УДК 631.362:532

О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ ЗЕРНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИБРОРЕШЕТАХ

Тищенко Л.Н., д.т.н., чл.-кор. НААНУ, проф.,
Ольшанский В.П., д.ф.-м.н., проф., Ольшанский С.В., к.ф.-м.н.
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка

В элементарных функциях получено аналитическое решение краевой задачи гидродинамики о продольных колебаниях скорости псевдоожиженного кольцевого слоя в вертикальных цилиндрических решетах виброцентробежных сепараторов в установившемся режиме движения смеси, когда изменение её кинематической вибровязкости по радиальной координате аппроксимируемой квадратичной параболой. Проведены расчёты и проанализированы численные результаты

Постановка проблемы. Наличие вибраций интенсифицирует процесс сепарирования зерновой смеси решетами. Эффективность интенсификации зависит от глубины проникновения вибраций от решет в зерновую среду. С помощью адекватных математических моделей можно определять влияние различных механико-технологических параметров на затухание вибрационного поля в движущемся зерновом материале. Поэтому моделирование колебаний зерновых потоков на виброрешётах относится к актуальным научно-прикладным задачам.

Анализ последних исследований и публикаций. Теоретические исследования колебаний скорости линейно-неоднородного слоя, вызванных осевыми вибрациями вертикального цилиндрического решета проводили в [1], [2], [3]. Задачу колебаний решали в упрощённой постановке, отбрасывая в уравнении движения слагаемое, учитывающее искривление решета по круговой цилиндрической поверхности. Эксперименты в [1] и [4] показывают, что с увеличением толщины зернового слоя изменение вибровязкости по радиальной координате становится нелинейным. Следовательно, разрабатывая уточнённые модели зерновой смеси, нужно учитывать нелинейность изменения вибровязкости по толщине слоя и круговую форму искривления его граничных поверхностей. Поэтому здесь ставится задача математического моделирования установившегося движения неоднородного виброожиженного кольцевого слоя зерна, когда неоднородность вибровязкости подчиняется квадратичной зависимости от радиальной координаты.

Целью работы является вывод и апробация расчётами формулы скорости движения смеси, с учётом её колебаний, вызванных вертикальными вибрациями цилиндрического решета в направлении его оси вращения.

Основная часть работы. Краевую задачу кинетики смеси решаем в цилиндрической системе координат, показанной на рис. 1.

Символами r и z обозначены радиальная и осевая координаты. Последняя является осью симметрии кольцевого слоя толщиной h. Радиус внутренней цилиндрической поверхности смеси связан с радиусом решета R зависимостью $R_0 = R - h$. Кроме вращения вокруг оси Oz с угловой скоростью ω_1, решето совершает колебания вдоль этой оси с амплитудой A^* и круговой частотой ω.

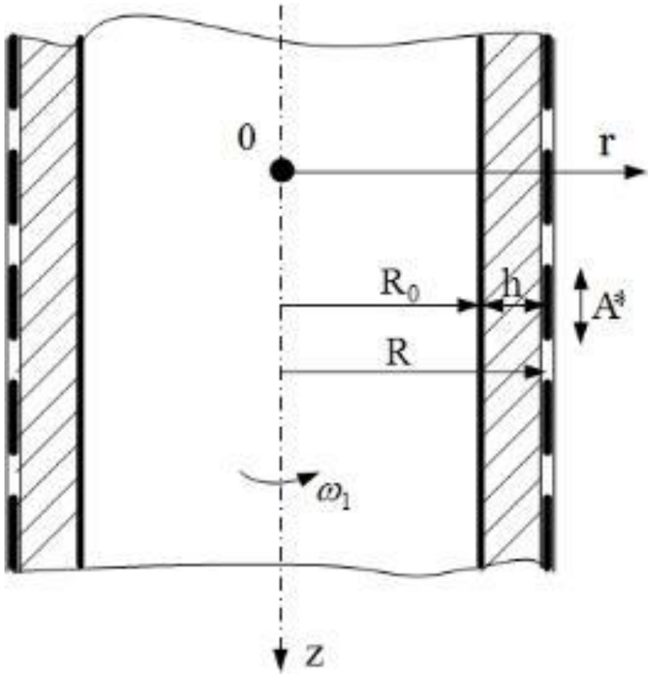


Рис. 1 − Расчетная схема вертикального цилиндрического решета с сепарируемой зерновой смесью

Осесимметричное движение смеси описываем обобщённой системой уравнений Стокса [5]

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2}\right) + 2\nu_r' \frac{\partial u_r}{\partial r};$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = \nu\left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r}\right) + \nu_r'\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z + \nu_r'\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + g;$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r u_z) = 0.$$

В (1) $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $\nu = \nu(r)$ – эффективная кинематическая вибровязкость смеси; ν_r' – производная ν по r; p – внутреннее избыточное давление в слое; ρ – плотность (натура) зерновой смеси; g – ускорение свободного падения; t – время; u_r, u_φ, u_z – радиальная, окружная и осевая проекции скорости зернового потока.

Для однородной среды, когда $\nu_r' = 0$, уравнения (1) переходят в обычную систему Стокса [6].

Рассматривая установившийся режим движения смеси, принимаем:

$$u_r \equiv 0;\ u_\varphi = \omega_1 r;\ u_z = u_z(r,t),\ p = p(r) = \frac{1}{2}\rho\omega_1^2\left(r^2 - R_0^2\right). \tag{2}$$

В таком режиме движения, согласно (2), первое, второе и четвёртое уравнения в (1) обращаются в тождества, а третье принимает вид:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \nu_r'\frac{\partial u_z}{\partial r} + g. \tag{3}$$

Его решаем при граничных условиях:

$$\left.\frac{\partial u_z}{\partial r}\right|_{r=R_0} = 0;\ u_z(R,t) = A^*\omega\cos(\omega t). \tag{4}$$

Далее функцию $\nu(r)$ представляем выражением:

$$\nu(r) = kr^2, \tag{5}$$

где k – постоянный положительный множитель.

Если вибровязкость смеси у свободной поверхности слоя $r = R_0$ равна ν_0, то

$$k = \nu_0 R_0^{-2}.$$

Учитывая (5) уравнение (3) преобразуем в

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{kr^2}\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{kr^2}. \tag{6}$$

Решение (6) ищем в виде суммы:

$$u_z(r,t) = u_1(r) + u_2(r,t). \tag{7}$$

Для определения её слагаемых из (4), (6) получаем две краевые задачи:

$$\frac{d^2u_1}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{du_1}{dr} = -\frac{g}{kr^2}; \tag{8}$$

$$\left.\frac{du_1}{dr}\right|_{r=R_0} = 0;\quad u_1(R) = 0. \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{kr^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=R_0}=0;\quad u_2(R,t)=A^*\omega\cos(\omega t). \tag{11}$$

Уравнение (8) решаем методом понижения порядка. Этим методом, учитывая (9), находим:

$$u_1(r)=\frac{g}{2k}\left[\frac{R_0^2}{2}\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\ln\frac{R}{r}\right]. \tag{12}$$

Подстановкой

$$u_2(r,t)=\mathrm{Re}\left[f(r)\exp(i\omega t)\right],\ i=\sqrt{-1}, \tag{13}$$

уравнение (10) преобразуем в

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{df}{dr}-\frac{i\omega}{kr^2}f=0. \tag{14}$$

Согласно (11), неизвестная комплексная функция $f(r)$ должна удовлетворять граничным условиям:

$$\mathrm{Re}\,f(R)=A^*\omega;\quad \mathrm{Im}\,f(R)=0; \tag{15}$$

$$\left.\frac{d}{dr}\mathrm{Re}\,f(r)\right|_{r=R_0}=\left.\frac{d}{dr}\mathrm{Im}\,f(r)\right|_{r=R_0}=0. \tag{16}$$

Учитывая, что (14) является уравнением Эйлера, его решение ищем в виде степенной функции:

$$f=r^{\lambda}.$$

Для определения λ получаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+2\lambda-\frac{i\omega}{k}=0,$$

которое имеет комплексные корни:

$$\lambda_1=a+i\beta;\qquad \lambda_2=b-i\beta,$$

причём $a=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c+1};\ b=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c+1};\ \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c-1};\quad c=\sqrt{1+\frac{\omega^2}{k^2}}.$

Этим корням соответствует [7]:

$$f(r)=(c_1+ic_2)\xi^{a+i\beta}+(c_3+ic_4)\xi^{b-i\beta}. \tag{17}$$

Здесь $\xi=rR_0^{-1}$; c_1,c_2,c_3,c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Решение (17) удовлетворяет граничным условиям (16) на поверхности $\xi=1$, когда

$$c_1a-c_2\beta+c_3b+c_4\beta=0,$$

$$c_1\beta+c_2a-c_3\beta+c_4b=0. \tag{18}$$

Из (18) находим, что

$$c_3 = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = \delta_1 c_2 - \delta_2 c_1; \tag{19}$$

$$\delta_1 = \frac{\beta^2 - ab}{b^2 + \beta^2}; \quad \delta_2 = \frac{\beta(a+b)}{b^2 + \beta^2}.$$

Используя (19) и формулу

$$\xi^{\pm i\beta} = \cos(\beta \ln \xi) \pm i \sin(\beta \ln \xi),$$

выделяем вещественную и мнимую части в (17). Получаем:

$$A(r) = \operatorname{Re} f(r) = c_1 \varphi_1(\xi) - c_2 \varphi_2(\xi);$$

$$B(r) = \operatorname{Im} f(r) = c_1 \varphi_2(\xi) + c_2 \varphi_1(\xi). \tag{20}$$

При этом

$$\varphi_1(\xi) = \left(\xi^a + \delta_1 \xi^b\right) \cos(\beta \ln \xi) - \delta_2 \xi^b \sin(\beta \ln \xi);$$

$$\varphi_2(\xi) = \left(\xi^a - \delta_1 \xi^b\right) \sin(\beta \ln \xi) - \delta_2 \xi^b \cos(\beta \ln \xi). \tag{21}$$

Удовлетворяя граничным условиям на поверхности $\xi = \xi_1 = RR_0^{-1}$ с помощью (20), приходим к системе:

$$c_1 \varphi_1(\xi_1) - c_2 \varphi_2(\xi_1) = A^* \omega;$$

$$c_1 \varphi_2(\xi_1) + c_2 \varphi_1(\xi_1) = 0.$$

Из неё находим постоянные c_1 и c_2:

$$c_1 = \frac{A^* \omega \varphi_1(\xi_1)}{\left(\varphi_1(\xi_1)\right)^2 + \left(\varphi_2(\xi_1)\right)^2}; \quad c_2 = -\frac{A^* \omega \varphi_2(\xi_1)}{\left(\varphi_1(\xi_1)\right)^2 + \left(\varphi_2(\xi_1)\right)^2}.$$

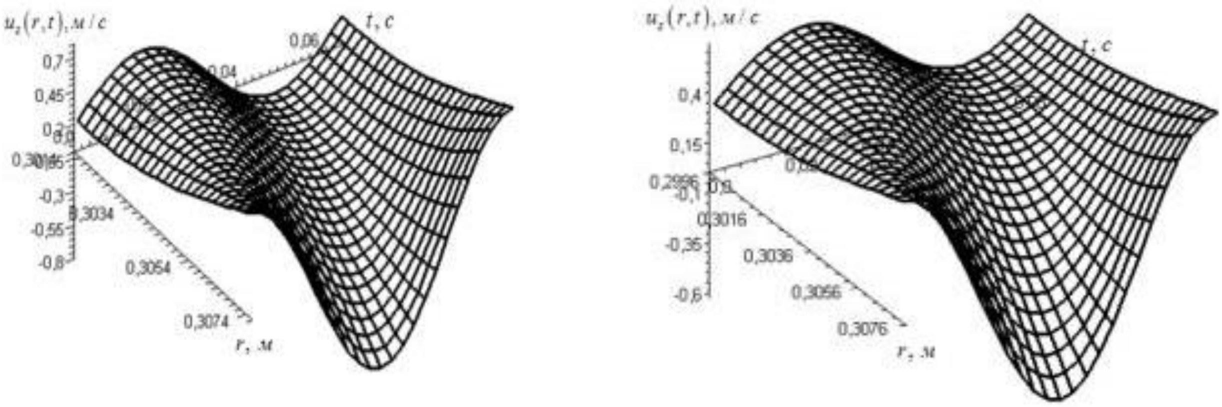
Используя значения констант $c_j,\ j = \overline{1;4},$, а также выражения (13) и (20), вычисление $u_2(r,t)$ сводим к формуле:

$$u_2(r,t) = A(r)\cos(\omega t) - B(r)\sin(\omega t). \tag{22}$$

Далее несложно определить $u_z(r,t)$ с помощью (7), поскольку входящие в неё слагаемые вычислимы по (12) и (22).

Проанализируем численные результаты. Для проведения расчётов принимаем: $\rho = 750$ кг/м^3; $R = 0{,}3075$ м; $h = 0{,}008$ м; $\nu_0 = 0{,}55/\rho$ м^2/с и различные значения A^* и ω.

Поверхности изменения скорости во времени и по радиусу решета представлены на рис. 2.



а) б)

Рис. 2 − Поверхность скорости потоков, при: а) $A^* = 0{,}006$ м, $\omega = 96{,}9$ с$^{-1}$; б) $A^* = 0{,}008$ м, $\omega = 75{,}9$ с$^{-1}$

Рассчитанные по формуле (7), геометрические образы функции $u_z(r,t)$, иллюстрируют убывающий характер колебаний $u_z(r,t)$ при $r \to R_0$.

Распределение скорости по толщине движущегося слоя также меняется с течением времени согласно графикам на рис. 3. Изменение профиля скорости во времени способствует сегрегации зерновой смеси.

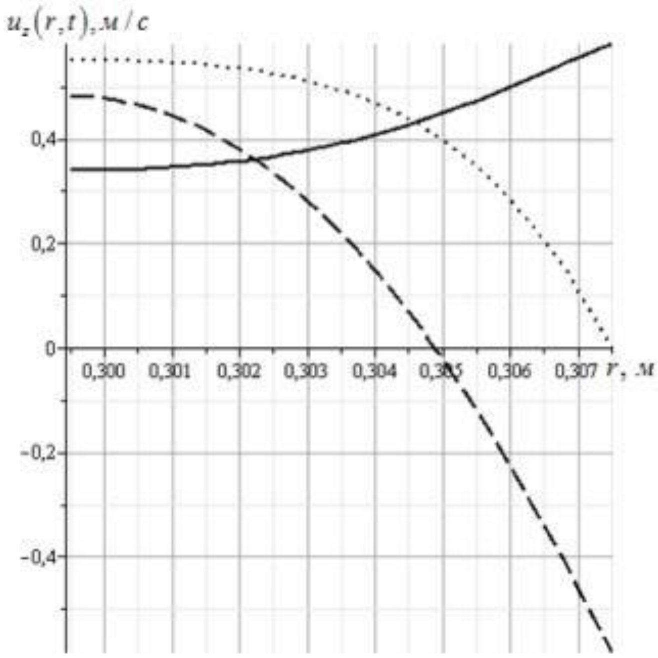


Рис. 3 − Профили скорости потоков зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты времени: —— $t = 0$; ····· $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$; $- - -$ $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ при $A^* = 0{,}006$ м и $\omega = 96{,}9$ с$^{-1}$

Выводы. При квадратичном изменении вибровязкости смеси по толщине слоя задача колебаний скорости потоков решается в элементарных функциях. Распределение скорости потоков по толщине слоя меняется с течением времени. Амплитуды колебаний скорости у свободной поверхности слоя значительно меньше, чем у поверхности виброрешет.

Список используемых источников

1. Тищенко Л.Н. Моделирование процессов зерновых сепараторов / Л.Н. Тищенко, Д.И. Мазоренко, М.В. Пивень и др. – Харків: "Міськдрук", 2010. – 360 с.
2. Тищенко Л.Н. О колебаниях скорости потока зерна на решете виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва та переробки сільськогосподарської продукції. – Харків: ХНТУСГ, 2010. – Вип. 103. – С. 95-104.
3. Тищенко Л.Н. Математическая модель движения зерновых смесей по вертикальным решётам виброцентробежных сепараторов / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Тракторы и сельськохозяйственные машины. – 2011. – №7. – С. 35-38.
4. Тищенко Л.Н. Исследование закономерностей вибровязкости зерновой смеси при сепарировании цилиндрическими виброцентробежными решётами / Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень, С.А. Харченко, В.В. Бредихин // Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 88. – С. 34-44.
5. Ольшанский В.П. Применение обобщённых уравнений Навье-Стокса при моделировании движения зерна по цилиндрическому решету / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва. – Харків: ХНТУСГ, 2011. – Вип. 107. – Т.1. – С. 153-161.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
7. Ольшанский В.П. К расчёту колебаний скорости движения зерновой смеси на плоском виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ "ХПІ". Динаміка та міцність машин. – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – Вип. 37. – С. 123-129.

Анотація

ПРО КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ПОТОКІВ ЗЕРНА В ЦИЛІНДРИЧНИХ ВІБРОРЕШЕТАХ

Тіщенко Л.М., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

В елементарних функціях отримано аналітичний розв'язок граничної задачі гідродинаміки про повздовжні коливання швидкості псевдорозрідженного *кільцевого шару в вертикальних циліндричних решетах вібровідцентрових сепараторів в усталеному режимі руху суміші, коли зміну її кінематичної вібров'язкості по радіальній координаті можна апроксимувати квадратичною параболою. Проведено розрахунки і проаналізовано числові результати*

Abstract

ON VIBRATIONS OF AN INHOMOGENEOUS GRAIN FLOW IN THE CYLINDRICAL VIBROSIEVE

L. Tishchenko, V. Olshanskii, S. Olshanskii

In terms of elementary functions, an analytical solution of the boundary fluid dynamics of the longitudinal vibrations of the circular velocity of the fluidized bed in a vertical cylindrical sieve of the vibrocentrifugal separator in the steady motion of the mixture, when the linear variation of the kinematic vibratory viscosity on the radial coordinate is approximated by a quadratic parabola. The calculations and numerical results are analyzed