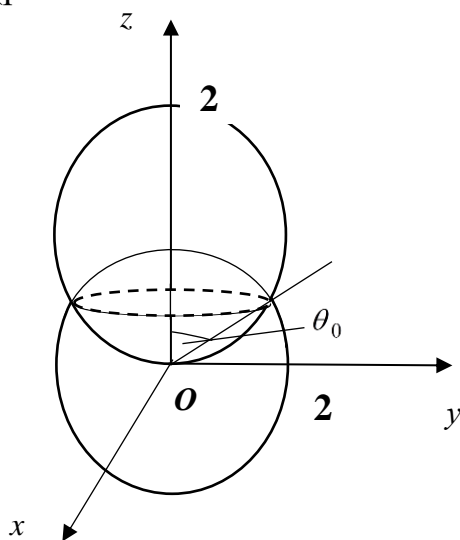
$$J_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

У нас  $\gamma(x, y, z) = 1$ . Тому,

$$\begin{aligned}
 J_{xy} &= \iiint_V z^2 dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z^2 dz = \frac{1}{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} z^3 \Big|_0^{1-x-y} dy = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^3 dy = -\frac{1}{12} \int_0^1 (1-x-y)^4 \Big|_0^{1-x} dx = \\
 &= \frac{1}{12} \int_0^1 (1-x)^4 dx = -\frac{1}{60} (1-x)^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{60}.
 \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Знайти центр тяжіння загальної частини куль  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  і  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ , якщо густина в будь-якій точці цього тіла дорівнює відстані цієї точки від площини  $xOy$ .

*Розв'язання.* Побудуємо задане тіло. Перша поверхня, що обмежує його – куля з центромна початку координат радіуса 2, а друга – куля з центром в точці  $(0;0;2)$  також радіуса 2, оскільки рівняння  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$  можна переписати у вигляді  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$  (рис.2.12)



**Рисунок 2.12 – Тіло у прикладі 6**

З умови прикладу маємо, що  $\gamma(x, y, z) = z$ . З умови симетрії тіла (рис.2.12) відносно вісі  $Oz$  маємо  $x_c = y_c = 0$ . Тоді  $z_c$  знайдемо за формулою:



$$Z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_V z\gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz}.$$

В нашому випадку

$$Z_c = \frac{\iiint_V z^2 dx dy dz}{\iiint_V z dx dy dz}.$$

Будемо обчислювати ці інтеграли в сферичній системі координат. Для цього визначимо кут  $\theta_0$ , що відповідає лінії перетину куль, розв'язавши сумісно рівняння сфер в сферичній системі координат:

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \rho = 4 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Оскільки кут  $\theta$  змінюється в межах  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ , для першої сфери  $\rho = 2$  і  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , а для другої сфери  $\rho = 4 \cos \theta$  і  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ . В сферичній системі координат  $z = \rho \cos \theta$ ,  $z^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$ . Тоді

$$\begin{aligned} \iiint_V z^2 dx dy dz &= \iiint_{V'} \rho^4 \cos^2 \theta \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^4 d\rho + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4 \cos \theta} \rho^4 d\rho = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Оскільки в інтегралі  $J_1$  межі інтегрування сталі, то його можна обчислити як добуток трьох інтегралів.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^4 d\rho = -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 = \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} \right) \cdot 2\pi \cdot \frac{32}{5} = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot 2\pi \cdot \frac{32}{5} = \frac{56\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

При обчисленні інтегралу  $J_2$  врахуємо, що  $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ , тоді

$$\begin{aligned}
 J_2 &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{4\cos \theta} \rho^4 d\rho = 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta \left( \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^{4\cos \theta} \right) d\theta = \\
 &= 2\pi \cdot \frac{4^5}{5} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \theta \sin \theta d\theta = -2\pi \cdot \frac{4^5}{5} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \theta d\cos \theta = -2\pi \cdot \frac{4^5}{5} \left( \frac{\cos^8 \theta}{8} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
 &= -2\pi \frac{4^5}{5 \cdot 8} \left( 0 - \left( \frac{1}{2} \right)^8 \right) = \frac{4^4 \cdot \pi}{5} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 \iiint_V z^2 dx dy dz &= \frac{56\pi}{15} + \frac{\pi}{5} = \frac{59\pi}{15}. \\
 \iiint_V z dx dy dz &= \iiint_V \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4\cos \theta} \rho^3 d\rho = J_3 + J_1.
 \end{aligned}$$

Інтеграл  $J_3$  аналогічно інтегралу  $J_1$  обчислимо як добуток трьох інтегралів:

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \theta \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{2^4}{4} = 3\pi.$$

При обчисленні інтегралу  $J_4$  врахуємо, що  $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ . Будемо мати:

$$\begin{aligned} J_4 &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{4\cos \varphi} \rho^3 d\rho = 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{4\cos \varphi} \right) d\theta = \\ &= 2\pi \cdot \frac{4^4}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = -2 \cdot 4^3 \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\cos \theta = -2 \cdot 4^3 \pi \cdot \left( \frac{\cos^6 \theta}{6} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -2 \cdot 4^3 \pi \cdot \frac{1}{6} \left( 0 - \left( \frac{1}{2} \right)^6 \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\iiint_V z dx dy dz = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3},$$

$$z_c = \frac{\frac{59\pi}{3}}{\frac{10\pi}{3}} = \frac{59 \cdot 3\pi}{15 \cdot 10\pi} = \frac{59}{50}.$$

### ***Завдання для самостійного розв'язання до розділу 2***

**1.** Обчислити потрійний інтеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ , де область  $V$

обмежена заданими площинами.

1.1.  $f(x, y, z) = x^2 yz$ ,  $V : x = 1, x = 2, y = 1, y = 2, z = 1, z = 2$ .

1.2.  $f(x, y, z) = xy(1 - z)$ ,  $V : x = 2, x = 4, y = 0, y = 2, z = 1, z = 2$ .

1.3.  $f(x, y, z) = x + y + z^2$ ,  $V : x = 1, x = 3, y = 1, y = 3, z = 0, z = 3$ .

1.4.  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ ,  $V : x = 1, x = 2, y = 1, y = 2, z = 1, z = 2$ .

1.5.  $f(x, y, z) = (1 + x)^2 yz$ ,  $V : x = -1, x = 0, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ .

**2.** Знайти заряд  $Q$ , зосереджений в об'ємі  $V$ , обмеженому даними поверхнями, якщо задана об'ємна густина заряду  $\gamma(x, y, z)$ .

2.1.  $\gamma(x, y, z) = 28xz$ ,  $V : \frac{25}{4}(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = -z, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

2.2.  $\gamma(x, y, z) = z$ ,  $V : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0$ .

2.3.  $\gamma(x, y, z) = 5(x^2 + y^2)$ ,  $V : 16(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0$ .

2.4.  $\gamma(x, y) = 35yz$ ,  $V : x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = z, x \geq 0, y \geq 0$ .

2.5.  $\gamma(x, y) = 32z$ ,  $V : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

**3.** Визначити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями.

3.1.  $x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = 0, z = 2$ .

3.2.  $x^2 + y^2 + z = 6, z = 2$ .

3.3.  $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$ .

3.4.  $z = 11 - x^2 - y^2, z = 2$ .

3.5.  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16$ .

### РОЗДІЛ 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ПО ДОВЖИНІ ДУГИ (ПЕРШОГО РОДУ)

#### Означення криволінійного інтеграла по довжині дуги

Розглянемо просторову кусково-гладку криву  $l$ , що обмежена точками  $A$  і  $B$ . Крива називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична, що неперервно змінюється вздовж кривої. Кусково-гладкою кривою називається неперервна крива, яка складається зі скінченної кількості гладких кусків. Нехай в кожній точці  $M(x, y, z)$  цієї кривої визначена неперервна функція  $f(M) = f(x, y, z)$ . Розіб'ємо дугу  $AB$  довільним чином точками  $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$  на  $n$  частинних дуг  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , довжини яких  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ . На кожній частинній дузі  $l_i$  оберемо довільну точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  і обчислимо в ній значення функції  $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ . Число  $f(x_i, y_i, z_i)$  помножимо на довжину дуги  $\Delta l_i$  і складемо суму

$$J = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i, \quad (3.1)$$

яка називається інтегральною сумою по кривій  $l$  (або дузі  $AB$ ) функції  $f(x, y, z)$ . Покладемо  $\lambda = \max \Delta l_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Означення.** Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних суми  $J_n$  за умови, що  $\lambda \rightarrow 0$ , яка не залежить від способу розбиття кривої  $l$  на частинні дуги та від вибору точок  $M_i$  на них, то ця границя називається криволінійним інтегралом по довжині дуги (або криволінійним інтегралом першого роду) від функції  $f(x, y, z)$ , по дузі  $l$  (або по дузі  $AB$ ).

Позначається  $\int_l f(x, y) dl$  (або  $\int_{AB} f(x, y) dl$ ).

Отже, за означенням маємо

$$\int_l f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i. \quad (3.2)$$

Умова  $\lambda \rightarrow 0$  означає, що  $n \rightarrow \infty$ .

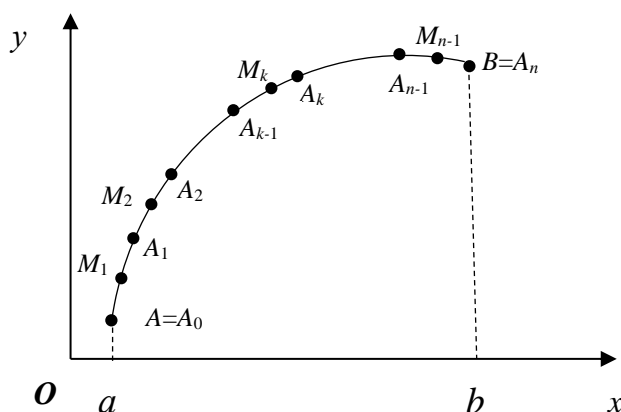
Якщо функція  $f(x, y, z)$  неперервна у всіх точках дуги  $AB$ , то ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття дуги  $AB$ , ні від вибору точки  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  на кожній із частинних дуг.

Якщо крива  $l$  лежить в площині  $xOy$ , то функція  $f$  залежить тільки від  $x$  і  $y$ , тоді

$$\int_l f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i. \quad (3.3)$$

В формулах (3.2) і (3.3)  $dl$  – це диференціал довжини дуги.

На рис. 3.1 наведено розбиття плоскої кривої  $l$  на  $n$  частинних дуг і довільний вибір точок на кожній з них. При цьому крива повинна бути такою, що кожним двом різним точкам відрізка  $[a, b]$  відповідають дві різні точки кривої.



**Рисунок 3.1 – Розбиття плоскої кривої на  $n$  частинних дуг і довільний вибір точок на кожній з них**

Криволінійний інтеграл по довжині дуги має такі найпростіші властивості:

$$1) \quad \int_l (C_1 f_1(M) \pm C_2 f_2(M)) dl = C_1 \int_l f_1(M) dl \pm C_2 \int_l f_2(M) dl;$$

2) якщо крива  $l$  складається з двох частин  $l_1$  і  $l_2$  (рис. 3.2), то

$$\int_l f(M) dl = \int_{l_1} f_1(M) dl + \int_{l_2} f_2(M) dl;$$

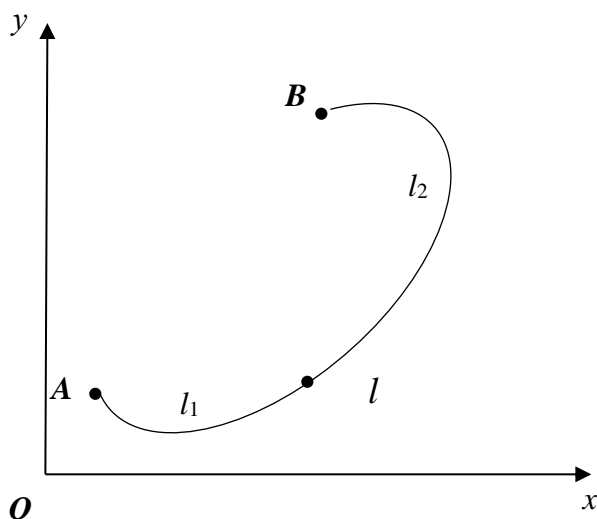


Рисунок 3.2 – Розбиття кривої  $l$  на дві частини

3) відповідно із означенням, криволінійний інтеграл по довжині дуги не залежить від напрямку шляху інтегрування, тобто

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{BA} f(M) dl,$$

оскільки в формулах (3.2) і (3.3)  $\Delta l_i > 0$ .

### Обчислення криволінійного інтеграла по довжині дуги

Обчислення криволінійних інтегралів по довжині дуги зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Розглянемо різні способи задання кривої  $l$  і перехід до визначеного інтеграла.

1. Якщо просторова крива  $l$  задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

то  $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$  і

$$\int_l f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (3.4)$$

Якщо крива лежить в площині  $xOy$ , то

$$\int_l f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (3.5)$$

2. Якщо плоска крива  $l$  задана рівнянням  $y = y(x)$ , де  $a \leq x \leq b$ , то  $dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

$$\int_l f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (3.6)$$

Аналогічно, якщо крива  $l$  задана рівнянням  $x = x(y)$ , де  $c \leq y \leq d$ , то  $dl = \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy$

$$\int_l f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy. \quad (3.7)$$

3. Якщо крива  $l$  задається у полярній системі координат  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , то  $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$  і

$$\int_l f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (3.8)$$

**Приклад 1.** Обчислити  $\int_l \frac{y^3}{x} dl$ , де  $l$  – дуга параболи  $y^2 = 2x$  від точки  $(0,0)$

до точки  $(4; 2\sqrt{2})$  (рис. 3.3).

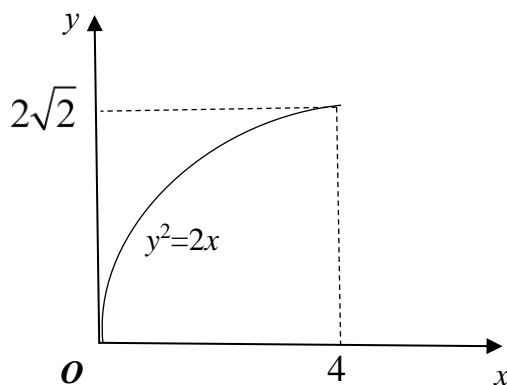


Рисунок 3.3 – Крива  $l$  у прикладі 1



*Розв'язання.* В цьому прикладі криву  $l$  зручно задати рівнянням  $x = \frac{y^2}{2}$ .

Тоді  $dl = \sqrt{1 + y^2} dy$ ,  $0 \leq y \leq 2\sqrt{2}$  і за формулою (3.7) дістанемо

$$\begin{aligned} \int_l \frac{y^3}{x} dl &= 2 \int_0^{2\sqrt{2}} y \sqrt{1 + y^2} dy = \int_0^{2\sqrt{2}} (1 + y^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + y^2) = \frac{2}{3} (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2}{3} \left[ (1 + 8)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{52}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислити  $\int_l (2x + 4y - 4z + 7) dl$ , де  $l$  – відрізок прямої між точками  $A(8;9;3)$  і  $B(6;10;5)$ .

*Розв'язання.* Складемо рівняння прямої, що проходить через точки  $A$  і  $B$  у вигляді

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Маємо:

$$\frac{x - 8}{-2} = \frac{y - 9}{1} = \frac{z - 3}{2} = t.$$

Звідси одержуємо рівняння прямої в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = -2t + 8, \\ y = t + 9, \\ z = 2t + 3. \end{cases}$$

При цьому точці  $A$  відповідає значення параметру  $t = 0$ , а точці  $B$  –  $t = 1$ , тобто  $0 \leq t \leq 1$ , а  $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \sqrt{4 + 1 + 4} dt = 3dt$  і

$$\int_l (2x + 4y - 4z + 7) dt = 3 \int_0^1 [2(-2t + 8) + 4(t + 9) - 4(2t + 3) + 7] dt =$$

$$= 3 \int_0^1 (47 - 8t) dt = 3 \left( 47t - 4t^2 \right) \Big|_0^1 = 3(47 - 4) = 129.$$

**Приклад 3.** Обчислити  $\int_l x dl$ , де  $l$  – дуга кола  $x^2 + y^2 = 9$ , від точки  $(3,0)$  до точки  $(0,3)$  (рис. 3.4).

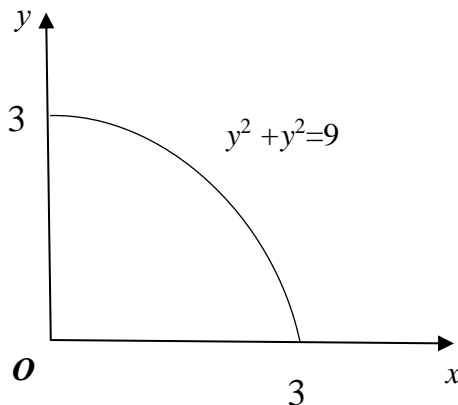


Рисунок 3.4 – Крива  $l$  у прикладі 3

*Розв'язання.* Запишемо рівняння  $l$  у параметричному вигляді:  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ , при цьому  $t \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ .

За формулою (3.5) матимемо

$$\int_l x dl = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 9 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 9.$$

**Приклад 4.** Обчислити  $\int_l (x + y) dl$ , де  $l$  – пелюсток лемніскати Бернуллі  $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$ , розташований у першому координатному куті (рис. 3.5).

*Розв'язання.* Скористуємось формулою (3.8), попередньо обчисливши  $dl$ :

$$\rho' = \frac{2 \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}};$$

$$\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = 4 \sin 2\varphi + \frac{4 \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{4}{\sin 2\varphi};$$

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi = \frac{2}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi.$$

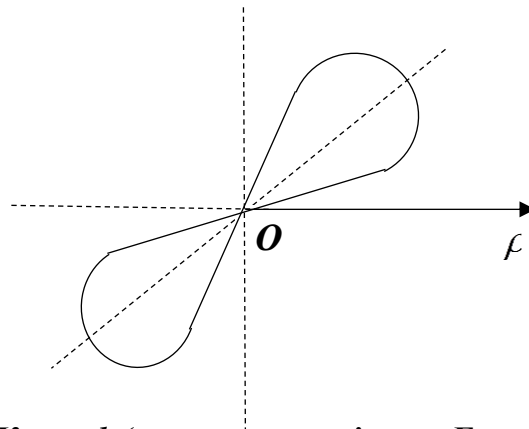


Рисунок 3.5 – Крива  $l$  (пелюсток лемніскати Бернуллі) у прикладі 4

У першому координатному куті полярна координата  $\varphi$  змінюється від 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , тоді

$$\begin{aligned} \int_l (x + y) dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \frac{2}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 4(\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4(1 + 1) = 8. \end{aligned}$$

### Застосування криволінійних інтегралів по довжині дуги.

1. Довжина дуги  $AB$  кривої  $l$  обчислюється за формулою:

$$l_{AB} = \int_{AB} dl. \quad (3.9)$$

2. Маса матеріальної дуги  $AB$  кривої  $l$ , в кожній точці якої задана густина маси  $\gamma(x, y, z)$ , обчислюється за формулою:

$$m = \int_{AB} \gamma(x, y, z) dl. \quad (3.10)$$

Якщо  $l$  – плоска крива, то густина маси  $\gamma(x, y)$  і формула для обчислення маси матеріальної дуги  $AB$  буде такою:

$$m = \int_{AB} \gamma(x, y) dl. \quad (3.11)$$

3. Статистичні моменти плоскої дуги  $AB$  відносно координатних вісей визначаються за формулами:

$$M_x = \int_{AB} y\gamma(x, y) dl, \quad (3.12)$$

$$M_y = \int_{AB} x\gamma(x, y) dl.$$

4. Координати центра тяжіння плоскої матеріальної дуги  $AB$  визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{AB} x\gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}, \quad (3.13)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{AB} y\gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}.$$

5. Моменти інерції матеріальної дуги  $AB$  відносно координатних вісей і початку координат обчислюються за формулами:

$$J_x = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl,$$

$$J_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl, \quad (3.14)$$

$$J_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl.$$

6. Притягання точкової маси матеріальної кривої. Якщо  $AB$  – дуга матеріальної кривої з густиною розподілу маси  $\gamma(x, y)$ , а  $m_0$  – точкова маса, що займає положення  $(x_0, y_0)$ , то дуга  $AB$  притягає масу  $m_0$  з силою  $\vec{F}(F_x, F_y)$ , проекції якої на вісі координат обчислюються за формулами:

$$F_x = \nu m_0 \int_{AB} \frac{\gamma(x, y)(x - x_0)}{r^3} dl, \tag{3.15}$$

$$F_y = \nu m_0 \int_{AB} \frac{\gamma(x, y)(y - y_0)}{r^3} dl,$$

де  $\nu$  – стала тяжіння,  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

**Приклад 1.** Знайти центр маси дуги  $AB$  астероїди  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ , що розміщена в першому координатному куті (рис. 3.6), якщо лінійна густина в кожній точці кривої дорівнює сумі її координат.

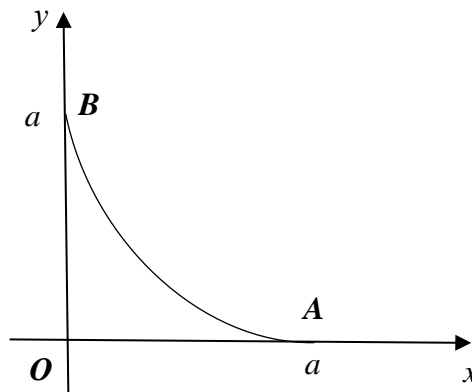


Рисунок 3.6 – Дуга  $AB$  астероїди у прикладі 1

*Розв'язання.* Скористаємося формулами (3.13) та формулою (3.5) обчислення криволінійних інтегралів. Матимемо

$$\gamma(x, y) = x + y, \quad x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t,$$

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{3}{2} a \sin 2t dt, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{AB} \gamma(x, y) dl = \int_{AB} (x + y) dl = \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t + \sin^3 t) \sin 2t dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t \sin t + \sin^4 t \cos t) dt =$$

$$= 3a^2 \left( -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) \right) = 3a^2 \left( -\frac{\cos^5 t}{5} + \frac{\sin^5 t}{5} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6a^2}{5},$$

$$\int_{AB} x\gamma(x, y) dl = \int_{AB} x(x, y) dl = \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t (\sin^3 t + \cos^3 t) \sin 2t dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{8} \sin^4 2t + 2 \cos^7 t \sin t \right) dt = \frac{3}{2} a^3 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{32} (1 - \cos 4t)^2 dt - \frac{\cos^8 t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} a^3 \left[ \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 4t + \cos^2 4t) dt + \frac{1}{4} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} a^3 \left[ \frac{1}{32} \left( \left( t - \frac{1}{2} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 8t) dt \right) + \frac{1}{4} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} a^3 \left[ \frac{1}{32} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{8} \sin 8t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) + \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{2} a^3 \left[ \frac{1}{32} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{8} a^3 \left( \frac{3}{32} \pi + 1 \right),$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} y\gamma(x, y) dl &= \int_{AB} y(x+y) dl = \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t (\cos^3 t + \sin^3 t) \sin 2t dt = \\ &= \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2\sin^7 t \cos t + \frac{1}{8} \sin^4 2t \right) dt = \\ &= \frac{3}{2} a^3 \left( \frac{\sin^8 t}{8} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)^2 dt \right) = \frac{3}{8} a^3 \left( \frac{3}{32} \pi + 1 \right). \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$x_c = y_c = \frac{\frac{3}{8} a^3 \left( \frac{3}{32} \pi + 1 \right)}{\frac{6}{5} a^2} = \frac{5}{16} a \left( \frac{3}{32} \pi + 1 \right).$$

**Приклад 2.** Знайти моменти інерції відносно координатних вісей і початку координат відрізка прямої  $y^2 - 2x - 3 = 0$  між точками  $A(-2; -1)$  та  $B(0; 3)$  (рис. 3.7), якщо лінійна густина  $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$ .

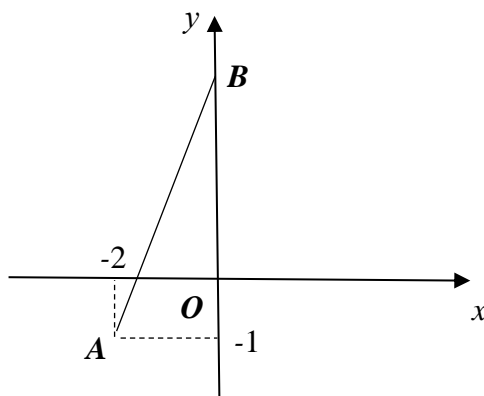


Рисунок 3.7 – Дуга  $AB$  (відрізок) у прикладі 2

*Розв'язання.* За формулами (3.14) маємо:

$$J_x = \int_{AB} x^2 (x^2 + y^2) dl,$$

$$J_y = \int_{AB} y^2 (x^2 + y^2) dl,$$

$$J_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2) dl.$$

$AB$  – відрізок прямої, рівняння якої має вигляд  $y = 2x + 3$ , тому

$$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \sqrt{5} dx.$$

Тоді

$$\begin{aligned} J_x &= \sqrt{5} \int_{-2}^0 x^2 (x^2 + (2x + 3)^2) dx = \sqrt{5} \int_{-2}^0 (5x^4 + 12x^3 + 9x^2) dx = \\ &= \sqrt{5} (x^5 + 3x^4 + 3x^3) \Big|_{-2}^0 = 8\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \sqrt{5} \int_{-2}^0 (2x + 3)^2 (x^2 + (2x + 3)^2) dx = \\ &= \sqrt{5} \left( \int_{-2}^0 (4x^4 + 12x^3 + 9x^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (2x + 3) d(2x + 3) \right) = \\ &= \sqrt{5} \left( \left( \frac{4}{5} x^5 + 3x^4 + 3x^3 \right) \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{10} (2x + 3)^5 \Big|_{-2}^0 \right) = 26\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_0 &= \sqrt{5} \int_{-2}^0 (x^2 + (2x + 3)^2)^2 dx = \sqrt{5} \int_{-2}^0 (x^4 + 2x^2(2x + 3)^2 + (2x + 3)^4) dx = \\ &= \sqrt{5} \int_{-2}^0 (9x^4 + 24x^3 + 18x^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (2x + 3)^4 d(2x + 3) = \left( \frac{9}{5} x^5 + 6x^4 + 6x^3 \right) \Big|_{-2}^0 + \\ &+ \frac{1}{10} (2x + 3)^5 \Big|_{-2}^0 = \frac{9}{5} \cdot 32 - 6 \cdot 16 + 6 \cdot 8 + \frac{243}{10} + \frac{1}{10} = 34\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

*Розв'язання.* На рис. 3.8 зображена одна арка циклоїди. Точкам  $O$  і  $AB$  відповідають значення параметра відповідно  $t=0$  і  $t = 2\pi$ .



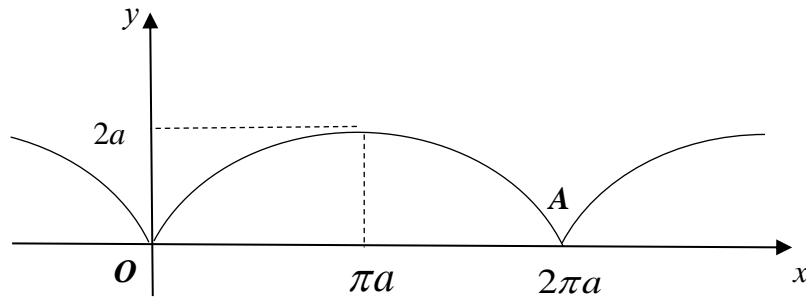


Рисунок 3.8 – Дуга  $OA$  (арка циклоїди) у прикладі 3

За формулою (3.9) довжина дуги  $l_{AB} = \int_{AB} dl$ . Обчислимо  $dl$  для заданої циклоїди. Маємо:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t,$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a^2 \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt. \end{aligned}$$

Отже,

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \left( \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -4a(-1 - 1) = 8a.$$

### Завдання для самостійного розв'язання до розділу 3

1. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги по заданій кривій  $l$ .

1.1.  $\int_l \frac{dl}{x - y}$ ,  $l$  – відрізок прямої між точками  $A(0; -2)$  і  $B(4; 0)$ .

1.2.  $\int_l x^2 dl$ ,  $l$  – верхнє півколо  $x^2 + y^2 = 1$  між точками  $A(-1; 0)$  і  $B(1; 0)$ .

$$1.3. \int_l \sqrt{1+x^8} dl, l - \text{дуга кривої } 5y = x^5 \text{ між точками } A(0; 0) \text{ і } B(1; \frac{1}{5}).$$

$$1.4. \int_l \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dl, l - \text{дуга косинусоїди } y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$1.5. \int_l \cos^4 x \sin x dl, l - \text{дуга кривої } y = \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

2. Знайти масу даної матеріальної дуги  $l$ , якщо задана лінійна густина маси  $\gamma(x, y, z)$ .

$$2.1. \gamma(x, y, z) = xyz, l - \text{дуга кривої } x = \frac{1}{2}t^2, y = t, z = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, 0 \leq t \leq 1.$$

$$2.2. \gamma(x, y, z) = x + y + z, l - \text{відрізок прямої між точками } A(0; 0; 0) \text{ і } B(1; 1; 1).$$

$$2.3. \gamma(x, y, z) = z, l - \text{дуга гвинтової лінії } x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$2.4. \gamma(x, y, z) = \sqrt{1+x}, l - \text{дуга кривої } x = \sin^2 t, y = \frac{1}{2}\sin 2t, z = \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$2.5. \gamma(x, y, z) = x^2 + y^2, l - \text{дуга кривої } x = 3(\cos t + t \sin t), y = 3(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

## РОЗДІЛ 4. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ПО КООРДИНАТАХ (ДРУГОГО РОДУ)

### Означення криволінійного інтеграла по координатах

Нехай задана гладка або кусково-гладка просторова крива  $l$ , яка обмежена точками  $A$  і  $B$ , кожній точці якої задана вектор-функція  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ , де функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – неперервні на кривій  $l$ . Розіб'ємо криву  $l$  на  $n$  частинних дуг точками  $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ . Кожній частинній дузі  $A_{i-1}A_i$  поставимо у відповідність вектор  $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ . Позначимо його довжину  $\Delta l_i$ , тобто  $|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}| = \Delta l_i$ . Покладемо  $\lambda = \max_i \Delta l_i, i = 1, 2, \dots, n$ . На кожній частинній дузі візьмемо точку  $M_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  і обчислимо скалярний добуток

$$\left(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right) = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i.$$

Складемо суму

$$J_n = \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right) = \sum_{i=1}^n (P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i), \quad (4.1)$$

яка називається інтегральною сумою від вектор-функції  $\vec{F}(x, y, z)$  вздовж кривої  $l$  від точки  $A$  до точки  $B$ .

**Означення.** Якщо існує скінченна границя інтегральних сум  $J_n$  за умови  $\lambda \rightarrow 0$ , яка не залежить від способу розбиття кривої  $l$  на частинні дуги та від вибору точок  $M_i$  на них, то ця границя називається криволінійним інтегралом по координатах (або криволінійним інтегралом другого роду) від вектор-функції  $\vec{F}(x, y, z)$  по кривій  $l$  (або дузі  $AB$ ).

Позначається

$$\int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

або

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Отже, за означенням маємо

$$\begin{aligned} \int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Криволінійний інтеграл по плоскій кривій  $l$  від вектор-функції  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  має вигляд

$$\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i). \quad (4.3)$$

Як і раніше, умова  $\lambda \rightarrow 0$ , означає, що  $n \rightarrow \infty$ .

Криволінійні інтеграли по координатах мають ті ж найпростіші властивості, що і інтеграли по довжині дуги. Але, на відміну від останніх, вони залежать від вибору напрямку обходу кривої: якщо змінити напрям обходу, то інтеграл змінює знак, тобто

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= - \int_{BA} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \end{aligned}$$

або

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

У випадку замкненої кривої напрям обходу кривої  $l$ , як правило, такий, що область, обмежена цією кривою, залишається завжди зліва (рис. 4.1). При цьому інтеграл позначається

$$\oint_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad \text{або} \quad \oint_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

а напрям обходу називається додатним.

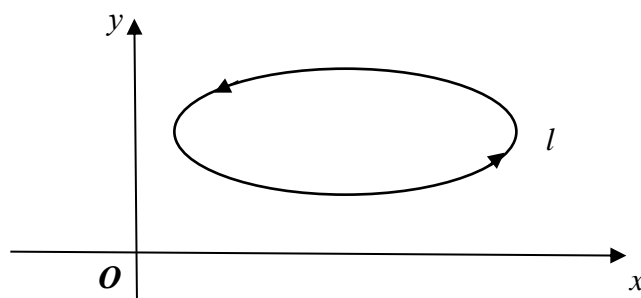


Рисунок 4.1 – Напрямок обходу замкненої кривої

### Обчислення криволінійних інтегралів по координатах

Обчислення криволінійних інтегралів по координатах зводиться до обчислення визначеного інтеграла:

1. Якщо просторова крива  $l$  задана параметрично

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

тоді

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt, \quad dz = z'(t)dt,,$$

а при переміщенні з точки  $A$  в точку  $B$  параметр змінюється від  $t_1$  до  $t_2$ . Тоді

$$\int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \tag{4.4}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.$$

2. Якщо плоска крива задана параметрично

$$x = x(t), y = y(t),$$

то по аналогії з формулою (4.4) маємо

$$\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt. \quad (4.5)$$

3. Якщо плоска крива задана рівнянням  $y = y(x)$  і при переміщенні з точки  $A$  в точку  $B$   $x$  змінюється від  $a$  до  $b$ , то  $dy = y'(x)dx$  і тоді

$$\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx. \quad (4.6)$$

4. Якщо плоска крива задана рівнянням  $x = x(y)$  і при переміщенні з точки  $A$  в точку  $B$   $y$  змінюється від  $c$  до  $d$ , то  $dx = x'(y)dy$  і тоді

$$\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy. \quad (4.7)$$

Слід відмітити, що нижня межа визначених інтегралів у правій частині наведених формул для обчислення криволінійних інтегралів другого роду не завжди менша за верхню.

**Приклад 1.** Обчислити  $\int_l (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ , де  $l$  – дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $A(-1;1)$  до точки  $B(1;1)$  (рис. 4.2).

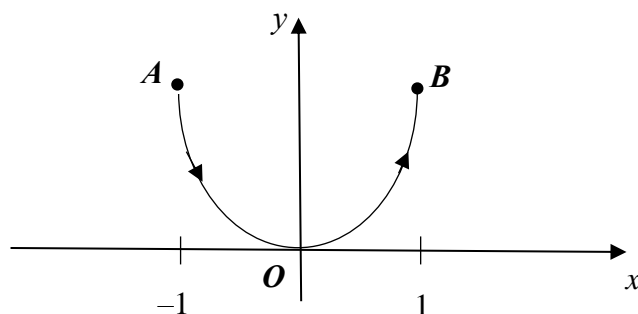


Рисунок 4.2 – Крива  $l$  (дуга параболи) у прикладі 1

*Розв'язання.* Оскільки  $y = x^2$ ,  $dy = 2xdx$  і при переміщенні від точки  $A$  до точки  $B$   $x$  змінюється від  $-1$  до  $1$ , то за формулою (4.6) маємо

$$\int_l (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_{-1}^1 [x^2 - 2x \cdot x^2 + ((x^2)^2 - 2x \cdot x^2)2x]dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \\
&= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \right) - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \right) = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}.
\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислити  $\int_l xdx + xdy$ , де  $l$  – дуга астрои́ди

$x = 2\cos^3 t$ ,  $y = 2\sin^3 t$  від точки  $A(2;0)$  до точки  $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  (рис. 4.3).

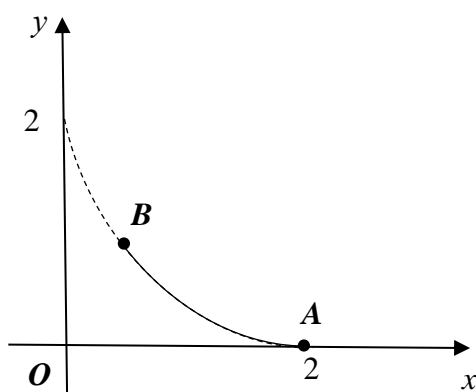


Рисунок 4.3 – Крива  $l$  (дуга астрои́ди) у прикладі 2

*Розв'язання.* Для обчислення заданого інтеграла скористаємось формулою (4.5). Знаходимо

$$dx = -6\cos^2 t \sin t dt, \quad dy = 6\sin^2 t \cos t dt.$$

Тоді

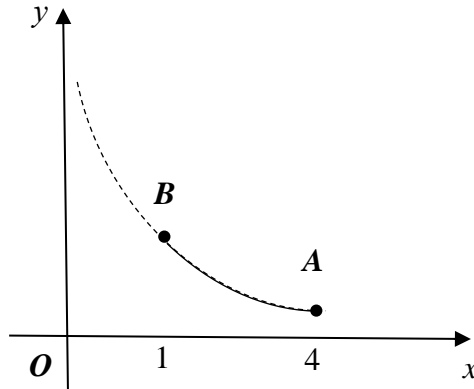
$$\begin{aligned}
ydx + xdy &= -12\sin^4 t \cos^2 t dt + 12\cos^4 t \sin^2 t dt = \\
&= 12\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = 3\sin^2 2t \cos 2t dt.
\end{aligned}$$

Точці  $A$  відповідає значення параметра  $t=0$ , а точці  $B$  –  $t = \frac{\pi}{4}$ . Тоді

$$\int_l ydx + xdy = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \cos 2t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t d \sin 2t =$$

$$= \frac{3 \sin^3 2t}{2 \cdot 3} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left( \sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 3.** Обчислити  $\int_l x^2 dx + \frac{dy}{y}$ , де  $l$  – дуга кривої  $x = \frac{1}{y}$  від точки  $A\left(4; \frac{1}{4}\right)$  до точки  $B(1;1)$  (рис. 4.4).



**Рисунок 4.4 – Крива  $l$  у прикладі 3**

*Розв'язання.* Оскільки  $x = \frac{1}{y}$ ,  $dx = -\frac{dy}{y^2}$  і при переміщенні від точки  $A$  до точки  $B$   $y$  змінюється від  $\frac{1}{4}$  до 1, то за формулою (4.7) маємо

$$\begin{aligned} \int_l x^2 dx + \frac{dy}{y} &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left[ \frac{1}{y^2} \left( -\frac{1}{y^2} \right) + \frac{1}{y^2} \right] dy = \int_{\frac{1}{4}}^1 \left( \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^4} \right) dy = \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} \right) \Big|_{\frac{1}{4}}^1 = \\ &= \left( -1 + \frac{1}{3} \right) - \left( -4 + \frac{64}{3} \right) = -18. \end{aligned}$$

**Приклад 4.** Обчислити  $\int_l x dx + y dy + (x + y - 1) dz$ , де  $l$  – відрізок прямої, що з'єднує точки  $A(1;1;1)$  і  $B(2;3;4)$ .

*Розв'язання.* Складемо рівняння прямої, що проходить через точки  $A$  і  $B$  у вигляді

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$



Одержимо

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t$$

або в параметричному виді

$$x = t + 1, y = 2t + 1, z = 3t + 1.$$

При цьому  $dx = dt$ ,  $dy = 2dt$ ,  $dz = 3dt$ . При переміщенні від точки  $A$  до точки  $B$  параметр  $t$  змінюється від 0 до 1, тоді за формулою (4.4) маємо

$$\begin{aligned} \int_l xdx + ydy + (x + y - 1)dz &= \int_0^1 (t+1)dt + (2t+1)2dt + (t+1+2t+1-1)3dt = \\ &= \int_0^1 (14t + 6)dt = (7t^2 + 6t) \Big|_0^1 = 13. \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Обчислити криволінійний інтеграл  $\int_l xydx - y^2dy$ , де  $l$  – замкнений контур, утворений лініями  $y = x^2$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$  (рис. 4.5).

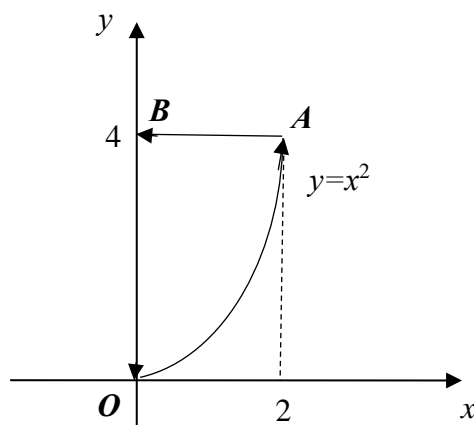


Рисунок 4.5 – Крива  $l$  (замкнений контур) у прикладі 5

*Розв'язання.* На підставі властивості адитивності криволінійних інтегралів обчислимо заданий інтеграл по кожній з кривих:  $OA$ ,  $AB$ ,  $BO$  і результати додамо. Одержимо

$$OA: y = x^2, dy = 2xdx, 0 \leq x \leq 2,$$

тоді

$$\int_{OA} xydx - y^2 dy = \int_0^2 (x^3 - 2x^5) dx = -\frac{52}{3};$$

$$AB: y=4, dy=0,$$

$x$  змінюється від 2 до 0, тоді

$$\int_{AB} xydx - y^2 dy = \int_2^0 4x dx = -8;$$

$$BO: x=0, dx=0,$$

$y$  змінюється від 4 до 0, тоді

$$\int_{BO} xydx - y^2 dy = -\int_4^0 y^2 dy = \frac{64}{3}.$$

Отже,

$$\int_l xydx - y^2 dy = -\frac{52}{3} - 8 + \frac{64}{3} = -4.$$

### Формула Гріна

**Означення.** Плоска область  $D$  називається однозв'язною, якщо для будь-якого замкненого контуру  $l$ , що лежить в ній, обмежена цим контуром область також цілком лежить в області  $D$ .

На рис. 4.6 наведено: а) однозв'язну, б) двозв'язну, в) тризв'язну області.

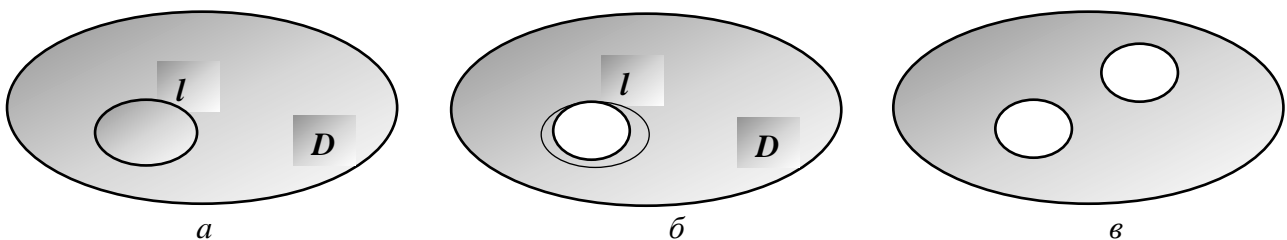


Рисунок 4.6 – Приклад однозв'язної (а), двозв'язної (б), тризв'язної (в) області

Як показано на рис. 4.6, однозв'язна область не має „дірок”.

**Означення.** Просторова область  $V$  називається однозв'язною, якщо на будь-який замкнений контур  $l$ , що лежить в ній, можна натягнути поверхню, що також цілком лежить в області  $V$ .

Нехай  $l$  – кусково-гладкий контур на площині  $xOy$ , а  $D$  – обмежена цим контуром замкнена однозв'язна область. В області  $D$  задані неперервні функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$ , що мають в цій області неперервні частинні похідні. Тоді має місце формула Гріна

$$\oint_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.8)$$

де напрям на контурі  $l$  обрано так, щоб при переміщенні по контуру область  $D$  весь час залишалась зліва. Формула Гріна встановлює зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом.

### Незалежність криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування

Розглянемо як плоску, так і просторову області.

1. Нехай функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  та їх частинні похідні  $\frac{\partial P}{\partial y}$  і  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  неперервні в замкненій однозв'язній плоскій області  $D$ . Тоді справедливими є такі твердження:

а)  $\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , де  $l$  – будь-який замкнений контур, що

лежить в області  $D$ ;

б)  $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  не залежить від форми шляху, що з'єднує точки

$A$  і  $B$ , якщо  $AB$  лежить в області  $D$ ;

в)  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$ , тобто вираз  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  є повним диференціалом деякої функції  $U(x, y)$ , яка визначена в області  $D$ ;

г) рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.9)$$

виконується у всіх точках області  $D$ .

Всі чотири твердження рівносильні між собою і, як наслідок, маємо формулу

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} dU(x,y) = U(x,y) \Big|_A^B = U(B) - U(A). \quad (4.10)$$

2. Нехай функції  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$  і  $R(x,y,z)$  неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій однозв'язній просторовій області  $V$ . Тоді справедливими є такі твердження:

а)  $\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$ , де  $l$  – будь-який замкнений

контур, що лежить в області  $V$ ;

б)  $\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$  не залежить від форми шляху,

що з'єднує точки  $A$  і  $B$ , якщо  $AB$  лежить в області  $V$ ;

в)  $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z)$ , тобто вираз

$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$  є повним диференціалом деякої функції  $U(x,y,z)$ , яка визначена в області  $V$ ;

г) рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (4.11)$$

виконуються у всіх точках області  $V$ .

При цьому, як наслідок, маємо формулу

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{AB} dU(x,y,z) = U(x,y,z) \Big|_A^B = U(B) - U(A). \quad (4.12)$$

### Знаходження функції за її повним диференціалом

На підставі розглянутих вище тверджень можна відшукати функцію, якщо відомий її головний диференціал.

1. Рівність (4.9)  $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$  є умовою того, що вираз

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$  є повним диференціалом деякої функції  $U(x,y)$ , тобто

$$U(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Тоді

$$\int_{M_0M} dU(x, y) = \int_{M_0M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

або

$$U(x, y) = \int_{M_0M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

де  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M(x, y)$  є точки області  $D$ , причому  $M$  – довільна точка, а  $D$  – область визначення функції  $P(x, y, z)$  і  $Q(x, y, z)$ , і криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а тільки від початкової і кінцевої точок цього шляху. Як правило, цей шлях вибирається у вигляді ламаної, відрізки якої паралельні вісям координат (рис. 4.7). Тоді формулу для знаходження функції за її повним диференціалом в цьому випадку можна записати у вигляді

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy. \quad (4.13)$$

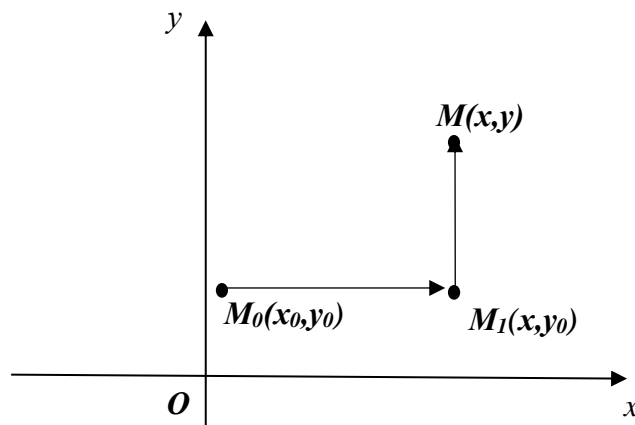


Рисунок 4.7 – Ламана, як приклад форми шляху інтегрування

2. Якщо виконуються умови (4.11):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

то вираз  $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  є повним диференціалом деякої функції  $U(x, y, z)$ , тобто

$$dU(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Тоді

$$\int_{M_0M} dU(x, y, z) = \int_{M_0M} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

або

$$U(x, y, z) = \int_{M_0M} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

де  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M(x, y, z)$  є точками просторової області  $V$ , в якій визначені функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  і  $R(x, y, z)$ . Як і раніше, за шлях інтегрування  $M_0M$  береться ламана, що з'єднує точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  і  $M(x, y, z)$ , відрізки якої паралельні вісям координат (рис. 4.8) і формула для знаходження функції за її повним диференціалом в даному випадку набуває вигляду

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz. \quad (4.14)$$

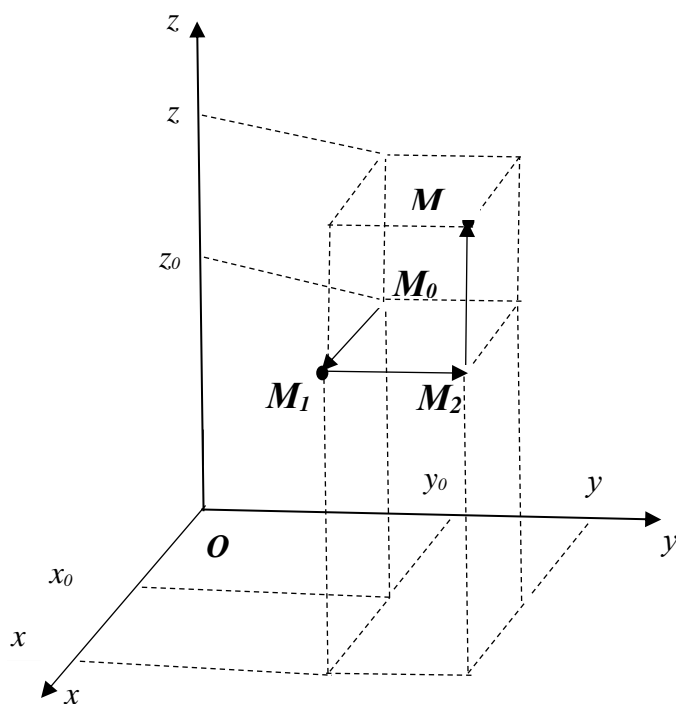


Рисунок 4.8 – Ламана, як приклад форми шляху інтегрування

**Приклад 1.** Обчислити криволінійний інтеграл  $\oint_l x^2 y dx + xy^2 dy$ , де  $l$  – коло

$x^2 + y^2 = 4$ , обхід по якому відбувається в додатному напрямі: а) за формулою Гріна; б) безпосередньо.

*Розв'язання.* а) використаємо формулу Гріна:

$$\oint_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

де  $P(x, y) = -x^2 y$ ,  $Q(x, y) = xy^2$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$ .

Тоді

$$\oint_l -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy.$$

У подвійному інтегралі перейдемо до полярних координат, оскільки областю інтегрування  $D$  є круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = 4 = \rho^2 \Rightarrow \rho = 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$\iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \iint_D \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 \right) = 2\pi \cdot 4 = 8\pi.$$

б) використаємо формулу (4.5), що зводить обчислення криволінійного інтеграла до обчислення визначеного інтеграла. Рівняння кола у параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тоді  $dx = -2 \sin t dt$ ,  $dy = 2 \cos t dt$  і

$$\oint_l -x^2 y dx + xy^2 dy = \int_0^{2\pi} (16 \cos^2 t \sin^2 t + 16 \sin^2 t \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 32 \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 t \cos^2 t dt = 8 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = 8 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 4 \left( t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

**Приклад 2.** Впевнитись, що вираз  $(1 - \sin 2x)dy - (3 + 2y \cos 2x)dx$  є повним диференціалом деякої функції  $U(x, y)$  та знайти цю функцію.

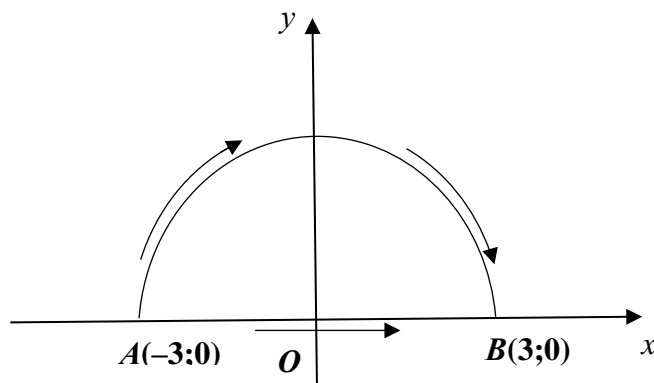
*Розв'язання.* Маємо  $P(x, y) = -(3 + 2y \cos 2x)$ ,  $Q(x, y) = 1 - \sin 2x$ . Ці функції неперервні з частинними похідними  $\frac{\partial P}{\partial y} = -2 \cos 2x$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2 \cos 2x$  на всій площині  $xOy$ . Оскільки  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , то

$$(1 - 2 \sin 2x)dy - (3 + 2y \cos 2x)dx = dU(x, y).$$

Для знаходження функції за її повним диференціалом скористуємось формулою (4.13), беручи  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ . Отже,

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy = \int_0^x (-3)dx + \int_0^y (1 - \sin 2x)dy + C = \\ &= -3x + (1 - \sin 2x)y + C. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Обчислити  $\int_l x^2 dx + y^2 dy$ , де  $l$  – верхня половина кола  $x^2 + y^2 = 9$ , обхід якої відбувається за годинниковою стрілкою (рис. 4.9).



**Рисунок 4.9 – Крива  $l$  (верхня половина кола) у прикладі 3**

*Розв'язання.* Маємо  $P(x, y) = x^2$ ,  $Q(x, y) = y^2$  і оскільки  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ , то результат інтегрування не залежить від форми шляху інтегрування. Тому інтегрування по верхній половині кола замінюємо інтегруванням по відрітку вісі



$Ox$ , що з'єднує точки перетину кола  $A(-3;0)$  і  $B(3;0)$  з віссю  $Ox$ . На цьому відрізку  $y=0$  і  $dy=0$ , а  $x$  змінюється від  $-3$  до  $3$ . Отже,

$$\int_l x^2 dx + y^2 dy = \int_{-3}^3 x^2 dx = 2 \int_0^3 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 2 \frac{27}{3} = 18.$$

**Приклад 4.** Впевнитись, що вираз  $(y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$  є повним диференціалом деякої функції  $U(x, y, z)$  та знайти цю функцію.

*Розв'язання.* Маємо  $P(x, y, z) = y + z$ ,  $Q(x, y, z) = x + z$ ,  $R(x, y, z) = x + y$ . Ці функції неперервні з частинними похідними

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial P}{\partial z} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \frac{\partial R}{\partial y} = 1$$

у всьому просторі  $Oxyz$ . Оскільки  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ , то

$$(y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = dU(x, y, z).$$

Для знаходження функції за її повним диференціалом скористаємося формулою (4.14), беручи  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ . Отже,

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_0^x P(x, 0, 0) dx + \int_0^y Q(x, y, 0) dy + \int_0^z R(x, y, z) dz = \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y x dy + \int_0^z (x+y) dz + C = xy + xz + yz + C. \end{aligned}$$

### Застосування криволінійних інтегралів по координатах

1. Площа області  $D$ , обмеженої замкненим контуром  $l$ , знаходиться за формулою

$$S = \frac{1}{2} \oint_l x dy - y dx, \quad (4.15)$$

де напрям обходу  $l$  – додатний.

2. Нехай  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  є змінна сила, яка виконує роботу  $W$  вздовж шляху  $l$ , а функції  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  неперервні на кривій  $l$ , тоді

$$W = \int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (4.16)$$

або

$$W = \int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (3.31)$$

де сила

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

виконує роботу вздовж плоского шляху  $l$ .

**Приклад 1.** Обчислити площу еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

*Розв'язання.* Задамо рівняння еліпса параметрично:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

За формулою (4.15) знаходимо:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_l xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t - b \sin t (-a \sin t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

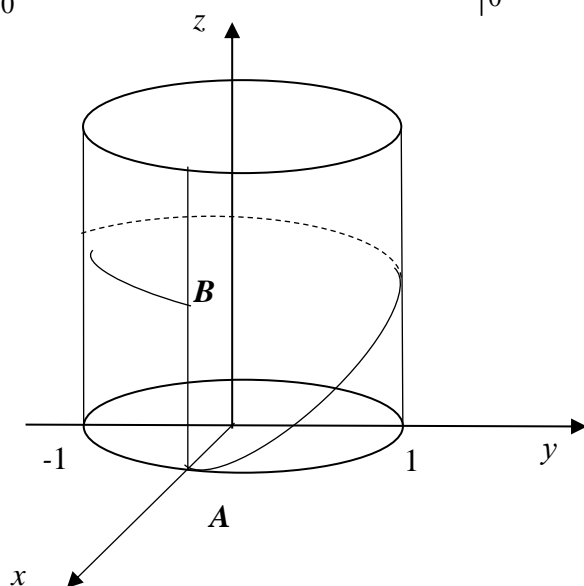
**Приклад 2.** Обчислити роботу сили  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  при переміщенні матеріальної точки вздовж першого витка гвинтової лінії  $l$ :

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

*Розв'язання.* Дана гвинтова лінія розміщена на циліндрі  $x^2 + y^2 = 9$  (рис. 4.10), причому точці  $A$  відповідає значення параметру  $t_A = 0$ , а точці  $B$  –  $t_B = 2\pi$ . Оскільки  $dx = -\sin t dt$ ,  $dy = \cos t dt$ ,  $dz = dt$ , то за формулою (4.16) маємо

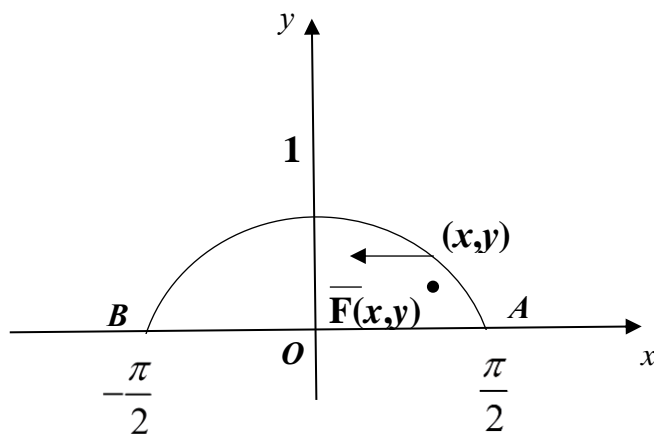
$$W = \int_l P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$



**Рисунок 4.10** – Крива  $l$  (гвинтова лінія розміщена на циліндрі) у прикладі 2

**Приклад 3.** У кожній точці силового поля сила має напрям від'ємної піввісі абсцис і дорівнює квадрату ординати точки прикладання. Знайти роботу поля при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої  $y = \cos x$ ,  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , від точки  $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$  до точки  $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  (рис. 4.11).



**Рисунок 4.11 – Переміщення матеріальної точки вздовж заданої кривої**

*Розв'язання.* За умовою задачі в кожній точці  $(x, y)$  проекції сили  $\vec{F}(x, y)$  на координатні вісі дорівнюють  $P(x, y) = \vec{F}_x(x, y) = -y^2$ ,  $Q(x, y) = \vec{F}_y(x, y) = 0$ . За формулою (4.17) маємо

$$\begin{aligned} W &= - \int_{AB} y^2 dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 2x)}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Завдання для самостійного розв'язання до розділу 4**

**1.** Обчислити криволінійний інтеграл по координатах по заданій кривій  $l$ .

1.1.  $\int_l \frac{y}{x} dx + x dy$ ,  $l$  – дуга кривої  $y = \ln x$  між точками  $A(1; 0)$  і  $B(1; 1)$ .

1.2.  $\int_l \frac{y^2 + 1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$ ,  $l$  – відрізок прямої між точками  $A(1; 2)$  і  $B(2; 4)$ .

1.3.  $\int_l \cos x dx + \frac{1}{y^2} dy$ ,  $l$  – дуга кривої  $y = \operatorname{tg} x$  між точками  $x_1 = \frac{\pi}{4}$  і  $x_2 = \frac{\pi}{3}$ .

1.4.  $\int_l 2xy dy - x^2 dy$ ,  $l$  – дуга параболи  $y = \frac{1}{4} x^2$  між точками  $O(0; 0)$  і  $A(2; 1)$ .

1.5.  $\int_l (xy - 1) dx + x^2 y dy$ ,  $l$  – відрізок прямої між точками  $A(1; 1)$  і  $B(0; 2)$ .

**2.** Обчислити роботу сили  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії  $l$  в заданому напрямку.

2.1.  $\vec{F}(x, y) = \left( -\frac{x^2}{x^2 + y^2}, \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $l$  – верхнє півколо  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,

$0 \leq t \leq \pi$ .

2.2.  $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, -x^2z)$ ,  $l$  – відрізок прямої від точки  $O(0; 0; 0)$  до точки  $A(-2; 4; 5)$ .

2.3.  $\vec{F}(x, y, z) = (-\cos z, 0, -\sin z)$ ,  $l$  – відрізок прямої від точки  $A(2; 0; -2)$  до точки  $B(-2; 0; 2)$ .

2.4.  $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ ,  $l$  – дуга кривої  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ , переміщення по якій здійснюється від точки  $O(0; 0; 0)$  до точки  $A(1; 1; 1)$ .

2.5.  $\vec{F}(x, y) = (x, xy)$ ,  $l$  – верхня половина кола  $x = \cos t + 1$ ,  $y = \sin t$ , переміщення по якій здійснюється проти годинникової стрілки.

**3.** Перевірити, що під знаком криволінійного інтеграла стоїть повний диференціал, та обчислити цей криволінійний інтеграл.

3.1.  $\int_{(1;1;1)}^{(2;2;2)} \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$  (початок координат не лежить на шляху інтегрування).

3.2.  $\int_{(0;0;0)}^{(2;2;2)} yz dx + xz dy + xy dz$ .

3.3.  $\int_{(0;0)}^{(1;2)} (4xy + 3y^2 + 3x^2) dx + (2x^2 + 6xy) dy$ .

3.4.  $\int_{(0;0)}^{\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)} \cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy$ .

3.5.  $\int_{(0;0)}^{(-1;1)} (2x + y) dx + (x + 2y) dy$ .

## РОЗДІЛ 5. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПО ПЛОЩІ ПОВЕРХНІ (ПЕРШОГО РОДУ)

### Означення поверхневого інтеграла по площі поверхні

Поверхня називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична площина, яка неперервно змінюється вдовж поверхні. Поверхня, яка складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь називається кусково-гладкою.

Нехай в точках деякої кусково-гладкої поверхні  $\sigma$  задана неперервна функція  $f(x,y,z)$ . Розіб'ємо довільно поверхню  $\sigma$  на  $n$  частинних поверхонь  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  без спільних внутрішніх точок. Позначимо площу кожної з них  $\Delta\sigma_i, i=1, 2, \dots, n$ , а через  $d(\sigma_i)$  – діаметр  $i$ -тої частинної поверхні, тобто відстань між її найбільш віддаленими точками. Покладемо  $\lambda = \max d(\sigma_i), i=1, 2, \dots, n$ . На кожній частинній поверхні  $\sigma_i$  візьмемо довільну точку  $M_i(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, \dots, n$ , і обчислимо значення заданої функції  $f(x,y,z)$  в цих точках, та поможемо їх на відповідні площі  $\Delta\sigma_i$ . Складемо суму всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i, \quad (5.1)$$

яка називається інтегральною сумою для функції  $f(x,y,z)$  по поверхні  $\sigma$ .

**Означення.** Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум  $I_n$  за умови  $\lambda \rightarrow 0$ , яка не залежить від способу розбиття поверхні на частинні поверхні  $\sigma_i$  та від вибору точок  $M_i$  на них, то ця границя називається поверхневим інтегралом по площі поверхні (або поверхневим інтегралом першого роду) від функції  $f(x, y, z)$  по поверхні  $\sigma$ . Позначається  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$ .

Отже, за означенням  $\sigma$  маємо:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta\sigma_i. \quad (5.2)$$

Як і раніше, умова  $\lambda \rightarrow 0$  означає, що  $n \rightarrow \infty$ .

Поверхневий інтеграл по площі поверхні має властивості аналогічні властивостям криволінійного інтеграла по довжині дуги.

## Обчислення поверхневих інтегралів по площі поверхні

Обчислення поверхневого інтегралу по площі поверхні зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції цієї поверхні на яку-небудь координатну площину.

Нехай поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $z = z(x, y)$  і будь-яка пряма, що паралельна вісі  $Oz$ , перетинає цю поверхню лише в одній точці. Тоді поверхня  $\sigma$  однозначна проектується на площину  $xOy$ . Позначимо  $np_{xOy}\sigma = \sigma_{xy}$ . Елемент поверхні  $d\sigma$  визначається формулою

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos \gamma(M)|}, \quad (5.3)$$

де  $\gamma(M)$  – кут нормалі до поверхні  $\sigma$  з віссю  $Oz$  в її змінній точці  $M(x, y, z)$ . Якщо функція  $z = z(x, y)$  неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в цій області  $\sigma_{xy}$ , то має місце формула:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dxdy. \quad (5.4)$$

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $y = y(x, z)$ ,  $np_{xOz}\sigma = \sigma_{xz}$ , а  $y(x, z)$ ,  $y'_x(x, z)$ ,  $y'_z(x, z)$ - неперервні в  $\sigma_{xz}$ , тоді маємо

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2(x, z) + y_z'^2(x, z)} dx dz. \quad (5.5)$$

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $x = x(y, z)$ , то  $np_{yOz}\sigma = \sigma_{yz}$ , а  $x(y, z)$ ,  $x'_y(y, z)$ ,  $x'_z(y, z)$  – неперервні в  $\sigma_{yz}$ , тоді маємо

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)} dy dz. \quad (5.6)$$

**Приклад 1.** Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} (x^2 - 2y^2 + 3z) d\sigma$ , де  $\sigma$  – частина площини  $x + y + z = 2$  розміщена в першому октанті (рис. 5.1).

*Розв'язання.* Запишемо рівняння поверхні  $\sigma$  у вигляді  $z = 2 - x - y$  і застосуємо (5.4), знайшовши спочатку

$$z'_x = -1, z'_y = -1, \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{3}.$$

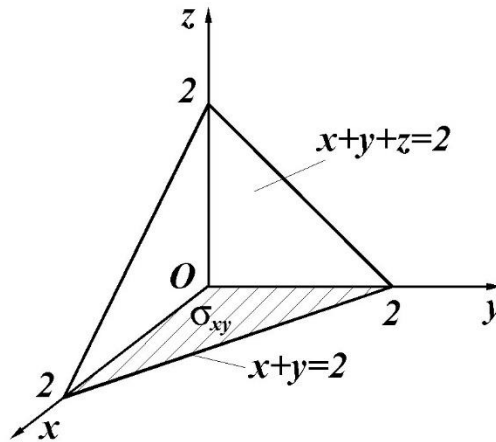


Рисунок 5.1 – Поверхня  $\sigma$  (частина площини розміщена в першому октанті) у прикладі 1

Тоді

$$J = \iint_{\sigma} (x^2 - 2y^2 + 3z) d\sigma = \sqrt{3} \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 - 2y^2 + 3(2 - x - y)) dx dy,$$

де  $\sigma_{xy}$  – трикутник у площині  $xOy$ , обмежений прямими  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Отже,

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{3} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2 - 2y^2 + 6 - 3x - 3y) dy = \\ &= \sqrt{3} \int_0^2 \left( x^2 y - \frac{2y^3}{3} + 6y - 3xy - \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=2-x} dx = \\ &= \sqrt{3} \int_0^2 \left( -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{3} \right) dx = \frac{8}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma$ , де  $\sigma$  – частина параболоїда  $z = 1 - x^2 - y^2$ , яка відтинається площиною  $z = 0$  (рис. 5.2).



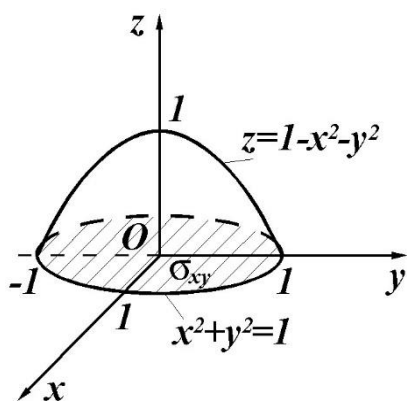


Рисунок 5.2 – Поверхня  $\sigma$  (частина параболоїда) у прикладі 2

*Розв'язання.* Оскільки рівняння поверхні  $z = 1 - x^2 - y^2$ , то будемо проектувати її на площину  $xOy$ . На рис. 5.2 відображено поверхню  $\sigma$  і її проекцію на площину  $xOy$ .  $\sigma_{xy}$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , обмежений колом  $x^2 + y^2 = 1$ , рівняння якого одержуємо якщо в рівнянні поверхні  $\sigma$  покладемо  $z = 0$ . Для обчислення заданого поверхневого інтеграла скористуємося формулою (5.4), знайшовши

$$z'_x = -2x, \quad z'_y = -2y, \quad \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

Отже

$$J = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} \left( \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \right)^2 dx dy.$$

Для обчислення подвійного інтегралу перейдемо до полярних координат

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 = 1, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

$$J = \iint_{\sigma_{xy}} (1 + 4\rho^2) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4\rho^2) \rho d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left( \frac{\rho}{2} + \rho^4 \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi.$$

### Застосування поверхневих інтегралів по площі поверхні

1. Площа поверхні  $\sigma$  обчислюється за формулою

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma. \quad (5.7)$$

2. Якщо на гладкій або кусково-гладкій поверхні розподілено масу з поверхневою густиною  $\gamma = \gamma(x, y, z)$ , причому  $\gamma(x, y, z)$  неперервна функція на цій поверхні то маса матеріальної поверхні обчислюється за формулою

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma \quad (5.8)$$

За цією формулою знаходиться і кількість будь-якої речовини, розподіленої на поверхні  $\sigma$ , якщо відома її поверхнева густина  $\gamma = \gamma(x, y, z)$ .

3. Координати центра маси матеріальної поверхні обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{\iint_{\sigma} x\gamma(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma},$$

$$y_c = \frac{\iint_{\sigma} y\gamma(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma}, \quad (5.9)$$

$$z_c = \frac{\iint_{\sigma} z\gamma(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma}.$$

Для однорідної поверхні ( $\gamma = const$ )

$$x_c = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}, \quad y_c = \frac{\iint_{\sigma} y d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}, \quad z_c = \frac{\iint_{\sigma} z d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}. \quad (5.10)$$

4. Моменти індукції поверхні  $\sigma$  відносно осей координат

$$J_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$J_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma, \quad (5.11)$$

$$J_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

**Приклад 1.** Найдти заряд  $Q$  поверхні  $\sigma$ :  $2z = x^2 + y^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $0 \leq z \leq 2$ , якщо поверхнева густина заряду  $\gamma(x, y, z) = xy$ .

*Розв'язання.* Заряд заданої поверхні будемо знаходити за формулою

$$Q = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

Для обчислення поверхневого інтеграла побудуємо поверхню  $\sigma$  та її проекцію на площину  $Oxy$ . Рівняння поверхні визначає параболоїд обертання, а лінія

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases}$$

проекується на площину  $Oxy$  у вигляді четвертої частини кола, що лежить у першому квадранті (рис. 5.3), межа якого описується рівнянням  $x^2 + y^2 = 4$ , одержаним виключенням  $z$  із системи двох рівнянь.

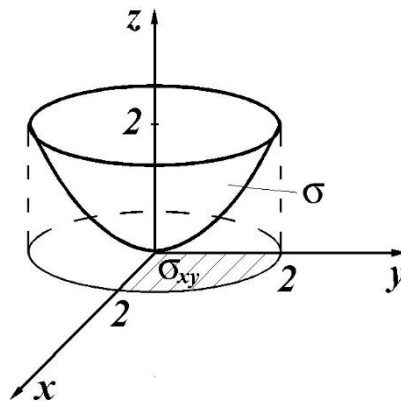


Рисунок 5.3 – Поверхня  $\sigma$  (параболоїд обертання) у прикладі 1

Отже,

$$\sigma: 2z^2 = x^2 + y^2 \text{ або } z = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

$$\sigma_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0.$$

Знаходимо  $z'_x = x$ ,  $z'_y = y$ ,  $\sqrt{1+z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1+x^2+y^2}$ . Отже,

$$\begin{aligned}
 Q &= \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^2 x dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2+y^2) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 x \frac{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 x \left( 5^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{3} \left( 5^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 (1+x^2)^{\frac{3}{2}} d(1+x^2) \right) = \frac{1}{3} \left( 2\sqrt{5^3} - \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left( 10\sqrt{5} - \frac{1}{5} 5^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3} \left( 5\sqrt{5} + \frac{1}{5} \right).
 \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти масу, центр маси та момент інерції відносно вісі  $Oz$  однорідної ( $\gamma(x, y, z) = 1$ ) параболічної поверхні  $z = x^2 + y^2$ , яка обмежена площиною  $z = 1$ .

*Розв'язання.* Знаходимо  $z'_x = 2x$ ,  $z'_y = 2y$ ,  $\sqrt{1+z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$ .

Проекцією  $\sigma_{xy}$  поверхні  $\sigma$  на площину  $Oxy$  є круг  $x^2 + y^2 \leq 1$  (рис. 5.4).

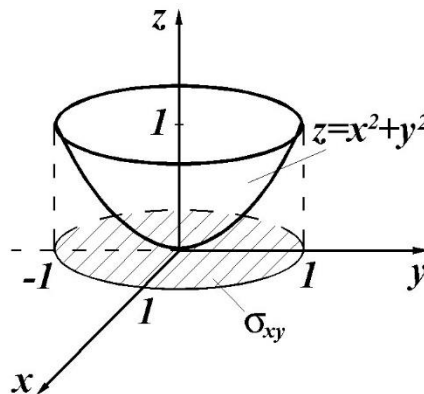


Рисунок 5.4 – Проекція  $\sigma_{xy}$  поверхні  $\sigma$  на площину  $xOy$  у прикладі 2

Отже, за формулою (5.8) маємо

$$m = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy.$$

Подвійний інтеграл обчислимо в полярній системі координат. Тоді

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 (1+4\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4\rho^2) = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \frac{(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \left( 5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Обчислимо центр маси заданої поверхні. Оскільки вона однорідна, то, з міркувань симетрії, її центр повинен лежати на вісі  $Oz$ , тобто  $x_c = y_c = 0$ . А  $z_c$  знаходимо за формулою

$$z_c = \frac{\iint z d\sigma}{m}.$$

Обчислимо поверхневий інтеграл

$$J = \iint_{\sigma} z d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy.$$

Для обчислення подвійного інтегралу перейдемо до полярних координат

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1+4\rho^2} d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1+4\rho^2} d\rho.$$

Останній інтеграл знайдемо методом підстановки:

$$1+4\rho^2 = t^2, \rho d\rho = \frac{1}{4} t dt, \rho^2 = \frac{t^2-1}{4},$$

при цьому, коли  $\rho$  змінюється від 0 до 1, то  $t$  змінюється від 1 до  $\sqrt{5}$ . Тоді

$$J = \frac{\pi}{8} \int_1^{\sqrt{5}} (t^4 - t^2) dt = \frac{\pi}{8} \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{10}{3} \sqrt{5} + \frac{2}{15} \right) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{5}{3} \sqrt{5} + \frac{1}{15} \right).$$

Остаточно маємо

$$z_c = \frac{25\sqrt{5} + 1}{10(5\sqrt{5} - 1)}.$$

Момент інерції відносно вісі  $Oz$

$$J_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} \left( \frac{5}{3} \sqrt{5} + \frac{1}{15} \right).$$

Тут скористались результатом, одержаним вище.

### ***Завдання для самостійного розв'язання до розділу 5***

**1.** Обчислити поверхневий інтеграл по площі поверхні  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$  від

даної функції  $f(x, y, z)$  по заданій поверхні  $\sigma$ .

1.1.  $f(x, y, z) = z$ ,  $\sigma$  – частина поверхні параболоїда  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,

$$0 \leq z \leq 1.$$

1.2.  $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ ,  $\sigma$  – частина поверхні параболоїда  $z = 4 - x^2 - y^2$ ,  $0 \leq z \leq 4$ .

1.3.  $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4$ ,  $\sigma$  – частина поверхні конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .

1.4.  $f(x, y, z) = 5x - y + 5z$ ,  $\sigma$  – частина площини  $3x + 2y + z = 6$ , що лежить у першому октанті.

1.5.  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $\sigma$  – частина поверхні параболоїда  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$

**2.** Знайти заряд  $Q$  поверхні  $\sigma$ , якщо задана поверхнева густина заряду  $\gamma(x, y, z)$ .

2.1.  $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\sigma$  – частина поверхні конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 3$ .

2.2.  $\gamma(x, y, z) = \frac{z}{2}$ ,  $\sigma$  – півсфера  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

2.3.  $\gamma(x, y, z) = xy + xz + yz$ ,  $\sigma$  – частина площини  $x + 2y + 3z = 6$ , що лежить у першому октанті.

2.4.  $\gamma(x, y, z) = xyz$ ,  $\sigma$  – частина поверхні конуса  $4x^2 = y^2 + z^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

2.5.  $\gamma(x, y, z) = 9 - z^2$ ,  $\sigma$  – півсфера  $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

**3.** Знайти координати центра мас  $C(x_c, y_c, z_c)$  однорідної поверхні  $\sigma$ .

3.1.  $\sigma: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .

3.2.  $\sigma: z - 1 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 5$ .

3.3.  $\sigma: z = 4 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 4$ .

3.4.  $\sigma: z^2 = x^2 + y^2, -2 \leq z \leq 0$ .

3.5.  $\sigma: z + 1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

## РОЗДІЛ 6. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПО КООРДИНАТАХ (ДРУГОГО РОДУ)

### Означення поверхневого інтеграла по координатах

Гладка поверхня  $\sigma$  називається двосторонньою, якщо обхід по будь-якому замкненому контуру, що лежить на поверхні і не має спільних точок з її межею, не змінює напрямку нормалі на поверхні. Якщо ж на поверхні існує замкнений контур, при обході по якому напрямком нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається односторонньою.

Прикладом двосторонньої поверхні є площина або її частини, наприклад, круг.

Двосторонню поверхню називають орієнтованою, а вибір певної сторони поверхні, тобто вибір напрямку нормалі до поверхні, називається орієнтацією поверхні. Односторонні поверхні називають неорієнтованими. Довільна замкнена поверхня без самоперетинів, наприклад, сфера, еліпсоїд – двосторонні. Спрямувавши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону. Надалі будемо розглядати тільки двосторонні поверхні.

Нехай задана кусково-гладка орієнтована поверхня  $\sigma$ , сторона якої задається вектором нормалі

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

де  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – напрямні косинуси вектора  $\vec{n}$ ,  $|\vec{n}| = 1$ . А на поверхні  $\sigma$  задана вектор-функція

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  – неперервні функції на  $\sigma$ .

Розіб'ємо довільно поверхню  $\sigma$  на  $n$  частинних поверхонь  $\sigma_i$ , площі яких дорівнюють  $\Delta\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Покладемо  $\lambda = \max d(\sigma_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , де  $d(\sigma_i)$  – діаметр  $i$ -тої частинної поверхні. На кожній частинній поверхні  $\sigma_i$  візьмемо довільну точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  і обчислимо значення вектор-функції  $\vec{F}(M_i)$  в ній, а також значення нормального вектора  $\vec{n}(M_i) = \vec{n}_i$ . Складемо суму

$$J_n = \sum_{i=1}^n (\vec{F}(M_i), \vec{n}(M_i)) \Delta\sigma_i =$$



$$= \sum_{i=1}^n [P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i] \Delta \sigma_i \quad (6.1)$$

Ця сума називається інтегральною сумою від вектор-функції  $\vec{F}(x, y, z)$  по стороні поверхні  $\sigma$ , визначеної нормальним вектором  $\vec{n}$ .

**Означення.** Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум  $J_n$  за умови  $\lambda \rightarrow 0$ , яка не залежить від способу розбиття поверхні  $\sigma$  на частинні поверхні  $\sigma_i$  та від вибору точок на них, то ця границя називається поверхневим інтегралом по координатах (або поверхневим інтегралом другого роду) від вектор-функції  $\vec{F}(x, y, z)$  по стороні поверхні  $\sigma$ , визначеної одиничним вектором нормалі  $\vec{n}$ . Позначається цей інтеграл

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma; \quad \iint_{\sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma,$$

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

Отже, за означенням маємо

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{F}(M_i), \vec{n}(M_i)) \Delta \sigma_i$$

або

$$\iint_{\sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i] \Delta \sigma_i. \quad (6.2)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$   $n \rightarrow \infty$ .

### Обчислення поверхневого інтеграла по координатах

Обчислення поверхневого інтеграла по координатах зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Якщо поверхня  $\sigma$  однозначно проектується на площини  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$ , то відповідно для кожної з площин маємо формули

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\cos \gamma_i|}, \quad \Delta\sigma_i = \frac{\Delta y_i \Delta z_i}{|\cos \alpha_i|}, \quad \Delta\sigma_i = \frac{\Delta x_i \Delta z_i}{|\cos \beta_i|}, \quad (6.3)$$

які використовуються для обчислення поверхневого інтеграла по координатах. При цьому є два підходи.

### 1. Проектування на всі координатні площини.

Нехай поверхня  $\sigma$  визначається рівнянням  $\Phi(x, y, z) = 0$  і однозначно проектується на всі три координатні площини. Тоді рівняння поверхні можна розв'язати відносно всіх аргументів  $x, y, z$ :

$$x = x(y, z); \quad y = y(x, z); \quad z = z(x, y). \quad (6.4)$$

Позначимо  $np_{xOy} \sigma = \sigma_{xy}$ ,  $np_{xOz} \sigma = \sigma_{xz}$ ,  $np_{yOz} \sigma = \sigma_{yz}$ . Підставимо формули (6.3), і (6.4) у формулу (6.2). Одержуємо формулу для обчислення поверхневого інтеграла по координатах

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma = \\ & = \pm \iint_{\sigma_{xy}} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{\sigma_{yz}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Знак кожного доданку в правій частині останньої формули береться таким, який знак мають  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  на орієнтованій поверхні  $\sigma$ .

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $z = z(x, y)$ , то вектор одиничної нормалі визначається за формулою

$$\vec{n} = \pm \frac{-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \quad (6.6)$$

Знак "+" відповідає вибору верхньої сторони поверхні, нормаль до якої утворює гострий кут з віссю  $Oz$  і, отже,  $\cos \gamma > 0$ .

Якщо поверхня  $\sigma$  задається рівнянням  $\Phi(x, y, z) = 0$ , то одиничний вектор нормалі

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}\Phi(x, y, z)}{|\text{grad}\Phi(x, y, z)|} = \pm \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

причому знак в правій частині рівності береться так, щоб одержати нормальний вектор тільки до вибраної сторони поверхні.

У випадку замкнутої поверхні, як правило, вибирається її зовнішня сторона.

## 2. Проектування на одну із координатних площин.

Якщо незамкнена поверхня  $\sigma$  однозначно проектується на площину  $xOy$  в область  $\sigma_{xy}$ , а поверхня задається рівнянням  $z = z(x, y)$ , за формулами (6.3)

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\cos \gamma_i|},$$

то формула для обчислення поверхневого інтеграла по координатах набуває вигляду

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} \left. \frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x, y)} dx dy. \quad (6.7)$$

Якщо поверхня  $\sigma$  однозначно проектується на площини  $xOz$  або  $yOz$ , то формули для обчислення поверхневого інтеграла по координатах мають відповідно вигляд:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_{xz}} \left. \frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos \beta|} \right|_{y=y(x, z)} dx dz, \quad (6.8)$$

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_{yz}} \left. \frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos \alpha|} \right|_{x=x(y, z)} dy dz. \quad (6.9)$$

**Приклад 1.** Обчислити інтеграл  $J = \iint_{\sigma} z dx dy + x dx dz + y dy dz$ , де  $\sigma$  – трикутник, утворений перетином площини  $x - y + z = 1$  з координатними площинами. Вибір нормалі вказано на рис. 6.1.

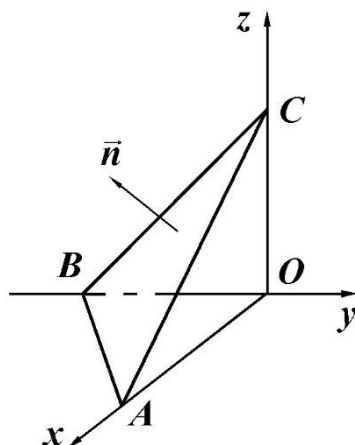


Рисунок 6.1 – Поверхня  $\sigma$  та нормаль  $\vec{n}$  у прикладі 1

*Розв'язання.* Для обчислення цього інтеграла скористуємось методом проєктування поверхні  $\sigma$ , тобто трикутника  $ABC$ , на всі координатні площини. За формулою (6.5) маємо

$$np_{xOy} \Delta ABC = \sigma_{xy} = \Delta AOB, np_{xOz} \Delta ABC = \sigma_{xz} = \Delta AOC,$$

$$np_{yOz} \Delta ABC = \sigma_{yz} = \Delta BOC;$$

$$J = \iint_{\Delta AOB} (1-x+y) dx dy - \iint_{\Delta AOC} x dx dz + \iint_{\Delta BOC} y dy dz.$$

В першому інтегралі виразили  $z$  через  $x$  і  $y$  із рівняння площини  $z=1-x+y$ , причому перед інтегралом поставили знак "+", оскільки обрана нормаль  $\vec{n}$  утворює гострий кут  $\gamma$  з віссю  $z$  ( $\cos \gamma > 0$ ). Другий інтеграл взяли зі знаком "-", тому що обрана нормаль утворює тупий кут  $\beta$  з віссю  $Oy$  ( $\cos \beta < 0$ ). При записі третього інтеграла враховано, що  $\cos \alpha > 0$ . Обчислимо подвійні інтеграли. Одержимо

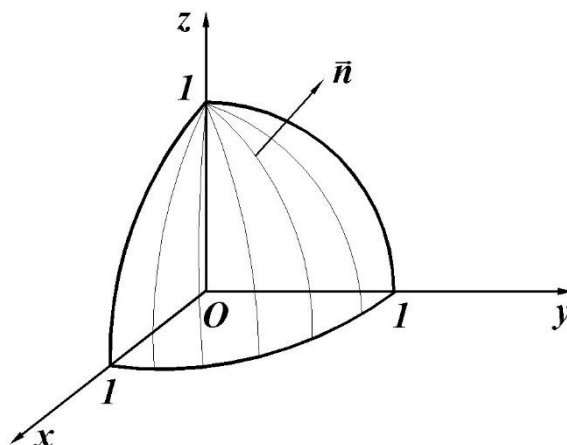
$$J = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (1-x+y) dy - \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dz + \int_{-1}^0 y dy \int_0^{1+y} dz = \int_{x-1}^0 \left( y - xy + \frac{y^2}{2} \right) dx -$$

$$- \int_0^1 xz \Big|_0^{1-x} dx + \int_{-1}^0 yz \Big|_0^{1+y} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (x-1)^2 dx - \int_0^1 (x-x^2) dx + \int_{-1}^0 (y+y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{6}(x-1)^3 \Big|_0^1 - \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}.$$

**Приклад 2.** Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} xz^2 dx dy + x dy dz + dx dz$ , де

$\sigma$  – зовнішня сторона сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , розміщена в першому октанті (рис. 6.2).



**Рисунок 6.2** – Поверхня  $\sigma$  (зовнішня сторона сфери, розміщена в першому октанті) у прикладі 2

*Розв'язання.* Скористуємось методом проектування на всі координатні площини за формулою (6.5). Нехай  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$  – проекції заданої сфери на координатні площини  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $xOz$ . Це – чверті кругів з центром у початку координат і радіусом 1:

$$\sigma_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$\sigma_{yz}: y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0;$$

$$\sigma_{xz}: x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} xz^2 dx dy &= + \iint_{\sigma_{xy}} x(1-x^2-y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2(1-\rho^2) d\rho = \\ &= \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}; \end{aligned}$$

$$\iint_{\sigma} x dy dz = \iint_{\sigma_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2} dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho = -\frac{\pi}{6} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6};$$

$$\iint_{\sigma} dx dz = + \iint_{\sigma_{xz}} dx dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Остаточнo маємо

$$\iint_{\sigma} xz^2 dx dy + x dy dz + dx dz = \frac{2}{15} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{15} + \frac{5}{12} \pi.$$

При обчисленні подвійних інтегралів скористались переходом до полярних координат і, оскільки нормальний вектор  $\vec{n}$  в будь-якій точці зовнішньої сторони сфери, що розміщена в першому октанті, утворює з осями координат гострі кути, то кожний подвійний інтеграл взяли зі знаком "+".

**Приклад 3.** Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + 3z^2) dx dy$ , де  $\sigma$  – зовнішня сторона конічної поверхні  $y^2 = x^2 + z^2$ , що знаходиться між площинами  $y=0$  і  $y=2$  (рис. 6.3).

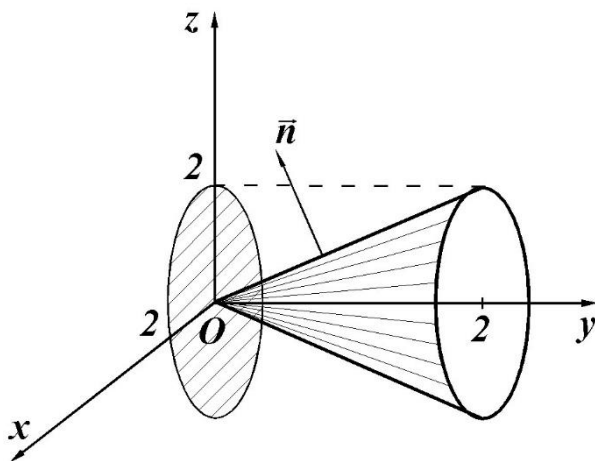


Рисунок 6.3 – Поверхня  $\sigma$  (зовнішня сторона конічної поверхні, що знаходиться між площинами) у прикладі 3

*Розв'язання.* Проекцією конуса на площину  $xOz$  є круг  $x^2 + z^2 \leq 4$ . Нормаль  $\vec{n}$  до зовнішньої сторони конуса утворює тупий кут з віссю  $Oy$ , тобто  $\cos \beta < 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + 3y^2) dx dz &= - \iint_{\sigma_{xz}} (x^2 + z^2 + 3(x^2 + z^2)) dx dy = \\ &= -4 \iint_{\sigma_{xz}} (x^2 + z^2) dx dz = -4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = -4\varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = -2\pi \cdot 16 = -32\pi. \end{aligned}$$

При обчисленні подвійного інтеграла скористались переходом до полярних координат.

### Формула Гаусса-Остроградського

Якщо поверхня  $\sigma$  замкнена, а функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в просторовій області  $V$ , обмеженій цією поверхнею, то має місце формула Гаусса-Остроградського

$$\begin{aligned} \oiint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy &= \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (6.10)$$

У поверхневому інтегралі інтегрування відбувається по зовнішній стороні поверхні  $\sigma$ .

Символ  $\oiint_{\sigma}$  означає поверхневий інтеграл по замкненій поверхні.

Ця формула зв'язує поверхневий інтеграл по зовнішній стороні поверхні  $\sigma$  і потрійним інтегралом по об'єму  $V$ , що міститься в середині цієї поверхні. При цьому слід уявити мнемонічне правило: вираз в дужках містить частинні похідні від коефіцієнтів при диференціалах змінних по відсутній змінній.

Наприклад,  $R dx dy$  переходить у  $\frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$ .

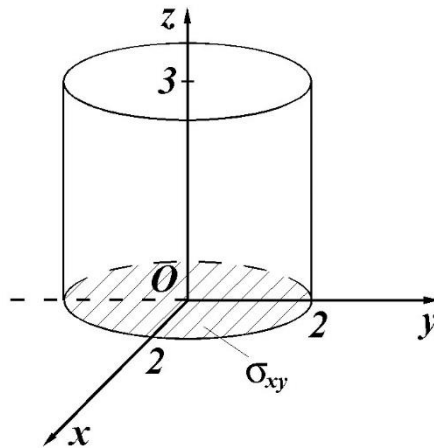
**Приклад 1.** Перетворити за формулою Гаусса-Остроградського

$\oiint_{\sigma} e^{xyz} dy dz + \ln(x^2 + y^2 + z^2) dx dz + \frac{z^2}{xy} dx dy$ , до інтегралу по об'єму  $V$ , що обмежений замкненою поверхнею  $\sigma$ .

*Розв'язання.* Використовуючи формулу (6.10) та враховуючи, що  $P = e^{xyz}$ ,  $Q = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $R = \frac{z^2}{xy}$ , то  $\frac{\partial P}{\partial y} = yze^{xyz}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2z}{xy}$ , одержимо

$$\oiint_{\sigma} e^{xyz} dydz + \ln(x^2 + y^2 + z^2) dx dz + \frac{z^2}{xy} dx dy = \iiint_V \left( yze^{xyz} + \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2z}{xy} \right) dx dy dz.$$

**Приклад 2.** Користуючись формулою Гаусса-Остроградського, обчислити поверхневий інтеграл  $\oiint_{\sigma} x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$  де  $\sigma$  – повна поверхня циліндру  $x^2 + y^2 = 4$ , що знаходиться між площинами  $z = 0$  і  $z = 3$  (рис. 6.4).



**Рисунок 6.4 – Поверхня  $\sigma$  (повна поверхня циліндру, що знаходиться між площинами) у прикладі 2**

*Розв'язання.* Із умови задачі маємо

$$P(x, y, z) = x^3, \quad Q(x, y, z) = y^3, \quad R(x, y, z) = z^3.$$

Тоді

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2.$$

За формулою (6.10) одержуємо

$$\oiint_{\sigma} x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz =$$



$$\begin{aligned}
&= 3 \iint_{\sigma_{xy}} dx dy \int_0^3 (x^2 + y^2 + z^2) dz = 3 \iint_{\sigma_{xy}} \left[ (x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_0^3 dx dy = \\
&= 9 \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2 + 3) dx dy = 9 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (p^2 + 3) p dp = \\
&= 9 \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left( \frac{\rho^4}{4} + \frac{3\rho^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 18\pi \cdot 10 = 180\pi.
\end{aligned}$$

При обчисленні подвійного інтеграла перейшли до полярних координат.

**Приклад 3.** Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} (x - 2z) dy dz + (3z - 4x) dx dz + (5x + y) dx dy$  через повну поверхню трикутної піраміди (рис 6.5) з вершинами  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $C(0;0;1)$ ,  $O(0;0;0)$  (береться зовнішня сторона поверхні).

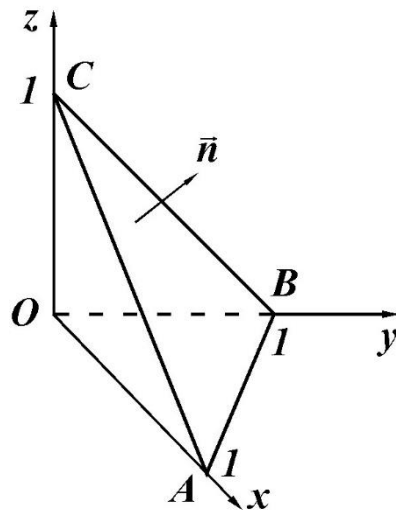


Рисунок 6.5 – Поверхня  $\sigma$  та вибір нормалі  $\vec{n}$  у прикладі 3

*Розв'язання.* Оскільки поверхня замкнена, функції  $P(x, y, z) = x - 2z$ ,  $Q(x, y, z) = 3z - 4x$ ,  $R(x, y, z) = 5x + y$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$  неперервні всюди в тривимірному просторі, то обчислити усі інтеграли можна за формулою Гаусса-Остроградського (6.10)

$$J = \iint_{\sigma} (x - 2z) dy dz + (3z - 4x) dx dz + (5x + y) dx dy =$$

$$= \iiint_V (1+0+0) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = V_{ABCO}.$$

Об'єм піраміди дорівнює одній третій добутку площі основи на висоту, тобто

$$V_{ABCO} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABO} \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Отже,  $J = \frac{1}{6}$ .

### Формула Стокса

Якщо функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку на кусково-гладкій двосторонній поверхні  $\sigma$ , яка обмежена кусково-гладкою замкненою кривою  $l$ , причому орієнтація кривої  $l$  узгоджена з орієнтацією поверхні  $\sigma$ , то має місце формула Стокса:

$$\begin{aligned} & \oint_l P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz \end{aligned} \quad (6.11)$$

Орієнтація кривої  $l$ , що обмежує поверхню  $\sigma$  вважається узгодженою з орієнтацією цієї поверхні, яка задається напрямом нормалі  $\vec{n}$  до неї, якщо з кінця нормалі  $\vec{n}$  обхід вздовж кривої  $l$  можна бачити проти годинникової стрілки.

В плоскому випадку формула Стокса переходить у формулу Гріна.

Формула Стокса зв'язує поверхневий і криволінійний інтеграл.

**Приклад 1.** Перетворити за формулою Стокса  $\oint_l (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - yx) dz$  до інтегралу по поверхні  $\sigma$ , що натягнена на замкнений контур  $l$ .

*Розв'язання.* Маємо

$$P(x, y, z) = x^2 - yz, Q(x, y, z) = y^2 - xz, R(x, y, z) = z^2 - yx,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -z, \frac{\partial P}{\partial z} = -y, \frac{\partial Q}{\partial x} = -z, \frac{\partial Q}{\partial z} = -x, \frac{\partial R}{\partial x} = -y, \frac{\partial R}{\partial y} = -x.$$

Отже, за формулою (6.11) одержуємо

$$\begin{aligned} & \oint_l (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - yx)dz = \\ & = \iint_{\sigma} (-z - (-z))dxdy + (-x - (-x))dydz + (-y - (-y))dxdz = \\ & = \iint_{\sigma} 0dxdy + 0dydz + 0dxdz = 0. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Користуючись формулою Стокса, обчислити інтеграл  $\oint_l x^2 y^2 dx + dy + z dz$ , де  $l$  – коло  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$

*Розв'язання.* За поверхню  $\sigma$  тут можна прийняти круг  $x^2 + y^2 = a^2$ , що лежить в площині  $xOy$  ( $z = 0$ ). Виходячи з заданого інтеграла, маємо

$$P(x, y, z) = x^2 y^2, Q(x, y, z) = 1, R(x, y, z) = z,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x^2 y, \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Отже, за формулою (6.11)

$$\oint_l x^2 y^2 dx + dy + z dz = -2 \iint_{\sigma} x^2 y dxdy = -2 \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy = 0.$$

Скористались тим, що внутрішній інтеграл в симетричних межах від непарної функції дорівнює 0.

**Приклад 3.** Обчислити криволінійний інтеграл  $\oint_l y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz$ , де  $l$  – контур  $ABCA$ , утворений при перетині параболоїда  $x^2 + z^2 = 1 - y$  з координатними площинами (рис. 6.6).

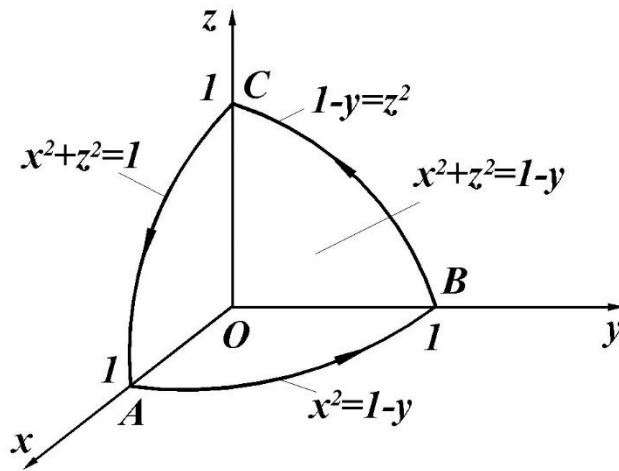


Рисунок 6.6 – Крива  $l$  (контур  $ABCA$ ) у прикладі 3

*Розв'язання.* Оскільки контур  $l$  – замкнений, то обчислити цей інтеграл можна за формулою Стокса (6.11). За поверхню  $\sigma$ , натягнену на контур  $l$ , візьмемо поверхню  $x^2+z^2=1-y$ . Одиничний вектор нормалі до цієї поверхні визначається формулою

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}\phi}{|\text{grad}\phi|},$$

де  $\Phi(x, y, z) = x^2 + y + z^2 - 1$ .

Тому

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + \vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}},$$

звідки  $\cos \gamma = \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} \geq 0$ , коли  $z \geq 0$ , і нормаль  $\vec{n}$  забезпечує напрямок обходу контуру  $l$ , який вимагає теорема Стокса. За умовою задачі маємо

$$P(x, y, z) = y^2, Q(x, y, z) = -x^2, R(x, y, z) = z^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Отже, за формулою (6.11) одержуємо

$$\oint_l y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz = \iint_{\sigma} (-2x - 2y) dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \iint_{\sigma_{xz}} (x+y) dx dy = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x+y) dy = -2 \int_0^1 \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x^2} dx = \\
&= -2 \int_0^1 \left[ x(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2} \right] dx = \\
&= -2 \int_0^1 \left( x - x^3 + \frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = -2 \left( \frac{1}{2} x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = -\frac{31}{30}.
\end{aligned}$$

Проекція  $\sigma$  на площину  $xOy$  показана на рис. 6.7.

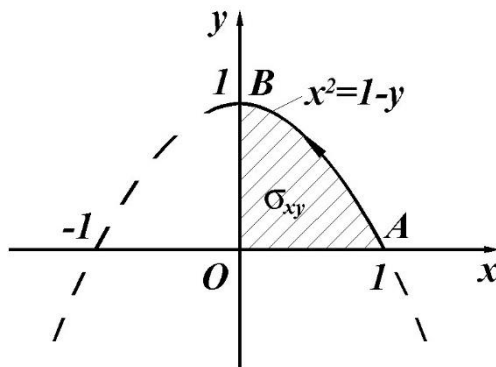


Рисунок 6.7 – Проекція  $\sigma$  на площину  $xOy$  у прикладі 3

### Застосування поверхневого інтеграла по координатах

Якщо вектор-функція  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  є швидкість руху рідини, яка протікає через поверхню  $\sigma$  в сторону, що визначена напрямком нормалі, то кількість рідини  $\Pi$ , що протікає через цю поверхню за одиницю часу, обчислюється за формулою

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma. \quad (6.12)$$

**Приклад.** Обчислити кількість рідини, що протікає через частину зовнішньої сторони параболоїда  $y = x^2 + z^2$ , яка знаходиться в першому октанті і обмежена площиною  $y = 1$  ( $0 \leq y \leq 1$ ), якщо швидкість руху рідини задається вектор-функцією  $\vec{F} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ .

*Розв'язання.* Запишемо рівняння поверхні у вигляді

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + z^2 - y = 0.$$

Знайдемо

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}\Phi}{|\text{grad}\Phi|} = \frac{2x\vec{i} - \vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}.$$

Оскільки тут

$$\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} < 0,$$

то вектор  $\vec{n}$  є зовнішньою нормаллю до даної поверхні. На рис 6.8 показано, що зовнішня нормаль утворює гострі кути з додатними напрямками вісей  $Ox$  і  $Oz$  і тупий кут з додатним напрямком вісі  $Oy$ .

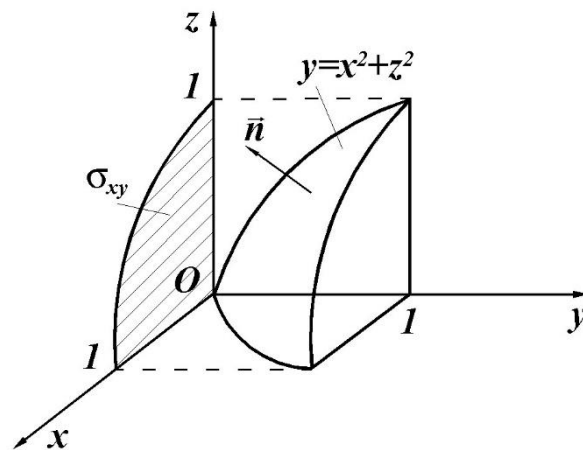


Рисунок 6.8 – Поверхня  $\sigma$  та вибір нормалі  $\vec{n}$

Тому

$$\left. \frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos \beta|} \right|_{y=y(x,z)} = x[2(x^2 + z^2) - 1].$$

Отже, за формулою (6.12)

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\delta = \iint_{\sigma_{xz}} \left. \frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos \beta|} \right|_{y=y(x,z)} dx dz = \iint_{\sigma_{xz}} x[2(x^2 + z^2) - 1] dx dz.$$

Оскільки проекція  $\sigma_{xz}$  є чверть круга  $x^2 + z^2 \leq 1$ , то для обчислення одержаного подвійного інтеграла застосуємо полярні координати на площині  $xOz$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Тоді

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 (2\rho^4 - \rho^2) d\rho = \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left( \frac{2}{5} \rho^5 - \frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^1 = 1 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{15}.$$

### **Завдання для самостійного розв'язання до розділу 6**

**1.** Перетворити за формулою Стокса криволінійний інтеграл  $\oint_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  до інтеграла по поверхні  $\sigma$ , що натягнена на замкнений контур  $l$ .

1.1.  $\oint_l yx \ln dx + zx \ln ydy + xy \ln zdz.$

1.2.  $\oint_l \sin(x+y)dx + \sin(x+z)dy + \sin(z+y)dz.$

1.3.  $\oint_l y^2 \cos xdx + z^2 \cos ydy + x^2 \cos zdz.$

1.4.  $\oint_l xe^{yz}dz + ye^{xz}dx + ze^{xy}dy.$

1.5.  $\oint_l (x+y^2)dx + (y+z^2)dy + (y+x^2)dz.$

**2.** Обчислити поверхневий інтеграл по координатах по заданій поверхні  $\sigma$ .

2.1.  $\iint_{\sigma} y^2 dydz,$   $\sigma$ : зовнішня сторона частини поверхні параболоїда  $z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1.$

2.2.  $\iint_{\sigma} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}},$   $\sigma$ : частина поверхні гіперболоїда  $x^2 + y^2 = z^2 + 1,$

нормальний вектор  $\vec{n}$  якої утворює тупий кут з додатним напрямком осі  $O_z,$  що відтинається площинами  $z = 0$  і  $z = \sqrt{3}.$

2.3.  $\iint_{\sigma} \frac{dx dz}{y}$ ,  $\sigma$  : зовнішня сторона сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

2.4.  $\iint_{\sigma} xy dx dz$ ,  $\sigma$  : зовнішня сторона поверхні циліндра  $y = \sqrt{4 - x^2}$ , яка відтинається площинами  $z = 0$  і  $z = 2$ .

2.5.  $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dy dz$ ,  $\sigma$  : зовнішня сторона поверхні циліндра  $x = \sqrt{4 - y^2}$ , яка відтинається площинами  $z = 0$  і  $z = 2$ .

3. Перетворити за формулою Гаусса-Остроградського поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$  до інтеграла по об'єму  $V$ , що обмежений замкненою поверхнею  $\sigma$ , в якому  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – двічі диференційовні функції.

3.1.  $\iint_{\sigma} x^2 \cos y dy dz + y^2 \cos z dz dx + z^2 \cos x dx dy$ .

3.2.  $\iint_{\sigma} x^2 y^3 dx dy + x^2 z^3 dy dz + y^3 z^2 dx dz$ .

3.3.  $\iint_{\sigma} \ln z y dx dz + \ln z x dx dy + \ln y x dy dz$ .

3.4.  $\iint_{\sigma} e^{xy} dz dx + e^{xz} dy dz + e^{yz} dx dy$ .

3.5.  $\iint_{\sigma} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy + \frac{zy}{\sqrt{x}} dz dy + \frac{xz}{\sqrt{y}} dx dz$ .



## РОЗДІЛ 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.

### Скалярне поле

Скалярне поле задано, якщо вказано правило згідно з яким кожній точці  $M$  області  $V$  простору поставлено у відповідність певне число  $u(M)$ . Якщо в просторі вибрано декартову систему координат, то задання скалярного поля еквівалентно заданню функції трьох змінних

$$u(M) = u(x, y, z).$$

Будемо вважати, що ця функція має в області  $V$  неперервні частинні похідні першого (а якщо буде необхідно, то і другого) порядку по  $x, y, z$ .

Поле  $u(M)$  називається плоским, якщо в декартовій системі координат воно задається функцією, що не залежить від  $z$ , тобто

$$u(M) = u(x, y).$$

Таке поле набуває рівних значень на кожній прямій, що паралельна осі  $Oz$ , тому його розглядають тільки в площині  $xOy$  (тобто при  $z = 0$ ), але якщо необхідно, то значення цього поля переносяться в будь-яку площину  $z = h$ .

Сім'я поверхонь рівня скалярного поля  $u(M)$  визначається рівнянням

$$u(M) = C,$$

або в декартових координатах

$$u(x, y, z) = C, \quad (7.1)$$

де  $C$  – довільна стала.

У випадку плоского поля поверхні рівня

$$u(x, y) = C \quad (7.2)$$

є циліндричними поверхнями з твірними, які паралельні осі  $Oz$ . Якщо плоске поле розглядається тільки на площині  $xOy$  (в подальшому ми так і будемо робити), то рівняння  $u(x, y) = C$  буде визначати сукупність його ліній рівня на площині  $xOy$ .

Похідна скалярного поля за напрямком  $l$ , який задається вектором

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (7.3)$$

де

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Гradient скалярного поля  $u(M)$  є вектор  $\overrightarrow{gradu}$ , який напрямлений по нормалі до поверхні рівня поля в сторону зростання поля і чисельно дорівнює найбільшій похідній за напрямком.

Якщо в просторі вибрано декартову систему координат, то  $\overrightarrow{gradu}$  обчислюється за формулою

$$\overrightarrow{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (7.4)$$

Між похідною поля  $u(M)$  за напрямком  $l$  і його градієнтом в даній точці  $M$  існує зв'язок:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l}^0 \cdot \overrightarrow{gradu} = |\overrightarrow{gradu}| \cdot \cos \varphi = n_{\vec{l}^0} \overrightarrow{gradu},$$

де  $\vec{l}^0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$  – одиничний вектор напрямку  $l$ , а  $\varphi$  – кут між градієнтом і вектором  $\vec{l}^0$  в точці  $M$ .

Із означення градієнта і формули

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\overrightarrow{gradu}| \cos \varphi,$$

безпосередньо впливає, що

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\overrightarrow{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

тобто, коли  $\cos \varphi = 1$ .

**Приклад 1.** Задано скалярне поле  $U(x, y, z) = -2x^2 + 3y^2 - 2z^2 + xyz$  і точка  $M_1(3; -2; 3)$ . Знайти: а) похідну цього поля у точці  $M_1$ , в напрямі вектора

$\overline{M_1M_2}$ , якщо  $M_2(4;-1;4)$ ; б) напрям, в якому повинна рухатись точка  $M(x, y, z)$  при переході через точку  $M_1$ , щоб задане поле зростало з найбільшою швидкістю? Яка швидкість у цьому напрямі?

*Розв'язання.* а) Похідна за напрямком вектора  $\overline{M_1M_2}$  в точці  $M_1$  обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{M_1M_2}} \Big|_{M_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} \cos \gamma,$$

де  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  – напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ .

*Знаходимо*

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} = (-4x + yz) \Big|_{M_1} = -12 - 6 = -18,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} = (6y + xz) \Big|_{M_1} = -12 + 9 = -3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} = (-4z + xy) \Big|_{M_1} = -12 - 6 = -18.$$

$$\overline{M_1M_2} = (4 - 3; -1 + 2; 4 - 3) = (1; 1; 1),$$

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \quad \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

*Тоді*

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{M_1M_2}} = -18 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{39}{\sqrt{3}} = -13\sqrt{3}.$$

б) Скалярне поле зростає з найбільшою швидкістю в напрямі градієнта в будь-якій точці і при цьому швидкість зростання поля дорівнює модулю градієнта в цій точці.

Знаходимо градієнт в точці  $M_1$  за формулою

$$\overrightarrow{gradU}|_{M_1} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{M_1} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}|_{M_1} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}|_{M_2} \vec{k}.$$

Скориставшись вище одержаними результатами, маємо

$$\overrightarrow{gradU}|_{M_1} = -18\vec{i} - 3\vec{j} - 18\vec{k}. \text{ Тоді } \frac{\partial u}{\partial l_{\max}}|_{M_1} = |\overrightarrow{gradU}|_{M_1}| = \sqrt{(-18)^2 + (-3)^2 + (-18)^2} = \sqrt{657}.$$

### Векторне поле

В деякій області  $V$  простору задано векторне поле, якщо кожній точці  $M(x, y, z)$  цієї області поставлено у відповідність вектор

$$F(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

проекції якого – функції  $P, Q, R$  будемо вважати неперервно диференційовними в цій області.

Нехай в заданій області  $V$  задана двостороння поверхня  $\sigma$ . Вибір сторони на цій поверхні визначається одиничним вектором нормалі  $\vec{n}^0$  до поверхні  $\sigma$ :

$$\vec{n}^0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.$$

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $z = f(x, y)$ , то

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \quad (7.6)$$

Знак „+” відповідає вибору верхньої сторони поверхні, нормаль до якої утворює гострий кут з віссю  $Oz$ , а отже,  $\cos\gamma$  (тобто коефіцієнт при  $\vec{k}$  в останній формулі додатний). Знак „-” відповідає нижній стороні поверхні.

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $\Phi(M) = \Phi(x, y, z) = 0$ , то одиничний вектор нормалі

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{\overrightarrow{\text{grad}\Phi(M)}}{|\overrightarrow{\text{grad}\Phi(M)}|} = \pm \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}. \quad (7.7)$$

При цьому знак в правій частині береться так, щоб одержати нормальний вектор  $\vec{n}$  до вибраної сторони поверхні.

Якщо поверхня складається з декількох частин, то вектор нормалі обчислюється для кожної частини окремо за відповідними формулами, а вибір знака в цих формулах визначається заданням однієї із сторін всієї складеної поверхні.

Якщо поверхня замкнена, то як правило, вибирають її зовнішню сторону.

Потоком векторного поля  $\overrightarrow{F(x, y, z)}$  через двосторонню поверхню  $\sigma$  називається поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overrightarrow{F(M)} \cdot \overrightarrow{n^0(M)} d\sigma, \quad (7.8)$$

де  $\overrightarrow{n^0(M)}$  – одиничний вектор нормалі до вибраної сторони поверхні в її довільній точці.

Якщо поверхня  $\sigma$  взаємно однозначно проектується на площину  $xOy$  в область  $\sigma_{xy}$ , то обчислення потоку векторного поля  $\overrightarrow{F(x, y, z)}$  через  $\sigma$  зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області  $\sigma_{xy}$  за формулою:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}^0}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x, y)} dx dy, \quad (7.9)$$

де  $\cos \gamma$  – коефіцієнт при  $\vec{k}$  в формулі, за якою визначається одиничний вектор нормалі  $\vec{n}^0$  до поверхні  $\sigma$ , а  $z = z(x, y)$  – рівняння поверхні  $\sigma$ . Якщо поверхня однозначно проектується на площині  $yOz$  або  $xOz$ , то потік обчислюється за формулами:

$$\Pi = \iint_{\sigma_{yz}} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}^0}{|\cos \alpha|} \right|_{x=x(y, z)} dy dz, \quad (7.10)$$

$$\Pi = \iint_{\sigma_{xz}} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}^0}{|\cos \beta|} \right|_{y=y(x,z)} dx dz. \quad (7.11)$$

У більш складних випадках, коли поверхня  $\sigma$  складається із декількох частин  $\sigma_1, \sigma_2$  і т.д., то

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma + \dots$$

Якщо поверхня  $\sigma$  однозначно проектується на всі три координатні площини, тоді її рівняння

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

однозначно розв'язується відносно кожного із аргументів, то потік векторного поля  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  можна обчислити за формулою

$$\Pi = \pm \iint_{\sigma_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz \pm \iint_{\sigma_{xz}} Q[x, y(x, z), z] dx dz \pm \iint_{\sigma_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy, \quad (7.12)$$

де знак перед кожним подвійним інтегралом береться відповідно таким, який знак  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  на поверхні  $\sigma$ .

Дивергенцією векторного поля  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  в точці  $M$  називається об'ємна густина потоку векторного поля  $\vec{F}(M)$  в цій точці:

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma,$$

де  $V$  – об'єм, що обмежений замкненою поверхнею  $\sigma$ , який містить точку  $M$ .

В декартовій системі координат дивергенція обчислюється за формулою

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_M. \quad (7.13)$$

Для обчислення потоку через зовнішню сторону замкненої поверхні  $\sigma$ , що обмежує об'єм  $V$ , зручно застосовувати **теорему Гаусса-Остроградського**:

потік векторного поля  $\vec{F}(x, y, z)$  через будь-яку замкнену поверхню  $\sigma$  дорівнює потрійному інтегралу від  $\text{div}\vec{F}$ :

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iiint_{\nu} \text{div}\vec{F} dv, \quad (7.14)$$

який береться по об'єму  $\nu$ , що обмежує поверхню  $\sigma$ .

Лінійним інтегралом векторного поля  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  вздовж лінії  $L$ , на якій вказано напрям, називається криволінійний інтеграл

$$W = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \quad (7.15)$$

Якщо  $\vec{F}(x, y, z)$  – поле сил, то цей лінійний інтеграл представляє собою роботу цього силового поля вздовж лінії  $L$ .

Якщо лінія  $L$  задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

і при цьому в початковій і кінцевих точках параметр  $t$  відповідно набуває значень  $t = \alpha$ ;  $t = \beta$ , то

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\} dt. \quad (7.16)$$

Якщо лінія  $L$  задана рівняннями  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то лінійний інтеграл обчислюється за формулою

$$W = \int_a^b \{P[x, y(x), z(x)] + Q[x, y(x), z(x)]y'(x) + R[x, y(x), z(x)]z'(x)\} dx. \quad (7.17)$$

У випадку плоскої лінії  $L$  ці формули спрощуються, оскільки треба покласти  $z = 0$ .

При зміні напрямку лінії  $L$  (з кінцями  $A$  і  $B$ ) лінійний інтеграл змінює знак на протилежний

$$W = \int_{AB} = - \int_{BA}.$$

Циркуляцією векторного поля  $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  називається лінійний інтеграл цього поля вздовж замкненого шляху  $L$ :

$$\mathcal{C} = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \quad (7.18)$$

Циркуляція безпосередньо обчислюється за тими ж формулами, що й лінійний інтеграл.

Векторному полю  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  можна поставити у відповідність інше векторне поле, яке називається ротором поля  $\vec{F}(x, y, z)$  і визначається рівністю

$$\text{rot}\vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (7.19)$$

Величини  $\text{div}\vec{F}$  і  $\text{rot}\vec{F}$  використовуються для компактного запису рівнянь Максвелла, що описують електромагнітне поле в одиницях  $C_i$

$$\text{div}\vec{D} = \rho, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \text{rot}\vec{H}. \quad (7.20)$$

Тут  $\vec{D}$  – вектор електричної індукції,  $\rho$  – об’ємна густина електричних зарядів,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  – струм зміщення,  $\vec{j}$  – струм провідності,  $H$  – напруженість магнітного поля.

Якщо в деякій області простору міститься двостороння кусково-гладка поверхня  $\sigma$ , яка обмежена кусково-гладким контуром  $L$ , з одиничним вектором нормалі  $\vec{n}^0$  який вибрано так, що видимий з його кінця обхід контура  $L$  відбувається проти годинникової стрілки, то має місце **теорема Стокса** – циркуляція векторного поля  $\vec{F}(x, y, z)$  дорівнює потоку ротора векторного поля  $\vec{F}(x, y, z)$  через поверхню  $\sigma$ , яку „натягнуто” на контур  $L$ , тобто

$$\mathcal{C} = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_{\sigma} \overline{\text{rot}\vec{F}} \cdot \vec{n}^0 d\sigma. \quad (7.21)$$

Оскільки  $\vec{n}^0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ , то на підставі означення  $\text{rot}\vec{F}$  і теореми Стокса можна записати



$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Векторне поле  $\vec{F}(M)$  називається потенціальним, якщо існує таке скалярне поле  $u(M)$ , для якого

$$\vec{F}(M) = \overrightarrow{gradu}(M). \quad (7.23)$$

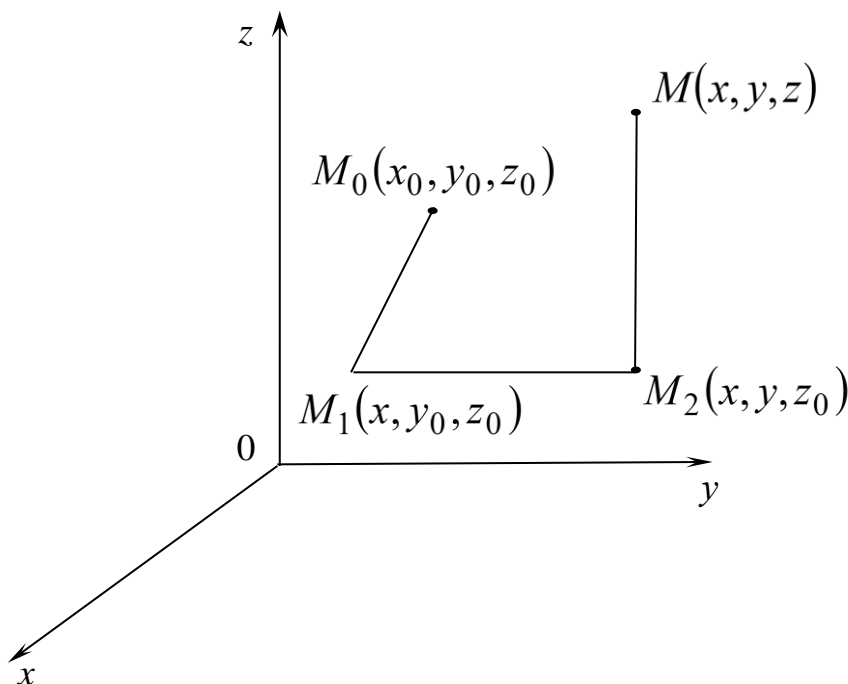
Функція  $u(M)$  при цьому називається потенціалом поля  $\vec{F}(M)$ . Для потенціального поля виконується умова  $rot\vec{F}(M) = 0$ . Ця умова є достатньою для потенціальності векторного поля  $\vec{F}(M)$ .

У випадку потенціального поля лінійний інтеграл не залежить від форми шляху, а лише від вибору початкової і кінцевої точок.

Потенціал цього поля визначається за формулою

$$u(M) = \int_{M_0}^M P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \quad (7.24)$$

де інтеграл береться по будь-якому шляху, що починається у деякій фіксованій точці  $M_0$ . Як правило, за такий шлях вибирають ламану  $M_0M_1M_2M$ , відрізки якої паралельні координатним осям (рис. 7.1)



**Рисунок 7.1 – Ламана  $M_0M_1M_2M$**

У цьому випадку

$$u(M) = u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz.$$

Векторне поле  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  називається соленоїдальним, якщо  $\text{div}\vec{F}(M) = 0$  у всіх точках поля.

**Приклад 2.** Знайти напруженість електричного поля  $\vec{E}$ , якщо задано його потенціал  $u = x^3 + 3xe^2 + 6xyz + 10$ .

*Розв'язання.* Відомо із курсу фізики

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}u} = -\left(\vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\left[\vec{i}(3x^2 + 3y^2 + 6yz) + \vec{j}(6xy + 6xz) + \vec{k}6xy\right] = \\ &= -3(x^2 + y^2 + 2yz)\vec{i} - 6x(y + z)\vec{j} - 6xy\vec{k}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Знайти об'ємну густину зарядів, якщо задано вектор електричної індукції  $\vec{D} = xyz\vec{i} + e^{xy}\vec{j} + tgyz\vec{k}$ .

*Розв'язання.*

$$\rho = \text{div}\vec{D} = \frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z} = yz + e^{xy}x + \frac{1}{\cos^2 yz}y.$$

**Приклад 4.** Знайти струм зміщення в діелектрику, якщо задано в ньому магнітне поле  $\vec{H} = xyz\vec{i} + e^{xy}\vec{j} + tgyz\vec{k}$ .

*Розв'язання.* В діелектрику струм провідності практично дорівнює нулю, тому струм зміщення

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot}\vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & e^{xy} & tgyz \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{z}{\cos^2 yz} - 0\right) - \vec{j}(0 - xy) + \vec{k}(e^{xy}y - xz) = \\ &= \frac{z}{\cos^2 yz}\vec{i} + xy\vec{j} + (e^{xy}y - xz)\vec{k}. \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Задано векторне поле  $\vec{F}(x, y, z) = (-2x^2 + 3y)\vec{i} + (3y^2 - z)\vec{j} - (z^2 + 2x)\vec{k}$  і точка  $M_0(-2; 3; -1)$ . Знайти: а) об'ємну густину потоку цього векторного поля в точці  $M_0$ ; б) ротор заданого векторного поля  $\vec{F}$  в точці  $M_0$ .

*Розв'язання.* а) Об'ємна густина потоку векторного поля  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  в точці  $M_0$  визначається дивергенцією цього поля в заданій точці за формулою

$$\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_0} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)\Big|_{M_0}.$$

Знаходимо

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{M_0} = -4x\Big|_{M_0} = 8, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_{M_0} = 6y\Big|_{M_0} = 18, \quad \frac{\partial R}{\partial z}\Big|_{M_0} = -2z\Big|_{M_0} = 2.$$

Отже,

$$\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_0} = 8 + 18 + 2 = 28.$$

б) Ротор заданого векторного поля  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  в точці  $M_0$  визначається рівністю.

$$\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\Big|_{M_0} = \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} \right]\Big|_{M_0}.$$

У нашому випадку

$$\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x^2 + 3y & 3y^2 - z & -z^2 - 2x \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

**Приклад 6.** Перевірити чи є векторне поле  $\vec{F}(x, y, z) = (-2x + 3yz)\vec{i} + (-2y + 3xz)\vec{j} + (-2z + 3xy)\vec{k}$  потенціальним і

соленоїдальним. У випадку потенціальності заданого поля знайти його потенціал.

*Розв'язання.* Якщо векторне поле  $\vec{F}(x, y, z)$  потенціальне, то в будь-якій його точці  $M$   $\text{rot}\vec{F}(M) = 0$ , а якщо – соленоїдальне, то  $\text{div}\vec{F}(M) = 0$  також в будь-якій точці  $M$ .

Отже, відшукаємо ротор і дивергенцію заданого поля

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x + 3yz & -iy + 3xz & -2z + 3xy \end{vmatrix} = (3x - 3x)\vec{i} - (3y - 3y)\vec{j} + (3z - 3z)\vec{k} = \vec{0}.$$

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -2 - 2 - 2 = -6 \neq 0.$$

Таким чином, поле є потенціальним, але не є соленоїдальним.

Потенціал поля  $U(x, y, z)$  знаходиться за формулою

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz, \end{aligned}$$

де  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – фіксована точка області, що розглядається. У нашому випадку покладемо  $M_0(x_0, y_0, z_0) = O(0;0;0)$ . Тоді

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x (-2x + 3y_0z_0)dx + \int_{y_0}^y (-2y + 3xz_0)dy + \int_{z_0}^z (-2z + 3xy)dz = \\ &= \left( -2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3y_0z_0x \right) \Big|_{x_0}^x + \left( -2 \cdot \frac{y^2}{2} + 3xz_0y \right) \Big|_{y_0}^y + \left( -2 \cdot \frac{z^2}{2} + 3xyz \right) \Big|_{z_0}^z = \\ &= -x^2 \cdot 3y_0z_0x + x_0^2 - 3y_0z_0x_0 - y^2 + 3xz_0y + y_0^2 - 3xy_0z_0 - z^2 + 3xyz + z_0^2 - 3xyz_0 = \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2) + 3xyz + C, \end{aligned}$$

де  $C = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 3x_0y_0z_0$  і за умови, що  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , то  $C = 0$ . Таким чином, функція  $U(x, y, z) = 3xyz - (x^2 + y^2 + z^2)$  є потенціалом поля  $\vec{F}(x, y, z) = (-2x + 3yz)\vec{i} + (-2y + 3xz)\vec{j} + (-2z + 3xy)\vec{k} = \vec{F}(x, y, z)$ .

Дійсно

$$\overline{\text{grad}U} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = (3yz - 2x)\vec{i} + (3xz - 2y)\vec{j} + (3xy - 2z)\vec{k}.$$

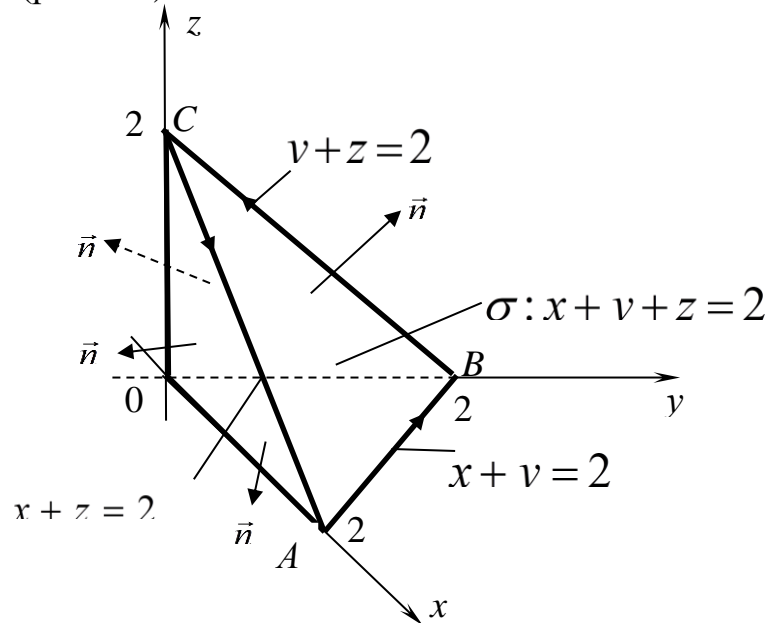
**Приклад 7.** Задано векторне поле  $\vec{F}(x, y, z) = (-2x + 3y - z)\vec{i}$  і площина  $\alpha : x + y + z - 2 = 0$ , яка разом з координатними площинами утворює піраміду  $V$ . Нехай  $\sigma$  – грань піраміди, що належить площині  $\alpha$ ,  $l$  – контур, що обмежує  $\sigma$ ;  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до  $\sigma$ , яка направлена зовні піраміди  $V$ .

Треба обчислити:

а) потік векторного поля  $\vec{F}$  вздовж замкненого контура  $l$  безпосередньо і застосувавши формулу Стокса до контура  $l$  і обмеженої ним поверхні  $\sigma$  з нормаллю  $\vec{n}$ ;

б) потік векторного поля через повну поверхню піраміди  $V$  в напрямі її зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо і застосувавши формулу Гаусса-Остроградського. (рис. 7.2)

Розв'язання.



**Рисунок 7.2** – Потік векторного поля через повну поверхню піраміди  $V$  в напрямі її зовнішньої нормалі до її поверхні

а) Потік  $\Pi$  векторного поля  $\vec{F}$  через двосторонню поверхню  $\sigma$ , визначається поверхневим інтегралом за формулою

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F}(M) \vec{n}(M) d\sigma,$$

де  $\vec{n}(M)$  – одиничний вектор нормалі до вибраної сторони поверхні в її довільній точці.

Якщо поверхня  $\sigma$  взаємно однозначно проектується на площину  $xOy$  в область  $\sigma_{xy}$ , то обчислення потоку векторного поля  $\vec{F}$  через  $\sigma$  зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області  $\sigma_{xy}$  за формулою

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x,y)} dx dy,$$

де  $\cos \gamma$  є косинус кута, який нормаль до поверхні  $\sigma$  утворює з додатним напрямом осі  $Oz$  і є коефіцієнтом при  $\vec{k}$  у формулі

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad} \Phi}{|\text{grad} \Phi|} = \pm \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

знак в якій береться так, щоб одержати нормальний вектор  $\vec{n}$  іменно до вибраної сторони поверхні, якщо вона задана рівнянням

$$\Phi(x, y, z) = 0, \text{ а } z = \varphi(x, y) \text{ одержуємо, розв'язавши } \Phi(x, y, z) = 0 \text{ відносно } z.$$

У нашому випадку поверхня  $\sigma$  – це трикутник  $ABC$ , проекцією якого на площину  $xOy$  є трикутник  $AOB$ , рівняння його площини  $x + y + z - 2 = 0$ .

$$\text{Отже, } \Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Delta ABC} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Delta ABC} \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \Big|_{\varphi=f(x,y)} dx dy.$$

$$\text{Покладемо } \Phi(x, y, z) = x + y + z - 2, \text{ при цьому } \vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad} \Phi}}{|\overrightarrow{\text{grad} \Phi}|} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Тут  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , що відповідає тому напрямку нормалі, який задано в умові задачі.

Далі знаходимо

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2x + 3y - z) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -2x + 3y - z.$$

Із рівняння площини маємо  $z = 2 - x - y$  і тому

$$\left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=f(x,y)} = \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=2-x-y} = -2x + 3y - 2 + x + y = -x + 4y - 2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Delta AOB} (-x + 4y - 2) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (-x + 4y - 2) dy = \\ &= \int_0^2 (8 - 8x + 2x^2 - 4 + x^2) dx = \int_0^2 (3x^2 - 8x + 4) dx = (x^3 - 4x^2 + 4x) \Big|_0^2 = 8 - 16 + 8 = 0. \end{aligned}$$

Циркуляція векторного поля  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  вздовж замкненого шляху  $l$  визначається криволінійним інтегралом по координатах за формулою

$$\mathcal{C} = \oint_l P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

У нашому випадку  $l$  – це контур трикутника  $ABCA$ , утвореного при перетині площини  $x + y + z - 2 = 0$  з координатними площинами.

*Перший спосіб розв'язання.*

Контур  $\Delta ABC$  складається із трьох відрізків  $AB$ ,  $BC$  і  $CA$ .

Оскільки  $\vec{F}(x, y, z) = (-2x + 3y - z)\vec{i} = (-2x + 3y - z, 0, 0)$ ,  $P(x, y, z) = -2x + 3y - z$ ,  $Q(x, y, z) = R(x, y, z) = 0$ , то

$$\mathcal{C} = \oint_l P(x, y, z) dx = \oint_{ABCA} P(x, y, z) dx = \oint_{AB} P(x, y, z) dx + \oint_{BC} P(x, y, z) dx + \oint_{CA} P(x, y, z) dx.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо.

На  $AB$ :  $z = 0$ , отже  $\vec{F} = (-2x + 3y)\vec{i}$ .

Із рівняння прямої  $x + y - 2 = 0$  знаходимо  $y = 2 - x$ .

При переміщенні вздовж відрізка  $AB$  із точки  $A$  до точки  $B$   $x$  змінюється від 2 до 0, тому

$$\oint_{AB} P(x, y, z)dx = \int_2^0 (-2x + 6 - 3x)dx = \int_2^0 (6 - 5x)dx = \left(6x - \frac{5x^2}{2}\right) \Big|_2^0 = -(12 - 10) = -2.$$

На  $BC$ :  $x = 0$  і  $dx = 0$ , тому

$$\oint_{BC} P(x, y, z)dx = 0.$$

На  $CA$ :  $y = 0$ , отже  $\vec{F} = (-2x - z)\vec{i}$ .

Із рівняння прямої  $x + z - 2 = 0$  маємо  $z = 2 - x$ .

При переміщенні вздовж відрізка  $CA$  із точки  $C$  в точку  $A$   $x$  змінюється від 0 до 2, тому

$$\oint_{CA} P(x, y, z)dx = \int_0^2 (-2x - 2 + x)dx = -\int_0^2 (x + 2)dx = -\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_0^2 = -(2 + 4) = -6.$$

Таким чином,

$$\mathcal{C} = -2 - 6 = -8.$$

*Другий спосіб розв'язання.*

Обчислимо циркуляцію, користуючись теоремою Стокса. Згідно з цією теоремою циркуляція векторного поля

$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  вздовж кусково-гладкого контура  $l$ , що обмежує поверхність  $\sigma$  з одиничним вектором нормалі  $\vec{n}$  вибраним так, що видимий з його кінця обхід контура  $l$  здійснюється проти годинникової стрілки, дорівнює потоку ротора цього векторного поля  $\vec{F}$  через поверхню  $\sigma$ , „натягнуту” на контур  $l$ , тобто

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \oint_l Pdx + Qdy + Rdz &= \iint_{\sigma} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}d\sigma = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \\ &+ \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$



У нашому випадку за поверхню „натягнуту” на контур  $ABCA$  візьмемо площину  $x + y + z - 2 = 0$ . Одиничний вектор нормалі до цієї поверхні визначаємо за формулою

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}\Phi}{|\text{grad}\Phi|}, \text{ де } \Phi(x, y, z) = x + y + z - 2,$$

тому

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}},$$

звідки  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$  і нормаль  $\vec{n}$  забезпечує необхідний за теоремою

Стокса напрям обходу контура  $l - ABCA$ .

Знайдемо ротор заданого поля

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x + 3y - z & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} - 3\vec{j} = (0; -3; -1).$$

За теоремою Стокса

$$\Omega = \iint_{\sigma} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Delta AOB} \frac{\text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy.$$

Оскільки

$$\frac{\text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-3-1) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -4,$$

то

$$\Omega = \iint_{\Delta AOB} (-4) dx dy = -4 \iint_{\Delta AOB} dx dy = -4 \cdot S_{\Delta AOB} = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = -8.$$

б) Обчислимо потік заданого векторного поля через повну поверхню піраміди  $V$  двома способами.

*Перший спосіб.*

Повна поверхня піраміди  $CAOB$  складається із чотирьох плоских трикутників  $ABC$ ,  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$ .

Отже,

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{CAOB} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Delta ABC} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\Delta BOC} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\Delta COA} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\Delta AOB} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \\ &= \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4. \end{aligned}$$

Кожний із доданків обчислимо окремо. Оскільки потік через трикутник  $ABC$ , як частину площини  $x + y + z - 2 = 0$ , було обчислено у пункті  $a$ ), то маємо, що  $\Pi_1 = 0$ . Трикутник  $BOC$  лежить в площині  $yOz$ , рівняння якої  $x = 0$ . Зовнішнім одиничним вектором нормалі до  $\Delta BOC$  є вектор  $\vec{n} = -\vec{i} = (-1; 0; 0)$  (рис. 7.2), тому

$$\left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \alpha|} \right|_{x=0} = \frac{-(-2x + 3y - z)}{|-1|} \Big|_{x=0} = z - 3y,$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{\Delta BOC} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \alpha|} \right|_{x=x(y,z)} dydz = \iint_{\Delta BOC} (z - 3y) dydz = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} (z - 3y) dydz = \int_0^2 \left( \frac{z^2}{2} - 3yz \right) \Big|_0^{2-y} dy = \\ &= \int_0^2 \left[ \frac{1}{2}(2-y)^2 - 3y(2-y) \right] dy = \int_0^2 \left( 2 - 8y + \frac{7}{2}y^2 \right) dy = \left( 2y - 4y^2 + \frac{7}{6}y^3 \right) \Big|_0^2 = 4 - 16 + \frac{28}{3} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Трикутник  $COA$  лежить в площині  $xOz$ , рівняння якої  $y = 0$ . Зовнішнім одиничним вектором нормалі буде вектор  $\vec{n} = -\vec{j} = (0; -1; 0)$ , тому

$$\left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \beta|} \right|_{y=0} = 0.$$

Отже,  $\Pi_3 = 0$ .

Трикутник  $AOB$  лежить в площині  $xOy$ , рівняння якої  $z = 0$ . В даному випадку  $\vec{n} = -\vec{k} = (0; 0; -1)$ , тому

$$\left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=0} = 0.$$

Отже,  $\Pi_4 = 0$ .

Остаточо маємо

$$\Pi = 0 - \frac{8}{3} + 0 + 0 = -\frac{8}{3}.$$

*Другий спосіб.*

Обчислимо потік через повну поверхню піраміди за теоремою Гаусса-Остроградського згідно з якою потік векторного поля  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  через зовнішню сторону замкненої поверхні  $\sigma$ , що обмежує об'єм  $V$ , дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції цього поля  $\text{div}\vec{F}$ :

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div}\vec{F} dv,$$

взятому по об'єму, який обмежений поверхнею  $\sigma$ .

У нашому випадку

$$\Pi = \iint_{CAOB} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

оскільки  $P = -2x + 4y - z$ ,  $Q = R = 0$ , то  $\text{div}\vec{F} = -2$ . Тоді

$$\Pi = \iiint_V \text{div}\vec{F} dx dy dz = \iiint_V (-2) dx dy dz = \iiint_V -2 dx dy dz = -2v \text{ піраміди}$$

$$v_{\text{піраміди}} = v_{CAOB} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Отже, } \Pi = -2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}.$$

### ***Завдання для самостійного розв'язання до розділу 7***

**1.** Знайти похідну скалярного поля  $U(x, y, z)$  у точці  $M_1$  в напрямку вектора  $\overline{MM_2}$ .

1.1.  $U(x, y, z) = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$ ;  $M_1(1; -3; 4)$ ,  $M_2(2; 0; -2)$ .

1.2.  $U(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)xyz$ ;  $M_1(1; -1; 2)$ ,  $M_2(2; 0; 3)$ .

$$1.3. U(x, y, z) = xy - \frac{x}{z}; M_1(-4;3;-1), M_2(0;4;1).$$

$$1.4. U(x, y, z) = x^2 - \arctg(y + z); M_1(1;1;1), M_2(4;3;2).$$

$$1.5. U(x, y, z) = x\sqrt{y} + (z + y)\sqrt{x}; M_1(1;1;-2), M_2(2;3;0).$$

2. Знайти напруженість електричного поля  $\vec{E}(x, y, z)$ , якщо задано його потенціал  $U(x, y, z)$ .

$$2.1. U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

$$2.2. U = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}.$$

$$2.3. U = z \ln(e^x + e^y).$$

$$2.4. U = (x + z - y)^2 + 4xyz.$$

$$2.5. U = \cos x + \cos y + \cos(x + y + z).$$

3. Знайти об'ємну густину електричних зарядів  $\gamma(x, y, z)$ , якщо задано вектор електричної індукції  $\vec{D}(x, y, z)$ .

$$3.1. \vec{D} = x(y + z)\vec{i} + y(z + x)\vec{j} + z(x - y)\vec{k}.$$

$$3.2. \vec{D} = e^z \sin x\vec{i} + e^x \sin y\vec{j} + e^y \sin z\vec{k}.$$

$$3.3. \vec{D} = \ln(x^2 + y^2)\vec{i} + \ln(z^2 + y^2)\vec{j} + \ln(z^2 + x^2)\vec{k}.$$

$$3.4. \vec{D} = \frac{x^2}{yz}\vec{i} + \frac{y^2}{xz}\vec{j} + \frac{z^2}{xy}\vec{k}.$$

$$3.5. \vec{D} = x^2 e^{yz}\vec{i} + y^3 e^{xz}\vec{j} + z^4 e^{xy}\vec{k}.$$

4. Знайти струм зсування  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  у діелектрику, якщо у ньому задано магнітне

поле  $\vec{H}(x, y, z)$ , за відомим рівнянням Максвелла  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H}$ .

$$4.1. \vec{H} = \frac{xy}{z}\vec{i} + \frac{yz}{x}\vec{j} + \frac{zx}{y}\vec{k}.$$

$$4.2. \vec{H} = e^x \sin y \vec{i} + e^y \sin z \vec{j} + e^z \sin x \vec{k}.$$

$$4.3. \vec{H} = \ln(x^2 + y^2) \vec{i} + \ln(z^2 + y^2) \vec{j} + \ln(x^2 + z^2) \vec{k}.$$

$$4.4. \vec{H} = x^3 y \vec{i} + y^3 z \vec{j} + z^3 x \vec{k}.$$

$$4.5. \vec{H} = (y + z) \sin x \vec{i} + (x + z) \sin y \vec{j} + (y + x) \sin z \vec{k}.$$

5. Задано векторне поле  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$  і площина  $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ , яка разом з координатними площинами  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  утворює піраміду  $V$ .  $\sigma$  – та грань піраміди, що належить площині  $\alpha$ ;  $l$  – контур, обмежує  $\sigma$ ;  $\vec{n}$  – нормаль до  $\sigma$ , яка напрямлена зовні піраміди  $V$ . Необхідно обчислити:

1) потік векторного поля  $\vec{F}$  через поверхню  $\sigma$  в напрямі нормалі  $\vec{n}$ ;

2) циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  вдовж замкненого контура  $l$  безпосередньо і застосувавши теорему Стокса до контуру  $l$  і обмеженої ним поверхні  $\sigma$  з нормаллю  $\vec{n}$ ;

3) потік векторного поля  $\vec{F}$  через повну поверхню піраміди в напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо і за теоремою Гаусса-Остроградського. Зробити рисунок.

$$5.1. \vec{F} = (-3x + y + 6z) \vec{j}; \quad \alpha: x - y + 2z - 4 = 0.$$

$$5.2. \vec{F} = (x + y - z) \vec{i}; \quad \alpha: -x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

$$5.3. \vec{F} = (7y + z) \vec{j}; \quad \alpha: x + y + 2z - 4 = 0.$$

$$5.4. \vec{F} = (2x - y + z) \vec{k}; \quad \alpha: 2x + 2y - z - 4 = 0.$$

$$5.5. \vec{F} = (3x - 3y + 2z) \vec{i}; \quad \alpha: -3x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

6. Перевірити чи є векторне поле

$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$  потенціальним і соленоїдальним.

У випадку потенціальності поля знайти його потенціал.

$$6.1. \vec{F} = (10x + yz) \vec{i} + (10y + xz) \vec{j} + (10z + xy) \vec{k}.$$

$$6.2. \vec{F} = (9x - 2yz) \vec{i} + (9y - 2xz) \vec{j} + (9z - 2xy) \vec{k}.$$

$$6.3. \vec{F} = (5x + 7yz) \vec{i} + (5y + 7xz) \vec{j} + (5z + 7xy) \vec{k}.$$

$$6.4. \vec{F} = (x - 10yz) \vec{i} + (y - 10xz) \vec{j} + (z - 10xy) \vec{k}.$$

$$6.5. \vec{F} = (7x + 2yz) \vec{i} + (7y + 2xz) \vec{j} + (7z + 2xy) \vec{k}$$

## РОЗДІЛ 8. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

### Комплексні числа.

#### Алгебраїчна форма комплексного числа

Комплексні числа виникли із потреб фізичних та технічних наук та є розширенням множини дійсних чисел.

**Означення.** Комплексним числом у алгебраїчній формі називається вираз виду  $z = x + iy$ , де  $x$  та  $y$  – дійсні числа, а символ  $i$  – уявна одиниця, що визначається з умови  $i^2 = -1$  або  $i = \sqrt{-1}$ . Числа  $x$  та  $y$  називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа  $z$  і позначаються  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Із означення уявної одиниці випливає, що  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ ,  $i^6 = -1$ .  
Взагалі

$$i^{4n-3} = i, \quad i^{4n-2} = -1, \quad i^{4n-1} = -i, \quad i^{4n} = 1 \quad (n=1,2,\dots) \quad (8.1)$$

Дійсне число  $x$  можна розглядати як комплексне число, у якого уявна частина дорівнює нулю. Тому множина дійсних чисел  $R$  є підмножиною множини комплексних чисел  $C$ .

**Означення.** Комплексні числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  та  $z_2 = x_2 + iy_2$  вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Понять ”більше” та ”менше” для комплексних чисел не існує.

Комплексне число  $\bar{z} = x - iy$  називається спряженим до комплексного числа  $z = x + iy$ . Число  $z = x + iy$  дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли  $x = 0$  і  $y = 0$ .

Арифметичні дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

1. Сума, різниця:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2).$$

2. Добуток:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(одержується як добуток двочленів, враховуючи, що  $i^2 = -1$ ). Зокрема  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$  – дійсне число.

3. Частка:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

4. Піднесення до натурального степеня:

натуральний степінь  $z^n = (x + iy)^n$  обчислюється за правилом бінома Ньютона, враховуючи (8.1). Наприклад

$$z^3 = (z + iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3).$$

### Тригонометрична та показникова форми комплексного числа

Кожному комплексному числу  $z = x + iy$  можна поставити у відповідність точку  $M(x, y)$  або вектор  $\overline{OM}$  на площині  $xOy$ . Вісь  $Ox$  називається дійсною віссю,  $Oy$  – уявною віссю, а сама площина  $xOy$  в цьому випадку називається площиною комплексної змінної  $z$  (рис. 8.1).

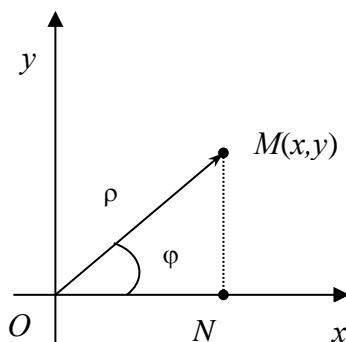


Рисунок 8.1 – Площина комплексної змінної  $z$

**Означення.** Довжина вектора  $\overline{OM}$  називається модулем, а кут між додатним напрямом вісі  $Ox$  і вектором  $\overline{OM}$  називається аргументом комплексного числа  $z$ . Модуль числа  $z$  позначається  $|z|$  і дорівнює

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad (8.2)$$

Аргумент числа  $z$  позначається  $Arg z$ . Для числа  $z = 0$  поняття аргументу не має змісту, а при  $z \neq 0$  аргумент визначається з точністю до доданка, кратного  $2\pi$ . Значення кута  $\varphi = Arg z$ , яке належить проміжку  $[-\pi; \pi]$ , називається головним значенням аргументу числа  $z$  і позначається  $\arg z$ . Таким чином,

$$Arg z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для будь-якого комплексного числа  $z = x + iy$  ( $z \neq 0$ ) головне значення аргумента визначається за формулою

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

З трикутника  $OMN$  (рис.8.1):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Підставимо ці вирази в алгебраїчну форму комплексного числа  $z = x + iy$  та одержимо

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (8.4)$$

Вираз (8.4) є тригонометричною формою комплексного числа. Має місце формула Ейлера, яка буде доведена далі:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (8.5)$$

Підставимо (8.5) у (8.4) та отримаємо

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (8.6)$$



Вираз (8.6) є показниковою формою комплексного числа. У формулах (8.4) та (8.6)  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $-\infty < \varphi < \infty$ .

Нехай  $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ;  $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  або  $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ ;  $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ . Умова рівності  $z_1 = z_2$  має вигляд

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (8.7)$$

Комплексні числа у тригонометричній або показниковій формах зручно перемножати і ділити:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (8.8)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (z_2 \neq 0)$$

або

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0).$$

Зокрема з формули (8.8) витікає

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (8.9)$$

Поклавши у формулі (8.9)  $\rho = 1$ , одержимо формулу Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (8.10)$$

**Приклад 1.** Виразити  $\sin 3\varphi$  та  $\cos 3\varphi$  через  $\sin \varphi$  та  $\cos \varphi$ .

*Розв'язання.* Скористаємося формулою (8.10) і умовою рівності комплексних чисел у алгебраїчній формі:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$$

або

$$\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi,$$

звідки

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi; \\ \sin 3\varphi &= 3\cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.\end{aligned}$$

### Добування кореня з комплексного числа

Однією з причин впровадження комплексних чисел стала можливість добування коренів парних степенів з від'ємного числа. На множині комплексних чисел корінь  $n$ -го степеня з будь-якого числа  $z$  має  $n$  різних значень.

Нехай  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ,  $\zeta = \rho(\cos \beta + i \sin \beta)$ . Якщо  $\sqrt[n]{z} = \zeta$ , то  $z = \zeta^n$  або

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \rho^n (\cos n\beta + i \sin n\beta).$$

З умови рівності комплексних чисел маємо:  $\rho = \sqrt[n]{r}$ ,  $\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$ . При

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  одержимо  $n$  різних значень кореня за формулою

$$\zeta_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (8.11)$$

**Зауваження.** Позначення  $\sqrt[n]{r}$  означає арифметичний корінь  $n$ -го степеня з додатного дійсного числа.

**Приклад 2.** Знайти всі значення  $\sqrt[4]{-1}$ .

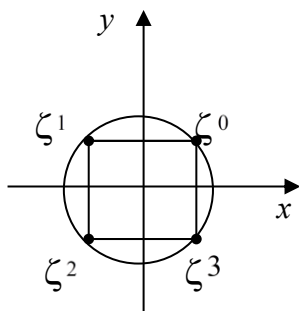
*Розв'язання.* Оскільки число  $-1$  у тригонометричній формі має вигляд  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ , то за формулою (8.11)

$$\zeta_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Отже,  $\zeta_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ,  $\zeta_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ ,

$\zeta_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ,  $\zeta_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ .

Усі значення  $\sqrt[4]{-1}$  розташовані на колі радіуса 1 у вершинах квадрата



(Рис. 8.2)

Рисунок 8.2 – Зображення  $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  у прикладі 2

**Приклад 3.** Дано комплексне число  $z = \frac{3 + 4i}{1 - 2i}$ . Треба:

- 1) записати його в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах;
- 2) обчислити  $z^4$ ;
- 3) розв'язати рівняння  $w^3 - z = 0$ .

*Розв'язання.* Щоб записати число  $z$  в алгебраїчній формі  $z = x + iy$ , треба помножити його чисельник і знаменник на комплексне число, спряжене до знаменника:

$$z = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-5 + 10i}{1^2 - (2i)^2} = -1 + 2i.$$

Щоб записати число  $z$  у тригонометричній та показниковій формах, треба знайти його модуль та головне значення аргумента:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}; \quad \arg z = \pi + \arctg \frac{y}{x} = \pi - \arctg 2 = 117^\circ.$$

Таким чином,

$$z = \sqrt{5}(\cos 117^\circ + i \sin 117^\circ); \quad z = \sqrt{5}e^{i117^\circ}.$$

Знайдемо четвертий степінь числа  $z$ :

$$z^4 = (\sqrt{5})^4 (\cos(4 \cdot 117^\circ) + i \sin(4 \cdot 117^\circ)) = 25(\cos 108^\circ + i \sin 108^\circ) = -7,7 + 23,8i.$$

Розв'язок рівняння  $w^3 - z = 0$  має вигляд  $w = \sqrt[3]{z}$ , тобто за формулою добування кореня

$$w = \sqrt[3]{5} \left( \cos \frac{117^\circ + 360^\circ \cdot k}{3} + i \sin \frac{117^\circ + 360^\circ \cdot k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

При  $k=0$   $w_0 = \sqrt[6]{5}(\cos 39^\circ + i \sin 39^\circ) \approx 1,02 + 0,82i$ .

При  $k=1$   $w_1 = \sqrt[6]{5}(\cos 159^\circ + i \sin 159^\circ) \approx -1,22 + 0,47i$ .

При  $k=2$   $w_2 = \sqrt[6]{5}(\cos 279^\circ + i \sin 279^\circ) \approx 0,20 - 1,29i$ .

## Послідовності комплексних чисел та їх границі

**Означення.** Число  $a$  називається границею послідовності комплексних чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  або  $\{z_n\}$ , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0. \quad (8.12)$$

Нехай  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $a = \alpha + i\beta$ , тоді  $|z_n - a| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2}$  і рівність (8.12) можна записати у вигляді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta. \quad (8.13)$$

Зауважимо, що з рівностей (8.13) випливає рівність (8.12).

**Означення.** Послідовність  $\{z_n\}$  має нескінченну границю ( $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ), якщо для довільного додатного числа  $M$  існує таке натуральне  $N$ , залежне від  $M$ , що для всіх  $n > N$  виконується рівність  $|z_n| > M$ , тобто всі члени послідовності, починаючи з  $N$ -го, будуть розташовані зовні кола скільки завгодно великого радіуса.

Прийнято вважати, що комплексна площина має єдину нескінченно віддалену точку  $\infty$ . Околом точки  $\infty$  на площині  $Z$  вважається зовнішність кола довільно великого радіуса з центром у початку координат. Комплексна площина  $Z$  з такою нескінченно віддаленою точкою  $\infty$  називається розширеною площиною комплексної змінної  $Z$ . Рівність  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  означає, що послідовність

$\{z_n\}$  збігається до точки  $\infty$ .

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad (8.14)$$

елементи якого є комплексними числами. Цей ряд збіжний, якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (8.15)$$

де  $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$  – часткова сума ряду (8.14) і тоді  $S$  є сумою цього ряду. Якщо границя (8.15) не існує, то ряд (8.14) є розбіжним.

Із означення границі послідовності комплексних чисел випливає, що коли ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  ( $z_k = x_k + iy_k$ ) є збіжним, то збігаються і ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k. \quad (8.16)$$

Зазначимо, що виконується і обернене твердження: із збіжності рядів (8.16) випливає збіжність ряду (8.14).

Очевидно, що для ряду (8.14) справедлива необхідна ознака збіжності, а саме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = 0.$$

Ряд  $a \sum_{n=1}^{\infty} z^n$  складає геометричну прогресію. Якщо  $|z| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$  і

тоді сума цього ряду  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-z^{n+1})}{1-z} = \frac{a}{1-z}$ . Коли  $|z| \geq 1$ ,  $az^n$  не прямує

до нуля і тоді ряд  $a \sum_{n=1}^{\infty} z^n$  є розбіжним.

**Приклад 4.** Знайти суму ряду  $i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2^2} + \dots + \frac{i^n}{2^{n-1}} + \dots$

*Розв'язання.* Оскільки цей ряд є геометричною прогресією із знаменником  $q = \frac{i}{2}$  та  $|q| < 1$ , тоді

$$S = \frac{i}{1 - \frac{i}{2}} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \quad (8.17)$$

Якщо збігається ряд (8.17), кажуть, що ряд (8.14) абсолютно збіжний. Справедливе твердження: якщо ряд (8.17) збіжний, то збіжним є і ряд (8.14).

**Зауваження.** Ряд (8.17) є рядом з додатними членами, тому при дослідженні на абсолютну збіжність користуються ознаками збіжності Даламбера і Коші.

**Приклад 5.** Дослідити на збіжність ряд  $i + \frac{2i^2}{2} + \frac{3i^3}{2^2} + \dots + \frac{ni^n}{2^{n-1}} + \dots$ .

*Розв'язання.* Застосуємо ознаку Даламбера для доведення збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot i^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot n \cdot i^n} \right| = |i| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$ , то заданий ряд є збіжним.

### Деякі множини точок на комплексній площині

Для геометричного тлумачення наступних понять теорії функцій комплексної змінної введемо низку означень, пов'язаних з множинами точок на площині  $Z$ .

Нехай  $\delta$  – додатне число.  $\delta$ -околом точки  $z_0$  називається сукупність точок  $Z$ , що задовольняють умові  $|z - z_0| < \delta$ . Якщо точка  $z_0$  належить множині  $D$  разом із деяким  $\delta$ -околом, вона називається **внутрішньою** точкою множини  $D$ . Якщо у будь-якому околі точки  $z_0$  є як точки, що належать множині  $D$ , так і точки, що їй не належать, то точка називається **межовою**. Сукупність усіх межових точок множини  $D$  називається її **межею**. Точка  $z_0$  називається **граничною точкою** множини  $D$ , якщо кожний окіл цієї точки містить нескінченну кількість точок множини  $D$ . В цьому випадку існує послідовність точок, що належить множині  $D$  та збігається до точки  $z_0$ .

Множина  $D$  називається **відкритою**, якщо всі її точки є внутрішніми. Множина  $D$  називається **областю**, якщо вона відкрита та будь-які дві її точки можна з'єднати лінією, всі точки якої належать цій множині. Множина  $D$

називається **замкненою**, якщо вона містить всі свої межові точки. Область  $D$  разом із точками своєї межі називається **замкненою областю** і позначається  $\bar{D}$ .

Область  $D$  називається **обмеженою**, якщо існує коло скінченного радіуса з центром у початку координат, що містить область  $D$ . Обмежена замкнена область називається **компактом**.

Область  $D$  називається **однозв'язною**, якщо у довільному замкненому контурі, проведеному в області  $D$ , всі точки, що обмежені цим контуром, належать області  $D$ . Область  $D$  називається  **$n$ -зв'язною**, якщо її межа складається з  $n$  окремих контурів, один з яких є зовнішнім, а інші містяться всередині нього. Обхід межі області називається додатним, коли при русі по межі область залишається зліва.

### Загальні означення і геометрична інтерпретація

Нехай на площині  $Oxy$  комплексної змінної  $z = x + iy$  маємо множину  $D$ , а на площині  $Ouv$  комплексної змінної – множину  $G$ .

**Означення.** Якщо кожному  $z \in D$  поставлено у відповідність по деякому правилу одне (кілька) число  $w \in G$ , то кажуть, що на множині  $D$  задана однозначна (багатозначна) **функція**  $w = f(z)$ .

Із геометричної точки зору однозначна функція  $w = f(z)$  виконує перетворення (або відображення) множини  $D$  на площині  $Z$  на множину  $G$  на площині  $W$ .

**Означення.** Відображення множини  $D$  на множину  $G$  називається **взаємно однозначним (однолістним)**, якщо функція  $w = f(z)$  є однозначною і двом різним точкам  $z_1, z_2 \in D$  ставить у відповідність дві різні точки  $w_1, w_2 \in G$ .

**Означення.** Нехай функція  $w = f(z)$  здійснює відображення множини  $D$  на множину  $G$ , а функція  $\zeta = g(w)$  відображає множину  $G$  на множину  $E$ , тоді функція  $\zeta = \psi(z) = g(f(z))$ , яка відображає множину  $D$  на множину  $E$ , називається **складною функцією**, а відповідне відображення  $\psi$  називається **суперпозицією** відображень  $f$  і  $g$ .

Нехай  $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , а  $w = u + iv = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ . Тоді  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , де  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ .

**Приклад 6.** Знайти дійсну та уявну частину функції  $w = \frac{1}{z}$ .

*Розв'язання.*  $w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ . Отже, маємо

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Якщо на площині  $z$  крива  $L$  задана рівнянням у параметричній формі  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ;  $t_1 \leq t \leq t_2$ , або  $z(t)=x(t)+iy(t)$ , то функція  $w=f(z)$  перетворює її у криву  $\Gamma$  на площині  $w$ , параметричні рівняння якої мають вигляд

$$u = u(x(t), y(t)) = u(t), \quad v = v(x(t), y(t)) = v(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

**Приклад 7.** Знайти зображення відрізка прямої  $\text{Im}z=1, -1 \leq \text{Re}z \leq 1$  (або в параметричній формі:  $x=t; y=1, -1 \leq t \leq 1$ ), яке одержується при відображенні  $w=z^2$ .

*Розв'язання.* Функцію  $w=z^2$  можна зобразити як  $w=(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ , звідки одержуємо  $u(x,y) = x^2 - y^2$ ,  $v(x,y) = 2xy$ .

Параметричні рівняння  $\Gamma$  мають вигляд  $\begin{cases} u(t) = t^2 - 1, \\ v(t) = 2t \end{cases}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Виключаючи

параметр  $t$  з цих рівнянь, одержимо:  $v^2 = 4u + 2, -2 \leq v \leq 2$ . Це відрізок параболи (рис. 8.3).

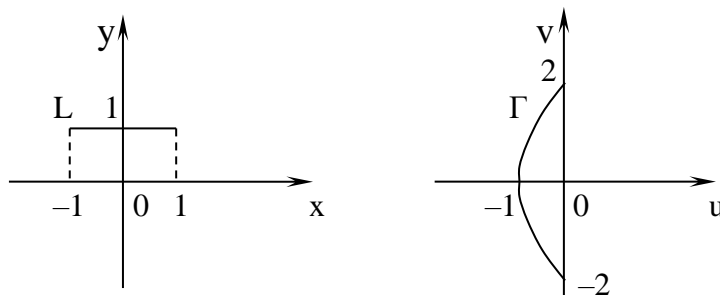


Рисунок 8.3 – Зображення відрізка прямої у прикладі 7

## Основні елементарні функції комплексної змінної

У цьому пункті розглянемо основні елементарні функції комплексної змінної, які є природним розповсюдженням відомих елементарних функцій



дійсної змінної на множину комплексних чисел. Як ми далі побачимо, таке розповсюдження може бути виконано єдиним способом. Одержані таким чином елементарні функції комплексної змінної збігаються з відомими елементарними функціями на дійсній осі, тобто коли аргумент приймає дійсні значення. Але елементарні функції на множині комплексних чисел здобувають деякі нові властивості: так, функція  $e^z$  стає періодичною, а функції  $\sin z$  та  $\cos z$  стають необмеженими.

1) Ціла раціональна функція або поліном  $n$ -го степеня.

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad (8.18)$$

де  $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$  – комплексні числа.

На відміну від полінома, над множиною дійсних чисел функція (8.18) має рівно  $n$  нулів, тобто таких чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , що  $P_n(z_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

2) Дробово-раціональна функція визначається відношенням поліномів

$$W(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}. \quad (8.19)$$

3) Показникова функція визначається як сума абсолютно збіжного в усій площині  $z$  степеневого ряду

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (8.20)$$

4) Тригонометричні функції  $\sin z$  і  $\cos z$  також визначаються абсолютно збіжними на всій площині  $z$  степеневими рядами:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (8.21)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (8.22)$$

Із означення функцій  $e^z, \sin z, \cos z$  легко доводиться формула Ейлера (8.5), яка для комплексної змінної записується у вигляді

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (8.23)$$

Дійсно,

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z.$$

Для функції комплексної змінної  $e^z$  із означення (8.20) випливає справедливість формули

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (8.24)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots\right) = \\ &= 1 + (z_1 + z_2) + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \dots = e^{(z_1+z_2)}. \end{aligned}$$

З формул (8.23) і (8.24) випливає, що показникова функція має чисто уявний період  $2\pi i$ . Дійсно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

**Приклад 8.** Перевести комплексне число  $e^{\ln 2 + \frac{\pi}{3}i}$  в алгебраїчну форму.

*Розв'язання.*

$$e^{\ln 2 + \frac{\pi}{3}i} = e^{\ln 2} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

З формули (8.23) легко одержати, що

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (8.25)$$

Тригонометричні функції комплексної змінної мають властивості, аналогічні властивостям тригонометричних функцій дійсної змінної. Доведемо, наприклад, що

$$\cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 = \cos(z_1 + z_2). \quad (8.26)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} & \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ & = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться формула

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2. \quad (8.27)$$

З формул (8.26) і (8.27) легко доводиться, що функції комплексної змінної  $\sin z$  та  $\cos z$  періодичні із дійсним періодом  $2\pi$ . На відміну від функцій  $\sin x$ ,  $\cos x$  функції комплексної змінної  $\sin z$  та  $\cos z$  необмежені і приймають нульові значення тільки в точках дійсної осі  $z = k\pi$ ,  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

відповідно. З формул (8.25) також легко випливає тотожність  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ .

Функції  $\operatorname{tg} z$  та  $\operatorname{ctg} z$  визначаються рівностями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = i \cdot \frac{e^{2zi} + 1}{e^{2zi} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

5) Гіперболічні функції визначаються формулами  $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ,

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Із означення функцій випливають їхні властивості та зв'язок із тригонометричними функціями комплексної змінної:

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z \equiv 1, \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} 2z = 2 \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, \quad \operatorname{ch}^2 z = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2z + 1),$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z, \quad \sin iz = i \cdot \operatorname{sh} z,$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{th} iz = i \cdot \operatorname{tg} z, \quad \operatorname{tg} iz = i \cdot \operatorname{th} z.$$

Пропонуємо читачу самому довести справедливості наведених формул.

б) Логарифмічна функція.

**Означення.** Число  $w$  називається натуральним логарифмом числа  $z$ , якщо  $e^w = z$  ( $z \neq 0$ ). Наприклад, число  $w = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$  є натуральним логарифмом числа  $z = 1 + i$ , бо

$$e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i} = e^{\ln \sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i.$$

**Означення.** Функція, обернена до показникової, називається логарифмічною і позначається

$$w = \operatorname{Ln} z.$$

Із означення випливає, що  $z = e^w$ , тому  $e^{\operatorname{Ln} z} = z$ . Ця рівність називається логарифмічною тотожністю. Знайдемо дійсну та уявну частини функції  $w = \operatorname{Ln} z$ . Позначимо  $w = u + iv$ , а  $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$  або  $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$ . Тоді з означення випливає, що  $\rho e^{i\varphi} = e^{u+iv} \Rightarrow |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = e^u \cdot e^{iv} \Rightarrow |z| = e^u$ ,  $u = \operatorname{Ln} |z|$ ,  $v = \operatorname{Arg} z$ . Отже,

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

або

$$\operatorname{Ln} z = u + iv = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi). \quad (8.29)$$

З формули (8.29) витікає, що функція  $w = \operatorname{Ln} z$  є багатозначною. **Головним значенням** цієї функції називається значення при  $k = 0$ . Воно позначається  $\ln z$  і дорівнює

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (8.30)$$

Із формули (8.29) витікає, що

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i. \quad (8.31)$$

**Приклад 9.** Знайти всі значення логарифма числа  $1 + i\sqrt{3}$ .

*Розв'язання.* Запишемо число  $1 + i\sqrt{3}$  у показниковій формі:

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}},$$

тому

$$\operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Легко перевірити, що  $1 + i\sqrt{3} = e^{i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)}$ .

**Зауваження.** Для логарифмів комплексних чисел виконуються відомі для дійсних чисел співвідношення:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

та інші.

7) Обернені тригонометричні функції  $w = \operatorname{Arcsin} z$ ,  $w = \operatorname{Arccos} z$ ,  $w = \operatorname{Arctg} z$ ,  $w = \operatorname{Arcctg} z$  визначаються як функції, обернені до відповідних тригонометричних функцій комплексної змінної.

Обернені тригонометричні функції можна виразити через логарифмічну функцію. Наприклад, нехай  $w = \operatorname{Arcsin} z$ , звідси  $z = \sin w$ . Скористаємося формулою Ейлера:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad \text{або} \quad z = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$$

і позначимо  $e^{iw} = t$ , тоді  $z = \frac{t^2 - 1}{2it}$ . З цього рівняння знайдемо  $t$ :

$$t^2 - 2izt - 1 = 0 \Rightarrow t = iz + \sqrt{(iz)^2 + 1}.$$

Звідси одержимо

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = \text{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

Таким чином,

$$\text{Arcsin} z = -i \text{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}). \quad (8.32)$$

Аналогічно виводяться формули

$$\text{Arccos} z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{1-z^2}), \quad (8.33)$$

$$\text{Arctg} z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad (8.34)$$

$$\text{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z+i}{z-i}. \quad (8.35)$$

З цих формул видно, що обернені тригонометричні функції є багатозначними. Головні значення цих функцій позначаються через  $\text{arcsin} z$ ,  $\text{arccos} z$ ,  $\text{arctg} z$ ,  $\text{arcctg} z$ . Вони отримуються при головних значеннях відповідних логарифмів.

**Приклад 10.** Знайти  $\text{Arcsin} \frac{1}{2}$ .

*Розв'язання.* За формулою (8.32)

$$\text{Arcsin} \frac{1}{2} = -i \text{Ln}\left(i \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right) = -i \text{Ln} \frac{\sqrt{3} + i}{2} =$$

$$= -i(\ln|\sqrt{3} + i| + i \text{Arg}(\sqrt{3} + i) - \ln 2 - 2k\pi) = -i(\ln 2 + i \frac{\pi}{6} + 2m\pi - \ln 2 - 2k\pi) =$$

$$= \frac{\pi}{6} + 2(k - m)\pi, \quad m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тому  $\text{Arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Головне значення функції  $\text{arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ .

**Зауваження.** Аналогічно можна вивести формули обернених гіперболічних функцій  $\text{Arsh} z$ ,  $\text{Arch} z$ ,  $\text{Arth} z$ ,  $\text{Arcth} z$ .

7) Загальна степенева функція  $w = z^a$ , де  $a = \alpha + i\beta$  – довільне комплексне число, визначається так:

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} . \quad (8.36)$$

Ця функція є багатозначною. Її головне значення  $z^a = e^{a \ln z}$ .

**Приклад 11.** Знайти значення функції  $w = z^2$  у точці  $z = 2$ .

*Розв'язання.* Згідно з формулою (8.36)

$$z^2 \Big|_{z=2} = 2^2 = e^{2 \operatorname{Ln} 2} = e^{2(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{\operatorname{Ln} 4} \cdot e^{4k\pi} = 4.$$

**Приклад 12.** Знайти значення функції  $w = z^6$  у точці  $z = \sqrt{3} - i$ .

*Розв'язання.*

$$(\sqrt{3} - i)^6 = e^{6 \operatorname{Ln}(\sqrt{3} - i)} = e^{6(\ln 2 - \frac{\pi}{6}i + 2k\pi i)} = e^{(\ln 2^6 - \pi i + 12k\pi i)} = -64.$$

**Зауваження.** Цей приклад можна розв'язати, записавши число  $z$  у показниковій формі:

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow z^6 = 2^6 \cdot e^{-i\pi} = 64(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -64.$$

8) Загальна показникова функція  $w = a^z$ , де  $a = \alpha + i\beta$  ( $a \neq 0$ ) – довільне комплексне число, визначається так:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} . \quad (8.37)$$

Ця функція є багатозначною і її головне значення –

$$a^z = e^{z \ln a} .$$

**Приклад 13.** Знайти  $w = i^z$  при  $z = \frac{1}{i}$ .

*Розв'язання.*

$$w\left(\frac{1}{i}\right) = i^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{1}{i} \operatorname{Ln} i} = e^{-i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = e^{\frac{\pi}{2}(4k+1)} .$$

### Границя та неперервність функції комплексної змінної

Нехай функція  $w=f(z)$  визначена і однозначна у деякому околі точки  $z_0 = x_0 + iy_0$  крім, можливо, самої точки  $z_0$ .

**Означення.** Число  $A$  називається границею функції  $w=f(z)$  у точці  $z_0$ , якщо виконується рівність

$$\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} |f(z) - A| = 0. \quad (8.38)$$

Позначається  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ .

**Означення.** Число  $A$  називається границею функції  $w=f(z)$  у точці  $z_0$ , якщо для довільної послідовності  $\{z_k\}$ , що збігається до точки  $z_0$ , відповідна послідовність значень функції  $\{w_k\}$  збігається до числа  $A$ .

Очевидно, що наведені означення границі функції в точці еквівалентні. З них випливає, що значення границі не залежить від того, як точка  $z$  наближається до точки  $z_0$ .

Нехай  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $A = B + iC$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $|z - z_0| = r$ , тоді рівність (8.38) можна записати так:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{(u(x, y) - B)^2 + (v(x, y) - C)^2} = 0. \quad (8.39)$$

З рівності (8.39) випливає:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = B, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = C. \quad (8.40)$$

Очевидно, що коли одночасно виконуються рівності (8.40), виконується і рівність (8.38), тобто число  $A = B + iC$  є границею функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  у точці  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Таким чином, означення границі функції комплексної змінної зводиться до границі функції дійсної змінної, тому основні властивості границі функції дійсної змінної зберігаються і для функції комплексної змінної.

Наприклад, якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  і  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = B$  ( $A \neq \infty, B \neq \infty$ ), то



$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm \varphi(z)) = A \pm B, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot \varphi(z)) = A \cdot B, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

Оскільки поняття границі є одним із основних, дамо ще означення границі функції  $w = f(z)$  в точці  $z_0$ , з якого випливає геометричний зміст цього поняття.

**Означення.** Число  $A$  називається границею функції  $w = f(z)$  в точці  $z_0$ , якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  можна знайти таке  $\delta > 0$ , що з нерівності  $|z - z_0| < \delta$  випливає нерівність  $|A - f(z)| < \varepsilon$ .

З цього означення випливає, що функція  $w = f(z)$  відображає  $\delta$ -окіл точки  $z_0$  на площині  $Z$  на  $\varepsilon$ -окіл точки  $A$  на площині  $W$ .

Якщо  $z_0$  є нескінченно віддаленою точкою  $\infty$ , то границя функції  $w = f(z)$  в цьому випадку визначається наступним чином.

**Означення.** Число  $A$  називається границею функції  $w = f(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ , якщо  $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z) - A| = 0$ .

**Приклад 14.** Знайти границю  $A$  функції  $w = \frac{z + 8}{3 - 2z}$  при  $z \rightarrow \infty$ , тобто

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z + 8}{3 - 2z}.$$

*Розв'язання.*

1) Нехай  $z \rightarrow \infty$  вздовж додатного напрямку осі  $Ox$  на площині  $Z$ . Тоді  $z = x$  і

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 8}{3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{8}{x}}{\frac{3}{x} - 2} = -\frac{1}{2}.$$

2) Нехай  $z \rightarrow \infty$  вздовж прямої  $y = kx$  або  $x = t, y = kt$ , коли  $t \rightarrow \infty$ , тоді  $z = t + ikt = t(1 + ik)$ , тому маємо:

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(1 + ik) + 8}{3 - 2t(1 + ik)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + ik + \frac{8}{t}}{\frac{3}{t} - 2(1 + ik)} = -\frac{1}{2}.$$

Цей приклад ще раз підкреслює справедливість домовленості про єдину нескінченно віддалену точку  $\infty$  комплексної площини  $Z$  і незалежність значення границі від того, яким шляхом точка  $Z$  наближається до точки  $\infty$ .

**Означення.** Функція  $w = f(z)$  називається неперервною в точці  $z_0$ , якщо вона визначена в деякому околі точки  $z_0$  і самій точці  $z_0$  та

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (8.41)$$

Якщо позначити  $\Delta z = z - z_0$ ,  $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ , то рівність (8.41) можна записати у вигляді

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0. \quad (8.42)$$

Цю рівність можна прийняти за ознаку неперервності функції  $w = f(z)$  в точці  $z_0$ .

**Означення.** Функція  $w = f(z)$  неперервна в точці  $z_0$ , якщо вона визначена в цій точці і деякому її околі та довільному нескінченно малому приросту аргумента  $\Delta z = z - z_0$  відповідає нескінченно малий приріст функції  $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ .

**Зауваження.** Згідно з іншими означеннями границі функції в точці можна дати відповідні ознаки неперервності функції в точці, а саме:

а) Функція  $w = f(z)$  неперервна в точці  $z_0$ , якщо для довільної послідовності  $\{z_k\} \rightarrow z_0$  відповідна послідовність значень функції  $\{f(z_k)\} \rightarrow f(z_0)$ ;

б) Функція  $w = f(z)$  неперервна в точці  $z_0$ , якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  можна знайти таке  $\delta > 0$ , що з нерівності  $|z - z_0| < \delta$  витікає нерівність  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

Якщо позначити  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то можна показати, що умова (8.41) еквівалентна двом умовам

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0). \quad (8.43)$$

Рівності (8.43) вказують на зв'язок між неперервністю функції комплексної змінної  $w = f(z)$  в точці  $z_0$  і неперервністю функцій  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  у відповідній точці  $(x_0, y_0)$ .

Нехай  $D$  – область комплексної площини  $Z$ .

**Означення.** Функція  $w = f(z)$  називається неперервною в області  $D$ , якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

**Означення.** Функція  $w = f(z)$  називається рівномірно неперервною в області  $D$ , якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta(\varepsilon) > 0$ , що для  $\forall z_1, z_2 \in D$ , які задовольняють нерівності  $|z_1 - z_2| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ .

**Означення.** Функція  $w = f(z)$  називається обмеженою в області  $D$ , якщо існує таке додатне число  $N$ , що для  $\forall z \in D$  виконується нерівність  $|f(z)| < N$ .

**Зауваження.** Функції комплексної змінної, неперервні в замкненій області  $\bar{D}$ , мають властивості, аналогічні властивостям функцій дійсної змінної, що неперервні в замкненій області. Зокрема, якщо функція  $w = f(z)$  неперервна в замкненій обмеженій області  $\bar{D}$ , то вона є обмеженою, досягає свого найбільшого та найменшого по модулю значень та рівномірно неперервна в цій області.

**Приклад 15.** Знайти границі

$$\text{а) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 2zi + 3}{z - i}; \quad \text{б) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i \operatorname{sh} z}{\sin z}; \quad \text{в) } \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z - 1}.$$

*Розв'язання.*

$$\text{а) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 2zi + 3}{z - i} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z + 3i)(z - i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z + 3i) = 4i;$$

$$\text{б) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i \operatorname{sh} z}{\sin z} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i \operatorname{sh} z}{\cos z} = i;$$

$$\text{в) } \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2e^{2z}}{e^z} = \frac{2e^{\pi i}}{e^{\frac{\pi}{2} i}} = \frac{2(-1)}{i} = 2i.$$

В прикладах б) і в) використано правило Лопітала.

**Приклад 16.** Знайти образ кола  $|z| = 1$  при відображенні  $w = z^2$ .

*Розв'язання.* Нехай  $z = x + iy$ . Тоді  $w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ . Звідси  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ . Рівняння  $|z| = 1$  при цьому має вигляд  $x^2 + y^2 = 1$ .

Виключаючи  $x$  та  $y$  із системи рівнянь

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

одержуємо  $u^2 + v^2 = 1$ .

Отже, образом кола  $|z|=1$  в площині  $Oxy$  є коло  $u^2 + v^2 = 1$ , в площині  $Ouv$ , що проходиться двічі. Це випливає з того, що, оскільки  $w = z^2$ , то  $Arg w = 2 Arg z + 2k\pi$ , отже, коли точка  $z$  описує повне коло  $|z|=1$ , то її образ описує коло  $|w|=1$  двічі.

**Приклад 17.** Знайти дійсну та уявну частини функцій

а)  $w = \frac{1}{z}$ ;                      б)  $w = \sin z$ .

*Розв'язання.*

а)  $w = \frac{1}{z}$ .

Нехай  $z = x + iy$ , тоді  $\bar{z} = x - iy$ . При цьому

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Отже,  $w = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$ . Звідси  $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ .

б)  $w = \sin z$ .

Нехай  $z = x + iy$ . Тоді

$$\begin{aligned} w &= \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + \cos x \cdot i \operatorname{sh} y = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

При перетворенні скористались формулою тригонометрії

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

а також формулами

$$\cos iy = \frac{e^{i^2 y} + e^{-i^2 y}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = chy, \quad \sin iy = \frac{e^{i^2 y} - e^{-i^2 y}}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} = ishy.$$

Отже,

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin xchy \quad \operatorname{Im} \sin z = \cos xshy.$$

**Приклад 18.** Розв'язати рівняння  $\sin 2z = \pi i$ .

*Розв'язання.* Розв'язком цього рівняння є

$$z = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \sin \pi i = \frac{1}{2} z_0.$$

Отже, задача зводиться до обчислення  $\operatorname{Arc} \sin \pi i$ .

Скористаємось формулою  $\operatorname{Arc} \sin t = -i \ln \left( it \pm \sqrt{1-t^2} \right)$ , поклавши  $t = \pi i$ .

Тоді  $\operatorname{Arc} \sin \pi i = -i \operatorname{Ln} \left( -\pi \pm \sqrt{1+\pi^2} \right)$ .

Отже, маємо

$$z_0 = -i \operatorname{Ln} \left( -\pi + \sqrt{1+\pi^2} \right), \quad z_0 = -i \operatorname{Ln} \left( -\pi - \sqrt{1+\pi^2} \right).$$

Оскільки

$$\left| -\pi + \sqrt{1+\pi^2} \right| = \sqrt{1+\pi^2} - \pi, \quad \left| -\pi - \sqrt{1+\pi^2} \right| = \pi + \sqrt{1+\pi^2},$$

$$\arg \left( -\pi + \sqrt{1+\pi^2} \right) = 0, \quad \arg \left( -\pi - \sqrt{1+\pi^2} \right) = \pi,$$

то

$$\operatorname{Ln} \left( -\pi + \sqrt{1+\pi^2} \right) = \ln \left( \sqrt{1+\pi^2} - \pi \right) + 2k\pi i,$$

$$\operatorname{Ln} \left( -\pi - \sqrt{1+\pi^2} \right) = \ln \left( \pi + \sqrt{1+\pi^2} \right) + i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Остаточно одержуємо

$$z = -\frac{1}{2} i \left( \ln \left( \sqrt{1+\pi^2} - \pi \right) + 2k\pi i \right) = k\pi - \frac{1}{2} i \ln \left( \sqrt{1+\pi^2} - \pi \right)$$

та

$$z = -\frac{1}{2}i \left( \ln \left( \sqrt{1 + \pi^2} + \pi \right) + i(\pi + 2k\pi) \right) = \frac{1}{2}\pi + k\pi - \frac{1}{2}i \ln \left( \sqrt{1 + \pi^2} - \pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 19.** Записати комплексні числа в алгебраїчній формі:

$$1) \sin z_0; \quad 2) e^{z_0}; \quad 3) \cos z_0; \quad 4) \operatorname{sh} z_0; \quad 5) \operatorname{Ln} z_0; \quad 6) \operatorname{ch} z_0,$$

$$\text{де } z_0 = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Розв'язання. } |z_0| = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{9}} = \frac{5\pi}{12}; \quad \arg z_0 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\pi/3}{\pi/4} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned} 1) \sin\left(-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(i\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(i\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\operatorname{sh}\frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right); \end{aligned}$$

$$2) e^{\left(-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} 3) \cos\left(-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(i\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(i\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\operatorname{sh}\frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \operatorname{sh}\left(-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right) &= \operatorname{sh}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ch}\left(i\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ch}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sh}\left(i\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}; \end{aligned}$$

$$5) \operatorname{Ln}\left(-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left|-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right| + i\left(\arg\left(-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi\right) =$$

$$= \ln\frac{5\pi}{12} + (\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \operatorname{ch}\left(-\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}\right) &= \operatorname{ch}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ch}\left(i\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sh}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sh}\left(i\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ch}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \\
 &= \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

### Використання комплексних чисел для розв'язання задач електротехніки

При розрахунках електричних кіл змінного струму широко використовують комплексні числа.

**Зауваження.** В електротехніці уявна одиниця  $i$  позначається через  $j$ .

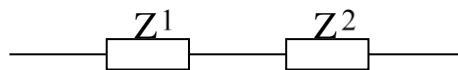
Загальний вигляд комплексного опору має вигляд

$$Z = R + jX,$$

де  $R$  – активний опір,  $X$  – реактивний опір.

При послідовному з'єднанні провідників (рис.8.4) загальний опір кола  $Z$  визначається за формулою

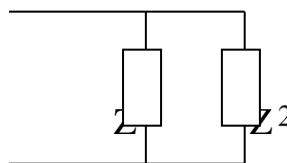
$$Z = Z_1 + Z_2. \quad (8.44)$$



**Рисунок 8.4 – Послідовне з'єднання провідників**

При паралельному з'єднанні провідників (рис.8.5) загальний опір кола  $Z$  визначається з формули

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (8.45)$$



**Рисунок 8.5 – Паралельне з'єднання провідників**

Струм у колі знаходиться за допомогою законів Ома та Кірхгофа

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z}, \quad (8.46)$$

де  $\dot{U}$ ,  $\dot{i}$  – комплексні значення напруги та струму.

Опір на катушці з індуктивністю  $L$  (рис.8.6) знаходиться за формулою

$$Z_L = X_L = j\omega L. \quad (8.47)$$



Рисунок 8.6 – Опір на катушці з індуктивністю  $L$

Опір на конденсаторі з ємністю  $C$  (рис.8.7) знаходиться за формулою

$$Z_C = X_C = j \frac{1}{\omega C}. \quad (8.48)$$

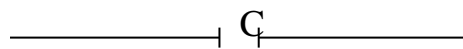


Рисунок 8.7 – Опір на конденсаторі з ємністю  $C$

У співвідношеннях (8.47) і (8.48)  $\omega$  – циклічна частота, яка пов'язана із частотою  $f$  рівністю

$$\omega = 2\pi f. \quad (8.49)$$

Провідність кола є величиною, що обернена до опора  $Z$ , тобто вона визначається як  $\frac{1}{Z}$ .

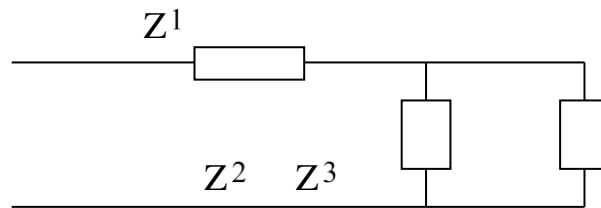
**Приклад 1.** Знайти загальний опір кола, зображеного на рисунку 8.8, якщо  $Z_1 = 8 + 6j$ ,  $Z_2 = 10 - 4j$ ,  $Z_3 = 5 + 10j$ .

*Розв'язання.* Використовуючи формули (8.44) і (8.45), маємо



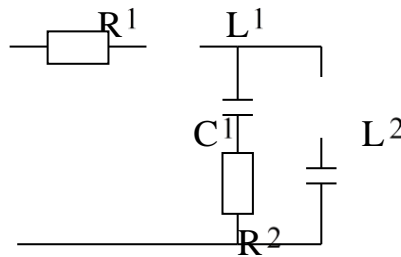
$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = (8 + 6j) + \frac{(10 - 4j)(5 + 10j)}{(10 + 4j) + (5 + 10j)} = 15 + 8.52j.$$

**Рисунок 8.8 – Загальний опір кола**



**Приклад 2.** Знайти еквівалентний опір та еквівалентну провідність кола, зображеного на рисунку 8.9, якщо

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \text{ Ом}; & L_1 &= 0.05 \text{ Гн}; & C_1 &= 15 \text{ мкф}; \\ R_2 &= 100 \text{ Ом}; & L_2 &= 0.1 \text{ Гн}; & C_2 &= 10 \text{ мкф}; & f &= 50 \text{ Гц}. \end{aligned}$$



**Рисунок 8.9 – Опір та провідність кола**

*Розв'язання.* Використовуючи формули (8.44) і (8.45), маємо

$$Z = R_1 + Z_{L_1} + \frac{(Z_{C_1} + R_2)(Z_{L_2} + Z_{C_2})}{(Z_{C_1} + R_2) + (Z_{L_2} + Z_{C_2})}.$$

Застосовуючи співвідношення (8.47) та (8.48), маємо

$$Z = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(j\frac{1}{\omega C_1} + R_2)(j\omega L_2 + j\frac{1}{\omega C_2})}{(j\frac{1}{\omega C_1} + R_2) + (j\omega L_2 + j\frac{1}{\omega C_2})}.$$

Використовуючи рівність (8.49), отримуємо вираз для еквівалентного опору кола:

$$Z = R_1 + 2\pi fL_1 \cdot j + \frac{(2\pi fL_2 + \frac{1}{2\pi fC_2})(-\frac{1}{2\pi fC_1} + R_2j)}{R_2 + j(\frac{1}{2\pi fC_1} + \frac{1}{2\pi fC_2} + 2\pi fL_2)};$$

$$Z = 10 + 15.71j + \frac{349.89(-212.31 + 100j)}{100 + 562.2j} = 38.55 + 154.52j.$$

Еквівалентна провідність кола дорівнює

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{38.55 + 154.52j} = 0.00089 + 0.00322j.$$

### *Завдання для самостійного розв'язання до розділу 8*

**1.** Задано комплексне число  $z$  та натуральне число  $n$ . Треба:

- 1) записати його в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах;
- 2) обчислити  $z^n$ ;
- 3) розв'язати рівняння  $w^3 - z = 0$ .

1.1.  $z = \frac{1-2i}{1+i}, \quad n = 4.$

1.2.  $z = \frac{2+4i}{1-3i}, \quad n = 4.$

1.3.  $z = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}, \quad n = 6.$

1.4.  $z = \frac{1}{\sqrt{3}-i}, \quad n = 4.$

1.5.  $z = \frac{2-2i}{1-3i}, \quad n = 6.$

**2.** Записати комплексні числа в алгебраїчній формі:

1.  $\sin z_0$ ; 2.  $e^{z_0}$ ; 3.  $\cos z_0$ ; 4.  $\operatorname{sh} z_0$ ; 5.  $\operatorname{Ln} z_0$ ; 6.  $\operatorname{ch} z_0$ ,

де  $z_0$  дорівнює

2.1.  $1 - \sqrt{3}i$ ;

$$2.2. \frac{1+i}{\sqrt{2}};$$

$$2.3. \frac{\pi}{3} + i\frac{\pi}{4};$$

$$2.4. 9. \frac{-1-\sqrt{3}i}{2};$$

$$2.5. \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

## РОЗДІЛ 9. Аналітичні функції

### Похідна та диференціал функції комплексної змінної

#### Диференціювання функції комплексної змінної та умови Коші-Рімана

Нехай функція  $w = f(z)$  визначена в області  $D$  і точки  $z$  та  $z + \Delta z$  належать області.

**Означення.** Границя відношення приросту функції  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$  до приросту незалежної змінної  $\Delta z$ , коли  $\Delta z$  прямує до нуля, називається похідною функції  $w = f(z)$  в точці  $z$  і позначається  $f'(z)$  або  $\frac{dw}{dz}$ . Таким чином

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (9.1)$$

Якщо границя (9.1) існує і скінченна, то кажуть, що функція  $w = f(z)$  диференційована в точці  $z$ .

**Зауваження.** Оскільки властивості границі та алгебраїчних операцій для функції комплексної змінної збігаються із відповідними властивостями цих понять для функції дійсної змінної, то зберігаються і відомі правила диференціювання:

$$\left. \begin{array}{l} 1) (f + g)' = f' + g', \\ 2) (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \\ 3) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \\ 4) (f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z), \\ 5) f'(z) = \frac{1}{\varphi'(z)}. \end{array} \right\} \quad (9.2)$$

В останній рівності функції  $f$  і  $\varphi$  є взаємно оберненими, які взаємно однозначно відображають окіл точки  $z$  на окіл точки  $w$  і навпаки.

З властивостей границі і означення похідної витікає справедливність теореми про умови диференційованості функції комплексної змінної.

**Теорема.** Якщо функція  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  диференційована у точці  $z$ , то дійсна та уявна частини цієї функції задовольняють умовам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9.3)$$

Умови (9.3) називаються умовами Коші-Рімана.

**Доведення.** Оскільки функція  $f(z)$  є диференційованою у точці  $z$ , то існує скінченна границя

і

Із означення границі витікає, що її значення не залежить від того, яким способом  $\Delta z$  прямує до нуля. Поклавши  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ , розглянемо два випадки.

1) Нехай  $\Delta y = 0$ , тоді  $\Delta z = \Delta x$  і

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

2) Нехай тепер  $\Delta x = 0$ , тоді  $\Delta z = i\Delta y$  і

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Прирівняємо знайдені значення похідної

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

звідки одержимо умови (9.3).

**Зауваження.** Якщо функція  $w = f(z)$  диференційована, то похідну можна обчислити за однією з формул

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; & f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}; \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}; & f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Якщо функція  $w = f(z)$  має скінченну похідну в точці  $z$ , то із формули (9.1) випливає, що

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha\Delta z, \quad (9.5)$$

де  $\alpha \rightarrow 0$ , коли  $\Delta z \rightarrow 0$ .

**Означення.** Диференціалом функції  $w = f(z)$  називається головний лінійний член приросту функції  $f'(z)\Delta z$  і позначається  $dw$  або  $df(z)$ . Диференціал незалежної змінної  $z$  дорівнює її приросту, тобто  $\Delta z = dz$ . Тому

$$dw = f'(z)dz. \quad (9.6)$$

**Зауваження.** Якщо  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то  $dw = du + idv$ . Дійсно,

$$dw = f'(z)dz = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (dx + idy) = \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + i \left( \frac{\partial u}{\partial x} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right).$$

Користуючись умовами Коші-Рімана  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  та  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ , одержимо

$$dw = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = du + idv.$$

**Приклад 1.** Знайти похідну та диференціал функції  $w(z) = \frac{1}{z}$  ( $z \neq 0$ ).

**Розв'язання.** За означенням похідної  $w'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ . Знайдемо приріст функції, якщо приріст аргумента дорівнює  $\Delta z$ .

$$\Delta w = \frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z} = \frac{z - z - \Delta z}{z(z + \Delta z)} = -\frac{\Delta z}{z(z + \Delta z)}.$$

Звідси випливає, що  $w'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-\Delta z}{\Delta z \cdot z(z + \Delta z)} = -\frac{1}{z^2}$ . Таким чином,

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}.$$

Упевнимось в тому, що умови Коші-Рімана виконуються для цієї функції всюди, окрім точки  $z = 0$ . Дійсно,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Звідси випливає, що  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  для всіх точок, окрім точки  $z = 0$ , де похідні не визначені.

Неважко показати, що вирази похідної за формулами (9.4) збігаються і мають вигляд

$$w'(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Враховуючи, що  $(x^2 + y^2)^2 = (z \cdot \bar{z})^2$ ,  $y^2 - x^2 + i \cdot 2xy = -\bar{z}^2$ , одержимо

$$w'(z) = -\frac{\bar{z}^2}{z^2 \bar{z}^2} = -\frac{1}{z^2}, \text{ тобто всі вирази для похідної збігаються.}$$

Диференціал функції можна записати так:

$$dw = -\frac{1}{z^2} dz = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy + i \left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left( (y^2 - x^2)dx - 2xydy + i(2xydx + (y^2 - x^2)dy) \right) = du + idv.$$

### **Аналітичні функції та їх зв'язок з гармонічними функціями**

**Означення.** Функція  $w = f(z)$  називається **аналітичною** в області  $D$ , якщо вона має скінченну похідну в кожній точці цієї області.

**Зауваження.** Іноді замість терміну “аналітична” зустрічаються терміни “голоморфна”, “регулярна” або “правильна”.

**Теорема.** Для того, щоб функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  була аналітичною в області  $D$ , необхідно і достатньо, щоб функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  мали частинні похідні в кожній точці цієї області і ці похідні задовольняли умовам Коші-Рімана.

**Приклад 2.** Довести, що функція  $w = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$  є аналітичною на всій площині  $Z$ .

*Розв'язання.* Очевидно, що дана функція визначена на всій площині  $Z$ .  
Маємо

$$u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \operatorname{ch} y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \operatorname{sh} y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким чином, умови Коші-Рімана виконуються всюди, тобто ця функція є аналітичною на всій площині  $Z$  і її похідна має вигляд

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y.$$

**Означення.** Рівняння у частинних похідних  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  (або  $\Delta u = 0$ , де

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа), називається рівнянням Лапласа. Функції, що

задовольняють рівнянню Лапласа в деякій області  $D$ , називаються **гармонічними** в цій області.



**Теорема.** Якщо функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналітична в області  $D$ , то її дійсна та уявна частини є гармонічними функціями в цій області.

**Доведення.** Далі буде доведено, що аналітична в області  $D$  функція має похідні будь-якого порядку в кожній точці цієї області. Тому функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  мають неперервні частинні похідні будь-якого порядку та їхні змішані похідні не залежать від порядку диференціювання. Оскільки функція  $f(z)$  аналітична в області  $D$ , то для неї виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Продиференціюємо перше рівняння по  $x$ , а друге – по  $y$ . Маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Додаючи почленно останні дві рівності, одержимо, що функція  $u(x, y)$  є гармонічною всюди, де функція  $w = f(z)$  аналітична. Аналогічно доводиться гармонічність функції  $v(x, y)$ .

**Означення.** Дві гармонічні функції, які задовольняють умовам Коші-Рімана, називаються **спряженими гармонічними функціями**.

Якщо відома одна із спряжених функцій, то іншу легко знайти із умов Коші-Рімана. Дійсно, нехай в однозв'язній області  $D$  задано функцію  $u(x, y)$  і треба знайти спряжену гармонічну функцію  $v(x, y)$ . З умов Коші-Рімана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x, y); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x, y).$$

Функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  є неперервними і для них виконується умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Тому вираз  $Pdx + Qdy$  є повним диференціалом і криволінійний інтеграл  $\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} Pdx + Qdy$  не залежить від шляху інтегрування, а є функцією верхньої межі.

Цю функцію можна прийняти за функцію  $v(x, y)$ :

$$v(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy + C = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (9.7)$$

де  $(x_0, y_0) \in D$ . Таким чином, спряжена гармонічна функція визначається з точністю до сталої  $C$ .

**Приклад 3.** Знайти аналітичну функцію  $w = f(z)$ , якщо відома її уявна частина

$$v(x, y) = \operatorname{Im} w = 3x^2(y + 1) - (y + 1)^3,$$

і значення аналітичної функції в точці  $z = -2i$ ,  $w(-2i) = i$ .

*Розв'язання.* Спочатку перевіримо, що функція  $v(x, y)$  є гармонічною.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6x(y + 1); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3(y + 1)^2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6(y + 1); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6(y + 1);$$

тому  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ . Для знаходження спряженої функції  $u(x, y)$  маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3(y + 1)^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6x(y + 1).$$

Тому

$$du = (3x^2 - 3(y + 1)^2) dx - 6x(y + 1) dy.$$

Звідси

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0; 0)}^{(x; y)} (3x^2 - 3(y + 1)^2) dx - 6x(y + 1) dy + C = \\ &= \int_0^x (3x^2 - 3(y + 1)^2) dx + C = x^3 - 3x(y + 1)^2 + C. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$w = u + iv = x^3 - 3x(y + 1)^2 + C + i(3x^2(y + 1) - (y + 1)^3).$$

Знайдемо значення  $C$ :  $w(-2i) = i \Rightarrow u(0, -2) + iv(0, -2) = C + i \Rightarrow C = 0$ .

Тому

$$w = x^3 - 3x(y+1)^2 + i(3x^2(y+1) - (y+1)^3).$$

Якщо тепер підставити у цей вираз  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ;  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ , то після перетворень одержимо  $w = (z + i)^3$ .

### Геометричний зміст модуля та аргумента похідної

Нехай аналітична функція  $w = f(z)$  перетворює область  $D$  на комплексній площині  $z$  в область  $G$  на комплексній площині  $w$ . Нехай точки  $z_0 \in D$  відповідає точка  $w_0 \in G$ .

Припустимо, що  $w'(z_0) \neq 0$ , тоді це число можна записати у показниковій формі:  $w'(z_0) = k \cdot e^{i\alpha}$ . За означенням похідної

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = k. \quad (9.8)$$

Для достатньо малих  $\Delta z$  з (9.8) можна записати  $|\Delta w| = k |\Delta z|$ . Це означає, що кожному нескінченно малому  $\Delta z$ , що виходить із точки  $z_0$ , відповідає пропорційний елемент  $\Delta w$ , що виходить із точки  $w_0$ , з коефіцієнтом пропорційності  $k = |f'(z_0)|$ . Таким чином, модуль похідної аналітичної функції  $f(z)$  у точці  $z_0$  (коли  $|f'(z_0)| \neq 0$ ) дорівнює коефіцієнту розтягу або стиску нескінченно малого околу точки  $z_0$  при відображенні  $w = f(z)$  (рис. 9.1).

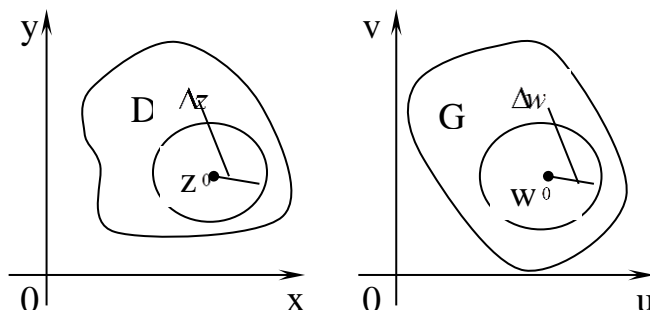


Рисунок 9.1 – Перетворення області  $D$  на комплексній площині  $z$  в область  $G$  на комплексній площині  $w$

Нехай тепер крива  $\gamma_1$  проходить через точку  $z_0$  і має в цій точці дотичну, а крива  $\Gamma_1$  є образом цієї кривої при відображенні  $w=f(z)$ . Нехай точка  $z = z_0 + \Delta z$  наближається до точки  $z_0$ , залишаючись на кривій  $\gamma_1$ . Тоді відповідна їй точка  $w = w_0 + \Delta w$  буде належати кривій  $\Gamma_1$  і наближатися до точки  $w_0$ . Відрізки  $\Delta z$  і  $\Delta w$  є не що інше, як хорди кривих  $\gamma_1$  і  $\Gamma_1$  відповідно, тому, коли  $\Delta z \rightarrow 0$ , їхні напрями збігаються із напрями дотичних до кривих  $\gamma_1$  і  $\Gamma_1$  у точках  $z_0$  і  $w_0$ . Позначимо через  $\varphi = \arg \Delta z$ ,  $\psi = \arg \Delta w$ , тоді

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \varphi_0, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w = \psi_0.$$

Із означення похідної випливає, що

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \psi_0 - \varphi_0 = \alpha. \quad (9.9)$$

Якщо площини  $z$  і  $w$  сумістити так, щоб точки  $z_0$  і  $w_0$  збіглися, а осі  $Ox$  і  $Ou$  були паралельними і мали однаковий напрям, то кут  $\alpha$  є кутом повороту дотичної  $L_1$  відносно дотичної  $l_1$  (рис.9.2). Таким чином, аргумент похідної  $\alpha$  аналітичної функції  $w=f(z)$  у точці  $z_0$  ( $f'(z_0) \neq 0$ ) дорівнює куту повороту дотичної  $L_1$  до кривої  $\Gamma_1$  у точці  $w_0$  відносно дотичної  $l_1$  до кривої  $\gamma_1$  у точці  $z_0$  при відображенні  $w=f(z)$ .

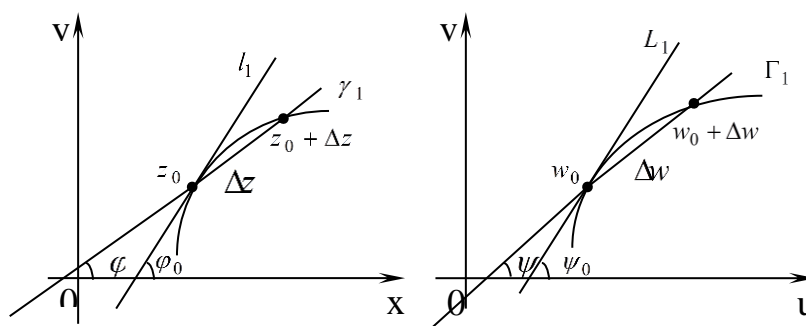


Рисунок 9.2 – Геометричний зміст аргументу похідної  $\alpha$  аналітичної функції  $w=f(z)$  у точці  $z_0$

**Зауваження.** Оскільки крива  $\gamma_1$ , що проходить через точку  $z_0$ , вибрана довільно, то для будь-якої іншої такої кривої  $\gamma_2$  кут повороту дотичної при відображенні  $w=f(z)$  в точці  $z_0$  буде таким самим. Нехай  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути, що

утворюють дотичні до відповідних кривих  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  у точці  $z_0$  з віссю  $Ox$ , а  $\beta_1$  і  $\beta_2$  – кути, що утворюють дотичні до відповідних кривих  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  у точці  $w_0$  з віссю  $Ou$ , тоді з (9.9) випливає, що  $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2$ , тобто кут між кривими  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  дорівнює куту між  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ . Таким чином, при відображенні за допомогою аналітичної функції  $w = f(z)$  кути між довільними кривими, що проходять через точку  $z_0$ , зберігаються.

## Інтегрування функції комплексної змінної

### Означення та основні властивості інтеграла

Нехай однозначна функція  $w = f(z)$  визначена і неперервна в області  $D$  і  $L$  – кусково-гладка крива, що лежить в області  $D$ , з початком у точці  $A$  і кінцем у точці  $B$  (рис. 9.3).

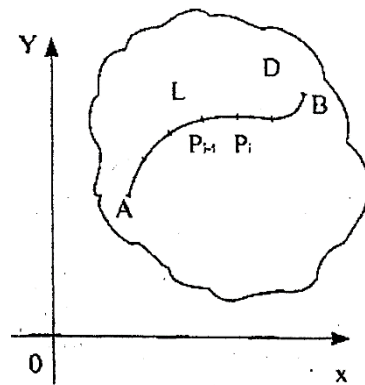


Рисунок 9.3 –Кусково-гладка крива  $L$  в області  $D$  з початком у т.  $A$  і кінцем у т.  $B$

Нехай рівняння кривої задано у параметричній формі  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$   $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , так, що  $z(\alpha) = A$ ,  $z(\beta) = B$ . Розділимо криву  $L$  на  $n$  частин точками  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$ , що відповідає розбиттю параметра  $t$ :  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ . Позначимо через  $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$  оберемо на кожному проміжку довільну точку  $\xi_i \in (z_{i-1}, z_i)$ . Складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta z_i. \quad (9.10)$$

Нехай  $|\Delta z| = \max_{i=1, n} |\Delta z_i|$ .

**Означення.** Інтегралом від функції  $f(z)$  по кривій  $L$  називається границя, до якої прямує послідовність інтегральних сум (9.10), коли  $n \rightarrow \infty$  і  $\Delta z \rightarrow 0$ , якщо вона не залежить від способу розбиття кривої  $L$  і вибору точок  $\xi_i$ .

Позначення:  $\int_{L_{AB}} f(z) dz$ . Таким чином,

$$\int_{L_{AB}} f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta z_i. \quad (9.11)$$

Враховуючи, що  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $dz = dx + idy$ , маємо:

$$\int_{L_{AB}} f(z) dz = \int_{L_{AB}} (u + iv)(dx + idy) = \int_{L_{AB}} u dx - v dy + i \int_{L_{AB}} v dx + u dy. \quad (9.12)$$

**Зауваження.** Із формули (9.12) випливає, що інтеграл від функції комплексного змінного  $f(z)$  по кривій  $L$  існує тоді, коли існують криволінійні інтеграли другого роду, що стоять у правій частині формули. З (9.12) витікають також властивості і спосіб обчислення інтеграла.

Перелічимо властивості інтеграла, що випливають з його означення та рівності (9.12).

$$1. \int_{L_{AB}} f(z) dz = - \int_{L_{BA}} f(z) dz.$$

Тобто при зміні напрямку інтегрування знак інтеграла змінюється на протилежний.

2. Якщо  $L = L_1 \cup L_2$ , то

$$\int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz.$$

3. Для будь-якого комплексного числа  $a$

$$\int_L a f(z) dz = a \int_L f(z) dz.$$

$$4. \int_L (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_L f_1(z) dz + \int_L f_2(z) dz.$$

5. Має місце наступна оцінка модуля інтеграла: якщо  $M = \max_{z \in L_{AB}} |f(z)|$  і довжина

кривої  $L_{AB}$  від точки  $A$  до точки  $B$  дорівнює  $\alpha$ , то

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \int_L |f(z)| ds \leq M\alpha,$$

де інтеграл  $\int_L |f(z)| ds$  є криволінійним інтегралом першого роду (по довжині дуги).

6. Справедлива формула заміни змінної інтегрування. Якщо  $z = \varphi(\zeta)$  – аналітична функція, яка встановлює взаємно однозначну відповідність між кривими  $L$  і  $\Gamma$ , то

$$\int_L f(z) dz = \int_{\Gamma} f(\varphi(\zeta)) \varphi'(\zeta) d\zeta.$$

Зокрема, якщо рівняння кривої  $L_{AB}$  задано параметрично:  $z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , то

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Остання формула дає спосіб обчислення інтеграла від функції комплексної змінної по кривій  $L_{AB}$ .

**Приклад 4.** Обчислити інтеграл  $\int_{C_p} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ , де  $C_p$  – коло радіуса  $p$  з центром

у точці  $z$ , що обходиться у додатному напрямі (проти годинникової стрілки).

*Розв'язання.* Рівняння кола  $C_p$  у параметричній формі можна записати у вигляді:

$$\zeta = z + \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Тоді  $d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ ,  $\zeta - z = \rho e^{i\varphi}$ , а отже, маємо

$$\int_{C_p} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = 2\pi i. \quad (9.13)$$

Підкреслимо, що значення інтеграла (9.13) не залежить ні від  $z$ , ні від  $\rho$ . Цей результат буде далі використано.

**Зауваження.** Будемо вважати, що криві, по яким обчислюється інтеграл, кусково-гладкі і не мають точок самоперетину. Такі криві будемо називати простими (або простим контуром, якщо крива замкнена). Коли контур  $L$

обходиться при інтегруванні у від'ємному напрямі (за годинниковою стрілкою), будемо писати  $\int_L f(z)dz$ .

### Теорема Коші

Нагадаємо формулу Гріна для криволінійних інтегралів другого роду. Якщо функція  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  диференційована в області  $D$ , обмеженій контуром  $L$ , то

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (9.14)$$

**Теорема.** Нехай функція  $w = f(z)$  аналітична в області  $D$ , що обмежена простим контуром  $L$  і неперервна у замкненій області  $D$ . Тоді інтеграл від  $f(z)$  по контуру  $L$  дорівнює нулю.

**Доведення.** За формулою (9.12)

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy.$$

В області  $D$  виконуються умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Враховуючи їх і формулу (9.14), одержимо

$$\oint_L udx - vdy = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$\oint_L vdx + udy = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Теорема доведена.

**Наслідок 1.** Інтеграл від аналітичної в області  $D$  функції  $f(z)$  по довільному простому замкненому контуру, що повністю міститься в області  $D$ , дорівнює нулю.



**Наслідок 2.** Інтеграл від аналітичної в області  $D$  функції  $f(z)$  не залежить від шляху інтегрування, а залежить від точок, які є нижньою та верхньою межами інтегрування.

Дійсно, нехай  $l_1$  і  $l_2$  – довільні криві, що з'єднують точки  $z_1$  і  $z_2$ . Вони утворюють замкнений контур, що належить області  $D$  (рис.9.4). Тому за теоремою Коші

$$\int_{l_1 z_1 z_2} f(z) dz - \int_{l_2 z_1 z_2} f(z) dz = 0.$$

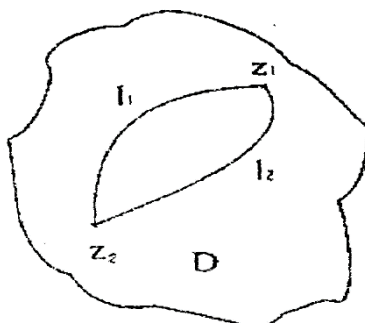


Рис. 5

Рисунок 9.4 – Замкнений контур, утворений кривими  $l_1$  і  $l_2$

Звідки маємо

9.

$$\int_{l_1 z_1 z_2} f(z) dz = \int_{l_2 z_1 z_2} f(z) dz.$$

Оскільки  $l_1$  і  $l_2$  довільні, то

$$\int_{l_1 z_1 z_2} f(z) dz = \int_{l_2 z_1 z_2} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz.$$

Теорема Коші справедлива і для багатозв'язних областей.

Нехай область  $D$  обмежена зовнішнім контуром  $L_0$  і внутрішніми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_n$  (рис.9.5). Межею області  $D$  вважається контур  $L = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ . Додатним напрямом обходу контура  $L$  вважається такий, коли область  $D$  залишається зліва.

**Теорема.** Якщо функція  $w = f(z)$  аналітична у багатозв'язній області  $D$  із межею  $L$  і неперервна в замкненій області  $\bar{D}$ , то  $\int_L f(z)dz = 0$ .

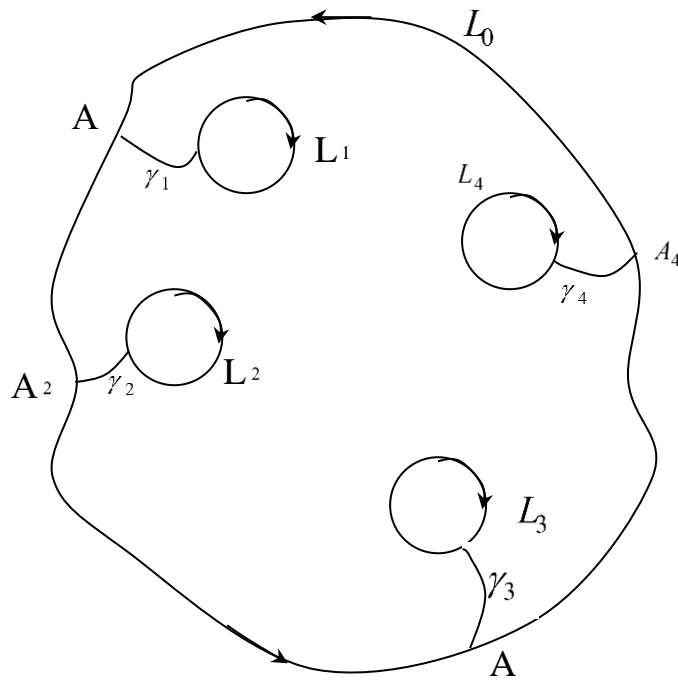


Рисунок 9.5 – Область  $D$  обмежена зовнішнім контуром  $L_0$  і внутрішніми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_n$

**Доведення.** Для скорочення розглянемо випадок двозв'язної області. Межею області  $D$  є  $L = L_0 \cup L_1$ . З'єднаємо контури  $L_0$  і  $L_1$  довільним контуром  $\gamma_1$  від точки  $A$  до точки  $B$ . Область  $D$  перетвориться в однозв'язну область  $D_1$  з межею  $L^* = L_0 \cup L_1 \cup \gamma_1$  (рис.9.6).

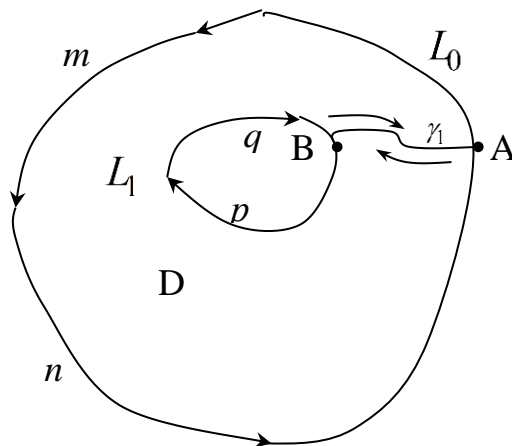


Рисунок 9.6 – Двозв'язна область  $D$  з межею  $L = L_0 \cup L_1$

Функція  $f(z)$  аналітична у  $D_1$  і неперервна у  $\bar{D}_1$ . Тому для неї можна застосувати теорему Коші:

$$\int_{L^*} f(z)dz = \int_{L_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0. \quad (9.15)$$

$(AmnA)$                        $(AB)$                        $(BpqB)$                        $(BA)$

Оскільки  $\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$  і  $\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz = -\int_{L_1} f(z)dz$ , то з (9.15)

випливає, що  $\int_{L_0} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz$ . Теорему доведено.

**Зауваження.** Якщо зовнішній контур  $L_0$  містить  $n$  внутрішніх контурів  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , то

$$\int_{L_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} f(z)dz. \quad (9.16)$$

**Приклад 5.** Обчислити інтеграл  $I = \int_L (z^2 + \bar{z})dz$  вздовж ліній, що

сполучають точки  $z_1 = -i$  і  $z_2 = 2 + 3i$ :

- а) відрізок прямої АВ,
- б) дуга параболи  $y = x^2 - 1$ ,
- в) ламана АСВ (рис. 9.7).

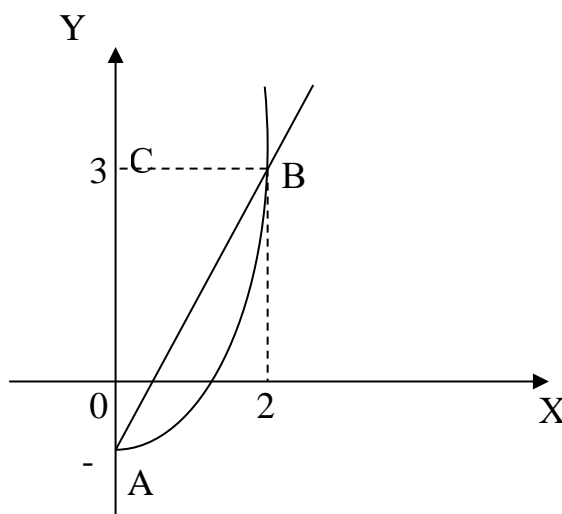


Рисунок 9.7 – Ламана АСВ

Розв'язання.

а) Запишемо підінтегральну функцію  $f(z)$  у вигляді  $u(x, y) + iv(x, y)$  і скористаємося формулою  $I = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy$ :

$$f(z) = z^2 + \bar{z} = x^2 - y^2 + 2xyi + x - iy = x^2 - y^2 + x + i(2xy - y).$$

Запишемо параметричне рівняння відрізка прямої АВ:  $x = 2t$ ,  $y = 4t - 1$ ,  
 $dx = 2dt$ ,  $dy = 4dt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x^2 - y^2 + x) dx - (2xy - y) dy + i \int_L (x^2 - y^2 + x) dy + (2xy - y) dx = \\ &= \int_0^1 \left( (4t^2 - (4t - 1)^2 + 2t) \cdot 2 - (2 \cdot 2t(4t - 1) - (4t - 1)) \cdot 4 \right) dt + \\ &+ i \int_0^1 \left( (4t^2 - (4t - 1)^2 + 2t) \cdot 4 + (2 \cdot 2t(4t - 1) - (4t - 1)) \cdot 2 \right) dt = \\ &= \int_0^1 (-88t^2 + 52t - 6) dt + i \int_0^1 (-16t^2 + 24t - 2) dt = -9\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

Другий спосіб. Оскільки  $z^2$  аналітична функція і  $z(t) = 2t + i(4t - 1)$ ,  
 $dz = (2 + 4i)dt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , то

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \int_L z^2 dz + \int_L \bar{z} dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{-i}^{2+3i} + \int_0^1 (2t - i(4t - 1))(2 + 4i) dt = \\ &= \frac{1}{3} \left( (2 + 3i)^3 - (-i)^3 \right) + \int_0^1 (20t - 4 + 2i) dt = -15\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}i + 6 + 2i = -9\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

Зауважимо, що  $\int_{-i}^{2+3i} z^2 dz = -15\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}i$ .

б) Обчислимо інтеграл  $I$  вздовж дуги параболи  $y = x^2 - 1$ . Виберемо за параметр  $x$ , тоді  $z = x + i(x^2 - 1)$ ,  $dz = (1 + 2xi)dx$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

$$I = \int_L (z^2 + \bar{z}) dz = \int_{-i}^{3+2i} z^2 dz + \int_0^2 (x - i(x^2 - 1))(1 + 2xi) dx =$$

$$= \frac{z^3}{3} \Big|_{-i}^{3+2i} + \int_0^2 (2x^3 - x + i(x^2 + 1)) dx = -15\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}i + 4 + 6i = -11\frac{1}{3} + 8\frac{2}{3}i.$$

Якщо обчислити окремо  $\int_L z^2 dz$ , одержимо

$$\int_L z^2 dz = \int_0^2 (x + i(x^2 - 1))^2 (1 + 2xi) dx = -15\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}i.$$

в) Обчислимо інтеграл  $I$  вздовж ламаної АСВ. Обчислимо окремо  $I_1 = \int_L z^2 dz$  і

$$I_2 = \int_L \bar{z} dz.$$

$$\text{АС: } z = yi, \quad dz = idy, \quad -1 \leq y \leq 3;$$

$$\text{СВ: } z = x + 3i, \quad dz = dx, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$I_1 = \int_{-1}^3 (-y^2) idy + \int_0^2 (x + 3i)^2 dx = -i \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^3 + \int_0^2 (x^2 - 9 + 6xi) dx = -15\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}i;$$

$$I_2 = \int_{-1}^3 (-yi) idy + \int_0^2 (x - 3i) dx = 6 - 6i;$$

$$I = I_1 + I_2 = -15\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} + 6 - 6i = -9\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i.$$

Ми показали, що інтеграл від аналітичної функції  $z^2$  не залежить від шляху інтегрування, а інтеграл від неперервної, але не аналітичної функції  $\bar{z}$  залежить від шляху інтегрування.

### Невизначений інтеграл від функції комплексної змінної

Якщо функція  $w = f(z)$  аналітична й однолисна в однозв'язній області  $D$ , то

$\int_{z_0}^z f(z) dz$ , де  $z_0, z \in D$ , не залежить від шляху інтегрування (наслідок 2

теореми 1) і тому є функцією верхньої межі

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta. \quad (9.17)$$

**Теорема 3.** Функція  $\Phi(z)$ , яка визначена формулою (9.17), є аналітичною в області  $D$  і  $\Phi'(z) = f(z)$ .

**Доведення.** Із означення похідної випливає, що

$$\Phi'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z}. \quad (9.18)$$

Знайдемо приріст функції. Враховуючи, що інтеграл (9.17) не залежить від шляху інтегрування, маємо:

$$\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta. \quad (9.19)$$

В останньому інтегралі за шлях інтегрування виберемо відрізок прямої, що з'єднує точки  $z$  та  $z + \Delta z$ , тоді  $\int_z^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$ . Підставимо (9.19) у (9.18):

$$\Phi'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

Враховуючи, що  $f(z)$  неперервна, оцінимо модуль різниці

$$|\Phi'(z) - f(z)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{|\Delta z|} \max_{\zeta \in (z; z+\Delta z)} |f(\zeta) - f(z)| \cdot |\Delta z| = 0.$$

Звідси випливає, що  $\Phi'(z) = f(z)$ . Теорему доведено.

**Означення.** Аналітична функція  $\Phi(z)$  називається невизначеним інтегралом або первісною аналітичної функції  $f(z)$  в області  $D$ , якщо для будь-якої точки  $z \in D$  виконується рівність  $\Phi'(z) = f(z)$ .

Аналогічно випадку функції дійсної змінної функція  $f(z)$  має безліч первісних, що відрізняються одна від одної на сталу величину. Тому для функції комплексної змінної справедлива формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \quad (9.20)$$

де  $\Phi(z)$  – будь-яка первісна функції  $f(z)$ .

Дійсно,  $\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$ , де  $z_0$  – довільна

точка області  $D$ .

Якщо функції  $f(z)$  і  $\varphi(z)$  аналітичні в області  $D$  та  $z_1, z_2 \in D$ , то справедлива формула інтегрування частинами, а саме:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z) dz = (f(z)\varphi(z)) \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)f'(z) dz. \quad (9.21)$$

**Приклад 6.** Обчислити інтеграл  $\int_{-i}^{1+i} (3z^2 + 2z) dz$ .

*Розв'язання.* Функція  $f(z) = 3z^2 + 2z$  аналітична в усіх точках площини  $z$ . Тому можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{-i}^{1+i} (3z^2 + 2z) dz = (z^3 + z^2) \Big|_{-i}^{1+i} = (1+i)^3 + (1+i)^2 - (-i)^3 - (-i)^2 = -1 + 3i.$$

**Приклад 7.** Обчислити інтеграл  $\int_1^{1+i\frac{\pi}{2}} z e^z dz$ .

*Розв'язання.* Оскільки функції  $z$  і  $e^z$  аналітичні в будь-якій області, що містить точки  $1$  і  $1+i\frac{\pi}{2}$ , то можна застосувати формулу інтегрування частинами:

$$\int_1^{1+i\frac{\pi}{2}} z e^z dz = z e^z \Big|_1^{1+i\frac{\pi}{2}} - \int_1^{1+i\frac{\pi}{2}} e^z dz = e^z (z-1) \Big|_1^{1+i\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} e.$$

### Інтегральна формула Коші

**Теорема.** Нехай функція  $f(z)$  аналітична в однозв'язній замкненій області  $D$ , що обмежена простим контуром  $L$ . Для будь-якої точки  $z \in D$  справедлива формула:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (9.22)$$

**Доведення.** Розглянемо допоміжну функцію  $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ . Ця функція аналітична всюди в області  $D$  за винятком точки  $z$ . Проведемо коло  $\gamma_\rho$  з центром у точці  $z$  так, щоб воно повністю належало області  $D$ . Тоді у двозв'язній області функція  $\varphi(\zeta)$  аналітична і тому маємо:

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Розглянемо інтеграл, що стоїть справа. Зробимо в ньому заміну змінної  $\zeta = z + \rho e^{i\varphi}$ ,  $d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Тоді

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi}) \rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 2\pi i f(z).$$

Тому  $\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$ . Звідси витікає справедливість формули (9.22). Теорему доведено.

**Зауваження 1.** Очевидно, що формула (9.22) лишається справедливою, якщо контур інтегрування – замкнена крива  $\Gamma$ , що повністю належить області  $D$  і містить всередині точку  $z$ .

**Зауваження 2.** Нехай область  $D$  багатозв'язна і функція  $f(z)$  аналітична в цій області. Нехай  $L$  – замкнений простий контур, що містить всередині точку  $z$  і такий, що його можна стягнути до точки  $z$  і при цьому він увесь час лишається в області  $D$ . Тоді формула (9.22) теж справедлива. За допомогою формули (9.22) можна обчислювати деякі інтеграли.

**Приклад 8.** Обчислити інтеграл  $\int_L \frac{e^{\zeta^2}}{\zeta^2 - 1} d\zeta$ , де  $L$  – дуга півкола  $|z| = 2$ ,

$\text{Im } z \geq 0$ , та відрізок  $-2 \leq x \leq 2$ .



Розв'язання.  $I = \int_L \frac{e^{\zeta^2}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = \int_L \frac{e^{\zeta^2}}{\zeta - i} d\zeta$ . Функція  $f(\zeta) = \frac{e^{\zeta^2}}{\zeta + i}$  аналітична в

замкненій області  $D$ , що обмежена контуром  $L$ , тому справедлива формула (9.22):

$$I = 2\pi i \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Із інтегральної формули Коші маємо, якщо функція  $f(z)$  аналітична в замкненому колі  $\gamma_p$  з центром у точці  $z_0$  та радіуса  $R$ , то  $f(z_0)$  дорівнює середньому значенню функції на колі, тобто

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\gamma_p} f(\zeta) dl, \quad (9.23)$$

де  $dl$  – диференціал дуги кола.

Дійсно, за формулою (9.22) маємо:  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$ . Зробимо заміну

змінної  $\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}$  та одержимо

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Проте  $\varphi = \frac{l}{R}$ ,  $d\varphi = \frac{dl}{R}$ . Підставляючи це в останній інтеграл, одержимо формулу (9.23).

За допомогою формул (9.22) і (9.23) можна довести, що функція, аналітична в області  $D$ , не може мати найбільше або найменше значення модуля у внутрішній точці області.

### Інтеграл типу Коші та похідні аналітичної функції

Нехай функція  $\varphi(z)$  визначена і неперервна на кривій  $L$  (не обов'язково замкненій), тоді функція

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (9.24)$$

називається інтегралом типу Коші.

**Теорема.** Якщо функція  $F(z)$  аналітична для всіх  $z \notin L$ , то і похідна  $n$ -го порядку від цієї функції обчислюється за формулою

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (9.25)$$

**Доведення.** Функція  $\Phi(\zeta, z) = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$  визначена і неперервна як функція двох змінних для всіх  $z \neq \zeta$ , тобто коли  $z \notin L$ . Крім того, вона має неперервну похідну

$$\Phi'_z(\zeta, z) = \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}.$$

За таких умов похідна від функції  $F(z)$  дорівнює похідній від інтеграла по параметру  $z$ , тобто

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (9.26)$$

Із (9.26) видно, що  $F'(z)$  неперервна всюди, коли  $z \notin L$ , тому функція  $F(z)$  аналітична. Функція (9.26) теж задовольняє всім умовам даної теореми, тому її також можна диференціювати по параметру:

$$F''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta.$$

Продовжуючи таким чином, одержимо формулу (9.25). Теорему доведено.

**Наслідок.** Якщо функція  $f(z)$  аналітична в області  $D$ , то в кожній точці цієї області вона має похідні всіх порядків.

Дійсно, якщо функція аналітична в області  $D$ , то вона має в цій області неперервну похідну. Нехай  $z$  – довільна точка області. Розглянемо коло  $\gamma_\rho$  радіуса  $\rho$  із центром у точці  $z$ , яке цілком належить області  $D$ . Тоді

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

а це є інтеграл типу Коші і його можна диференціювати нескінченну кількість разів за формулою (9.25):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (9.27)$$

З того факту, що аналітична в області  $D$  функція  $f(z)$  має в цій області неперервні похідні усіх порядків, витікає справедливність теореми Морера.

**Теорема.** Якщо функція  $f(z)$  неперервна в області  $D$  і інтеграл по довільному замкненому контуру, що цілком належить  $D$ , дорівнює нулю, то функція  $f(z)$  аналітична в області  $D$ .

Важливу властивість аналітичних функцій встановлює теорема Ліувілля.

**Теорема.** Якщо функція  $f(z)$  аналітична на всій комплексній площині  $\mathbb{Z}$ , а її модуль рівномірно обмежений, то така функція тотожно дорівнює сталій величині.

**Доведення.** Похідну функції  $f(z)$  у довільній точці  $z$  можна зобразити так:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

де  $C_R$  – коло із центром у точці  $z$  радіуса  $R$ . За умовою теореми існує таке  $M > 0$ , що  $|f(z)| < M$  незалежно від  $R$ . Тому

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(\zeta)|}{R^2} dl \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Оскільки  $R$  – довільне, то  $|f'(z)| = 0$ , а отже,  $f(z) \equiv \text{const}$ .

**Наслідок.** Із теореми витікає, що існують точки, в яких тригонометричні функції  $\sin z$ ,  $\cos z$  по модулю більше одиниці.

**Приклад 9.** Обчислити інтеграл  $I = \int_{|z-2|=2} \frac{e^{2zi}}{(z-\pi)^4} dz$ .

*Розв'язання.* Із формули (9.27) можна записати:

$$\int_{\gamma_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z) \cdot 2\pi i}{n!}.$$

В нашому випадку  $f(z) = e^{2zi}$  – всюди аналітична функція. Тому

$$I = \frac{f^{(3)}(\pi) \cdot 2\pi i}{3!}; \quad f^{(3)}(z) = (2i)^3 e^{2zi}; \quad f^{(3)}(\pi) = -8i e^{2\pi i} = -8i; \quad \text{звідси}$$

$$I = \frac{-8i \cdot 2\pi i}{6} = \frac{8\pi}{3}.$$

**Приклад 10.** Обчислити інтеграл  $I = \int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z^2 + 1)^2} dz$ .

*Розв'язання.* До круга  $|z| \leq 2$  належать дві точки  $z_1 = i$  і  $z_2 = -i$ , в яких підінтегральна функція втрачає аналітичність. Проведемо два кола  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  з центрами у точках  $z_1$  і  $z_2$  відповідно, достатньо малого радіуса, так, щоб вони повністю належали кругу  $|z| \leq 2$ . Тоді

$$I = \int_{\gamma_1} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z^2 + 1)^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z^2 + 1)^2} dz = I_1 + I_2.$$

Інтеграл  $I_1$  можна переписати так:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z+i)^2} dz = f_1'(i) \cdot 2\pi i; \quad f_1(z) = \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z+i)^2};$$

$$f_1'(z) = \frac{\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi z}{2}} (z+i)^2 - 2(z+i) e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z+i)^4};$$

$$f_1'(i) = \frac{\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi i}{2}} (2i)^2 - 2(2i) e^{\frac{\pi i}{2}}}{(2i)^4} = \frac{2 - \pi i}{8};$$

$$I_1 = \frac{2 - \pi i}{8} \cdot 2\pi i = \frac{\pi^2 + 2\pi i}{4}.$$

Аналогічно

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z-i)^2} dz = f_2'(-i) \cdot 2\pi i; \quad f_2(z) = \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z-i)^2};$$

$$f_2'(z) = \frac{\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi z}{2}} (z-i)^2 - 2(z-i) e^{\frac{\pi z}{2}}}{(z-i)^4};$$

$$f_2'(-i) = \frac{\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi i}{2}} (-2i)^2 - 2(-2i) e^{-\frac{\pi i}{2}}}{(-2i)^4} = \frac{2 + \pi i}{8};$$

$$I_2 = \frac{2 + \pi i}{8} \cdot 2\pi i = \frac{-\pi^2 + 2\pi i}{4};$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2 + 2\pi i}{4} + \frac{-\pi^2 + 2\pi i}{4} = \pi i.$$

## Ряди аналітичних функцій

### Рівномірна збіжність функціональних рядів

Нехай в області  $D$  визначена послідовність однозначних функцій  $\{u_n(z)\}$ .

**Функціональним рядом** називається вираз

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z). \quad (9.28)$$

При кожному фіксованому значенні  $z \in D$  ряд (9.28) перетворюється у числовий ряд.

**Означення 1.** Функціональний ряд (9.28) називається **збіжним** в області  $D$ , якщо для довільного значення  $z \in D$  відповідний числовий ряд є збіжним; функція  $u(z)$  називається сумою функціонального ряду.

Із означення витікає, що для  $\forall z \in D$  і  $\forall \varepsilon > 0$  існує такий номер  $N(z, \varepsilon)$ , що для всіх  $n > N(z, \varepsilon)$  виконується нерівність

$$\left| u(z) - \sum_{i=1}^n u_i(z) \right| < \varepsilon. \quad (9.29)$$

**Означення 2.** Функціональний ряд (9.28) називається **рівномірно збіжним**, якщо для  $\forall \varepsilon > 0$  існує номер  $N(\varepsilon)$ , що для  $\forall z \in D$  та  $\forall n > N(\varepsilon)$  виконується нерівність (9.29).

Наведемо достатню ознаку рівномірної збіжності функціональних рядів.

**Теорема Вейєрштрасса.** Функціональний ряд (9.28) збігається в області  $D$  рівномірно, якщо існує збіжний ряд з додатними членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  такий, що для  $\forall z \in D$  виконується нерівність  $|u_n(z)| < a_n$ .

**Доведення.** Позначимо через  $r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$ ,  $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ . Тоді для  $\forall z \in D$  існує такий номер  $N(\varepsilon)$ , що для  $\forall n > N(\varepsilon)$  виконується  $\rho_n < \varepsilon$ . З умови теореми витікає, що  $r_n(z) < \rho_n$  для  $\forall z \in D$ . Тому  $r_n(z) < \varepsilon$ , коли  $n > N(\varepsilon)$ , для  $\forall z \in D$ , що і означає рівномірну збіжність ряду (9.28). Теорему доведено.

Відзначимо деякі властивості сум рівномірно збіжних функціональних рядів:

1) якщо функції  $u_n(z)$  неперервні в області  $D$ , то функція  $u(z)$  також неперервна в області  $D$ ;

2) якщо функції  $u_n(z)$  аналітичні в області  $D$ , то функція  $u(z)$  також аналітична в області  $D$ ;

3) якщо функції  $u_n(z)$  аналітичні в області  $D$ , то  $\int_{z_1}^{z_2} u(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_2} u_n(z) dz$  для

$$\forall z_1, z_2 \in D;$$

4) якщо функції  $u_n(z)$  аналітичні в області  $D$ , то  $u^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Ці властивості особливо виділяють сукупність функцій, які можна зобразити у вигляді суми рівномірно збіжного функціонального ряду неперервних або аналітичних в області  $D$  функцій.

## Степеневі ряди

Серед усіх функціональних рядів найбільш важливе значення мають ряди степеневих функцій

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (9.30)$$

де  $C_n$  – деякі комплексні числа, а  $z_0$  – фіксована точка площини  $z$ .

Функції  $u_n(z) = C_n (z - z_0)^n$  аналітичні на всій комплексній площині  $z$ , тому в області, де ряд (9.30) збігається рівномірно, функція  $u(z)$  аналітична. Знайти область збіжності ряду (9.30) допомагає теорема.

**Теорема Абеля.** Якщо ряд (9.30) збігається у точці  $z_1 \neq z_0$ , то він збігається для усіх  $z$ , що задовольняють нерівності  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , причому у довільному колі  $|z - z_0| < t|z_1 - z_0|$ , де  $0 < t < 1$ , ряд (9.30) збігається рівномірно.

**Доведення.** За умовою теореми ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$  збіжний. Тому існує таке  $M > 0$ , що для  $\forall n$  виконується  $|C_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < M$ . Нехай  $z$  задовольняє умові  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , тоді  $q = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1$ . Запишемо ряд (9.30) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_1 - z_0)^n \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n. \quad (9.31)$$

Ряд (9.31) абсолютно збіжний. Дійсно, члени ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| |z_1 - z_0|^n \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$  менші за відповідні члени спадної геометричної прогресії  $M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ . З цього витікає абсолютна збіжність ряду (9.31), а також ряду (9.30).

Якщо  $z$  задовольняє умові  $|z - z_0| \leq \rho < t|z_1 - z_0|$ ,  $0 < t < 1$ , то ряд  $M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n}$  є мажоруючим для ряду (9.30) і за ознакою Вейерштрасса ряд (9.30) збігається рівномірно. Теорему доведено.

З теорем Вейерштрасса і Абеля витікають важливі наслідки:

1. Якщо ряд (9.30) розбіжний у точці  $z_1$ , то він розбіжний в усіх точках  $z$ , які задовольняють умові  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .

Дійсно, нехай  $z_2$  задовольняє умові  $|z_2 - z_0| > |z_1 - z_0|$  і ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_2 - z_0)^n$  є збіжним. Тоді за теоремою Абеля ряд (9.30) повинен збігатися у точці  $z_1$ , а це суперечить умові. Тому в точці  $z_2$  ряд розбіжний.

2. Для кожного ряду існує число  $R$  ( $0 \leq R \leq \infty$ ), яке називається радіусом збіжності, таке, що всередині кола  $|z - z_0| < R$  ряд збігається, зовні – розбігається, а на самому колі  $|z - z_0| = R$  ряд (9.30) може бути і збіжним, і розбіжним. Радіус збіжності може бути визначений за формулами Даламбера або Коші:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}. \quad (9.32)$$

3. Всередині кола збіжності  $|z - z_0| \leq \rho < R$  сума степеневого ряду (9.30) є функцією аналітичною. В цій області степеневий ряд можна почленно диференціювати та інтегрувати.

4. Коефіцієнти степеневого ряду (9.30) однозначно визначаються через його суму:

$$C_n = \frac{1}{n!} u^{(n)}(z_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.33)$$

Дійсно, очевидно, що  $C_0 = u(z_0)$ . Оскільки в області збіжності ряд (9.30) можна почленно диференціювати, то

$$u^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k k(k-1)\dots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}. \quad (9.34)$$

Поклавши у (9.34)  $z=z_0$ , одержимо  $u^{(n)}(z_0) = C_n \cdot n!$ , звідки витікає формула (9.33).

З формули (9.33) випливає, що однозначна і аналітична в околі точки  $z_0$  функція  $u(z)$  може бути зображена у вигляді степеневого ряду (9.30) і це зображення єдине.

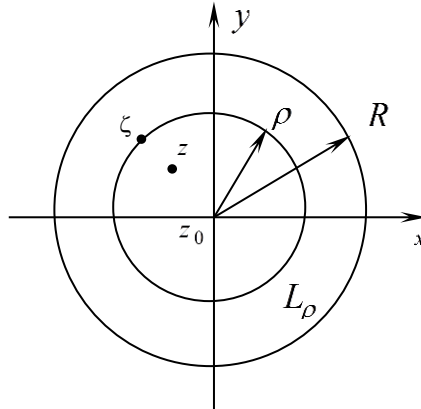
## Ряд Тейлора

Розглянемо умови, за яких функція  $u(z)$  може бути розвинена у степеневий ряд.



**Теорема Тейлора.** Функція  $u(z)$ , аналітична всередині кола  $|z - z_0| < R$ , може бути розвинена у степеневий ряд  $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ . Такий ряд визначається однозначно і називається **рядом Тейлора** функції  $u(z)$ .

**Доведення.** Нехай  $z$  – довільна внутрішня точка кола  $|z - z_0| < R$ . Проведемо коло  $L_\rho$  із центром у точці  $z_0$  радіуса  $\rho < R$  так, щоб точка  $z_0$  належала колу, обмеженому колом  $L_\rho$  (рис. 9.8).



**Рисунок 9.8** – Коло  $|z - z_0| < R$  та коло  $L_\rho$  з центром у точці  $z_0$  радіуса  $\rho < R$

Всередині цього кола і на колі функція  $u(z)$  аналітична, тому за інтегральною формулою Коші маємо:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (9.35)$$

Розглянемо дріб  $\frac{1}{\zeta - z}$ . Його можна зобразити у вигляді

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Оскільки  $\zeta \in L_\rho$ , то  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ , тому дріб  $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$  можна розглядати як суму

збіжної геометричної прогресії

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n + \dots$$

Тоді

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \dots \quad (9.36)$$

Підставимо (1.9) у (1.8), тоді

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta + \dots + \\ &+ \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \dots \end{aligned}$$

Отже,

$$u(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots, \quad (9.37)$$

де

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{u(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{u^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.38)$$

Якщо  $z$  – довільна точка круга  $|z - z_0| < R$ , то ряд (9.37) збігається в кожній точці цього круга. Із формули (9.38) випливає, що коефіцієнти ряду (9.37) однозначно визначаються через саму функцію  $u(z)$ , тому не може бути іншого розвинення  $u(z)$  в степеневий ряд, окрім ряду Тейлора.

**Зауваження.** При обчисленні інтегралів у формулі (9.38) за теоремою Коші контур  $L_\rho$  можна замінити на будь-який замкнений контур, що належить кругу  $|z - z_0| < R$  та містить всередині точки  $z$  і  $z_0$ .

Теорему доведено.

**Приклад 11.** Розвинути у ряд Тейлора функцію  $u(z) = e^z$  в околі точки  $z_0 = i\frac{\pi}{2}$  і визначити його радіус збіжності  $R$ .

*Розв'язання.* Ряд Тейлора будемо шукати у вигляді

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left( z - i \frac{\pi}{2} \right)^n.$$

Коефіцієнти визначимо за формулою (1.11):

$$C_n = \frac{u^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{e^{z_0}}{n!} = \frac{e^{i \frac{\pi}{2}}}{n!} = \frac{i}{n!}.$$

Ряд Тейлора для функції  $e^z$  із центром у точці  $z_0 = i \frac{\pi}{2}$  має вигляд

$$e^z = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( z - i \frac{\pi}{2} \right)^n}{n!}.$$

Радіус збіжності визначимо за формулою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty.$$

**Приклад 12.** Довести формули  $\cos iz = \operatorname{ch} z$ ,  $\sin iz = i \operatorname{sh} z$ , користуючись рядами Тейлора цих функцій.

*Розв'язання.* Степеневі ряди з центром у точці  $z=0$  для функцій  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  наведені в розділі елементарних функцій. Це – їхні ряди Тейлора. Тому

$$1) \cos iz = 1 - \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} - \frac{(iz)^6}{6!} + \dots = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = \operatorname{ch} z,$$

$$2) \sin iz = iz - \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} - \frac{(iz)^7}{7!} + \dots = i \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = i \operatorname{sh} z.$$

## Ряд Лорана

**Означення.** Рядом Лорана називається вираз

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{(z - z_0)^n}, \quad (9.39)$$

де  $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$  називається **правильною частиною** ряду,

$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(z - z_0)^n}$  (тобто ряд з від'ємними степенями  $(z - z_0)$ ) називається

**головною частиною** ряду Лорана.

Очевидно, що ряд Тейлора є окремим випадком ряду Лорана, коли відсутня головна частина.

Радіус збіжності правильної частини позначимо через  $R_1$ . Він визначається за формулами (9.32) і дорівнює відстані від точки  $z_0$  до найближчої точки, у якій порушується аналітичність функції  $f_1(z)$ .

Щоб знайти область збіжності головної частини ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(z - z_0)^n}$ , зробимо

заміну змінної  $\frac{1}{z - z_0} = \zeta$  і одержимо звичайний степеневий ряд  $\varphi(\zeta) = C_n \zeta^n$  за

степенями  $\zeta$ . Круг збіжності цього ряду позначимо через  $\frac{1}{R_2}$ , тобто  $|\zeta| < \frac{1}{R_2}$ .

Повертаючись до старої змінної, одержимо  $|z - z_0| > R_2$ . Звідси випливає, що

головна частина ряду Лорана  $f_2(z) = \varphi\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$  збігається у зовнішності круга

радіуса  $R_2$  із центром у точці  $z_0$ . Радіус  $R_2$  може також змінюватися від нуля до нескінченності і коли  $0 < R_2 < R_1 < \infty$ , ряд Лорана визначає функцію  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ , аналітичну в кільці  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ .

**Теорема.** Якщо функція  $f(z)$  аналітична у круговому кільці  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ , то вона однозначно може бути зображена в цьому кільці збіжним рядом Лорана.

**Доведення.** Нехай  $z$  – довільна точка кільця. Побудуємо два кола  $C_{R_2}'$  і  $C_{R_1}'$  з центрами в точці  $z_0$  так, щоб  $R_2 < R_2' < R_1' < R_1$  і щоб обрана точка  $z$  знаходилася між колами  $C_{R_2}'$  і  $C_{R_1}'$  (рис. 9.9).

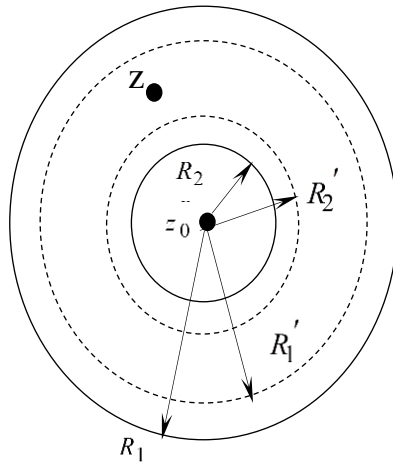


Рисунок 9.9 – Кола  $C_{R_2}$  і  $C_{R_1}$  з центрами в точці  $z_0$

За теоремою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_2}'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (9.40)$$

У першому інтегралі дріб  $\frac{1}{\zeta - z}$  можна зобразити у вигляді

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \quad (9.41)$$

бо  $\zeta \in C_{R_1}'$  і  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ . Підставимо (9.41) у перший інтеграл формули (9.40) та одержимо

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (9.42)$$

де

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (9.43)$$

На колі  $C_{R_2}$ , виконується нерівність  $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ , тому в другому інтегралі формули (9.40) дріб  $\frac{1}{\zeta - z}$  можна зобразити так:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n. \quad (9.44)$$

Підставимо (9.44) у другий інтеграл формули (9.40), тоді:

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (9.45)$$

де

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta, \quad (n < 0). \quad (9.46)$$

Підінтегральні функції у формулах (9.43) і (9.46) аналітичні у кільці  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ , тому значення цих інтегралів не зміняться, якщо обрати довільний замкнений контур  $\gamma$ , що належить кільцю і містить всередині точку  $z_0$ . Це дозволяє об'єднати формули (9.43) і (9.46). Далі, об'єднуючи формули (9.42) і (9.45), одержимо:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

або

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (9.47)$$

де

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9.48)$$

Однозначність розвинення функції  $f(z)$  у ряд Лорана (9.47) впливає зі способу обчислення коефіцієнтів за формулами (9.48). Теорему доведено.

**Приклад 13.** Знайти розвинення функції  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$  у ряд Лорана за степенями  $z$ .

**Розв'язання.** Функцію  $f(z)$  можна зобразити у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}. \quad (9.49)$$

Ця функція аналітична в усій площині  $z$  за винятком точок  $z=2$  і  $z=3$ , тому вона може бути розвинена у ряд Лорана за степенями  $z$  трьома способами:

- 1) у крузі  $|z| < 2$ ;
- 2) у кільці  $2 < |z| < 3$ ;
- 3) зовні круга  $|z| < 3$ , тобто в околі точки  $z = \infty$ .

У кожній із цих областей функція  $f(z)$  аналітична. Розглянемо кожний випадок окремо.

1) У крузі  $|z| < 2$  функція  $f(z)$  розкладається у збіжний ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k.$$

Коефіцієнти  $C_k$  визначаються за формулами

$$C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \quad (k=0,1,2,\dots). \quad (9.50)$$

В останньому інтегралі  $\gamma$  – довільне коло радіуса  $\rho < 2$  з центром у початку координат. Але в цьому випадку коефіцієнти ряду легше одержати, скориставшись формулою спадної геометричної прогресії. А саме, оскільки  $|z| < 2$ , то

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k;$$

аналогічно

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k.$$

Підставимо останні вирази у (9.49), тоді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} \right) z^k.$$

Таким чином,  $C_k = \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}$  ( $k=0,1,2,\dots$ ). Легко показати, що при обчисленні

$C_k$  за формулами (9.50) одержимо такі ж значення. Це витікає з однозначності зображення функції степеневим рядом.

2) Нехай  $2 < |z| < 3$ . В цьому випадку функція  $f(z)$  розкладається у збіжний ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$$

та коефіцієнти  $C_k$  обчислюються за формулою

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta,$$

де  $\gamma$  – довільне коло радіуса  $2 < \rho < 3$ .

В цьому випадку, як і в попередньому, для одержання коефіцієнтів ряду скористаємося формулою спадної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}; \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}.$$

Ряд Лорана має вигляд

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}.$$



3) Нехай  $3 < |z| < \infty$ . В цьому випадку кажуть, що функція  $f(z)$  розкладається у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки  $z = \infty$  за степенями  $z$ . Як і у попередніх двох випадках, враховуючи, що  $|z| > 3$ , маємо:

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}; \quad \frac{1}{z-3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{z^k}.$$

Підставивши ці ряди у (9.49), одержимо:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1} - 2^{k-1}}{z^k}.$$

Як бачимо, ряди Лорана у різних областях мають різний вигляд.

**Приклад 14.** Розкласти функцію  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$  у ряд Лорана в околі

точки  $z = 2$ .

*Розв'язання.* Найближча до точки  $z = 2$  інша особлива точка функції –  $z = 3$ . Відстань між ними дорівнює одиниці. Тобто мова йде про визначення ряду Лорана для функції  $f(z)$  в кільці  $0 < |z-2| < 1$  за степенями  $z-2$ . Перепишемо дану функцію у вигляді суми елементарних дробів (9.49):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-2)-1} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-2} - \frac{1}{1-(z-2)} = \\ &= -\frac{1}{z-2} - (1 + (z-2) + (z-2)^2 + \dots) = -\frac{1}{z-2} - \sum_{k=0}^{\infty} (z-2)^k. \end{aligned}$$

Це і є ряд Лорана функції  $f(z)$  за степенями  $z-2$  у кільці  $0 < |z-2| < 1$ .

Крім знайденого розв'язку, можна також розглядати задачу про знаходження ряду Лорана даної функції за степенями  $z-2$  у кільці  $1 < |z-2| < \infty$ , тобто в околі нескінченно віддаленої точки.

**Приклад 15.** Знайти всі можливі ряди Лорана функції  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$

в різних кільцевих областях із центром у точці  $z = i$ .

*Розв'язання.* Точка  $z = i$  не є особливою для даної функції, тому як і у першому прикладі маємо три різні області, в яких слід шукати зображення функції  $f(z)$  у вигляді ряду Лорана:

1) круг  $|z-i| < |2-i|$ ,

2) кільце  $|2-i| < |z-i| < |3-i|$ ,

3) зовнішність круга  $|z - i| > |3 - i|$

Розглянемо ці випадки послідовно.

1) У крузі  $|z - i| < |2 - i|$  функція  $f(z)$  аналітична, тому вона може бути зображена у вигляді ряду Тейлора за степенями  $z - i$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - i)^k,$$

де

$$C_k = \frac{f^{(k)}(i)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - i)^{k+1}} d\zeta,$$

тут  $\gamma$  – довільне коло з центром у точці  $z = i$  радіуса  $\rho < |2 - i|$ . Але і в цьому випадку доцільно скористатися формулою суми спадної геометричної прогресії:

$$f(z) = \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z - 2};$$

$$\frac{1}{z - 3} = \frac{1}{i - 3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - i}{3 - i}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - i)^k}{(3 - i)^{k+1}},$$

бо  $\left| \frac{z - i}{3 - i} \right| < 1$ , аналогічно

$$\frac{1}{z - 2} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - i)^k}{(2 - i)^{k+1}}.$$

Звідси маємо

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(2 - i)^{k+1}} - \frac{1}{(3 - i)^{k+1}} \right) (z - i)^k.$$

2) У кільці  $|2 - i| < |z - i| < |3 - i|$  функція розкладається у збіжний ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - i)^k,$$

де

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - i)^{k+1}} d\zeta, \quad (k=1, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$\gamma$  – коло  $|z - i| = \rho$ ,  $|2 - i| < \rho < |3 - i|$ .

І в цьому випадку скористаємося формулою суми спадної геометричної прогресії. Оскільки  $\left| \frac{z - i}{3 - i} \right| < 1$ , то  $\frac{1}{z - 3} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - i)^k}{(3 - i)^{k+1}}$ . Але  $\left| \frac{z - i}{2 - i} \right| > 1$ , тому

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2 - i}{z - i}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - i)^{k-1}}{(3 - i)^{k+1}}.$$

Ряд Лорана функції  $f(z)$  має вигляд

$$f(z) = \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z - 2} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - i)^k}{(3 - i)^{k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - i)^{k-1}}{(z - i)^k}.$$

3) В області  $|z - i| > |3 - i|$  функція  $f(z)$  аналітична всюди, окрім точки  $z = \infty$ . Ця область є околom нескінченно віддаленої точки. Треба знайти ряд Лорана за степенями  $z - i$ , збіжний при  $|3 - i| < |z - i| < \infty$ . У цьому випадку дріб  $\frac{1}{z - 3}$

зобразимо у вигляді  $\frac{1}{z - 3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3 - i)^{k-1}}{(z - i)^k}$ , оскільки  $\left| \frac{3 - i}{z - i} \right| < 1$ , аналогічно

$\frac{1}{z - 2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - i)^{k-1}}{(z - i)^k}$ , оскільки  $\left| \frac{2 - i}{z - i} \right| < 1$ . Звідси одержуємо

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3 - i)^{k-1} - (2 - i)^{k-1}}{(z - i)^k}.$$

В цьому випадку в ряді Лорана відсутня правильна частина.

### Нулі аналітичних функцій

Нехай функція  $f(z)$  є однозначною і аналітичною в області  $D$ .

**Означення 4.** Точка  $z_0 \in D$  називається нулем функції  $f(z)$  порядку  $m$ , якщо  $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$ . Якщо  $m = 1$ , то точка  $z_0$  називається простим нулем функції  $f(z)$ .

Має місце наступне твердження. Якщо точка  $z_0$  є нулем  $m$ -го порядку аналітичної функції, то ця функція може бути зображена у вигляді

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad (9.51)$$

де  $\varphi(z)$  – аналітична в області  $D$  функція і  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Дійсно, в околі нуля  $m$ -го порядку ряд Тейлора функції  $f(z)$  має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+m} (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

звідки випливає, що  $\varphi(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_m (z - z_0)^{k-m}$ , а отже,  $\varphi(z)$  зображується

степеневим рядом, збіжним в області  $D$  і  $\varphi(z_0) \neq 0$ , тому що  $C_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$ , а  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ .

**Приклад 16.** Нехай  $f(z) = (z^2 + 1)\sin(z + i)$ . Знайти кратність нуля функції у точці  $z = -i$ .

**Розв'язання.** Очевидно, що  $f(-i) = 0$ . Обчислимо похідну  $f'(z)$  в цій точці:

$$f'(z) = 2z \cdot \sin(z + i) + (z^2 + 1)\cos(z + i), \quad f'(-i) = 0.$$

Обчислимо другу похідну:

$$f''(z) = 2\sin(z + i) + 2z\cos(z + i) + 2z\cos(z + i) - (z^2 + 1)\sin(z + i) =$$

$$= 2\sin(z + i) + 4z\cos(z + i) - (z^2 + 1)\sin(z + i),$$

$$f''(-i) = -4i \neq 0,$$

тому точка  $z = -i$  є нулем другого порядку.

**Приклад 17.** Знайти порядок нуля функції  $f(z) = \frac{z^6}{1 - \cos z}$  у точці  $z = 0$ .

*Розв'язання.* Очевидно, що

$$1 - \cos z = 1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots = z^2 \left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right),$$

тому

$$f(z) = z^4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots} = z^4 \varphi(z) \text{ і } \varphi(0) \neq 0.$$

Отже, точка  $z = 0$  є нулем четвертого порядку.

### Ізольовані особливі точки та їх класифікація

**Означення.** Особливою точкою аналітичної функції  $f(z)$  називається точка, у якій порушується аналітичність.

Із означення випливає, що в особливій точці степеневий ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$ , який відповідає функції  $f(z)$ , розбіжний. Тому очевидно, що радіус кола збіжності цього ряду дорівнює відстані від точки  $z_0$  до найближчої до неї особливої точки функції  $f(z)$ . Очевидно також, що на колі збіжності  $|z - z_0| = R$  існує хоча б одна особлива точка суми степеневого ряду.

**Означення.** Точка  $z_0$  називається **ізольованою особливою точкою** функції  $f(z)$ , якщо існує окіл цієї точки, у якому  $f(z)$  аналітична всюди, за винятком самої точки  $z_0$ .

**Означення.** Точка  $z_0$  називається **усувною ізольованою особливою точкою** функції  $f(z)$ , якщо існує скінченна границя функції  $f(z)$  в цій точці, тобто

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c, \quad c \neq \infty.$$

**Приклад 18.** Нехай  $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$ . Особливою точкою функції  $f(z)$  є точка  $z = 0$ . Знайдемо границю

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, точка  $z = 0$  є усувною особливою точкою.

**Означення.** Точка  $z_0$  називається полюсом функції  $f(z)$ , якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

Очевидно, що для того, щоб точка  $z_0$  була полюсом функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб ця точка була нулем для функції  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ .

**Означення.** Точка  $z_0$  називається полюсом  $n$ -го порядку ( $n \geq 1$ ) функції  $f(z)$ , якщо ця точка є нулем  $n$ -го порядку для функції  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ . У випадку, коли  $n = 1$ , полюс називається простим.

**Приклад 19.** Нехай  $f(z) = \frac{\cos z}{(z+i)^3}$ . Очевидно, що точка  $z = -i$  є для  $f(z)$

полюсом третього порядку, бо  $\cos(-i) \neq 0$ , а для функції  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$  точка  $z = -i$  є нулем третього порядку (перевірити самостійно).

Взагалі справедливе твердження: для того, щоб точка  $z_0$  була полюсом  $n$ -го порядку аналітичної функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб  $f(z)$  можна було зобразити у вигляді

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad (9.52)$$

де функція  $\varphi(z)$  аналітична в точці  $z_0$  і  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

**Означення.** Точка  $z_0$  називається істотно особливою точкою функції  $f(z)$ , якщо в точці  $z_0$  функція  $f(z)$  не має границі (ні скінченної, ні нескінченної).

**Приклад 20.** Нехай  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ . Довести, що точка  $z_0 = 0$  є істотно особливою точкою для функції  $f(z)$ .

*Розв'язання.* Нагадаємо, що якщо границя функції  $f(z)$  існує, коли  $z \rightarrow z_0$ , вона не залежить від шляху, яким  $z$  прямує до  $z_0$ . В нашому випадку якщо  $z$  прямує до нуля вздовж осі  $Ox$ , маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0, \\ \infty, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$$

Більш того, коли  $z = iy$ , а  $y \rightarrow 0$ , то

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{y}} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$$

і границя  $\lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{1}{y}}$  не існує. Тому точка  $z_0 = 0$  є істотно особливою точкою для функції  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ .

**Зв'язок між характером ізольованої особливої точки аналітичної функції та виглядом її ряду Лорана в околі цієї точки.**

Справедливі наступні твердження.

1) Для того, щоб точка  $z_0$  була усувною ізольованою особливою точкою однозначної аналітичної функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб її ряд Лорана по степенях  $z - z_0$  мав вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k . \quad (9.53)$$

**Необхідність.** Якщо  $z_0$  – усувна ізольована особлива точка функції  $f(z)$ , існує  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$ ,  $c \neq \infty$ . Це можливо тільки тоді, коли в ряді Лорана (9.47) відсутня головна частина і ряд набуває вигляду (9.53).

**Достатність.** Якщо ряд Лорана функції  $f(z)$  має вигляд (9.53), то  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$ , тобто існує скінченна границя функції  $f(z)$  при  $z \rightarrow z_0$ , тому  $z_0$  – усувна ізольована особлива точка.

2) Для того, щоб точка  $z_0$  була полюсом  $n$ -го порядку однозначної функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана мала рівно  $n$  членів, тобто

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k , \quad (9.54)$$

причому  $C_{-n} \neq 0$ .

**Необхідність.** Нехай точка  $z_0$  – полюс  $n$ -го порядку функції  $f(z)$ . Тоді

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}, \text{ де функція } \varphi(z) \text{ аналітична в точці } z_0 \text{ і } \varphi(z_0) \neq 0. \text{ Значить,}$$

функцію  $\varphi(z)$  в околі точки  $z_0$  можна розкласти в ряд Тейлора:

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + \dots + A_n(z - z_0)^n + \dots$$

Звідси

$$f(z) = \frac{A_0}{(z - z_0)^n} + \frac{A_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=n}^{\infty} A_k (z - z_0)^{k-n},$$

тобто ряд набуває вигляду (9.54). Зауважимо, що оскільки  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $A_0 \neq 0$ .

**Достатність.** Якщо ряд Лорана функції  $f(z)$  має вигляд (9.54), то

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^n} \left( C_{-n} + C_{-n+1}(z - z_0) + C_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k+n} \right) = \\ &= \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}, \end{aligned}$$

де  $\varphi(z)$  – аналітична у точці  $z = z_0$  функція і  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Звідси випливає, що точка  $z_0$  є полюсом  $n$ -го порядку функції  $f(z)$ .

3) Для того, щоб точка  $z_0$  була істотно особливою ізольованою точкою аналітичної функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана мала нескінченну кількість членів.

### Лишки аналітичних функцій

Нехай точка  $z_0$  є ізольованою особливою точкою функції  $f(z)$ .

**Означення.** Лишком аналітичної функції  $f(z)$  у точці  $z_0$  називається число

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \text{ яке позначається } \operatorname{res} f(z_0). \text{ Таким чином,}$$

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (9.55)$$



де  $\gamma$  – коло із центром у точці  $z_0$  достатньо малого радіуса, яке повністю належить області аналітичності  $D$  функції  $f(z)$  і не містить всередині інших особливих точок функції.

З означення випливає, що  $\operatorname{res} f(z_0)$  дорівнює коефіцієнту  $C_{-1}$  у розвиненні функції  $f(z)$  в ряд Лорана в околі точки  $z = z_0$ :  $\operatorname{res} f(z_0) = C_{-1}$ . Тому очевидно, що лишок в усунівній особливій точці дорівнює нулю.

Якщо точка  $z_0$  є полюсом  $n$ -го порядку аналітичної функції  $f(z)$ , то лишок в цій точці обчислюється за формулою

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z) \cdot (z - z_0)^n). \quad (9.56)$$

Дійсно, ряд Лорана функції  $f(z)$  в околі цієї точки має вигляд

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на  $(z - z_0)^n$ , одержимо

$$(z - z_0)^n \cdot f(z) = C_{-n} + C_{-n+1}(z - z_0) + \dots + C_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k+n}.$$

Якщо останню рівність продиференціювати  $(n-1)$  разів, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z) \cdot (z - z_0)^n) = (n-1)! C_{-1}.$$

Якщо  $n = 1$ , формула (9.56) має вигляд

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot (z - z_0)). \quad (9.57)$$

Якщо точка  $z_0$  – простий полюс аналітичної функції  $f(z)$  і в околі цієї точки функція має вигляд  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}$ , де  $\varphi(z)$  і  $g(z)$  – аналітичні функції, які задовольняють умовам  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $g(z_0) = 0$ ,  $g'(z_0) \neq 0$ , то лишок може бути обчислений за формулою

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (9.58)$$

Дійсно, за формулою (9.57)

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{g(z)} (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Якщо точка  $z_0$  – істотно особлива точка аналітичної функції  $f(z)$ , то лишок можна знайти, тільки розвинувши  $f(z)$  в ряд Лорана.

**Приклад 21.** Знайти лишок функції  $f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}$  в точці  $z = \frac{\pi}{2}$ .

*Розв'язання.* Точка  $z = \frac{\pi}{2}$  є полюсом першого порядку для даної функції.

$$\text{Тому } \operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

### Лишок функції у нескінченно віддаленій точці

**Означення.** Функція  $f(z)$  називається аналітичною у нескінченно віддаленій точці  $z = \infty$ , якщо функція  $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  аналітична в точці  $z = 0$ .

Наприклад, функція  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  аналітична в точці  $z = \infty$ , бо функція  $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sin z$  аналітична в точці  $z = 0$ .

**Означення.** Точка  $z = \infty$  називається ізольованою особливою точкою аналітичної функції  $f(z)$ , якщо існує окіл цієї точки, в якому немає інших особливих точок функції.

**Означення.** Точка  $z = \infty$  є усувною, полюсом або істотно особливою ізольованою точкою функції  $f(z)$ , якщо  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  має скінченне, нескінченне або зовсім не має ніякого значення відповідно.

**Означення.** Лишком у нескінченно віддаленій точці  $z = \infty$  аналітичної функції  $f(z)$  називається число  $-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$ , де  $\gamma$  – коло із центром в точці  $z = 0$ , достатньо великого радіуса, щоб належати околу точки  $z = \infty$ , де немає інших ізольованих особливих точок, крім точки  $z = \infty$ .

З означення випливає, що

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = -C_{-1},$$

тобто лишок дорівнює коефіцієнту при  $z^{-1}$  із протилежним знаком у лоранівському розвиненні функції  $f(z)$  в околі точки  $z = \infty$ .

**Зауваження.** Характер особливості функції  $f(z)$  у нескінченно віддаленій точці пов'язаний з її розвиненням у ряд Лорана інакше, ніж у скінченній точці, а саме:

1. Точка  $z = \infty$  є усупереч ізольованою особливою точкою функції  $f(z)$ , коли її розвинення в ряд Лорана не має членів із додатними степенями, тобто

$$f(z) = C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots$$

Очевидно, що тоді  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C_0$ .

2. Точка  $z = \infty$  є полюсом  $n$ -го порядку функції  $f(z)$ , коли її розвинення у ряд Лорана містить рівно  $n$  членів з додатними степенями, тобто

$$f(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + C_1 z + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} z^{-n}.$$

3. Точка  $z = \infty$  є істотно особливою точкою функції  $f(z)$ , коли її ряд Лорана в околі цієї точки містить нескінченну кількість членів із додатними степенями.

**Приклад 22.** Знайти лишок функції  $f(z) = \frac{4z}{z^2 - 1}$  у точці  $z = \infty$ .

*Розв'язання.* Зобразимо цю функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{4}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{4}{z} \left( 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right).$$

Звідси  $C_{-1} = 4$ , тому  $\operatorname{res} f(\infty) = -4$ .

**Зауваження.** Очевидно, що коли точка  $z = \infty$  є усувною ізольованою особливою точкою функції  $f(z)$ , то може бути, що  $\operatorname{res} f(\infty) \neq 0$ .

### Основна теорема про лишки

**Теорема.** Нехай функція  $f(z)$  аналітична на всій площині  $z$ , за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок  $z_1, \dots, z_n$ . Тоді справедлива рівність

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0. \quad (9.59)$$

**Доведення.** Побудуємо кола  $\gamma_k$  із центрами в точках  $z_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) так, щоб вони не перетиналися. Крім того, побудуємо коло  $\Gamma$  із центром у початку координат такого радіуса, щоб воно містило всередині усі кола  $\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Тоді складний контур  $L = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$  обмежує область, всередині якої функція  $f(z)$  аналітична (рис. 9.10).

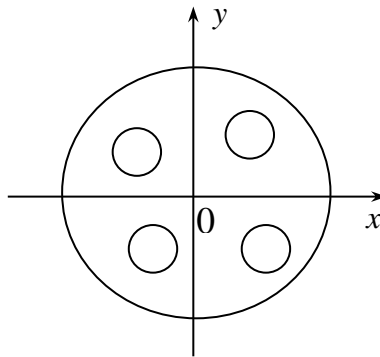


Рисунок 9.10 – Контур  $L = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$

Тому за теоремою Коші маємо:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на  $\frac{1}{2\pi i}$ , одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (9.60)$$

Враховуючи виконані побудови (рис.9.10) і означення лишку, із (9.60) одержимо

$$-\operatorname{res} f(\infty) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

Отже, рівність (9.59) справедлива. Теорема доведена.

**Наслідок.** Із формули (9.60) випливає, що

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k), \quad (9.61)$$

тобто, якщо функція  $f(z)$  аналітична у замкненій області  $D$ , яка обмежена контуром  $\Gamma$ , скрізь, за виключенням скінченної кількості ізольованих особливих точок, то інтеграл по контуру  $\Gamma$  дорівнює сумі лишків функції у цих точках.

**Приклад 23.** Обчислити інтеграл  $I = \int_{|z+i|=2} \frac{\operatorname{ch} z + 1}{z \left( z + i \frac{\pi}{4} \right)} dz.$

*Розв'язання.* Контур інтегрування – коло з центром у точці  $z = -i$  радіуса  $\rho = 2$ . Всередині цього кола підінтегральна функція має дві особливих точки  $z = 0$  і  $z = -i \frac{\pi}{4}$ , які, очевидно, є простими полюсами цієї функції. Тому, використовуючи формулу (9.60), маємо:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left( \operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\pi i \left( \left. \frac{\operatorname{ch} z + 1}{z + i \frac{\pi}{4}} \right|_{z=0} + \left. \frac{\operatorname{ch} z + 1}{z} \right|_{z=-i \frac{\pi}{4}} \right) = \\ &= 2\pi i \left( \frac{8}{i\pi} + \frac{\operatorname{ch} i \frac{\pi}{4} + 1}{-i \frac{\pi}{4}} \right) = 4(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

**Обчислення деяких типів інтегралів за допомогою теорії лишків**

1. Обчислення інтегралів типу  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ .

**Лема.** Нехай функція  $f(z)$  аналітична у верхній півплощині  $\text{Im } z \geq 0$  всюди, за винятком скінченної кількості особливих точок, і нехай існують такі додатні числа  $R_0$ ,  $M$  та  $\delta$ , що для всіх точок верхньої півплощини, які задовольняють умові  $|z| > R_0$ , справедлива нерівність

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}.$$

Тоді

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (9.62)$$

де  $C_R$  – півколо  $|z| = R$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ .

**Доведення.** Із умови леми витікає, що якщо  $R > R_0$ , то  $\left| \int_{C_R} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{C_R} |f(\zeta)| d\zeta \leq \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^\delta}$ . Очевидно, що  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M\pi}{R^\delta} = 0$ . Лему доведено.

**Теорема 3.** Нехай функція  $f(x)$  задана на інтервалі  $(-\infty; \infty)$  та функція  $f(z)$  задовольняє умовам леми 1 і збігається з даною функцією при  $z = x$ , тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res } f(z_k), \quad (9.63)$$

де  $z_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) – ізольовані особливі точки функції  $f(z)$  у верхній півплощині.

**Доведення.** Із умови леми 1 витікає, що існує таке  $R_0$ , що  $|z_k| < R_0$  ( $k=1, \dots, n$ ). Розглянемо замкнений контур (рис.9.11), що складається з відрізка дійсної осі  $-R \leq x \leq R$ ,  $R \geq R_0$ , і півкола  $C_R: |z| = R$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ . Із теореми 2 випливає, що

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res } f(z_k). \quad (9.64)$$

З леми 1 випливає, що другий інтеграл лівої частини рівності (9.64) прямує до нуля, коли  $R \rightarrow \infty$ . Права частина рівності не залежить від  $R$ . Тому, роблячи граничний перехід при  $R \rightarrow \infty$ , отримуємо формулу (9.63). Теорему доведено.

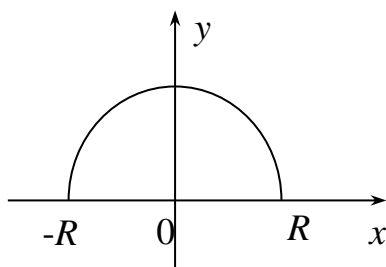


Рисунок 9.11 – Замкнений контур, що складається з відрізка дійсної осі і півкола

**Приклад 24.** Обчислити інтеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}$ .

*Розв'язання.* Розглянемо функцію  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 4)^2}$ . Вона аналітична всюди, окрім точок  $z = \pm 2i$ , в яких має полюси другого порядку. У нескінченно віддаленій точці  $z = \infty$  функція має нуль другого порядку, а на дійсній осі – збігається з підінтегральною функцією. Функція  $f(z)$  задовольняє умовам леми 1 і теореми 3, тому

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2} = 2\pi i \operatorname{res} f(2i);$$

$$\operatorname{res} f(2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2 (z - 2i)^2}{(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z + 2i)^2} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z(z + 2i) - 2z^2}{(z + 2i)^3} = \frac{-8}{-64i} = -\frac{i}{8}.$$

Отже,  $I = 2\pi i \left(-\frac{i}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

**Приклад 25.** Обчислити інтеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$ .

*Розв'язання.* Розглянемо функцію  $f(z) = \frac{dz}{(z^2 + 2z + 2)^2}$ . У верхній півплощині ця функція аналітична всюди, за винятком точки  $z = -1 + i$ , в якій вона має полюс другого порядку. Очевидно, що функція  $f(z)$  задовольняє умовам теореми 3, а тому

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 2\pi i \operatorname{res} f(-1+i);$$

$$\operatorname{res} f(-1+i) = \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{d}{dz} \frac{(z+1-i)^2}{(z^2 + 2z + 2)^2} = \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+1+i)^2} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{-2}{(z+1+i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

Отже,  $I = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

**Зауваження.** Якщо аналітична функція  $f(z)$  має у нескінченно віддаленій точці нуль не менше ніж другого порядку, умова (9.62) теж виконується.

2. Обчислення інтегралів типу  $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ , де  $R$  – раціональна функція своїх аргументів, обмежена на інтервалі інтегрування. Зробимо заміну

$$z = e^{i\varphi}, \quad i\varphi = \ln z, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right); \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

При такій заміні аргумент  $\varphi$  змінюється від 0 до  $2\pi$ , а точка  $z$  пробігає коло  $|z|=1$  у додатному напрямі. Крім того, підінтегральна функція перетворюється у раціональну функцію  $R_1(z)$ , тому

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res} R_1(z_k),$$

де  $z_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) – ізольовані особливі точки функції  $R_1(z)$ , що належать області  $|z| < 1$ .

**Приклад 26.** Обчислити інтеграл  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 4\cos \varphi)^2}.$

*Розв'язання.* Зробимо вказану вище заміну змінної. Тоді



$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z \left( 5 + 2 \left( z + \frac{1}{z} \right) \right)^2} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(2z^2 + 5z + 2)^2}.$$

Функція  $R_1(z) = \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2}$  в області  $|z|=1$  має одну особливу точку

$z = -\frac{1}{2}$ , яка є полюсом другого порядку. Тому

$$\operatorname{res} R_1 \left( -\frac{1}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \frac{z \left( z + \frac{1}{2} \right)^2}{4 \left( z + \frac{1}{2} \right)^2 (z + 2)^2} = \frac{2}{4} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2 - z}{(z + 2)^3} = \frac{5}{27}.$$

Отже,  $I = 2\pi \cdot \operatorname{res} R_1 \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{10\pi}{27}$ .

**Приклад 27.** Обчислити інтеграл  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \sin \varphi}$ .

*Розв'язання.* Зробимо вказану вище заміну змінної:

$$z = e^{i\varphi}, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right).$$

Тоді

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z \left( 2 + \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right)} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

Функція  $R_1(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$  в області  $|z|=1$  має одну особливу точку

$z = i(\sqrt{3} - 2)$ , яка є простим полюсом. Тому

$$\operatorname{res} R_1 \left( i(\sqrt{3} - 2) \right) = \lim_{z \rightarrow i(\sqrt{3} - 2)} \frac{2}{z + i(\sqrt{3} + 2)} = \frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

Отже,  $I = 2\pi i \cdot \operatorname{res} R_1 \left( i(\sqrt{3} - 2) \right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ .

3. Обчислення інтегралів типу  $\int_0^{\infty} R(x) \cos(ax) dx$ ,  $\int_0^{\infty} R(x) \sin(ax) dx$ , де  $R(x)$  – правильний раціональний дріб,  $a > 0$  – дійсне число.

Для обчислення таких інтегралів використовується лема Жордана.

**Лема Жордана.** Нехай функція  $f(z)$  аналітична у верхній півплощині  $\text{Im } z > 0$  всюди, за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок, і прямує до нуля, коли  $|z| \rightarrow \infty$ . Тоді при  $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0, \quad (9.65)$$

де  $C_R$  – півколо  $|z| = R$  у верхній півплощині.

**Доведення.** Із умови леми випливає, що існує таке число  $m_R$ , що  $|f(z)| < m_R$ , коли  $z \in C_R$ , і  $m_R \rightarrow 0$ , коли  $R \rightarrow \infty$ . Враховуючи це, оцінимо інтеграл (9.65). Зробимо заміну  $z = Re^{i\varphi}$ ,  $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$  і скористаємось очевидною нерівністю  $\sin \varphi \geq \varphi$ , коли  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| &\leq m_R R \int_0^{\pi} \left| e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right| d\varphi = m_R R \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2m_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi < 2m_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{aR}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{a} m_R (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Лема доведена.

**Приклад 28.** Обчислити інтеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx$ .

**Розв'язання.** Розглянемо допоміжну функцію  $f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20}$ . Легко

побачити, що коли  $z = x$ , то  $\text{Im } f(x)$  збігається з підінтегральною функцією  $\varphi(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20}$ . Розглянемо замкнений контур, що складається з відрізка осі

$Ox$  від  $-R$  до  $R$  і півкола  $C_R : |z| = R, \text{Im } z > 0$ . Для будь-якого  $R$  за теоремою 2 маємо:

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx + \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

Функція  $f(z)$  задовольняє умові леми Жордана, тому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20} dz = 0.$$

У верхній півплощині функція  $f(z)$  має один простий полюс у точці  $z_0 = -2 + 4i$ ;

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(-2 + 4i) &= \lim_{z \rightarrow -2 + 4i} \frac{z e^{iz}}{2z + 4} = \frac{(-2 + 4i) e^{-2i - 4}}{2(-2 + 4i) + 4} = \\ &= \frac{e^{-4}}{4i} (-\cos 2 + 2 \sin 2 + i(2 \cos 2 + \sin 2)). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx = \operatorname{Im}(2\pi i \cdot \operatorname{res} f(-2 + 4i)) = \frac{\pi e^{-4}}{2} (2 \cos 2 + \sin 2).$$

**Приклад 29.** Обчислити інтеграл  $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx$ .

*Розв'язання.* Розглянемо допоміжну функцію  $f(z) = \frac{e^{4iz}}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}$ . Легко

побачити, що коли  $z = x$ , то  $\operatorname{Re} f(x)$  збігається з підінтегральною функцією

$$\varphi(x) = \frac{\cos 4x}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$$

та

$$I = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

У верхній півплощині функція  $f(z)$  аналітична всюди, за винятком точок  $z_1 = i$  та  $z_2 = 2i$ , які є простими полюсами. Розглянемо замкнений контур, що складається з відрізка осі  $Ox$  від  $-R$  до  $R$  і півкола  $C_R: |z| = R, \operatorname{Im} z > 0$ . Для будь-якого  $R$  за теоремою 2 маємо:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{4ix}}{(x^2+4)(x^2+1)} dx + \int_{C_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+4)(z^2+1)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

Функція  $f(z)$  задовольняє умові леми Жордана, тому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+4)(z^2+1)} dz = 0,$$

а значить,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+4)(x^2+1)} dx = 2\pi i (\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2)).$$

$$\operatorname{res} f(z_1) = \operatorname{res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{4iz}}{(z^2+4)(z+i)} = \frac{e^{-4}}{6i};$$

$$\operatorname{res} f(z_2) = \operatorname{res} f(2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z+2i)} = -\frac{e^{-8}}{12i}.$$

Таким чином,

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+4)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (2\pi i \cdot (\operatorname{res} f(i) + \operatorname{res}(2i))) = \frac{\pi}{6} (e^{-4} - \frac{e^{-8}}{2}).$$

### ***Завдання для самостійного розв'язання до розділу 9***

**1.** Дослідити на аналітичність функцію  $w = f(z)$ .

1.1.  $w = \sin 5z + z^2$ .

1.2.  $w = \frac{1}{z+3}$ .

1.3.  $w = \frac{z+2}{z^2+5z+6}$ .

1.4.  $w = z \cdot e^{-iz}$ .

1.5.  $w = |z| \cdot \operatorname{Re} z^2$ .

**2.** Знайти аналітичну функцію  $w = f(z)$ , якщо відомі її дійсна  $u(x, y)$  або уявна  $v(x, y)$  частини і значення  $f(z_0)$ .

$$2.1. v(x, y) = e^x (y \cos y + x \sin y), \quad f(0) = 0.$$

$$2.2. u(x, y) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y, \quad f(0) = 0.$$

$$2.3. v(x, y) = 3x^2 y - y^3 - y, \quad f(0) = 0.$$

$$2.4. u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(1) = 1 + i.$$

$$2.5. v(x, y) = e^{-y} \sin x, \quad f(0) = 1.$$

**3.** Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної вздовж заданих кривих.

$$3.1. \int_{AB} (2z + 1) dz; \quad AB: \{y = x^3, z_A = 0; z_B = 1 + i\}.$$

$$3.2. \int_{ABC} z \bar{z} dz; \quad AB: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}, BC - \text{відрізок}, z_C = 0.$$

$$3.3. \int_L (\cos iz + 3z^2) dz; \quad L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

$$3.4. \int_L |z| dz; \quad L: \left\{ |z| = \sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 5\frac{\pi}{4} \right\}.$$

$$3.5. \int_{ABC} (z^9 + 1) dz; \quad ABC - \text{ламана}, z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i.$$

**4.** За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграли.

$$4.1. \oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z(z^2 + 4)}.$$

$$4.2. \oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2 + \pi)^2}{i \sin z} dz.$$

$$4.3. \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z + 1}{z(z-1)} dz.$$

$$4.4. \oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \frac{\cos^2 z + 3}{2z^2 + \pi z} dz.$$

$$4.5. \oint_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{\ln(e+z)}{\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)} dz.$$

5. Задану функцію розкласти в ряд Лорана в околі точки  $z_0$ .

$$5.1. ze^{z(z-5)}, \quad z_0 = 5.$$

$$5.2. \sin \frac{3z-i}{3z+i}, \quad z_0 = -\frac{i}{3}.$$

$$5.3. \cos \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, \quad z_0 = 2.$$

$$5.4. ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}}, \quad z_0 = \pi.$$

$$5.5. z^2 \sin \frac{z+3}{z}, \quad z_0 = 0.$$

6. Для заданих функцій знайти ізольовані особливі точки і визначити їх характер.

$$6.1. thz.$$

$$6.2. \frac{z^2}{(z^2+4)^2 \cos \frac{1}{z-2}}.$$

$$6.3. ctg \pi z.$$

$$6.4. \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}.$$

$$6.5. \frac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}.$$

7. За допомогою лишків обчислити інтеграли.

$$7.1. \oint_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz.$$

$$7.2. \oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz.$$

$$7.3. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4 + 2z^3 + 3}{2z^6} dz.$$

$$7.4. \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz.$$

$$7.5. \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz.$$

## РОЗДІЛ 10. Операційне числення

Операційне числення застосовується для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь, як звичайних, так і з частинними похідними, а також диференціально-різносних рівнянь та лінійних інтегральних рівнянь типу згортки, до яких зводяться задачі по перехідним процесам лінійних фізичних систем електротехніки, радіотехніки, теорії автоматичного регулювання тощо.

Метод операційного числення базується на тому, що диференціювання функції замінюється операцією множення, а інтегрування – операцією частки. За допомогою операційного метода лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами зводяться до лінійних алгебраїчних рівнянь.

Операційний метод широко застосовується при розв'язанні задач математичної фізики, механіки, теплотехніки.

### Початкова функція та її зображення

Нехай задано функцію  $f(t)$ ,  $t \in [0; +\infty)$ .

**Означення.** Функція  $f(t)$  називається початковою функцією або оригіналом, якщо існують такі сталі  $M > 0$  та  $s_0 > 0$ , що виконується умова

$$|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}, \quad \forall t \in [0; +\infty). \quad (10.1)$$

Розглянемо добуток  $e^{-pt} f(t)$ , де  $p = a + ib$  – деяке комплексне число. Використовуючи формулу Ейлера, цей добуток можна представити у вигляді

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t) \cos bt - i e^{-at} f(t) \sin bt.$$

Розглянемо невластний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt - i \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \sin bt dt. \quad (10.2)$$

Покажемо, що коли функція  $f(t)$  задовольняє умові (10.1), то при  $a > s_0$  інтеграли у правій частині рівності (10.2) існують і збігаються абсолютно.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} |e^{-at} f(t) \cos bt| dt < M \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{s_0 t} dt = \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-(a-s_0)t} dt = \frac{M}{a-s_0}, \quad a > s_0. \end{aligned}$$

Аналогічно можна оцінити і другий інтеграл правої частини рівності (10.2).

Отже, інтеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$  існує. Він визначає деяку функцію від аргумента  $p$ .

**Означення.** Функція

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (10.3)$$

називається Лапласовим зображенням, або  $L$ -зображенням, або просто зображенням оригінала  $f(t)$ . При цьому мають місце такі позначення:

$$F(p) \rightarrow f(t);$$

$$L\{f(t)\} = F(p).$$

Нехай задано деяку функцію  $F(p)$ . Чи існує функція-оригінал  $f(t)$ , для якої  $F(p)$  є зображенням? Та якщо така функція існує, чи єдина вона? На обидва питання при деяких припущеннях відносно функцій  $F(p)$  та  $f(t)$  можна відповісти позитивно. Єдиність оригінала можна встановити за допомогою наступної теореми.

**Теорема 1.** Якщо дві неперервні функції  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  мають однакове  $L$ -зображення  $F(p)$ , то вони тотожно дорівнюють одна одній:  $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ .

Ця теорема стверджує, що якщо зображення  $F(p)$  має оригінал  $f(t)$ , то він єдиний.

Лапласове зображення має властивість лінійності.

**Теорема 2.** Сума декількох оригіналів, помножених на сталі, є оригіналом та зображення суми дорівнює сумі зображень, помножених на відповідні сталі, тобто якщо

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t), \quad (10.4)$$

де  $c_i = \text{const}$ ,  $F_i(p) \rightarrow f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то

$$L\{f(t)\} = \sum_{i=1}^n c_i F_i(p),$$

або

$$F(p) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(p). \quad (10.5)$$



## Зображення функцій $\sigma_0(t)$ , $\sin t$ , $\cos t$

### 1. Функція

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

називається одиничною функцією Хевісайда та позначається  $\sigma_0(t)$ . Знайдемо її L-зображення.

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p};$$

$$\frac{1}{p} \rightarrow \sigma_0(t) \quad (10.6)$$

**Зауваження.** Іноді зображенням функції  $f(t)$  називають вираз

$$F^*(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

При такому означенні зображення будемо мати

$$1 \rightarrow \sigma_0(t),$$

а значить,

$$c \rightarrow c \cdot \sigma_0(t), \text{ де } c - \text{ стала.}$$

2. Розглянемо оригінал  $f(t) = \sin t$  та знайдемо його зображення.

$$L\{\sin t\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt = \frac{e^{-pt}(-p \sin t - \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2 + 1};$$

$$\frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t. \quad (10.7)$$

3. Знайдемо зображення оригінала  $f(t) = \cos t$ .

$$L\{\cos t\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{e^{-pt} (\sin t - p \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{p}{p^2 + 1};$$

$$\frac{p}{p^2 + 1} \rightarrow \cos t. \quad (10.8)$$

### Зображення функцій із зміненням масштабом незалежної змінної

Доведемо наступну теорему.

**Теорема 3.** Якщо оригіналу  $f(t)$  відповідає зображення  $F(p)$ , то для будь-якого  $a > 0$  маємо

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \rightarrow f(at). \quad (10.9)$$

**Доведення.** Знайдемо зображення функції  $f(at)$ , де  $a > 0$ .

$$L\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt;$$

зробимо заміну змінної, поклавши  $z = at$ , тоді  $dz = a \cdot dt$  та

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) dz = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Теорему доведено.

**Приклад 1.** Знайти зображення функцій  $\sin at$ ,  $\cos at$ .

*Розв'язання.* Використовуючи формули (10.7), (10.8) та формулу (10.9), маємо:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} \rightarrow \sin at,$$

або

$$\frac{a}{p^2 + a^2} \rightarrow \sin at; \quad (10.10)$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} \rightarrow \cos at,$$

або

$$\frac{p}{p^2 + a^2} \rightarrow \cos at. \quad (10.11)$$

**Приклад 2.** Знайти зображення функції  $f(t) = 3\sin 4t - 2\cos 5t$ .

*Розв'язання.* Використовуючи формули (10.5), (10.10) та (10.11), маємо

$$F(p) = 3 \cdot \frac{4}{p^2 + 16} - 2 \cdot \frac{p}{p^2 + 25} = \frac{12}{p^2 + 16} - \frac{2p}{p^2 + 25}.$$

**Приклад 3.** Знайти оригінал  $f(t)$  за відомим зображенням

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}.$$

*Розв'язання.* Представимо зображення  $F(p)$  у вигляді

$$F(p) = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} + 20 \cdot \frac{p}{p^2 + 9}.$$

Значить,

$$f(t) = \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t.$$

З теореми 1 випливає, що знайдена функція – єдиний оригінал, який відповідає даному зображенню.

### Теорема зміщення

**Теорема 4.** Якщо функція  $F(p)$  є зображенням функції  $f(t)$ , то функція  $F(p + \alpha)$  є зображенням функції  $e^{-\alpha t} f(t)$  при умові  $\operatorname{Re}(p + \alpha) > s_0$ , тобто якщо

$$F(p) \rightarrow f(t),$$

тоді

$$F(p + \alpha) \rightarrow e^{-\alpha t} f(t) \quad (10.12)$$

**Доведення.** Знайдемо зображення функції  $e^{-\alpha t} f(t)$ .

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = F(p + \alpha), \operatorname{Re}(p + \alpha) > s_0.$$

Отже,

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p + \alpha).$$

Теорему доведено.

Остання теорема дозволяє значно розширити клас зображень, для яких легко знаходяться початкові функції. Використовуючи формулу (10.6) та властивість (10.12), маємо

$$\frac{1}{p + \alpha} \rightarrow e^{-\alpha t}, \quad (10.13)$$

$$\frac{1}{p - \alpha} \rightarrow e^{\alpha t}. \quad (10.14)$$

Віднявши від (10.14) (10.13) і поділивши на два, отримаємо

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p + \alpha} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) = \operatorname{sh} \alpha t,$$

або

$$\frac{1}{p^2 - \alpha^2} \rightarrow \operatorname{sh} \alpha t. \quad (10.15)$$

Аналогічно

$$\frac{p}{p^2 - \alpha^2} \rightarrow \operatorname{ch} \alpha t. \quad (10.16)$$

Із формул (10.10), (10.11) та властивості (10.12) випливає, що

$$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \sin at, \quad (10.17)$$

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \cos at. \quad (10.18)$$

**Приклад 4.** Знайти початкову функцію, зображення якої має вигляд

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}.$$

*Розв'язання.* Перетворимо функцію  $F(p)$ :

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41} = \frac{7}{(p + 5)^2 + 16} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{(p + 5)^2 + 4^2}.$$

Використовуючи формулу (10.17), маємо

$$F(p) \rightarrow \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t.$$

**Приклад 5.** Знайти початкову функцію, зображення якої має вигляд

$$F(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 2p + 10}.$$

*Розв'язання.* Перетворимо функцію  $F(p)$ :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p + 3}{p^2 + 2p + 10} = \frac{p + 1 + 2}{(p + 1)^2 + 9} = \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 3^2} + \frac{2}{(p + 1)^2 + 3^2} = \\ &= \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 3^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(p + 1)^2 + 3^2}. \end{aligned}$$

враховуючи формули (10.17) та (10.18),

$$F(p) \rightarrow e^{-t} \left( \cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t \right).$$

### Диференціювання зображення

**Теорема 5.** Якщо

$$F(p) \rightarrow f(t),$$

тоді

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \rightarrow t^n f(t). \quad (10.19)$$

**Доведення.** Покажемо спочатку, що якщо функція  $f(t)$  задовольняє умові (10.1), то інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt \quad (10.20)$$

існує. За умовою (10.1)  $|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$ ,  $p = a + ib$ ,  $a > s_0$ ,  $s_0 > 0$ . Очевидно існує таке  $\varepsilon > 0$ , що буде виконуватися нерівність  $a > s_0 + \varepsilon$ . Доведемо існування інтеграла  $\int_0^{+\infty} e^{-(p-\varepsilon)t} |f(t)| dt$ .

$$\int_0^{+\infty} e^{-(p-\varepsilon)t} |f(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| \cos btdt - i \int_0^{+\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| \sin btdt; \quad (10.21)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| \cos btdt < M \int_0^{+\infty} e^{-(a-\varepsilon-s_0)t} dt = -M \frac{e^{-(a-\varepsilon-s_0)t}}{a-\varepsilon-s_0} \Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{a-\varepsilon-s_0},$$

оскільки  $a - \varepsilon - s_0 > 0$ . Аналогічно можна оцінити і другий інтеграл рівності (10.21). Отже, інтеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-(p-\varepsilon)t} |f(t)| dt$  існує.

Оцінимо інтеграл (10.20).

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt} (-t)^n f(t)| dt = \int_0^{+\infty} |e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t)| dt;$$

оскільки функція  $e^{-\varepsilon t} t^n$  є обмеженою та за абсолютною величиною не перевищує деякого числа  $N > 0$  для будь-якого  $t > 0$ , то можна записати:

$$\int_0^{+\infty} |e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t)| dt < N \int_0^{+\infty} e^{-(p-\varepsilon)t} |f(t)| dt < +\infty.$$

Таким чином доведено, що інтеграл (10.20) існує. Його можна розглядати як  $n$ -у похідну за параметром  $p$  від інтеграла  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ , тобто

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

або

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n f(t) dt \rightarrow t^n f(t).$$

Теорему доведено.

Використаємо формулу (10.19) для знаходження зображення степеневої функції. Оскільки

$$\frac{1}{p} \rightarrow 1,$$

враховуючи (10.19),

$$-\frac{d}{dp} \frac{1}{p} \leftarrow t \quad \text{або} \quad \frac{1}{p^2} \rightarrow t.$$

Аналогічно

$$\frac{d}{dp} \left( -\frac{1}{p^2} \right) \rightarrow t^2 \quad \text{або} \quad \frac{2}{p^3} \rightarrow t^2.$$

За індукцією маємо

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \rightarrow t^n. \quad (10.22)$$

**Приклад 6.** Знайти зображення оригіналів  $t \sin at$ ,  $t \cos at$ ,  $te^{\alpha t}$ .

*Розв'язання.* Використовуючи формули (10.10), (10.11), (10.14) та формулу (10.19), маємо:

$$-\frac{d}{dp} \left( \frac{a}{p^2 + a^2} \right) \rightarrow t \sin at \quad \text{або} \quad \frac{2ap}{p^2 + a^2} \rightarrow t \sin at;$$

$$-\frac{d}{dp} \left( \frac{p}{p^2 + a^2} \right) \rightarrow t \cos at \quad \text{або} \quad \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2} \rightarrow t \cos at;$$

$$te^{\alpha t} \leftarrow -\frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p - \alpha} \right) \quad \text{або} \quad te^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{(p - \alpha)^2}.$$

### Зображення похідних

**Теорема 6.** Якщо  $F(p) \rightarrow f(t)$ , тоді

$$pF(p) - f(0) \rightarrow f'(t). \quad (10.23)$$

**Доведення.** За означенням зображення

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt. \quad (10.24)$$

Припустимо, що всі похідні, які нам зустрінуться, задовольняють умові (10.1), а значить, інтеграл (10.24) та аналогічні йому інтеграли від наступних похідних існують. Інтегруючи частинами у (10.24), маємо

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pF(p),$$

оскільки з умови (10.1) ( $\operatorname{Re} p > s_0$ ) випливає, що  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$ . Теорему доведено.

Знайдемо далі зображення похідних будь-якого порядку.

$$p(pF(p) - f(0)) - f'(0) \rightarrow f''(t)$$

або

$$f''(t) \leftarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (10.25)$$

Зображення для похідної  $n$ -го порядку буде

$$p^n F(p) - (p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)) \rightarrow f^{(n)}(t) \quad (10.26)$$

**Зауваження.** Формули (10.23), (10.25) і (10.26) спрощуються, якщо  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ . В цьому випадку маємо

$$F(p) \rightarrow f(t), \quad pF(p) \rightarrow f'(t), \quad \dots, \quad p^n F(p) \rightarrow f^{(n)}(t).$$

### Теорема згортання

**Означення.** Вираз  $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$  називається згорткою двох функцій  $f_1(t)$  та  $f_2(t)$ . Операція отримання згортки називається згортанням двох функцій, при цьому

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Справедливість останньої рівності встановлюється шляхом заміни змінної  $z = t - \tau$ . Згортка двох функцій  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  позначається  $f_1 * f_2(t)$ .



**Теорема 7 (згортання).** Якщо функції  $F_1(p)$  та  $F_2(p)$  є зображеннями функцій  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$ , тобто

$$F_1(p) \rightarrow f_1(t), F_2(p) \rightarrow f_2(t),$$

то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (10.27)$$

**Доведення.** Знайдемо зображення функції  $f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ .

$$L\left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt.$$

Інтеграл у правій частині рівності є подвійним інтегралом вигляду  $\int_0^{+\infty} \int_0^t \Phi(\tau, t) d\tau dt$ , який береться по області, що обмежена прямими  $\tau = 0$ ,  $\tau = t$ . Змінимо порядок інтегрування у подвійному інтегралі.

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt \right] d\tau.$$

Виконавши заміну  $z = t - \tau$  у внутрішньому інтегралі, отримаємо

$$\int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(z+\tau)} f_2(z) dz = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} e^{-pz} f_2(z) dz = e^{-p\tau} F_2(p).$$

Звідси випливає, що

$$L(f_1 * f_2) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} F_2(p) f_1(\tau) d\tau = F_2(p) \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

**Зауваження.** За допомогою теореми згортання легко знаходиться зображення інтеграла від початкової функції, якщо відомо зображення цієї функції, а саме: якщо

$$F(p) \rightarrow f(t)$$

тоді

$$\frac{1}{p} F(p) \rightarrow \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (10.28)$$

Дійсно, якщо позначити  $f_1(t) = f(t)$ ,  $f_2(t) = 1$ , маємо  $F_1(p) = F(p)$ ,  $F_2(p) = \frac{1}{p}$  і формула (10.28) стає очевидною.

**Таблиця деяких зображень**

	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin t$
3	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos t$
4	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\operatorname{sh} \alpha t$
5	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$
6	$\frac{1}{p + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
7	$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2}$	$e^{-\alpha t} \sin at$
8	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2}$	$e^{-\alpha t} \cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n$
10	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
11	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$

12	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$t e^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^2} (\sin at - at \cos at)$
14	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p) \cdot F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$

**Допоміжне (зображуюче) рівняння для даного  
диференціального рівняння**

Нехай задано диференціальне рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами  $a_0, a_1, \dots, a_n$  :

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \quad (10.29)$$

Треба знайти розв'язок  $x = x(t)$  цього рівняння при умові  $t \geq 0$ , що задовольняє початковим умовам

$$x(0) = x_0, \frac{dx}{dt}(0) = x'_0, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = x_0^{(n-1)}. \quad (10.30)$$

Будемо шукати  $L$ -зображення розв'язку  $x(t)$  рівняння (10.29), що задовольняє умовам (10.30). Це  $L$ -зображення позначимо як  $\bar{X}(p)$ . Таким чином,  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ .

Припустимо, що існують зображення розв'язку  $x(t)$  рівняння (10.29) та його похідних до  $n$ -го порядку включно. Помножимо обидві частини рівності (10.29) на  $e^{-pt}$ , де  $p = a + ib$ , і проінтегруємо в межах від 0 до  $+\infty$  :

$$a_0 \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} dt + \dots + a_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{dx}{dt} dt +$$

$$+ a_n \int_0^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

або

$$a_0 L \left\{ \frac{d^n x}{dt^n} \right\} + a_1 L \left\{ \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right\} + \dots + a_{n-1} L \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} + a_n L \{x(t)\} = L \{f(t)\}.$$

Підставляючи в останню рівність замість зображень функції та її похідних вирази (10.23), (10.25) та (10.26), маємо

$$\begin{aligned} & a_0 \left\{ p^n \bar{X}(p) - \left( p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + p^{n-3} x''_0 + \dots + x_0^{(n-1)} \right) \right\} + \\ & + a_1 \left\{ p^{n-1} \bar{X}(p) - \left( p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x'_0 + \dots + x_0^{(n-2)} \right) \right\} + \\ & \dots \\ & + a_{n-1} \{ p \bar{X}(p) - x_0 \} + a_n \bar{X}(p) = F(p). \end{aligned} \quad (10.31)$$

Рівняння (10.31) називається допоміжним або зображуючим рівнянням для рівняння (10.29). В цьому рівнянні невідомою є функція  $\bar{X}(p)$ . Зробимо перетворення, залишивши в лівій частині рівності доданки, що містять  $\bar{X}(p)$ .

$$\begin{aligned} & \bar{X}(p) (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = \\ & + a_0 (p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}) + \\ & + a_1 (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x'_0 + \dots + x_0^{(n-2)}) + \\ & \dots \\ & + a_{n-2} (p x_0 + x'_0) + a_{n-1} x_0 + F(p). \end{aligned} \quad (10.32)$$

Коефіцієнт при  $\bar{X}(p)$  в рівності (10.32) є поліномом  $n$ -го степеня відносно змінної  $p$ , який можна одержати, підставивши в ліву частину рівняння (10.29) замість похідних відповідні степені  $p$ . Позначимо його через  $\varphi_n(p)$ :

$$\varphi_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (10.33)$$

Усі члени правої частини рівності (10.32) (окрім функції  $F(p)$ ) після розкриття дужок та приведення подібних доданків утворюють поліном від змінної  $p$  степеня  $n-1$ . Позначимо його через  $\psi_{n-1}(p)$ . Таким чином, рівняння (10.32) можна переписати у вигляді

$$\bar{X}(p) \varphi_n(p) = \psi_{n-1}(p) + F(p).$$

З цього рівняння знаходимо функцію  $\bar{X}(p)$ :

$$\bar{X}(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}. \quad (10.34)$$

Визначена функція  $\bar{X}(p)$  є зображенням розв'язку  $x(t)$  рівняння (10.29), що задовольняє початковим умовам (10.30). Якщо тепер ми знайдемо початкову функцію  $x^*(t)$  із зображенням  $\bar{X}(p)$ , яке визначається формулою (10.33), то із теореми 1 випливає, що функція  $x^*(t)$  є розв'язком рівняння (10.29) із початковими умовами (10.30), тобто

$$x^*(t) = x(t).$$

**Зауваження.** Якщо ми будемо знаходити розв'язок рівняння (10.29) при нульових початкових умовах  $x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$ , то поліном  $\psi_{n-1}(p)$  у виразі (10.32) тотожно дорівнює нулю і рівність (10.32) приймає вигляд

$$\bar{X}(p)\varphi_n(p) = F(p) \quad (10.35)$$

або

$$\bar{X}(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

**Приклад 7.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $\frac{dx}{dt} + x = 1$  за умови, що  $x(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ . Оскільки маємо нульову початкову умову, то  $\psi_{n-1}(p) \equiv 0$  і допоміжне рівняння приймає вигляд (10.35):

$$F(p) = \frac{1}{p}; \quad \varphi_n(p) = p + 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{X}(p)(p + 1) = \frac{1}{p};$$

звідси

$$\bar{X}(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1},$$

а значить,

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

**Приклад 8.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 1$  за умови, що  $x(0) = x'(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ . Оскільки маємо нульові початкові умови, то  $\psi_{n-1}(p) \equiv 0$  і допоміжне рівняння приймає вигляд (10.35):

$$F(p) = \frac{1}{p}; \quad \varphi_n(p) = p^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad \bar{X}(p)(p^2 + 9) = \frac{1}{p};$$

звідси

$$\bar{X}(p) = \frac{1}{p(p^2 + 9)}.$$

Розклавши праву частину останнього виразу на найпростіші дроби, маємо

$$\bar{X}(p) = -\frac{1}{9} \cdot \frac{p}{p^2 + 9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p},$$

а значить,

$$x(t) = -\frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{9}.$$

**Приклад 9.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t$  за умови, що  $x(0) = x'(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ . При нульових початкових умовах  $\psi_{n-1}(p) \equiv 0$  і допоміжне рівняння приймає вигляд (10.35):

$$F(p) = \frac{1}{p^2}; \quad \varphi_n(p) = p^2 + 3p + 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{X}(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2};$$

звідси

$$\bar{X}(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Розклавши праву частину останнього виразу на найпростіші дроби, маємо

$$\bar{X}(p) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+2}.$$

Звідси за таблицею зображень знаходимо

$$x(t) = \frac{t}{9} - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

### Зображення найпростіших дробів

Розглянемо чотири типи найпростіших дробів.

1.  $\frac{A}{p-a}$ ;
2.  $\frac{A}{(p-a)^k}$ ,  $k \geq 2$ ;
3.  $\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}$ , де корені знаменника комплексні, тобто  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$ ;
4.  $\frac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$ , де корені знаменника комплексні та  $k \geq 2$ .

Знайдемо зображення першого, другого та третього типів. Для знаходження зображення дробу першого типу використовуємо таблицю зображень та маємо

$$\frac{A}{p-a} \rightarrow Ae^{at}.$$

Для отримання зображення дробу другого типу використовуємо формулу (10.22) та таблицю зображень:

$$\frac{A}{(p-a)^k} \rightarrow \frac{A}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at}.$$

Розглянемо дріб третього типу.

$$\begin{aligned} \frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} &= \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = \frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right) + \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = \\ &= A \frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} + \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right) \frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = M + N; \end{aligned}$$

$$M \rightarrow A e^{-\frac{a_1}{2}t} \cos\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right);$$

$$N \rightarrow \left(B - \frac{Aa_1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} e^{-\frac{a_1}{2}t} \sin\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right).$$

Таким чином,

$$\frac{Ap + B}{p^2 + a_1p + a_2} \rightarrow e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[ A \cos\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right) + \frac{B - \frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right) \right]. \quad (10.36)$$

### Приклади розв'язання диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь операційним методом

**Приклад 10.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t$  з початковими умовами  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ .

*Розв'язання.* Нехай  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ . Складемо допоміжне рівняння. Використовуючи таблицю зображень та формули (10.23) і (10.25), маємо:

$$p\bar{X}(p) - 1 \rightarrow \frac{dx}{dx}, \quad p^2\bar{X}(p) - p - 2 \rightarrow \frac{d^2x}{dx^2}, \quad \frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t.$$

Складаючи допоміжне рівняння, отримаємо

$$p^2\bar{X}(p) - p - 2 + 2(p\bar{X}(p) - 1) + 5\bar{X}(p) = \frac{1}{p^2 + 1};$$

$$\bar{X}(p)(p^2 + 2p + 5) = p + 4 + \frac{1}{p^2 + 1};$$

звідси

$$\bar{X}(p) = \frac{p + 4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

Розклавши останній дріб правої частини виразу на найпростіші дроби, маємо



$$\bar{X}(p) = \frac{\frac{11}{10}p + 4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{1}{5}}{p^2 + 1}$$

або

$$\bar{X}(p) = \frac{11}{10} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{29}{20} \cdot \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Звідси за таблицею зображень знаходимо

$$x(t) = \frac{11}{10} \cdot e^{-t} \cos 2t + \frac{29}{20} \cdot e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{10} \cdot \cos t + \frac{1}{5} \cdot \sin t.$$

**Зауваження.** Для знаходження оригіналу першого дробу у виразі для  $\bar{X}(p)$  можна використати формулу (10.36).

**Приклад 11.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3x$  при умові  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ . Складемо допоміжне рівняння (10.35).

$$\bar{X}(p)(p^2 + 4) = \frac{3}{p^2 + 9} \Rightarrow \bar{X}(p) = \frac{3}{(p^2 + 9)(p^2 + 4)}.$$

Розкладаючи останній дріб на найпростіші, маємо

$$\bar{X}(p) = \frac{-3/5}{p^2 + 9} + \frac{3/5}{p^2 + 4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Звідси

$$x(t) = -\frac{1}{5} \sin 3t + \frac{3}{10} \sin 2t.$$

**Приклад 12.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0$  за умови  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 3$ ,  $x''(0) = 8$ .

*Розв'язання.* Оскільки початкові умови ненульові, допоміжне рівняння будемо складати, користуючись формулою (10.26).

$$\bar{X}(p) \rightarrow x(t), \quad p^3 \bar{X}(p) - p^2 - 3p - 8 \rightarrow \frac{d^3 x}{dt^3},$$

підставляючи зображення в рівняння, маємо

$$\bar{X}(p)(p^3 + 1) = p^2 + 3p + 8.$$

Звідси

$$\bar{X}(p) = \frac{p^2 + 3p + 8}{(p+1)(p^2 - p + 1)} = \frac{2}{p+1} + \frac{-p+6}{p^2 - p + 1}$$

Оскільки

$$\frac{2}{p+1} \rightarrow 2e^{-t};$$

за формулою (10.36)

$$\frac{-p+6}{p^2 - p + 1} \rightarrow e^{\frac{t}{2}} \left( -\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{11}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right);$$

значить,

$$x(t) = 2e^{-t} + e^{\frac{t}{2}} \left( -\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{\sqrt{3}} \sin\frac{t\sqrt{3}}{2} \right).$$

**Приклад 13.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $\frac{d^2 x}{dt^2} + x = t \cos 2t$  за умови  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Оскільки початкові умови нульові, допоміжне рівняння будемо складати, користуючись формулою (10.35).

$$\bar{X}(p) \rightarrow x(t), \quad \bar{X}(p)(p^2 + 1) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2}, \quad \bar{X}(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2 (p^2 + 1)}.$$

Розкладаючи праву частину останньої рівності на найпростіші дроби, маємо

$$\bar{X}(p) = -\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 4} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{(p^2 + 4)^2}$$

або

$$\bar{X}(p) = -\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p^2 + 4 - (p^2 - 4)}{(p^2 + 4)^2} =$$

$$= -\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 4} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{p^2 + 4} - \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2} \right).$$

Звідси

$$x(t) = -\frac{5}{9} \sin t + \frac{5}{18} \sin 2t + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right).$$

**Приклад 14.** Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} 3 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x = 1 \\ \frac{dx}{dt} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 0 \end{cases},$$

що задовольняє початковим умовам  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ ,  $\bar{Y}(p) \rightarrow y(t)$ . Складемо систему допоміжних рівнянь.

$$\begin{cases} 3p\bar{X}(p) + p\bar{Y}(p) + 2\bar{X}(p) = \frac{1}{p} \\ p\bar{X}(p) + 4p\bar{Y}(p) + 3\bar{Y}(p) = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему відносно функцій  $\bar{X}(p)$ ,  $\bar{Y}(p)$ , маємо

$$\bar{X}(p) = \frac{4p + 3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)};$$

$$\bar{Y}(p) = \frac{1}{(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6} \right).$$

Звідси

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-\frac{6}{11}t} \\ y(t) = \frac{1}{5} \left( e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t} \right) \end{cases}.$$

## Диференціальні рівняння механічних коливань.

### Диференціальні рівняння теорії електричних ланцюгів.

Із теоретичної механіки відомо, що коливання матеріальної точки масою  $m$  можна описати рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} f_1(t), \quad (10.37)$$

де  $x$  – відхилення точки від деякого положення,  $k$  – жорсткість пружної системи (наприклад, пружини (ресори)), сила опору руху пропорціональна (з коефіцієнтом пропорціональності  $\lambda$ ) до першого степеня швидкості,  $f_1(t)$  – зовнішня (збуджуюча) сила.

Розв'язок рівняння типу (10.37) також описує малі коливання інших механічних систем з одним ступенем свободи, наприклад, крутильні коливання маховика на пружному валу, якщо  $x$  – кут обертання маховика,  $m$  – момент інерції маховика,  $k$  – крутильна жорсткість вала, а  $m \cdot f_1(x)$  – момент зовнішніх сил відносно осі обертання.

Рівняння типу (10.37) також описують і явища в електричних ланцюгах. Розглянемо електричний ланцюг, що складається з індуктивності  $L$ , опору  $R$  та ємності  $C$ , до якої прикладена е.р.с.  $E$  (рис. 10.1).

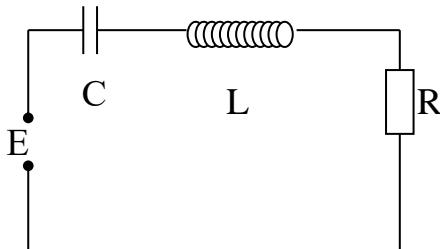


Рисунок 10.1 – Електричний ланцюг

Позначимо через  $i$  струм в ланцюгу, через  $Q$  – заряд конденсатора, тоді  $i$  та  $Q$  задовольняють наступним рівнянням:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = E, \quad (10.38)$$

$$\frac{dQ}{dt} = i. \quad (10.39)$$

З рівняння (10.38) маємо

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \frac{di}{dt}.$$

Підставляючи останнє рівняння і рівняння (10.39) у рівняння (10.38), отримаємо рівняння типу (10.37) відносно  $Q$ :

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E. \quad (10.40)$$

Диференціюючи рівняння (10.38) та використовуючи (10.39), отримуємо рівняння для визначення струму  $i$ :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dE}{dt}. \quad (10.41)$$

### Розв'язання диференціального рівняння коливань

Рівняння коливань запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t), \quad (10.42)$$

де механічний або фізичний зміст шуканої функції  $x(t)$ , коефіцієнтів  $a_1$ ,  $a_2$  та функції  $f(t)$  легко встановлюється при порівнянні цього рівняння з рівняннями (10.37), (10.38), (10.41). Знайдемо розв'язок рівняння (10.42), що задовольняє початковим умовам  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = x'_0$ . Нехай  $\bar{X}(p) \rightarrow x(t)$ ,  $F(p) \rightarrow f(t)$ . Складемо допоміжне рівняння:

$$\bar{X}(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = x_0 p + x'_0 + a_1 x_0 + F(p),$$

звідси

$$\bar{X}(p) = \frac{x_0 p + x'_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (10.43)$$

Наприклад, для функції  $Q(t)$ , що є розв'язком рівняння (10.40) та задовольняє початковим умовам  $Q(0) = Q_0$ ,  $Q'(0) = Q'_0$ , зображення  $\bar{Q}(p)$  буде мати вигляд

$$\bar{Q}(p) = \frac{L(Q_0 p + Q'_0) + RQ_0}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}(p)}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}},$$

де  $\bar{E}(p) \rightarrow E(t)$ .

Характер розв'язку (10.43) істотно залежить від того, чи будуть корені трьохчлену  $p^2 + a_1 p + a_2$  комплексними, або дійсними рівними, або дійсними різними. З подробицями розглянемо випадок, коли корені трьохчлену є комплексними, тобто  $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$ . Інші випадки розглядаються аналогічно.

Використовуючи формулу (10.36), знаходимо початкову функцію для першого дробу в (10.43):

$$\frac{x_0 p + x'_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow e^{-\frac{a_1}{2}t} \left( x_0 \cos\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right) + \frac{x'_0 + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right) \right). \quad (10.44)$$

Знайдемо оригінал другого дробу в (10.43). Для цього використаємо теорему згортання, зауваживши, що

$$F(p) \rightarrow f(t),$$

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right).$$

За теоремою згортання

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin\left((t-\tau)\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right) d\tau. \quad (10.45)$$

Враховучи (10.44) і (10.45), знаходимо оригінал зображення (10.43).

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t} \left( x_0 \cos \left( t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right) + \frac{x'_0 + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin \left( t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin \left( (t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right) d\tau. \quad (10.46)$$

Якщо зовнішня сила  $f(t) = 0$ , тобто якщо ми маємо вільні механічні або електричні коливання, то розв'язком є перший доданок (10.46). Якщо маємо нульові початкові умови, тобто якщо  $x_0 = x'_0 = 0$ , тоді розв'язком є другий доданок рівності (10.46).

### **Завдання для самостійного розв'язання до розділу 10**

**1.** Знайти оригінал  $f(t)$  за заданим зображенням  $F(p)$ .

1.1.  $F(p) = \frac{p-1}{p^3 + p^2 + 2p}$ .

1.2.  $F(p) = \frac{2}{p^3 + 8}$ .

1.3.  $F(p) = \frac{3p-1}{p(p^2 + 2)}$ .

1.4.  $F(p) = \frac{1-p}{(p+2)(p^2 - 4p + 5)}$ .

1.5.  $F(p) = \frac{4}{p^3 + 27}$ .

**2.** Розв'язати диференціальне рівняння з початковими умовами, використовуючи операційний метод.

2.1.  $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 1, x(0) = 1, \frac{dx}{dx}(0) = 0$ .

2.2.  $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 3\cos t, x(0) = -2, \frac{dx}{dx}(0) = 0$ .

$$2.3. \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 4e^{-2t}, \quad x(0) = -1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

$$2.4. \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 2e^{2t}, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

$$2.5. \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} = 9e^{3t}, \quad x(0) = -1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$



## РОЗДІЛ 11. РЯДИ ФУР'Є

### Розкладання періодичних функцій в ряд Фур'є.

Нехай  $f(x)$  – яка-небудь функція з періодом  $T$ , тобто така, що для всіх значень аргумента  $x$  виконується рівність

$$f(x+T) = f(x).$$

Звідси випливає, що для вивчення функції  $f(x)$  досить розглянути її на будь-якому проміжку довжиною  $T$ . За такий проміжок можна взяти один із двох проміжків  $[0; T]$  або  $[-T/2; T/2]$ . Із геометричного змісту визначеного інтеграла тоді маємо, що для будь-якої періодичної функції  $f(x)$  з періодом  $T$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx,$$

тобто інтеграли від  $f(x)$  по будь-яким двом проміжкам довжини  $T$  рівні для будь-яких значень  $a, b$ .

Якщо функція  $f(x)$  має період  $T$ , то  $\varphi(x) = f(ax)$  має період  $T/a$ . Дійсно,  $\varphi(x + T/a) = f(a(x + T/a)) = f(ax + T) = f(ax) = \varphi(x)$ . Наприклад, функції  $y = \cos n\omega x$  або  $y = \sin n\omega x$  є періодичними з періодами  $T = \frac{2\pi}{n\omega}$ . Загальний період системи тригонометричних функцій

$$1, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots, \cos \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x, \dots$$

дорівнює  $2l$ , тобто  $T = 2l$ .

Складемо тригонометричний ряд

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \end{aligned}$$

Сума  $n$  перших членів ряду представляє  $n$  – у частинну суму і позначається

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \dots + a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

При цьому будь-яка частинна сума цього тригонометричного ряду також періодична з періодом  $T = 2l$ , тобто  $S_n(x + 2l) = S_n(x)$ , тоді  $S_n(x + 2l) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x + 2l) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ , тобто сума ряду  $S(x)$  має період  $2l$ . Звідси випливає доцільність тригонометричних рядів для дослідження періодичних функцій, які описують коливальні процеси.

Допустимо, що тригонометричний ряд рівномірно збігається до функції  $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (11.1)$$

на проміжку довжиною  $2l$ . Тоді його можна інтегрувати почленно в межах від  $-l$  до  $l$ .

Проінтегрувавши ряд почленно, знайдемо

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

При обчисленні цього коефіцієнту скористались тим, що

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad \int_{-l}^l dx = 2l.$$

Множення рівномірно збіжного тригонометричного ряду на обмежені функції  $\cos \frac{n\pi x}{l}$  і  $\sin \frac{n\pi x}{l}$  не впливають на його рівномірну збіжність. Тоді домножимо тригонометричний ряд (11.1) почленно спочатку на  $\cos \frac{n\pi x}{l}$ , а потім на  $\sin \frac{n\pi x}{l}$  і проінтегрувавши його на проміжку  $[-l, l]$ , одержимо формули для коефіцієнтів  $a_n$  і  $b_n$ :

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0,1,2,\dots); \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1,2,\dots) \quad (11.2)$$

При обчисленні цих коефіцієнтів скористались тим, що

$$\int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad \int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad \int_{-l}^l dx = 2l,$$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функція  $f(x)$  при цьому припускається такою, що інтеграли Фур'є (11.2) існують, наприклад – неперервна або обмежена зі скінченним числом розривів на інтервалі-періоді.

Тригонометричний ряд (11.1), коефіцієнти якого визначаються за формулами (11.2), називається рядом Фур'є функції  $f(x)$ , а коефіцієнти  $a_0, a_n, b_n (n=1,2,\dots)$  коефіцієнтами Фур'є функції  $f(x)$ .

Із цього означення ніяк не випливає, що  $f(x)$  завжди розкладається в свій ряд Фур'є, тобто є його сумою, навіть якщо він збігається.

Якщо ряд (11.1) є рядом Фур'є функції  $f(x)$ , то пишуть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Знак відповідності в цій формулі замінюється знаком рівності, якщо функція  $f(x)$  задовольняє умовам теореми про достатню умову розкладання періодичної функції в ряд Фур'є.

Якщо функція  $f(x)$  має період  $2l$ , причому  $f(x)$  і  $f'(x)$  або всюди неперервні, або мають лише скінченне число розривів першого роду на кожному періоді, то ряд Фур'є функції  $f(x)$  збігається для всіх  $x$ , а його сума дорівнює  $f(x)$  в кожній точці неперервності і дорівнює числу  $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$  в кожній точці розриву.

Існують і інші достатні ознаки розкладання періодичних функцій в ряд Фур'є, які тут не наводяться.

Має місце теорема про єдиність ряду Фур'є для функції  $f(x)$ . Якщо функцію  $f(x)$  можна подати на відрізку  $[-l, l]$  у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду, то цей ряд єдиний і є рядом Фур'є для функції  $f(x)$ .

Якщо функція  $f(x)$  парна на відрізку  $[-l, l]$ , то  $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$  також є парною функцією і тоді

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Функція ж  $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$  буде непарною і тоді

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad (n=1,2,\dots).$$

Отже, якщо функція  $f(x)$  парна на відрізку  $[-l, l]$ , то її ряд Фур'є містить тільки косинуси і має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (11.3)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \frac{\cos n\pi}{l} x. \quad (11.4)$$

Аналогічно, якщо  $f(x)$  непарна на відрізку  $[-l, l]$ , то її ряд Фур'є містить тільки синуси і має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (11.5)$$

де

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (11.6)$$

Якщо функція  $f(x)$  задана на відрізку  $[0, l]$ , то для розкладання в ряд Фур'є цю функцію довизначають на відрізку  $[-l, 0]$  довільним чином, а потім розкладають її в ряд Фур'є на відрізку  $[-l, l]$ . Найбільш доцільно довизначати цю функцію так, щоб виконувалась одна із умов:

1)  $f(-x) = f(x)$ . У цьому випадку маємо, що функція  $f(x)$  довизначена парним чином. Для її розкладання в ряд Фур'є користуються формулами (11.3), (11.4). При цьому кажуть, що функція  $f(x)$  розкладена в ряд Фур'є по косинусам.

2)  $f(-x) = -f(x)$ . У цьому випадку маємо, що функція  $f(x)$  довизначена непарним чином. Для її розкладання в ряд Фур'є користуються формулами (11.5), (11.6). При цьому кажуть, що функція  $f(x)$  розкладена в ряд Фур'є по синусам.

Звичайно відрізок  $[0, l]$  можна вважати періодом, але в цьому випадку необхідно обчислювати коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$ , тобто знаходити повний ряд Фур'є. А оскільки поза відрізком  $[0, l]$  поведінка функції нам байдужа, то доцільніше її довизначення на відрізку  $[-l, 0]$ .

Тобто, функцію  $f(x)$ , що задана і диференційовна на  $[0, l]$ , можна нескінченною кількістю способів розкласти в тригонометричний ряд. Тому можливість вибору продовження функції дозволяє, наприклад, побудувати ряд, в якому амплітуди гармонік спадають швидше, або, коефіцієнти якого якнайпростіше обчислюються.

**Приклад 1.** Розкласти в ряд Фур'є функцію з періодом  $2\pi$ , яка визначена таким чином (рис. 11.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\pi \leq x < 0, \quad 2 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{якщо } 0 < x < 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x = 0, \quad x = \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Ця функція задовольняє умовам теореми про розкладання функції в свій ряд Фур'є.

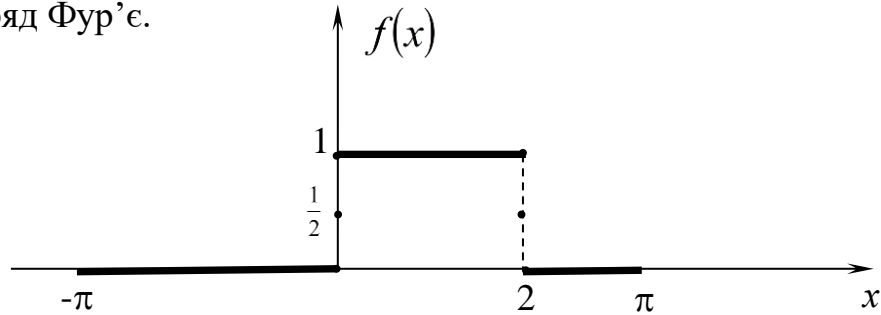


Рисунок 11.1 – Графік функції  $f(x)$  у прикладі 1

Знаходимо коефіцієнти Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^2 1 dx + \int_2^{\pi} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 dx = \frac{1}{\pi} x \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 1 \cdot \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n\pi} \Big|_0^2 = \frac{\sin 2n}{\pi n},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_0^2 = \frac{1 - \cos 2n}{\pi n} = \frac{2 \sin^2 n}{\pi n},$$

тому

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n \cos nx + 2 \sin^2 n \sin x}{n} \right).$$

**Приклад 2.** Розкласти в ряд Фур'є функцію з періодом  $2\pi$ , що визначена рівністю (рис. 11.2)

$$f(x) = |x| \quad \text{при } -\pi \leq x \leq \pi.$$

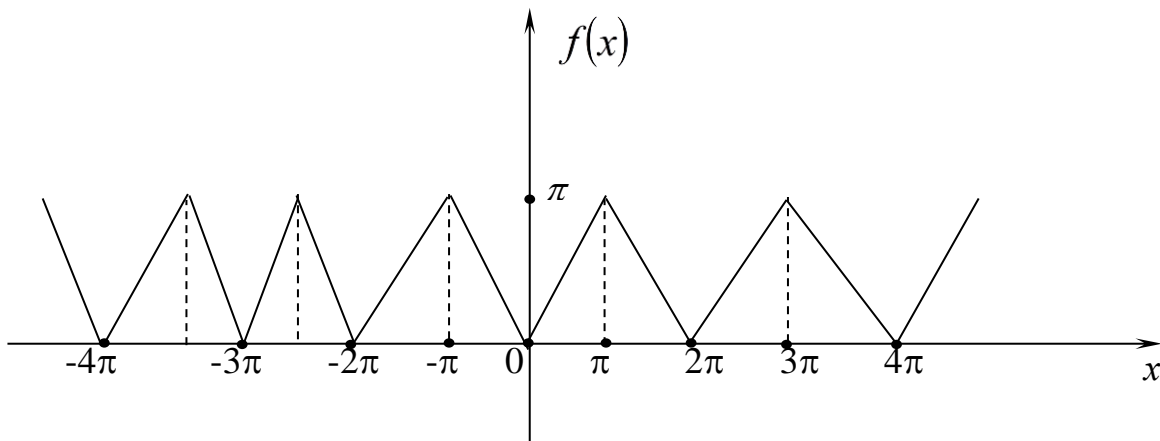


Рисунок 11.2 – Графік функції  $f(x)$  у прикладі 2

*Розв'язання.*

Це неперервна функція, задовольняє умовам теореми про розкладання в ряд Фур'є.

Враховуючи, що функція парна, її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

а оскільки  $l = \pi$ , то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Знаходимо коефіцієнти  $a_0$  та  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \cdot 2 \frac{\cos \pi - 1}{\pi^2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ -\frac{4}{\pi^2}, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Отже,

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}.$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів в ряд Фур'є, отримаємо

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{9 \cos 3x} + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \dots \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом  $2\pi$  функцію  $f(x) = x$ , задану на проміжку  $(-\pi, \pi)$  (рис. 11.3).

*Розв'язання.* Оскільки задана функція в середині проміжка  $(-\pi, \pi)$  неперервна і монотонна, то вона задовольняє умовам розкладання в ряд Фур'є. Функція непарна, тому коефіцієнти  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

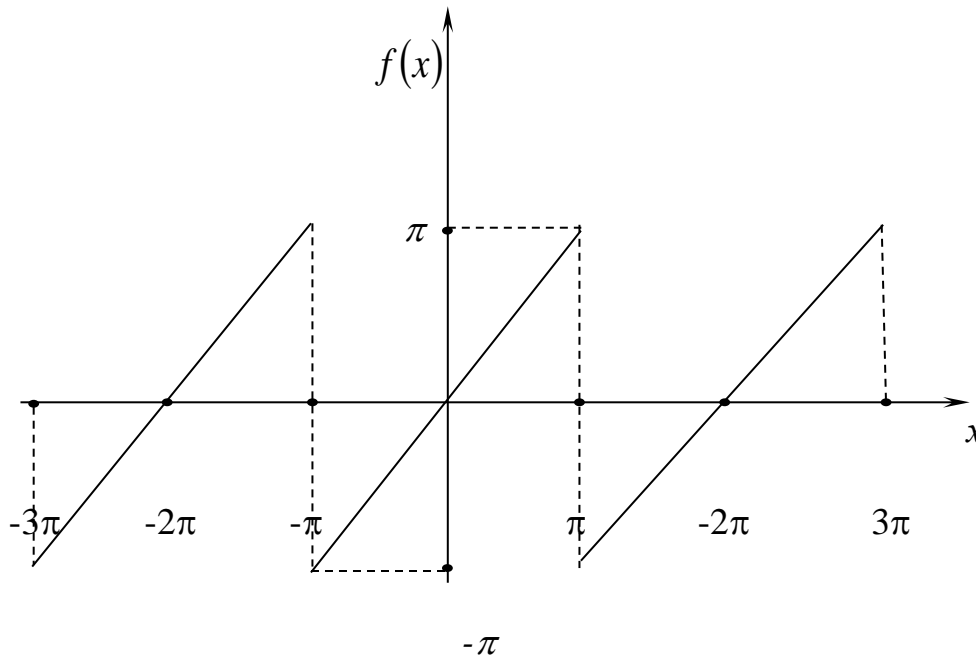


Рисунок 11.3 – Графік функції  $f(x)$  у прикладі 3

Обчислимо коефіцієнти  $b_n$ , поклавши  $l = \pi$ .

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left. \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin nx dx, \quad v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left( x \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1}, \text{ оскільки } \cos n\pi = (-1)^n, \sin n\pi = 0.$$

Отже, на інтервалі  $(-\pi, \pi)$

$$x = 2 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$



Ця рівність має місце лише при  $-\pi < x < \pi$ . В точках  $x = \pm\pi$  сума ряду за теоремою розкладання в ряд Фур'є дорівнює

$$\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0)) = \frac{1}{2}(-\pi+\pi) = 0, \text{ тобто } S(\pi) = S(-\pi) = S(3\pi) = S(-3\pi) = \dots = 0.$$

**Приклад 4.** Розкласти в ряд Фур'є функцію  $f(x)$  з періодом 4; графік функції на інтервалі-періоді  $(-2, 2)$  зображено на рис. 11.4.

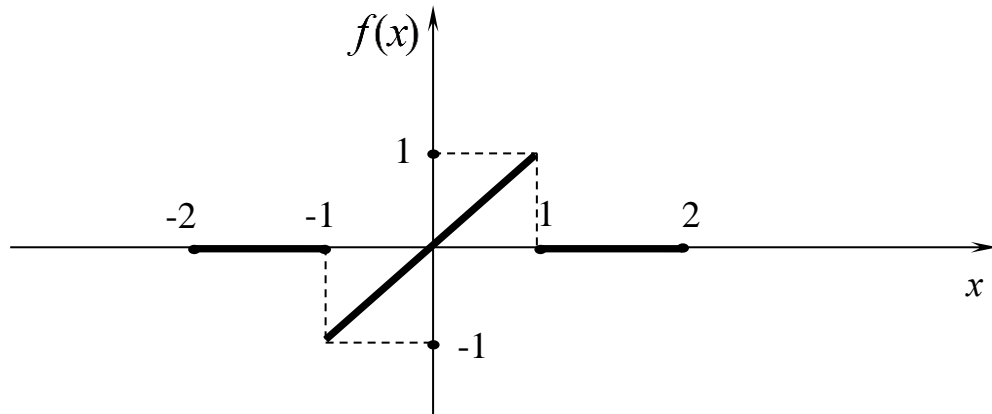


Рисунок 11.4 – Графік функції  $f(x)$  у прикладі 4

*Розв'язання.* Задана функція непарна з періодом  $2l = 4$ , тому  $l = 2$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 0 \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}, & \text{якщо } n = 2k, \\ \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \cdot \frac{4}{\pi^2}, & \text{якщо } n = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Оскільки функція  $f(x)$  задовольняє умовам розкладання в ряд Фур'є, то одержуємо її ряд Фур'є у вигляді

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{\pi} \sin \pi x - \frac{4}{3^2 \pi^2} \sin \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{\pi} \sin 3\pi x + \dots$$

**Приклад 5.** Функцію  $f(x) = 2x$  розкласти в ряд косинусів на відрізку  $[0, 3]$ .

*Розв'язання.* Продовжимо функцію  $f(x) = 2x$  на відрізок  $[0, 3]$  парним чином. Маємо  $l = 3$ . Одержану функцію продовжимо на всю числову вісь з періодом  $T = 2l = 6$  (рис. 11.5).

Підрахуємо коефіцієнти Фур'є. Оскільки одержана функція парна, то  $b_n = 0$ .

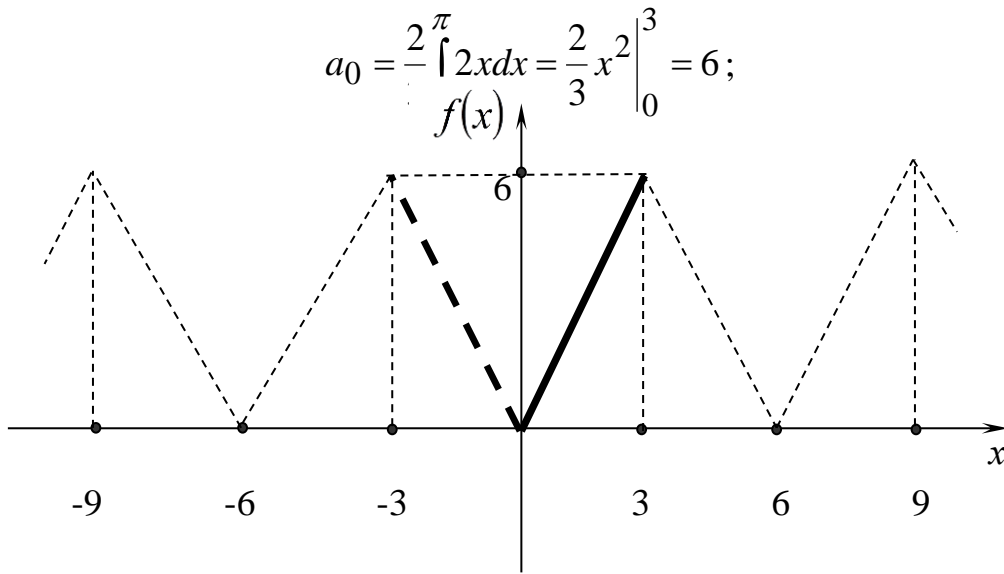


Рисунок 11.5 – Графік функції  $f(x)$  у прикладі 5

$$a_n = \frac{2}{3} \int_0^3 2x \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \left. \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{3} dx, \quad v = \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \end{array} \right| = \frac{3 \cdot 4}{n\pi \cdot 3} \left( x \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right) =$$

$$= \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{12}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{12}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ -\frac{24}{n^2 \pi^2}, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

$$\text{Отже, } a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = -\frac{24}{(2n-1)^2 \pi^2}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{3}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} 2x &= 3 - \frac{24}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{3} + \frac{1}{9^2} \cos \frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{3} + \dots \right) = \\ &= 3 - \frac{24}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}, \end{aligned}$$

Сума ряду збігається до  $2x$  для всіх  $x$ , бо ця функція неперервна всюди.

### Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай функція  $f(x)$  має період  $2\pi$ . Тоді у всіх її точках неперервності виконується рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Скориставшись формулами Ейлера, перепишемо її так

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2} + b_n \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i} \right) = \frac{a_0}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{nxi} + a_n e^{-nxi} - ib_n e^{nxi} + ib_n e^{-nxi}, \end{aligned}$$

тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{nxi} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-nxi} \right).$$

Позначимо

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Тоді одержимо

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{nxi} + c_{-n} e^{-nxi}) \quad (11.7)$$

Частинна сума ряду, що стоїть справа, дорівнює

$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k e^{kxi} + c_{-k} e^{-kxi}) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{kxi} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-kxi} = c_0 e^{0 \cdot xi} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n c_k e^{kxi} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{kxi} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{kxi}.$$

Тому праву частину рівності (11.7) умовно записують

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi}.$$

ї називають комплексною формою ряду Фур'є, а сама рівність (11.7) набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} \quad (11.8)$$

При цьому збіжність ряду Фур'є треба розуміти як існування границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{kxi}.$$

Одержимо остаточні формули для коефіцієнтів  $c_n$ .

1. Нехай  $n = 0$ , тоді

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{0 \cdot xi} dx.$$

2. Нехай  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-nxi} dx.$$

3. Нехай  $n = -1, -2, -3, \dots$ , тоді

$$c_{-1} = \frac{1}{2}(a_1 + ib_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos x + i \sin x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-(-1)xi} dx,$$

аналогічно

$$c_{-2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{2xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-(-2)xi} dx \text{ і т.д.}$$

Це можна записати так

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-nxi} dx, \quad n = -1, -2, -3, \dots$$

Тобто, для всіх  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  коефіцієнти  $c_n$  можна знаходити за однією і тією ж формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-nxi} dx \quad (11.9)$$

Якщо період  $f(x)$  дорівнює  $2l$ , то комплексний ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi xi}{l}}, \quad \text{де } c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{n\pi xj}{l}} dx. \quad (11.10)$$

**Приклад 6.** Розкласти функцію  $f(x) = e^x$  в інтервалі  $(-\pi, \pi)$  в комплексний ряд Фур'є (рис. 11.6)

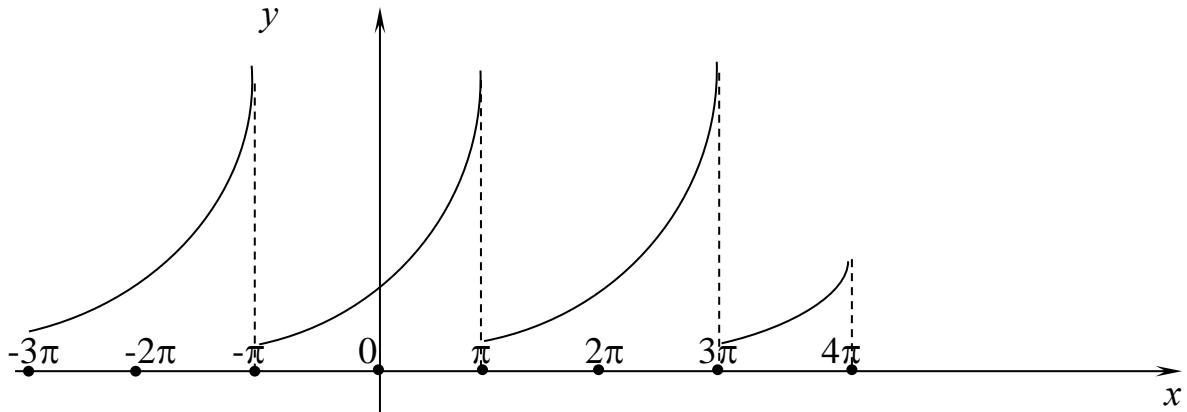


Рисунок 1.6 – Графік функції  $f(x)$  у прикладі 6

Розв'язання. Маємо

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-nxi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ni)x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(1-ni)x}}{1-ni} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(1-ni)\pi} - e^{-(1-ni)\pi}}{1-ni} =$$

$$= \frac{e^{\pi} e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi}}{2\pi(1-ni)} = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-ni)} = (-1)^n \frac{\text{sh}\pi}{\pi} \frac{1+ni}{1+n^2},$$

тут скористались тим, що  $e^{-in\pi} = \cos \pi n - i \sin \pi n = (-1)^n$ ,  $e^{in\pi} = \cos \pi n + i \sin \pi n = (-1)^n$ .

Остаточно

$$e^x = \frac{\text{sh}\pi}{\pi} \left( \dots + \frac{1-2i}{5} e^{-2xi} - \frac{1-i}{2} e^{-xi} + 1 + \frac{1+i}{2} e^{xi} + \frac{1+2i}{5} e^{2xi} + \dots \right) = \frac{\text{sh}\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+ni}{1+n^2} e^{inx}, \text{ де}$$

$$x \in (-\pi, \pi).$$

Сума одержаного ряду  $S(x)$  при  $x = -\pi$ ,  $x = \pi$  дорівнює

$$S(\pm \pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \text{ch}\pi.$$

### Завдання для самостійного розв'язання до розділу 11

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом  $2\pi$  функцію  $f(x)$ , задану на відрізку  $[-\pi, \pi]$ . Навести графіки функцій

$$1. f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$2. f(x) = -2x, \quad -\pi \leq x \leq 0.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{5} - 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5. f(x) = 10 - x, \quad -\pi \leq x \leq 0.$$

2. Розкласти в комплексний ряд Фур'є періодичну функцію  $f(x)$ . Навести графіки функції  $f(x)$ .

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0], \\ e^{-2x}, & x \in (0, \pi], \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

$$2. f(x) = e^{-x}, \quad x \in (-2, 2] \quad T = 4.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-4, 0], \\ 1, & x \in (0, 4], \end{cases} \quad T = 8.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2, 0], \\ -2, & x \in (0, 2], \end{cases} \quad T = 4.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in (-\pi, 0], \\ 0, & x \in (0, \pi], \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

## РОЗДІЛ 12. ДЕЯКІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Рівняння математичної фізики є одним із основних розділів вищої математики, в якому вивчаються диференціальні рівняння з частинними похідними і методи їх розв'язання. На практиці саме такі рівняння є математичними моделями фізико механічних полів.

Диференціальним рівнянням називається таке рівняння, в яке входить не тільки невідома функція, але і її похідні. Основна задача теорії диференціальних рівнянь полягає в знаходженні функцій, які задовольняють заданому диференціальному рівнянню.

Якщо невідома функція залежить від одного аргументу, то рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням. А якщо невідома функція залежить від кількох аргументів і в рівняння входять похідні від неї по декільком аргументах, то таке диференціальне рівняння називається рівнянням з частинними похідними.

Співвідношення

$$F \left( x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) = 0,$$

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_n = n),$$

яке зв'язує незалежні змінні  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , невідому функцію  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  і її частинні похідні, називається диференціальним рівнянням з частинними похідними. Порядок старшої похідної, що входить в рівняння, визначає порядок рівняння. Рівняння першого порядку, наприклад, має вид

$$F \left( x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0.$$

Розв'язком або інтегралом рівняння називається така функція  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка при підстановці в рівняння разом зі своїми частинними похідними, перетворює його в тотожність. Звичайно тут мова йде про загальний розв'язок, із якого можна виділити частинний розв'язок, який одержується при наявності додаткових умов, що приєднується до диференціального рівняння.

Наведемо приклади найпростіших диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому задачі 1–4 можна інтерпретувати як коливання струни або



стрижня, тобто шукана функція  $u(x, t)$  розглядається як відхилення будь-якої точки  $x$  струни або стрижня в довільний момент часу  $t$ .

### Задача 1. Коливання нескінченної струни

Нехай сформульована задача Коші: в області  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t > 0$ , знайти двічі неперервний диференційований розв'язок рівняння  $u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (12.1)$$

який задовольняє початковим умовам

$$u(x, t) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \Psi(x) \quad (12.2)$$

Рівняння (12.1) разом з умовами (12.2) задає коливання нескінченної струни.

### Задача 2. Вільні коливання закріпленої струни

Нехай задана однорідна струна довжиною  $l$ , яку закріплено в точках  $x = 0$  і  $x = l$ . Задача про вільні коливання такої струни формулюється таким чином. Знайти розв'язок  $u(x, t)$  однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

яке задовольняє початковим умовам

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x)$$

і однорідним крайовим умовам

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0.$$

### Задача 3. Вимушені коливання закріпленої струни

Нехай задана однорідна струна довжиною  $l$ , яка закріплена в точках  $x = 0$  і  $x = l$ . Тоді задача про вимушені коливання такої струни може формулюватись так. Знайти розв'язок  $u(x, t)$  неоднорідного рівняння.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t),$$

який задовольняє початковим умовам

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x)$$

і однорідним крайовим умовам

$$u(x, t)|_{x=0} = u(0, t) = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = u(l, t) = 0.$$

### Задача 4. Вимушені коливання струни з рухомими кінцями

Задача про вимушені коливання струни під дією зовнішньої сили, коли кінці струни не закріплені, а рухаються за заданим законом, формулюється таким чином.

Знайти розв'язок  $u(x, t)$  неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t),$$

який задовольняє початковим умовам

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x)$$

і неоднорідним крайовим умовам

$$u(x, t)|_{x=0} = \Psi_1(t), \quad u(x, t)|_{x=l} = \Psi_2(t).$$

### Задача 5. Розподіл температури всередині однорідного стрижня

Нехай маємо однорідний стрижень з теплоізолюваною бічною поверхнею, на лівому кінці якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює 0; правий кінець теплоізолюваний. Початкова температура стрижня задається функцією  $u(x,0) = f(x)$ .

Тоді задачу про розподіл температури  $u(x,t)$  всередині стрижня можна звести до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при крайових умовах

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) + u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(l,t) = 0$$

і початковій умові

$$u(x,0) = f(x).$$

### Задача 6. Розподіл температури всередині однорідної кулі

Нехай маємо однорідну кулю радіуса  $R$ , центр якої розміщений на початку координат. Відомо, що початкова температура будь-якої точки кулі залежить тільки від відстані  $r$  цієї точки від центру кулі. Нехай на зовнішній поверхні кулі підтримується нульова температура. Необхідно визначити температуру  $u(x, y, z, t)$  довільної точки кулі  $(x, y, z)$  в будь-який момент часу  $t$ .

Ця задача зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

де

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

при крайовій умові

$$u(x, y, z, t)|_{\text{на сфері}} = 0$$

і початковій умові

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = f(r).$$

### Задача 7. Рівняння стаціонарних процесів

При дослідженні стаціонарних процесів різної фізичної природи, наприклад, коливання, теплопровідність, дифузія і ін. найчастіше приходять до рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Функції, що задовольняють це рівняння, називаються гармонічними. Будемо розглядати випадок, коли функція  $u$  залежить від двох змінних, тобто  $u = u(x, y)$ . Тоді

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

В залежності від виду крайових умов відрізняють три типи крайових задач для рівняння Лапласа в деякій області  $\Omega$ , межа якої  $\partial\Omega$ .

*Перша крайова задача.*

Знайти розв'язок рівняння Лапласа в середині області  $\Omega$ , якщо в кожній точці межі  $\partial\Omega$  задані значення самої шуканої функції, тобто

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f(x, y). \end{cases}$$

Перша крайова задача для рівняння Лапласа називається задачею Діріхле.

*Друга крайова задача.*

Знайти розв'язок рівняння Лапласа всередині області  $\Omega$ , якщо в кожній точці межі  $\partial\Omega$  задані значення нормальної похідної шуканої функції, тобто

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = f(x, y). \end{cases}$$

Друга крайова задача для рівняння Лапласа називається задачею Неймана.

*Третя крайова задача.*

Знайти розв'язок рівняння Лапласа всередині області  $\Omega$ , якщо в кожній точці межі  $\partial\Omega$  задані значення лінійної комбінації шуканої функції та її нормальної похідної, тобто

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$
$$\left( -h \frac{\partial u}{\partial n} + u \right) \Big|_{\partial\Omega} = f(x, y).$$

Третя крайова задача для рівняння Лапласа називається *мішаною крайовою задачею*.

Зустрічаються ситуації, коли на різних ділянках межі задані крайові умови різних типів. В цьому випадку також маємо справу з мішаною крайовою задачею.

Поставленим задачам можна надати фізичний зміст, якщо функцію  $u(x, y)$  розглядати як температуру. При цьому можна формулювати задачі двох типів. Перший тип задач відноситься до стаціонарного розподілу температури в тонкій однорідній пластинці, яка паралельна площині  $xOy$  і має теплоізолювані нижню і верхню поверхні. Пластинка така тонка, що можна знехтувати змінами температури по її товщині, тоді температура буде функцією тільки  $x$  і  $y$ . Інший тип задач з'являється при вивченні стаціонарного розподілу температури в нескінченному однорідному циліндрі, у якого твірні паралельні осі  $Oz$ , а напрямна лежить в площині  $xOy$ . Тут  $u$  також залишається сталою на будь-якій прямій, що паралельна осі  $Oz$ , отже,  $u = u(x, y)$ .

### **Застосування наближених методів до розв'язання крайових задач математичної фізики**

Наведені задачі математичної фізики 1 – 5 є одновимірними. Часто задачі, які сформульовані для двох або трьох – вимірних об'єктів при деяких припущеннях, що впливають із фізичних особливостей процесу зводяться до одновимірних. Як, наприклад, задача 7, в якій із фізичних міркувань ясно, що в процесі теплообміну, оскільки матеріал кулі однорідний, температура будь-якої точки кулі також буде залежати тільки від відстані цієї точки від центру кулі. Ось до розв'язання таких одновимірних задач найчастіше застосовується метод Фур'є (відокремлення змінних), який полягає в тому, що розв'язок задачі розшукується у вигляді добутку двох функцій, одна із яких залежить тільки від

змінної  $t$ , а друга – від іншої змінної. Тобто, якщо шукана функція  $u(x, y)$ , то  $u(x, t) = X(x)T(t)$  і це дозволяє одержати точний розв'язок задачі.

В окремих випадках можна відокремити змінні і при розв'язанні задач.7

Але на жаль для диференціальних рівнянь з частинними похідними, які необхідно інтегрувати при відповідних початкових і крайових умовах важко, а інколи практично неможливо одержати точний аналітичний розв'язок, тому для їх розв'язання використовуються наближені методи. В багатьох випадках задачу інтегрування диференціального рівняння можна замінити рівносильною варіаційною, тобто задачею, яка полягає в знаходженні функції, яка надає деякому функціоналу (інтегралу) екстремальне значення. Методи, які зводять задачу розв'язання диференціального рівняння до рівносильної варіаційної проблеми, називають варіаційними. Питання пов'язанні з побудовою функціоналів, що відповідають конкретному диференціальному рівнянню, детально описані в літературі [14].

Наведемо приклади функціоналів для деяких задач.

#### **Задача Діріхле для рівняння Пуассона.**

Математично задача Діріхле зводиться до розв'язання рівняння

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

при крайовій умові

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

У варіаційній постановці задача Діріхле зводиться до знаходження функції, яка реалізує мінімум функціонала такого виду:

$$F(u) = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2(fu) \right] d\Omega$$

або

$$F(u) = \iint_{\Omega} \left[ (\vec{\Delta}u)^2 - 2(fu) \right] d\Omega, \quad (12.3)$$

де

$$\vec{\Delta}u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}.$$

До розв'язання рівняння Пуассона  $\Delta u = -2$  зводяться задачі про скрут стрижнів, поперечний переріз яких співпадає з областю  $\Omega$ . Рівняння Пуассона описує, наприклад, стаціонарний тепловий процес з внутрішніми джерелами та інші процеси.

**Задача Неймана для рівняння Пуассона.**

Математична постановка цієї задачі така.

Знайти розв'язок всередині області  $\Omega$  рівняння

$$-\Delta u = f(x, y)$$

при крайових умовах

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (12.4)$$

У випадку теплових задач крайова умова (12.4) відповідає теплоізоляції межі  $\partial\Omega$ , тобто на межі тепловий потік дорівнює нулю.

Як і в задачі Діріхле, функція, яка реалізує мінімум функціонала (12.3), є розв'язком задачі Неймана для рівняння Пуассона.

**Мішана задача для рівняння Пуассона.**

Інтегрування рівняння Пуассона (12.23) при мішаних крайових умовах

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

де  $n$  – зовнішня нормаль до межі області  $\sigma(x, y)$  – додатна функція, зводиться до варіаційної задачі про знаходження мінімуму функціонала такого виду

$$F(u) = \iint_{\Omega} \left[ (\vec{\nabla} u)^2 - 2fu \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma u^2 ds.$$

**Метод Рітца.**

Для знаходження функції, яка надає значення функціонала  $F(u)$ , що близьке до мінімального, Рітц запропонував такий метод.

Розглянемо його на прикладі розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

Згідно методу Рітца шукана функція представляється у вигляді лінійної комбінації





$$(f, u_i) = \iint_{\Omega} f u_i d\Omega.$$

Із лінійної системи (12.6), яка називається системою Рітца, визначаються коефіцієнти  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Функція  $u(x, y)$  з коефіцієнтами, що визначені із системи (12.6), є наближеним розв'язком задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Точність наближення залежить від вибору координатних функцій і їх кількості. І оскільки координатні функції лінійно незалежні, то визначник системи (12.6) не дорівнює нулю і ця система має розв'язок і при цьому єдиний.

### *Структура розв'язку крайової задачі.*

Структурою розв'язку крайової задачі є множина функцій  $u = B(\Phi, \omega, \omega_i)$ , які задовольняють крайовим умовам при будь-якому виборі функції  $\Phi$ , що достатню кількість раз диференційована і носить назву невизначеної компоненти структури розв'язку. Функції  $\omega(x, y) = 0$ ,  $\omega_i(x, y) = 0$  є рівнянням межі області або окремої її ділянки.

Так, наприклад, для задачі Діріхле у випадку однорідних крайових умов

$$u(x, y) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (12.7)$$

структура розв'язку має вид:

$$u = \omega\Phi, \quad (12.8)$$

де  $\omega(x, y) = 0$  – рівняння межі  $\partial\Omega$ . Напевно, яка б не була двічі диференційована функція  $\Phi(x, y)$ , функції із множини (12.8) будуть задовольняти умовам (12.7).

У випадку неоднорідної задачі Діріхле, тобто коли

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y),$$

де функція  $\varphi(x, y)$  визначена всюди в  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , структуру розв'язку можна представити у вигляді

$$u_1(x, y) = \omega(x, y)\Phi(x, y); u_0(x, y) = \varphi(x, y)$$

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_0(x, y) = \omega\Phi + \varphi,$$

В багатьох випадках інформація про функцію  $\varphi$  задається різними формулами на різних ділянках межі  $\partial\Omega$ . Нехай, наприклад,

$$\varphi = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (12.9)$$

де  $\varphi_i$  - функції, що визначені в  $\Omega \cup \partial\Omega$ .

Припустимо, що  $\omega_i = 0$  є рівняння ділянок  $\partial\Omega_i$  і  $\omega_i > 0$  поза  $\partial\Omega_i$ . Легко впевнитись, що функція

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i}{\omega_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i}} \quad (12.10)$$

задовольняє умовам (12.9). Формула (12.10) називається формулою „склейки”.

Наприклад, побудуємо функцію  $u_0$ , що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} u_0|_{\partial\Omega_1} &= 0, \quad \partial\Omega_1 : \omega_1 = 4 - x^2 - y^2 = 0, \\ u_0|_{\partial\Omega_2} &= \frac{3(3-2x)}{2}, \quad \partial\Omega_2 : \omega_2 = 4 - (x-3)^2 - y^2 = 0, \\ u_0|_{\partial\Omega_3} &= \frac{3(3+2x)}{2}, \quad \partial\Omega_3 : \omega_3 = 4 - (x+3)^2 - y^2 = 0, \\ u_0 &= \frac{\frac{0}{\omega_1} + \frac{3(3-2x)}{2\omega_2} + \frac{3(3+2x)}{2\omega_3}}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3}} = \\ &= \frac{3(3-2x) \cdot \omega_1 \cdot \omega_3 + (3+2x) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{2(\omega_1 \cdot \omega_2 + \omega_1 \cdot \omega_3 + \omega_2 \cdot \omega_3)}. \end{aligned}$$

Для побудови структури розв'язку необхідно вміти будувати функції  $\omega(x, y)$  або  $\omega_i(x, y)$ , що задовольняють умовам:

$$\omega(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, \quad \omega_i(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega_i,$$

$$\omega(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

**Завдання для самостійного розв'язання до розділу 12**

1. Впевнитись, що функція  $u = u(x, y)$  є розв'язком рівняння Лапласа і виписати крайові умови, яким вона задовольняє для області  $\Omega : \{|x| \leq 1; |y| \leq 1\}$ .

1.  $u(x, y) = 5x^2 - 5y^2$ .

2.  $u(x, y) = 2xy^3 - 2x^3y$ .

3.  $u(x, y) = 10x^2y^3 - 5x^4y - y^5$ .

4.  $u(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ .

5.  $u(x, y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$ .

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: посібник для самостійного вивчення курсу: Посібник/ В.Г. Гула, М.С. Синєкоп, Н.Я. Голубєва та ін.; За редакцією проф. М.С. Синєкопа; Харківський державний університет харчування та торгівлі. – Харків, 2007. – 303с.
2. Вища математика: Підручник. У 2 кн.-2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003.-Кн. 2. Спеціальні розділи/ Г.Л. Кулініч, Є.Ю. Таран, В.М. Бурим та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – 268с.
3. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. ч. 2/за ред. проф. І.П. Васильченка, – К.: Либідь, 2003.
4. Терентьев В.Н. Лекции по высшей математике. Интегральное исчисление: Учеб. Пособие для механических и технологических специальностей пищевых производств/ Харьков, ин-т общественного питания. – Харьков, 1992. – 167 с.
5. Вища математика. Розділи: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Функції багатьох змінних: метод. вказ. для самост. роботи та виконання інд. домашніх завдань студ. денної форми навчання за спец. 131 "Прикладна механіка", 142 "Енергетичне машинобудування" / уклад. М.С. Софронова; Харк. держ. ун-т харч. та торгівлі. – Харків: ХДУХТ, 2017. – 48с.
6. Диференціальне та інтегральне числення функцій комплексного змінного: Методичні вказівки / Ільющко В.М., Золочевська Л.О., ХДУХТ – Харків, 2006р.
7. Вища математика: методичні вказівки та індивідуальні контрольні завдання для самостійної роботи студентів заочної форми навчання спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування» / уклад. М.С. Софронова; Харківський дер. ун-т харчування та торгівлі – Х. : ХДУХТ, 2016. – 75 с.
8. Ряди аналітичних функцій: Методичні вказівки/ Ільющко В.М., Золочевська Л.О., ХДУХТ – Харків, 2006р.
9. Операційне числення: Методичні вказівки / Ільющко В.М., Золочевська Л.О., ХДУХТ – Харків, 2007р.
10. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли: Методичні вказівки/ Кравченко Л.К., Синєкоп М.С., Торяник Д.О.: ХДУХТ – Харків, 2006.
11. Вища математика: метод вказівки та тестові завд. для сам. роб. студ. Модуль №5: "Кратні інтеграли", "Криволінійні інтеграли". Напр. підгот.: 6.050502 "Інженерна механіка" / уклад.: Л.К. Кравченко, О.Г. Соколовська, Д.О.Торяник; Харк. держ. ун-т харчування та торгівлі. – Харків: ХДУХТ, 2009. – 65 с.
12. Диференціальне числення функцій кількох змінних: Методичні вказівки/ Кравченко Л.К., Торяник Д.О.: ХДУХТ, Харків – 2004р.

**13.** Наближенні методи розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних: Методичні вказівки/ Кравченко Л.К., Півненко А.О., Синєкоп М.С., ХДУХТ – Харків, 2004.

**14.** Вариационные методы в математической физике./ Михлин С.Г. – М.: Наука, 1990. – 512с.

## ЗМІСТ

<i>Передмова</i> .....	3
<b>РОЗДІЛ 1. Подвійні інтеграли</b>	5
Означення подвійного інтеграла та його обчислення в прямокутній системі координат. Заміна змінних в подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат. Застосування подвійних інтегралів в геометрії. Застосування подвійних інтегралів в механіці та фізиці	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 1</i>	26
<b>РОЗДІЛ 2. Потрійні інтеграли</b>	28
Означення потрійного інтеграла та його обчислення в прямокутній системі координат. Потрійний інтеграл в циліндричних і сферичних системах координат. Геометричні, механічні і фізичні застосування потрійних інтегралів	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 2</i>	51
<b>РОЗДІЛ 3. Криволінійні інтеграли. Криволінійні інтеграли по довжині дуги (першого роду)</b>	53
Означення криволінійного інтеграла по довжині дуги. Обчислення криволінійного інтеграла по довжині дуги. Застосування криволінійних інтегралів по довжині дуги	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 3</i>	65
<b>РОЗДІЛ 4. Криволінійні інтеграли по координатах (другого роду)</b>	67
Означення криволінійного інтеграла по координатах. Обчислення криволінійних інтегралів по координатах. Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування. Знаходження функції за її повним диференціалом. Застосування криволінійних інтегралів по координатах	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 4</i>	84
<b>РОЗДІЛ 5. Поверхневі інтеграли по площі поверхні (першого роду)</b>	86
Означення поверхневого інтеграла по площі поверхні. Обчислення поверхневих інтегралів по площі поверхні. Застосування поверхневих інтегралів по площі поверхні	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 5</i>	94
<b>РОЗДІЛ 6. Поверхневі інтеграли по координатах (другого роду)</b>	96
Означення поверхневого інтеграла по координатах. Обчислення поверхневого інтеграла по координатах. Формула Гаусса-Остроградського. Формула Стокса. Застосування поверхневих інтегралів по координатах	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 6</i>	111

<b>РОЗДІЛ 7. Елементи теорії поля</b>	<b>113</b>
Скалярне поле. Векторне поле	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 7</i>	<b>131</b>
<b>РОЗДІЛ 8. Функції комплексної змінної</b>	<b>134</b>
Комплексні числа. Алгебраїчна форма комплексного числа. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Добування кореня із комплексного числа. Послідовності комплексних чисел та їх границі. Деякі множини точок на комплексній площині. Загальні означення і геометрична інтерпретація функцій комплексної змінної. Основні елементарні функції комплексної змінної. Границя та неперервність функції комплексної змінної. Використання комплексних чисел для розв'язання задач електротехніки	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 8</i>	<b>162</b>
<b>РОЗДІЛ 9. Аналітичні функції</b>	<b>164</b>
Похідна та диференціал функції комплексної змінної. Диференціювання функції комплексної змінної та умови Коші-Рімана. Геометричний зміст модуля та аргумента похідної. Інтегрування функції комплексної змінної. Означення та основні властивості інтеграла. Теорема Коші. Невизначений інтеграл від функції комплексної змінної. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші та похідні аналітичної функції. Ряди аналітичних функцій. Рівномірна збіжність функціональних рядів. Степеневі ряди. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Нулі аналітичних функцій. Ізольовані особливі точки та їх кваліфікація. Зв'язок між характером ізольованої особливої точки аналітичної функції та виглядом її ряду Лорана в околі цієї точки. Лишки аналітичних функцій. Лишок функції у нескінченно віддаленій точці. Основна теорема про лишки. Обчислення деяких типів інтегралів за допомогою лишків	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 9</i>	<b>220</b>
<b>РОЗДІЛ 10. Операційне числення</b>	<b>223</b>
Початкова функція та її зображення. Зображення функцій $\sigma_0(t)$ , $\sin t$ , $\cos t$ . Зображення функцій із змінним масштабом незалежної змінної. Теорема зміщення. Диференціювання зображення. Зображення похідних. Теорема згортання. Таблиця деяких зображень. Допоміжне (зображуюче) рівняння для даного диференціального рівняння. Зображення найпростіших дробів. Приклади розв'язання диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь операційним методом. Диференціальні рівняння механічних коливань. Диференціальні рівняння теорії електричних ланцюгів. Розв'язання диференціального рівняння коливань	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 10</i>	<b>247</b>

<b>РОЗДІЛ 11. Ряди Фур'є</b>	<b>249</b>
Розкладання періодичних функцій в ряд Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 11</i>	<b>262</b>
<b>РОЗДІЛ 12. Деякі рівняння математичної фізики</b>	<b>264</b>
Коливання нескінченної струни. Вільні коливання закріпленої струни. Вимушені коливання закріпленої струни. Вимушені коливання струни з рухомими кінцями. Розподіл температури всередині однорідного стрижня. Розподіл температури всередині однорідної кулі. Рівняння стаціонарних процесів. Застосування наближених методів до розв'язання крайових задач математичної фізики. Метод Рітца. Структура розв'язку крайової задачі	
<i>Завдання для самостійного розв'язання до розділу 12</i>	<b>275</b>
Список рекомендованої літератури	<b>276</b>



Навчальне електронне видання  
комбінованого використання  
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

ТОРЯНИК Дмитро Олександрович  
СОФРОНОВА Марина Сергіївна

## **ВИЩА МАТЕМАТИКА**

### **Деякі розділи математичного аналізу**

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск зав. кафедри енергетичного машинобудування,  
інженерних та фізико-математичних дисциплін д-р техн. наук, проф. В.О. Потапов

Видано в авторській редакції

План 2021 р., поз. 32

---

Підп. до друку 11.05.2021 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об'єм даних 8,3 Мб. Тираж 20 прим.

---

Видавець і виготівник  
Харківський державний університет харчування та торгівлі  
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.