

## ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ МЕХАНІЗМУ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ МОСТОВОГО КРАНУ З УРАХУВАННЯМ АЕРОДИНАМІЧНОГО ОПОРУ ПОВІТРЯ

Ловейкін В.С., д.т.н., Човнюк Ю.В., к.т.н., Ромасевич Ю.О., к.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

*Динамічний аналіз поведінки механізму переміщення вантажу мостового крану проведений у межах моделі двоточкового математичного маятника з рухомою точкою підвісу, коливання котрого відбуваються у потоці повітря. Отримані основні кінематичні характеристики та оцінка затухання коливань вантажу на гнучкому підвісі (канаті). Побудовано тривимірні фазові портрети вказаних коливань*

**Постановка проблеми.** Транспортування вантажів за допомогою мостових кранів зазвичай супроводжується коливаннями, які мають складний характер. Систему двох тіл - „вантажний візок (мостового крану) – вантаж на гнучкому підвісі (канаті)” – можна подати, як математичний маятник (ММ), де вантажний візок є несучим тілом, а вантаж на канаті несеним тілом. Дану систему буде відрізняти велике розмаїття фізичних явищ, характерних для ММ, у котрого точка підвісу може переміщуватись у горизонтальному напрямку рівномірно (з постійною швидкістю) чи з різними прискореннями. Коливання вантажу на канаті при цьому можна подати, як результат складання повздовжніх, поперечних та крутих коливань. На різних етапах руху системи переважають ті чи інші типи коливань. Так на початку руху й русі вантажного візка мостового крану до моменту досягнення останнім певної усталеної швидкості горизонтального руху переважають повздовжні коливання вантажу, які супроводжуються поперечними коливаннями у горизонтальній площині. Насправді досить важко виділити й впевнено визначити якійсь один тип коливань. Коливання вантажу на канаті перш за все залежать від довжини підвісу, котра визначає близькість вантажу до вантажного візка, навколо якого при русі виникає неоднорідний повітряний потік. Тип коливань та їх амплітуда суттєво залежать також від аеродинамічної конфігурації вантажу на його стабілізації. На характер коливань справляють вплив: швидкість, напрямок та тривалість поривів вітру (при функціонуванні мостових кранів у морських портах, на відкритих для повітряних потоків майданчиках (аеропорти) тощо). Від оператора мостового крану, який керує його роботою, залежить траєкторія руху точки підвісу маятника, а, значить, і кінематичні характеристики коливань, які можуть виникати у таких системах. Як правило, останні негативно впливають на функціонування мостового крану у цілому і тому бажано їх позбутись чи суттєво зменшити амплітуду (розмах) таких коливань. Для цього необхідно детально вивчити динаміку поведінки механізму переміщення вантажу мостового крану з урахуванням аеродинамічного опору

повітря у межах, наприклад, моделі двоточкового математичного маятника з рухомою точкою підвісу.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** У роботах [1, 3] проведений аналіз коливань двоточкового математичного маятника з рухомою точкою підвісу. Аеродинамічний опір коливань вантажів на гнучких підвісах (канатах) розрахований у межах моделей, розвинутих у [2]. Автори [4] провели оцінку затухань коливань вантажу при горизонтальному польоті гелікоптера з постійною швидкістю. Проте авторам даного дослідження не відомі публікації, які б були присвячені динамічному аналізу поведінки механізму переміщення вантажу мостового крану з урахуванням аеродинамічного опору повітря.

**Постановка мети та задач дослідження.** Мета даної роботи полягає у встановленні основних закономірностей поведінки та кінематичних характеристик руху механізму переміщення вантажу мостового крану („вантажний візок – вантаж на канаті”) у межах моделі двоточкового математичного маятника з рухомою точкою підвісу за наявності аеродинамічного опору повітря. Для досягнення мети дослідження використані підходи й моделі, викладені у роботах [3, 4].

### Виклад основного матеріалу.

#### 1. Рівняння руху для моделі двоточкового математичного маятника.

Розглянемо рух системи „вантажний візок – вантаж на гнучкому підвісі/канаті” (мостового крану) у межах моделі двоточкового математичного маятника з рухомою точкою підвісу, яка зображена на рис. 1 [3].

На рис. 1. введено позначення:  $m_1$  – приведена до поступального руху маса вантажного візка і приводного механізму;  $m_2$  – маса вантажу із захватним пристроєм;  $x_1$ ,  $x_2$  – координати центрів мас відповідно візка та вантажу;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $l$  – довжина гнучкого підвісу вантажу;  $F$  – сумарне тягове або гальмівне зусилля, що діє на візок;  $W$  – сила опору переміщенню візка.

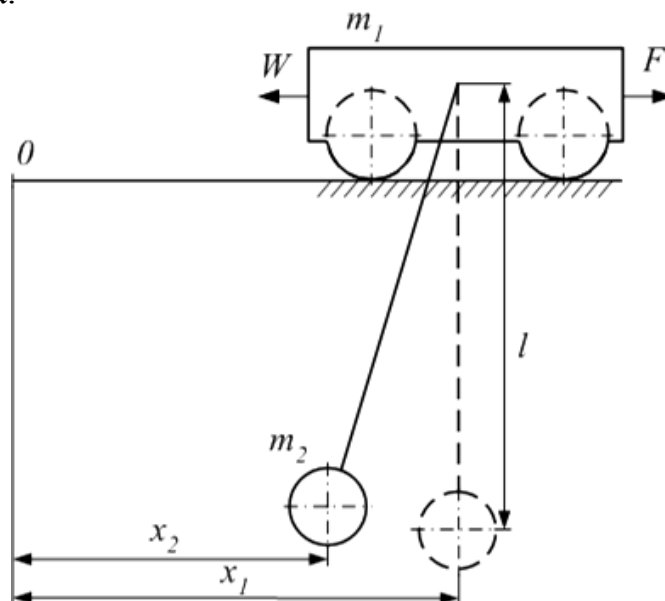


Рис. 1 – Розрахункова схема задачі (плоский доточковий маятник з рухомою точкою підвісу)

Вважаємо, що плоский маятник масою  $m_2$  (вантаж), точка підвісу котрого (масою  $m_1$  у ній – масою вантажного візка мостового крану) може здійснювати рух вповодж горизонтальної прямої. Вводячи координату  $x(t)$  точки  $m_1$  та кут  $\varphi(t)$  між канатом маятника й вертикаллю, легко отримати [3] функцію Лагранжа ( $L$ ) для рухомого плоского маятника (аеродинамічний опір повітря не враховується).

Функція  $L$  має вигляд:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 gl \cos\varphi, \quad (1)$$

де:  $\dot{(\ )} \equiv \frac{d}{dt}(\ )$ ,  $\vec{g} = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Закон руху точки підвісу  $x(t)$  задається зовнішніми вимушеними силами, прикладеними до вантажного візка мостового крану (зокрема, рушійна сила двигуна, сили реакції опору мосту крана, сили тертя тощо). У даному дослідженні вважаємо закон  $x(t)$  заданим (у найбільш загальному випадку  $\dot{x}(t) \neq 0$ ,  $\ddot{x}(t) \neq 0$ ). Рівняння Лагранжа, які встановлюють взаємний вплив законів  $x(t)$  й  $\varphi(t)$  один на одного, мають вид:

$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi + \ddot{x} \cos \varphi = 0; \\ (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l (\dot{\varphi})^2 \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (2)$$

У функції Лагранжа (1) координата  $x(t)$  - циклічна. Тому зберігається узагальнений імпульс  $P_x$ , який співпадає з горизонтальною компонентою повного імпульсу системи:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const}. \quad (3)$$

Завжди можна вважати систему, як цілу, такою, що знаходиться у відносному спокої, тоді  $\text{const} = 0$ , інтегрування рівняння (3) дає співвідношення:

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \dot{\varphi} \sin \varphi = \text{const}_1, \quad (4)$$

що представляє собою нерухомість центру інерції системи у горизонтальному напрямку. Якщо  $\dot{x} = v = \text{const}$ , а при  $t = 0$ :  $\varphi = 0$ ;  $x = 0$ , тоді  $\text{const}_1 = 0$  й з (4) отримаємо:

$$(m_1 + m_2)vt + m_2 l \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Звідси можна легко встановити  $\varphi(t)$  – закон зміни у часі узагальненої координати руху системи  $\varphi$ :

$$\varphi = (-1)^{k+1} \arcsin \left\{ \frac{(m_1 + m_2)vt}{m_2 l} \right\} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

причому необхідність виконання початкових умов (при  $t = 0$ ) призводить до існування інтервалу часу, на якому справедливий розв'язок (6):

$$\begin{cases} k = 0; \quad \varphi = -\arcsin\left\{\frac{(m_1 + m_2)vt}{m_2 l}\right\}; \quad t \in [0, t^*]; \\ t^* = \frac{m_2 l}{(m_1 + m_2)v}. \end{cases} \quad (7)$$

Період коливань системи  $T$  знаходимо з наступних міркувань. Використовуючи (3), отримаємо енергію системи у виді [3]:

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \varphi\right) - m_2 g l \cos \varphi. \quad (8)$$

Звідси:

$$T = 4l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \varphi}{m_2 g l \cos \varphi + E}} d\varphi. \quad (9)$$

Виражаючи координати маси вантажу  $m_2$  ( $x_2 = x + l \sin \varphi$  та  $y_2 = l \cos \varphi$ ) за допомогою (4) через  $\varphi$ :

$$x_2 = l \sin \varphi - \frac{m_2 l \sin \varphi}{m_1 + m_2}, \quad y_2 = l \cos \varphi, \quad (10)$$

знайдемо, що траєкторія руху маси  $m_2$  представляє собою відрізок еліпсу з горизонтальною напіввіссю  $\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$  та вертикальною  $l$ . При  $m_1 \rightarrow \infty$  ми повертаємось до звичайного математичного маятника, який хитається вповодж дуги кола (рис. 2).

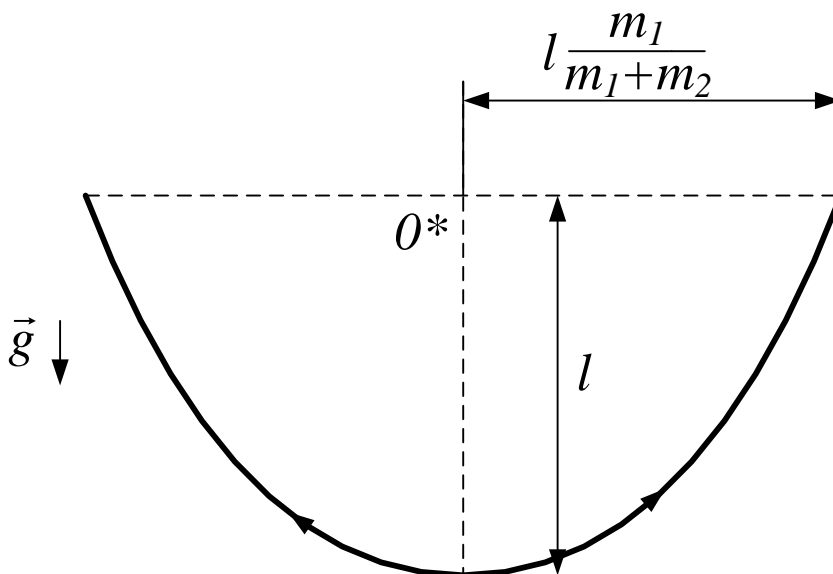


Рис. 2 – Траєкторія руху вантажу  $m_2$  ( $O^*$  - миттєве положення точки підвісу маятника)

Подамо систему (2) у такому вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \Omega^2 \sin \varphi + \frac{\ddot{x}}{l} \cos \varphi = 0; & \Omega^2 = \frac{g}{l}; \\ \ddot{x} + \frac{m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 l (\dot{\varphi})^2 \sin \varphi}{m_1 + m_2} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

## 2. Уточнена математична модель руху системи „вантажний візок – вантаж на канаті” (для мостового крану)

Використовуючи підхід робіт [2, 4], можна систему рівнянь (11) подати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} B_1 \dot{\varphi} + \Omega^2 \sin \varphi + \frac{\ddot{x}}{l} \cos \varphi = \frac{1}{2} B_1 \frac{\dot{x}}{l}; \\ \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} B_1 \dot{\alpha} + \Omega^2 \sin \alpha = 0; \\ \ddot{x} + \frac{m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 l (\dot{\varphi})^2 \sin \varphi}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2} \frac{(B_{вант} + B_{нідвіски})}{m_1 + m_2} \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

де:  $\alpha$  - кут відхилення вантажу від вертикалі у площині, яка перпендикулярна

до вісі  $Ox$  (поперечний переріз),  $B_1 = \frac{B}{m_2} \bar{V}$ ;  $\bar{V} = [(\dot{x} - l\dot{\varphi})^2 + l^2 \dot{\alpha}^2]^{\frac{1}{2}}$ ;

$B$  - коефіцієнт аеродинамічного (в'язкого за своєю сутністю) опору;

$B_{вант} = C_x \rho S_{mid}^{(вант)}$ ;  $C_x = 0,12$ ;

$\rho = 1 \text{ кг/м}^3$  (щільність повітря);

$S_{mid}^{(вант)}$  - найбільша площа (мідель) поперечного перерізу вантажу,  $\text{м}^2$ ;

$B_{нідвіски} = C_x \rho S_{mid}^{(нідвіски)}$ ;

$S_{mid}^{(нідвіски)}$  - найбільша площа (мідель) поперечного перерізу вантажного візка,  $\text{м}^2$ .

Враховуючи ту обставину, що маси вантажного візка ( $m_1$ ) й вантажу на канаті ( $m_2$ ) різні, подамо сили й прискорення, пов'язані з аеродинамічним опором повітря у середньовиваженій формі:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + 0,5 B_\varphi \dot{\varphi} + \Omega^2 \sin \varphi + \frac{\ddot{x}}{l} \cos \varphi = 0,5 B_\varphi \frac{\dot{x}}{l}; \\ \ddot{\alpha} + 0,5 B_\alpha \dot{\alpha} + \Omega^2 \sin \alpha = 0; \\ \ddot{x} + \frac{m_2 l \cos \varphi}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} - \frac{m_2 l \sin \varphi}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}^2 + 0,5 \frac{(m_1 B_1 + m_2 B_\varphi)}{m_1 + m_2} \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

де:  $\varphi$  - кут коливань у повздовжній площині (площині руху);  
 $\alpha$  - кут коливань у поперечній (перпендикулярній до площини руху) площині;

$$B_{\alpha} = \frac{C_x^{(2)} \rho S_{mid}^{(2)} \bar{V}}{m_2}; B_{\alpha} = B_{\varphi}; C_x^{(2)} = 0,12;$$

$S_{mid}^{(2)}$  - максимальний поперечний переріз вантажу ( $m_2$ ), м<sup>2</sup>;

$$B_1 = \frac{C_x^{(2)} \rho S_{mid}^{(1)} \bar{V}}{m_1};$$

$S_{mid}^{(1)}$  - максимальний поперечний переріз вантажного візка ( $m_1$ ), м<sup>2</sup>.

Розв'язок нелінійної системи диференціальних рівнянь (13) був здійснений на ПЕОМ. Кінематичні характеристики руху  $x(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\alpha(t)$  та тривимірні фазові портрети руху системи  $\{(x; \dot{x}; \ddot{x}); (\varphi; \dot{\varphi}; \ddot{\varphi}); (\alpha; \dot{\alpha}; \ddot{\alpha})\}$  наведені нижче (рис. 3-8).

Для визначення траєкторії руху системи (вантаж  $m_2$  на рухомій підвісці  $m_1$ ) у площині, яка перпендикулярна одночасно до вісі  $Ox$  (повздовжня вісь руху) та до площини, у якій відбувається коливання за кутом  $\alpha$ , необхідно знайдені закони руху  $x(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\alpha(t)$  з (13) підставити у вираз:

$$Y(t) = x(t) + \sqrt{(l\varphi(t))^2 + (l\alpha(t))^2}. \quad (14)$$

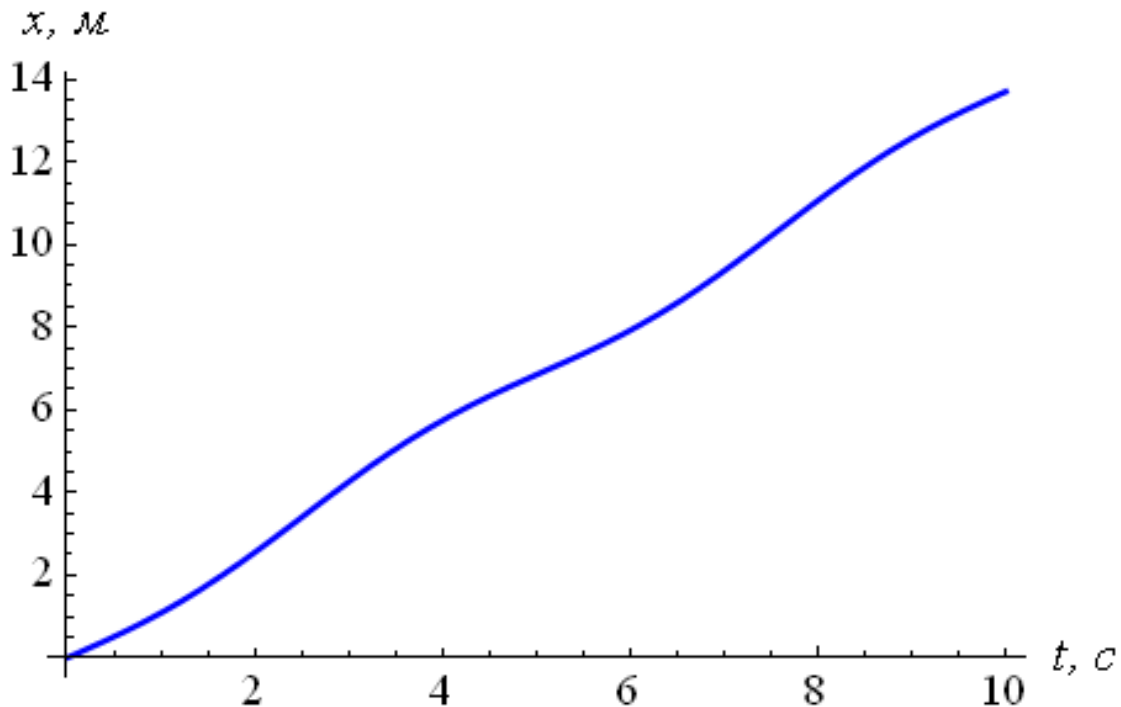


Рис. 3 – Переміщення кранового візка

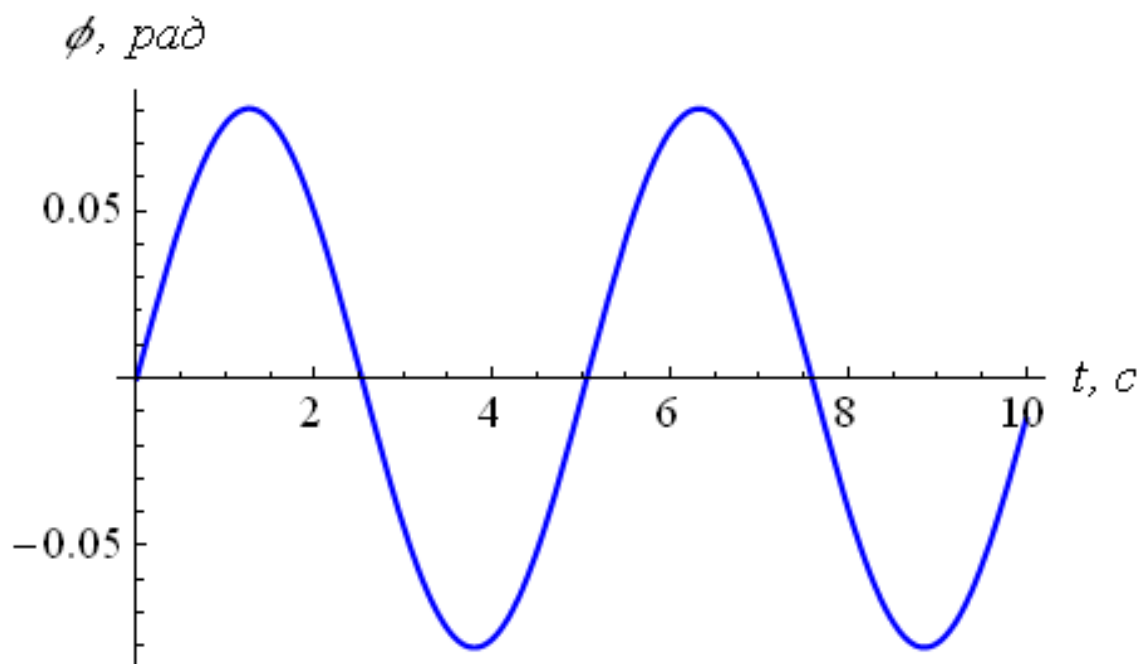


Рис. 4 – Кутова координата руху вантажу у площині руху візка

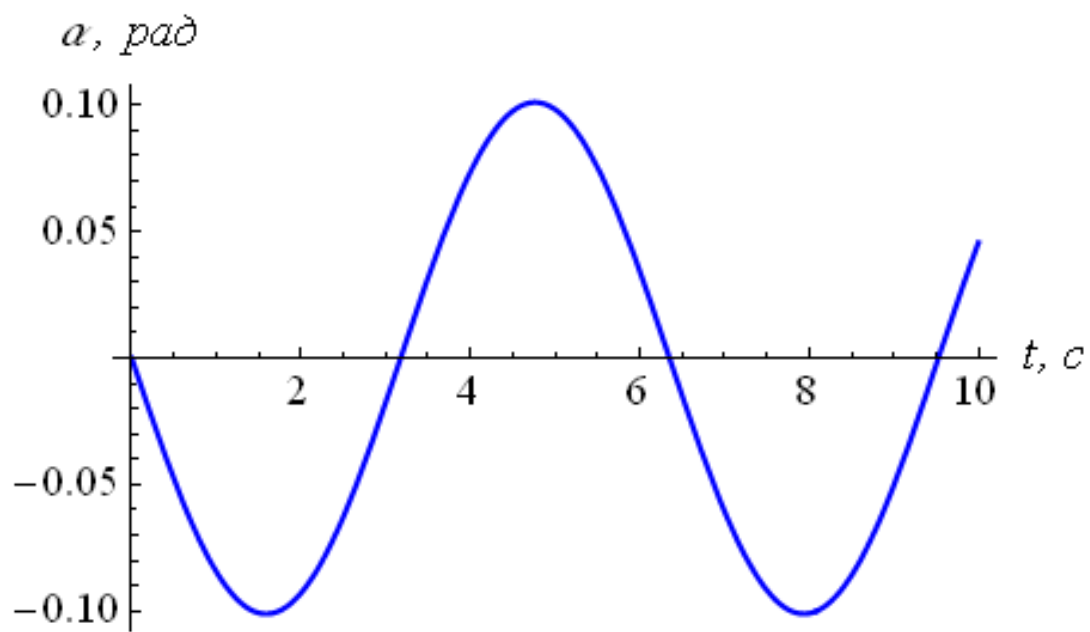


Рис. 5 – Кутова координата руху вантажу у площині перпендикулярній площині руху візка

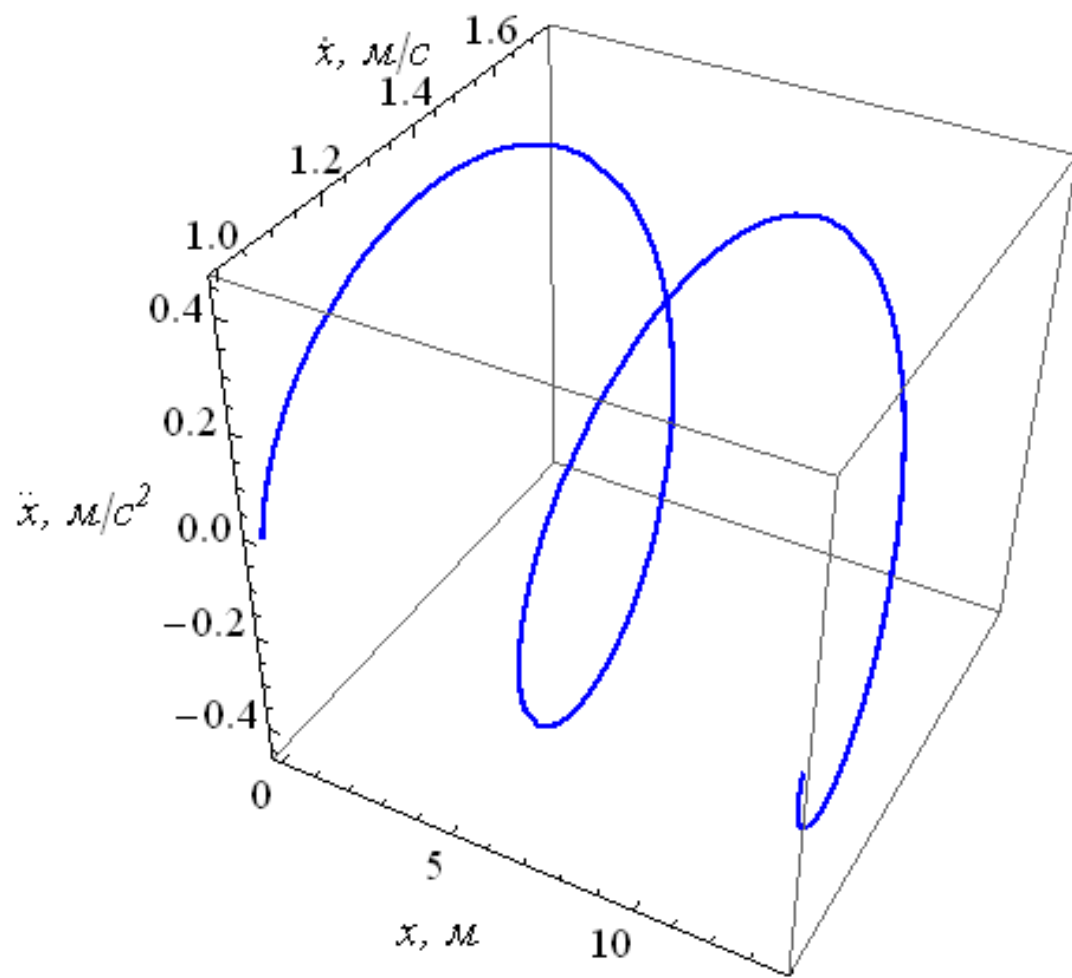


Рис. 6 – Тривимірний фазовий портрет руху системи „крановий візок – вантаж на гнучкому підвісі” у координатах  $x - \dot{x} - \ddot{x}$



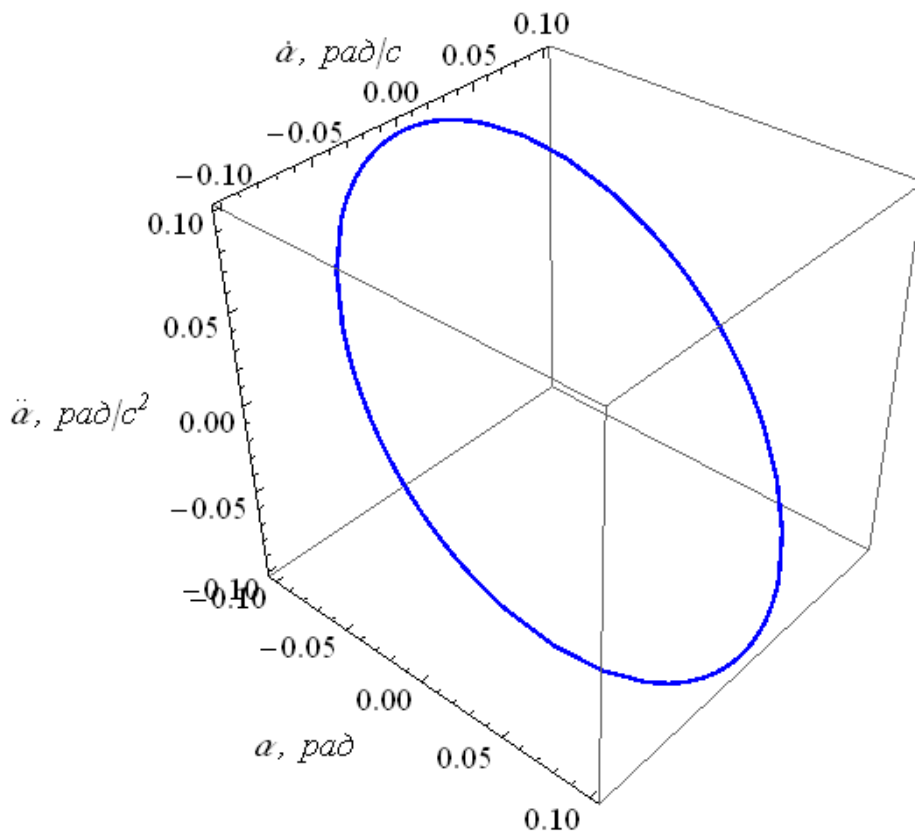


Рис. 7 – Тривимірний фазовий портрет руху системи „крановий візок – вантаж на гнучкому підвісі” у координатах  $\alpha - \dot{\alpha} - \ddot{\alpha}$

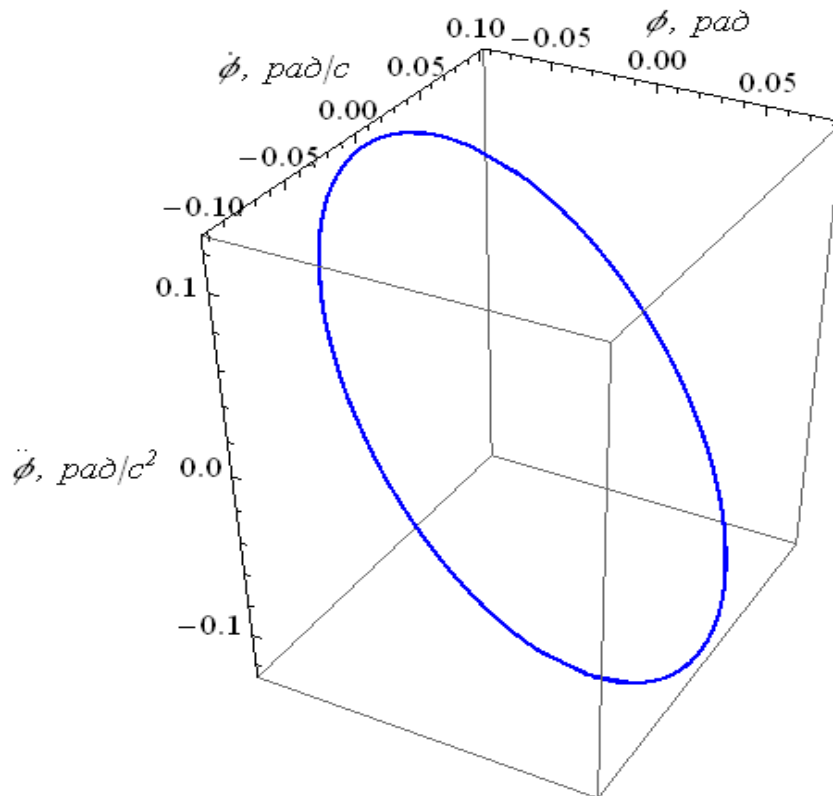


Рис. 8 – Тривимірний фазовий портрет руху системи „крановий візок – вантаж на гнучкому підвісі” у координатах  $\phi - \dot{\phi} - \ddot{\phi}$

Графіки побудовані за наступних значень конструктивних, геометричних та фізико-механічних параметрів системи, що розглядається:  $m_2 = 28830 \text{ кг}$ ,  $l = 10 \text{ м}$ ,  $S_{mid}^{(2)} = 15,281 \text{ м}^2$  (дані параметри відповідають стандартному 20-тифутовому контейнеру),  $m_1 = 35000 \text{ кг}$ ,  $S_{mid}^{(1)} = 12 \text{ м}^2$ .

Початкові умови для системи (13) мають наступний вигляд:  $x|_{t=0} = 0$ ,  $\dot{x}|_{t=0} = 0$ ,  $\varphi|_{t=0} = 0 \text{ рад}$ ,  $\dot{\varphi}|_{t=0} = 0,1 \text{ рад/с}$ ,  $\alpha|_{t=0} = 0 \text{ рад}$ ,  $\dot{\alpha}|_{t=0} = -0,1 \text{ рад/с}$ .

Приведемо також графік функції  $Y(t)$  та тривимірний фазовий портрет вказаного руху (рис. 9-10).

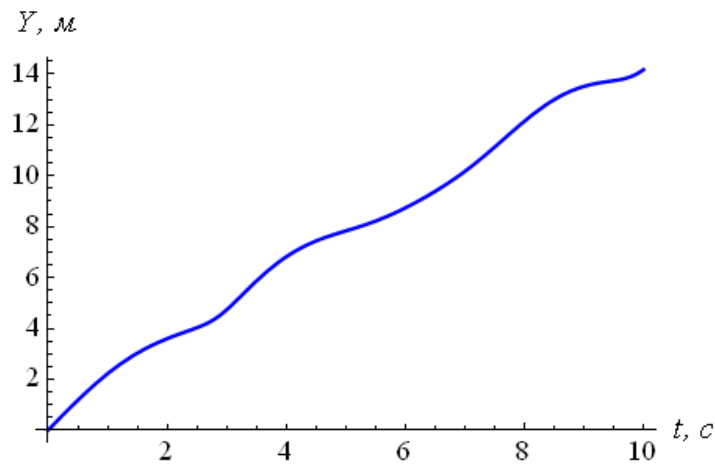


Рис. 9 – Абсолютне лінійне переміщення вантажу

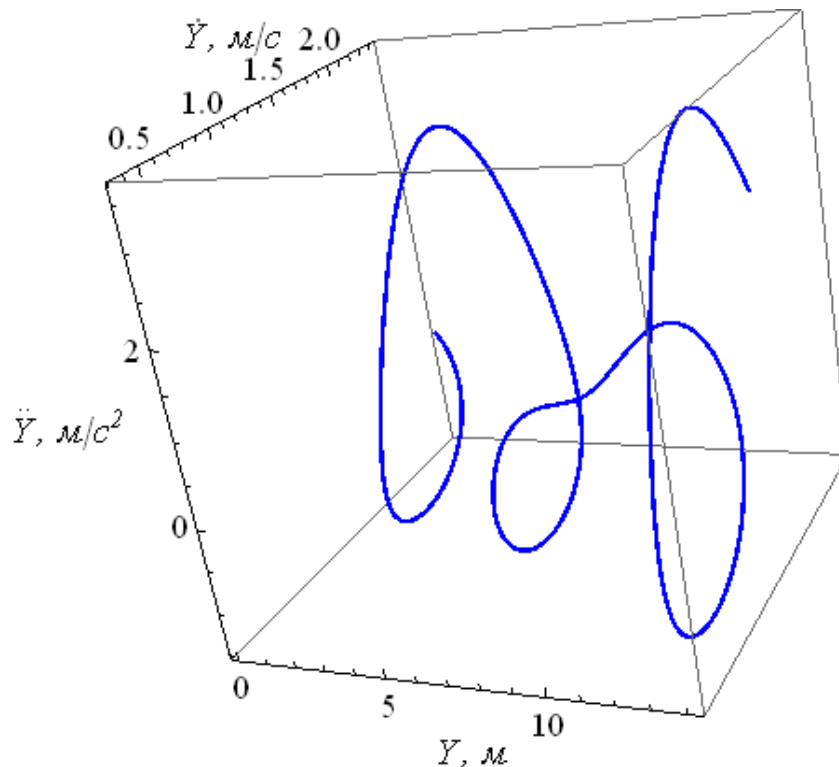


Рис. 10 – Тривимірний фазовий портрет руху системи „крановий візок – вантаж на гнучкому підвісі” у координатах  $Y - \dot{Y} - \ddot{Y}$

**Висновки.** У приведеному дослідженні приведено уточнену математичну модель руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі на який, крім того, діє навантаження від руху у середовищі повітря. Таке уточнення математичної моделі дає змогу адекватно моделювати динаміку руху, наприклад, портових перевантажувачів, які зазнають вітрових навантажень. Викладення матеріалу базується на умові, що крановий візок має початкову швидкість, відмінну від нуля. Тобто розглядається режим руху візка після розгону.

Приведений масив графічних залежностей дозволяє наочно оцінити рух того чи іншого елемента динамічної системи. Для руху вантажу побудовані графіки його коливань у двох взаємно перпендикулярних площинах (площина руху візка та площина до неї перпендикулярна). Дані графіки можна використати для оцінки різноманітних параметрів коливань вантажу: амплітуд (для різних площин), декременту затухання тощо.

### Список використаних джерел

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1971. – 230 с.
2. Мартынов А.К. Прикладная аэродинамика / А.К. Мартынов. – М.: Машиностроение, 1972. – 340с .
3. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
4. Матвеев Ю.И. Оценка затухания колебаний груза при горизонтальном полете вертолета с постоянной скоростью / Ю.И. Матвеев, С.С. Павлов // Научный вестник МГТУ ГА. Серия „Аеромеханика, прочность, поддержание летной годности ВС”. – 2009. - № 141. – С. 149-156.

### Аннотация

#### **ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ МЕХАНИЗМА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗА МОСТОВОГО КРАНА С УЧЕТОМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА**

Ловейкин В.С., Човнюк Ю.В., Ромасевич Ю.О.

*Динамический анализ поведения механизма перемещения груза мостового крана приведен в рамках модели двухточечного математического маятника с подвижной точкой подвеса, колебания которого происходят в потоке воздуха. Получены основные кинематические характеристики и оценка затухания колебаний груза на гибком подвесе (канате). Установлены фазовые портреты (классический, высшего порядка, трехмерный) указанных колебаний*

### Abstract

#### **THE BRIDGE CRANE MOVING MECHANISM BEHAVIOUR DYNAMIC ANALYSIS WHICH TAKING INTO ACCOUNT AERODYNAMIC RESISTANCE OF AIR**

V. Lovejkin, Y. Chovnuk, Y. Romasevich

*The bridge crane moving mechanism behaviour dynamic analysis is resulted within the limits of movable double-mass model mathematical pendulum which fluctuations occur in air stream. The basic kinematic characteristics and an estimation of attenuation of cargo's fluctuations on flexible rope are received. Phase portraits (classical, the higher order, three-dimensional) specified fluctuations are established*