

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ВАЛКА ОРГАНИЧЕСКИХ УДОБРЕНИЙ

Мельник В.И., д.т.н., Романащенко А.А., доц.

*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко*

*Задача формирования валка органических удобрений валкообразователем базируется на применении теории пластичности. Приведены основные уравнения и сформулированы граничные условия.*

**Актуальность.** Важнейшая обязанность уважающего себя землепашца, это *сохранение почвы, как источника плодородия, для будущих поколений.* Урожай - задача второстепенная, а получение прибыли и вовсе должно быть на третьем месте. Достижение первой из целей, не возможно без применения органических удобрений.

**Состояние вопроса.** В течение постсоветского периода в Украине продолжается минерализация почв. Органические удобрения почти не применяются. Основных причин две: во-первых, животноводство страны долгие годы находится в упадке и, соответственно, органики вырабатывается в недостаточных количествах, а, во-вторых, современные машины не позволяют в срок и качественно выполнять соответствующие работы.

Органические удобрения следует распределять равномерно и заделывать немедленно. Чем лучше распределены удобрения, тем легче их заделать в почву. Наилучшие показатели равномерности, особенно если нормы внесения превышают 60 тонн на гектар, имеют валкообразователи-разбрасыватели. Их технологический процесс предполагает формирование валка из куч удобрений и последующее разбрасывание. Чем равномернее валок, тем выше показатели качества разбрасывания. Сводообразование, которое возникает в объеме удобрений захваченных валкообразователем - главная причина нестабильности плотности валка.

**Целью настоящих исследований** является математическое моделирование сводообразования, которое может возникать и при этом препятствовать формированию валка органических удобрений. Изучение этого явления позволит сделать выводы в отношении конструктивных особенностей валкообразователя.

**Постановка задачи.** Условимся считать, что органические удобрения удовлетворяют модели пластической среды [1-7], которая характеризуется пластической постоянной (коэффициентом пластичности)  $k$  и удельным весом  $\gamma$ . В работе [9] показано, что теории пластичности и предельного равновесия связных сред [10] по своей сути

совпадают. Различия состоят в принятых соглашениях. Так в теориях предельного равновесия [9,10] принято, что положительными считаются сжимающие напряжения, а главные нормальные напряжения,  $\sigma_i$  ( $i \in \{1,2,3\}$ ), ранжируют в порядке возрастания индексов, когда  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ . Такие соглашения более эффективны, а, следовательно, мы остановимся именно на них и за основу примем работу [9].

В таком случае напряженное состояние среды описывается тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , ( $i, j = x, y, z$ ), где парные индексы  $xx$ ,  $yy$  и  $zz$  обозначают нормальные напряжения действующие вдоль оси абсцисс, ординат и аппликата декартовой системы координат  $Oxyz$  в которой решается задача.  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  и  $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$  - касательные компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , действующие на взаимно перпендикулярных площадках.

В случае плоской задачи, которая решается в двумерной декартовой системе координат  $Oxy$  касательные напряжения  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  и  $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$  равны нулю, а нормальные напряжения  $\sigma_{zz}$  не учитывают. Мы предполагаем именно плоскую задачу. Это связано не столько с особенностями физических процессов, которые подлежат изучению, сколько с недостаточной математической базой, которая наработана научной общественностью на сегодняшний день и которая могла бы быть задействованной для решения прикладных задач объемного напряженного состояния сплошных сред. Это самое сильное ограничение настоящей работы, но к сожалению, на сегодняшний день отказаться от него не представляется возможным [9]. С учетом выше сказанного в дальнейшем мы еще вернемся к обоснованию адекватности двумерного подхода к решению поставленных задач, а сейчас условимся, что ориентация двумерной декартовой системы координат  $Oxy$  задается углом  $\alpha$  между направлением действия весовых сил и положительным направлением оси ординат. Если  $\alpha = 0$ , то ось  $Oy$  ориентирована вертикально вниз, а ось  $Ox$  - слева направо.

Поскольку нас интересуют только новые общие закономерности, то в дальнейшем, мы не будем прибегать к использованию каких либо единиц измерения и все задачи будем решать в безразмерных единицах. В пользу такого же решения указывает и известное правило подобия, которое говорит о том, что в геометрически подобных областях, при подобных условиях внешнего нагружения, возникают подобные напряженные состояния [10]. Из этого правила следует, что для того, чтобы понять, как будут протекать процессы в реальности, можно, во-первых, использовать уменьшенные физические модели, а, во-вторых, математическое моделирование выполнять в безразмерных единицах. В обоих случаях абсолютные значения напряжений соответствовать реальности, конечно же, не будут, но качественная сторона общих

закономерностей сохранится. Нас интересует именно последнее. Опираясь на общие закономерности, которые мы получим, на математических моделях мы будем делать выводы о том, каким должна быть конструкция реальной машины.

С учетом принятого система дифференциальных уравнений плоского пластического состояния среды (в работе [9] - система уравнений предельного равновесия) выглядит так [4,6,9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial x} - 2k \left( \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \gamma \sin \alpha, \\ \frac{\partial s}{\partial y} + 2k \left( \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \gamma \cos \alpha, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$s = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \quad (2)$$

- полусумма наибольшего  $\sigma_3$  и наименьшего  $\sigma_1$  главных нормальных напряжений;

$\varphi$  - угол между линией действия  $\sigma_3$  и осью абсцисс  $Ox$ .

В соответствии с условиями плоской задачи среднее напряжение  $\sigma_2$  в дальнейшем не учитывается, а компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  с учетом принятого условия пластичности Сен-Венана  $\max\{\sigma_{xy}\} = k$  [9] (уже задействовано в системе (1)), определяются так

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = s + k \cos 2\varphi \\ \sigma_{yy} = s - k \cos 2\varphi. \\ \sigma_{xy} = kc \sin 2\varphi \end{cases} \quad (3)$$

Для системы (1) известно характеристическое решение, которое включает уравнения характеристик [9]:

$$\cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) dy - \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) dx = 0 \quad (4)$$

и соотношений, которые выполняются вдоль них и называются соотношениями на характеристиках [9]

$$ds \mp 2kd\varphi = \gamma [\sin \alpha dx + \cos \alpha dy], \quad (5)$$

Последние могут быть интегрированы [9]

$$s \mp 2k\varphi = \gamma [x \sin \alpha + y \cos \alpha] + \lambda_i, \text{ при } \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

где:  $i = 1$  - соответствует верхним знакам, а  $i = 2$  - нижним;  $\lambda_i$  - постоянные интегрирования, которые называются параметрами характеристик.

Из (6) имеем

$$s = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} + \gamma(x \sin \alpha + y \cos \alpha), \quad (7)$$

$$\varphi = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4k}. \quad (8)$$

Уравнения характеристик (4) образуют криволинейную ортогональную сетку и в теории пластичности называются линиями скольжения. Опираясь на характеристическое решение ((4) – (8)) в дальнейшем любую практическую задачу можно свести к известным краевым задачам Коши, Римана, Гурса или к смешанным задачам, представляющим произвольную комбинацию первых трех [9]. Обычно такие задачи решаются методом конечных разностей или конечных элементов. Проблему составляют граничные условия, которые в большинстве случаев получить крайне сложно. В конечном итоге именно они определяют адекватность получаемых таким образом решений. Природа такой проблемы состоит в том, что в большинстве случаев до решения задачи положение и форма характеристик не известны.

Обойти упомянутую проблему все же можно. В работе [9] для системы (1) получены соотношения, которые подобно соотношениям на характеристиках выполняются вдоль линий параллельных осей декартовой системы координат и называются соотношениями на декартовых координатных осях. Принципиальное отличие состоит, в том, что соотношения на декартовых осях выполняются вдоль прямых, положение которых известно заранее.

Применительно к нашей задаче, когда  $\alpha=0$  упомянутые соотношения принимают следующий вид.

Соотношения на абсциссе:

$$x |_{y=const} = 2k \exp \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_y^*, \quad (9)$$

$$s |_{y=const} = k \ln(\sin^2 \varphi) + C_y^+ \quad (10)$$

где

$$\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2} \pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2} \pi[, \quad \varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2} \pi, \quad (11)$$

$$C_y^+ = \tilde{C}_y + k \ln(2(C^v)^2), \quad (12)$$

$C_y, C_y^*$  и масштабирующий множитель  $C^v$  постоянные величины.

Соотношения на ординате

$$y|_{x=const} = (-1)^r 2k \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi + C_x^*, \quad (13)$$

$$s|_{x=const} = k \ln(\cos^2 \varphi) + \gamma y + k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (14)$$

$$s|_{x=const} = k \left[ \ln(\cos^2 \varphi) + (-1)^r 2\gamma \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi + C_x^+ \right], \quad (15)$$

где

$$\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2}\pi[, \quad \varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (16)$$

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > \varphi_{x_0}, \\ 2 & \text{при } \varphi < \varphi_{x_0}. \end{cases} \quad (17)$$

$$C_x^+ = \gamma C_x^* + k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x \quad (18)$$

$\tilde{C}_x, C_x^*$  - постоянные величины.

Масштабирующий множитель  $C^v$  остается постоянным для всей области пластичности, в то время, как постоянные  $\tilde{C}_y, C_y^*, C_y^+$  или  $\tilde{C}_x, C_x^*, C_x^+$  изменяются всякий раз, когда меняется положение прямой параллельной оси системы координат для которой применяются соотношения ((9) – (12)) или ((13) – (18)). Таким образом, решение любой прикладной задачи состоит в формулировке граничных условий и разработке алгоритма расчета, по сути бесконечного множества комплектов постоянных  $\tilde{C}_y, C_y^*, C_y^+$  и  $\tilde{C}_x, C_x^*, C_x^+$ .

Теперь об условии решаемой задачи, которая в реальности должна описывать процесс формирования валка органических удобрений из куч с помощью фронтального валкообразователя. Он навешивается на трактор спереди по типу бульдозерного отвала. Имеет левый и правый формирующие щиты, между которыми располагается окно для прохода валка. Это окно совпадает с осью симметрии трактора, в то время как формирующие валок щиты могут быть различными по конфигурации и не обязательно симметричными по отношению к продольной оси симметрии. В пользу асимметрии указывает необходимость отделения части кучи от общего массива и дальнейшего формирования валка из отделенной части. В прочем асимметричность отделяющей части валкообразователя не исключает полную симметрию его формирующей части. Мы же сейчас об отделении части кучи от большого массива говорить не будем и сосредоточимся на процессе

формировании валка предполагая, что необходимый объем органических удобрений уже попал в валкообразователь, но, все же, сбоку, т.е. асимметрично.

Поставленную задачу иллюстрирует рис.1, где область 1 отображает объем органических удобрений, который располагается между двумя формирующими щитами 2 и 3. Направление движения валкообразователя противоположно ориентации оси ординат. Верхнюю границу удобрений аппроксимирует ломаная линия  $L^uUR^u$ .

В общем случае - она выпуклая в направлении движения-кривая. Выход удобрений из валкообразователя осуществляется через окно  $L^dR^d$ .

Впереди линии  $L^ruR^ru$  удобрений мало и они недостаточно сжаты, а, значит, возможно, что в этом объеме состояние пластичности достигается не полностью. Если это так, то в дальнейшем линию фронта удобрений  $L^uUR^u$  уточнить не удастся. Если же объем  $L^uUR^uL^ru$  пребывает в состоянии пластичности, то возможно установление фактической конфигурации линии  $L^uUR^u$ . В любом случае считаем, что сама линия  $L^ruR^ru$ , равно как и вся область, сзади нее, пребывают в состоянии пластичности.

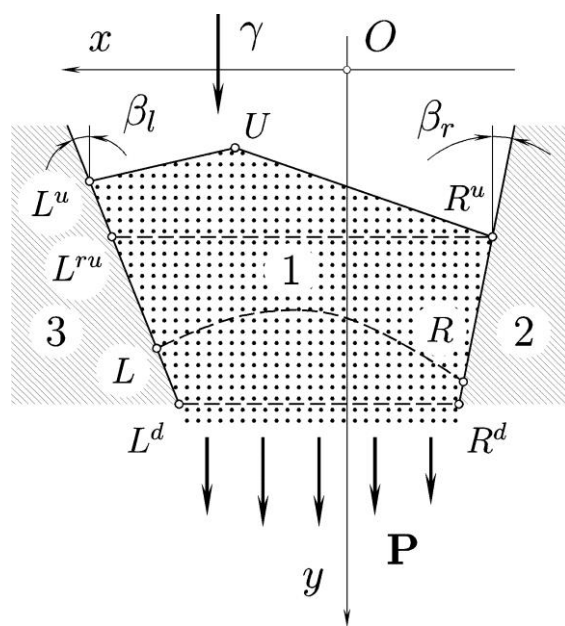


Рис. 1 - Схема области взаимодействия модельной (пластической) среды с окружающими конструктивными элементами устройства моделирующего валкообразователь:

1 - пластическая среда; 2, 3 - формирующие щиты; P - растягивающая нагрузка, порождаемая истекающей средой; y - весовые силы;  $\beta_l$  и  $\beta_r$  - углы ориентации формирующих щитов по отношению к оси абсцисс системы координат  $O_{xy}$ ;  $L^dR^d$  - уровень нижнего обреза направляющих щитов;  $L^ruR^ru$  - линия раздела между областями различного состояния среды (возможно, не достигшее пластичности - сверху и состояние пластичности - снизу);  $L^uUR^u$  - верхний (передний) уровень пластической среды, проходящей между формирующими щитами; LR - линия сводообразования

Поскольку валок формируется непрерывно, то предполагается возможность появления распределенной растягивающей, в общем случае,

растягивающей силы  $P$ . Пунктирная выпуклая в направлении движения, линия  $LP$ , отображает фронт сводообразования. Его положение пока не определено. Последнее является самым главным из того, что в дальнейшем предстоит изучить.

В реальности вся эта объемная конструкция располагается горизонтально и углы,  $\beta_l$  и  $\beta_r$ , отображают ориентацию вертикальных щитов по отношению к направлению движения. По части трехмерных задач пластичности выше было уже оговорено и поэтому в дальнейшем условимся мысленно представлять, что вся эта конструкция располагается вертикально, а органические удобрения как бы засыпаны сверху внутрь валкообразователя. На рис.1 ориентацию исследуемой системы задает вектор весовых сил  $Y$ , который по направлению совпадает с ориентацией оси ординат.

Принятое представление позволяет заменить силы трения, которые возникают между массивом удобрений и почвой и по своему значению пропорциональны толщине слоя удобрений на силы веса. Такая возможность обусловлена тем, что и силы трения в реальном случае увеличиваются по мере перехода от линии  $L^uR^u$  к линии  $L^dR^d$ , и внутреннее давление среды, обусловленное ее весом  $Y$  изменяется по тому же закону, если мыслить, что объем  $L^uR^uL^dR^d$  ориентирован вертикально. И силы трения о почву в реальности, и силы веса среды в модельном представлении одинаково способствуют продвижению среды между щитами валкообразователя в направлении оси  $Oy$ . В конечном итоге все приведенное дает возможность превратить объемную задачу в плоскую и применить уже описанные выше двумерные математические модели. В общем случае задача не является осесимметричной.

Для формирования граничных условий обратимся к рис. 2 где формирующие щиты (две заштрихованные прямоугольные трапеции, которые соответствуют позициям 2 и 3 на рис. 1) для удобства изображены отодвинутыми от массива среды  $L^uUR^uR^dL^d$ .

В образовавшихся зазорах показаны векторы касательных напряжений  $\sigma_{it}$  и реактивные по своей сути напряжения  $\sigma_{iv}$ . Ориентация и тех и других понятна исходя из физической сути решаемой задачи. Кроме того на рисунке показаны элементарные прямоугольные треугольники с катетами  $dx$  и  $dy$ . Знаки и направления действующих на них напряжений проанализируем в процессе формирования граничных условий. В общем случае углы  $\theta_l$  и  $\theta_r$  не являются постоянными. Считаем, что ось ординат  $Oy$  проходит через вершину  $U$ , положение которой до решения задачи неопределено, а, значит, координаты точек  $L^u$ ,  $U$ ,  $R^u$ ,  $R^d$  и  $L^d$  изначально неизвестны.

В отношении верхней свободной границы  $L^uR^u$  можно однозначно утверждать, что она полностью состоит из главных площадок, а значит:

$$(\sigma_1 | L^uUR^u \quad \vee \quad \sigma_3 | L^uUR^u) = 0, \quad \sigma_{ut} = 0, \quad (19)$$

где:  $\sigma_{ut}$  - касательные напряжения, действующие вдоль  $L^uR^u$ .

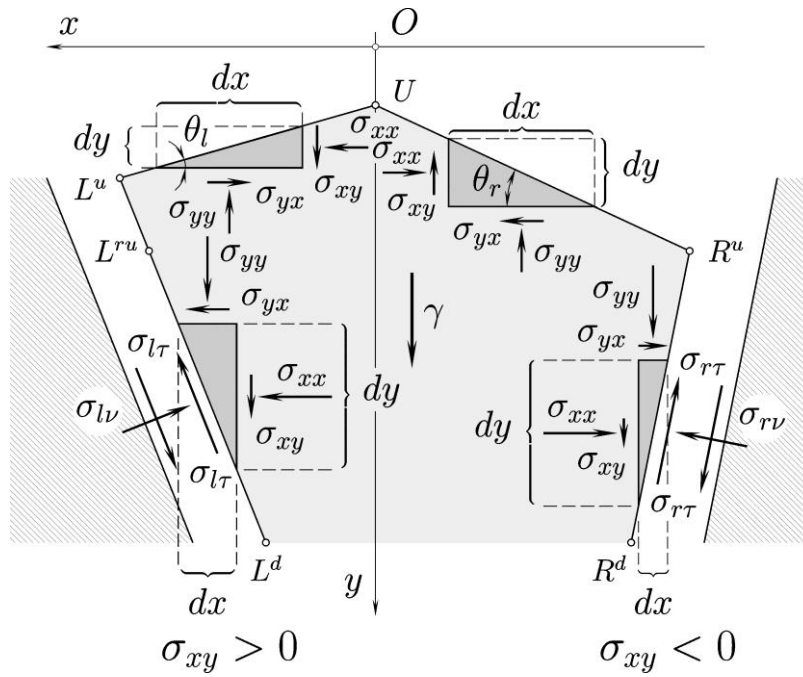


Рис. 2 - Иллюстрация граничных условий, действующих вдоль боковых линий контакта  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$  среды с ограничивающими поверхностями

Для плоского напряженного состояния главные нормальные напряжения определяются по формуле [9]:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}]. \quad (20)$$

В таком случае условие (19) с учетом выражений (20) дает

$$(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \quad (21)$$

или

$$\sigma_{xx} \sigma_{yy} = \tau_{xy}^2 \quad (22)$$

и с учетом выражений (3)

$$s^2 - k^2 \cos^2 2\varphi = k^2 \sin^2 2\varphi \quad (23)$$

$$s | L^u U R^u = k. \quad (24)$$

Принимая во внимание определение  $s$  (2), а также условия (19) и (24) получаем

$$\sigma_1 | L^u U R^u = 0, \quad \sigma_3 | L^u U R^u = 2k. \quad (25)$$

Далее рассмотрим два элементарных треугольника  $dx$  и  $dy$  располагающиеся у верхних границ  $L^u U$ ,  $U R^u$  и запишем для них уравнение баланса действующих по горизонтали сил

$$\sigma_{xx} dy - \sigma_{yx} dx = 0, \quad (26)$$



из которого используя (3) и (24) получаем

$$\theta_l = \varphi |L^u U, \quad \theta_r = \varphi |UR^u \quad (27)$$

Дополнительные ограничения, действующие на левой  $L^u L^d$  и правой  $R^u R^d$  границах сформулируем, прибегнув к анализу действующих на них условий внешнего трения (рис.2). Определим предельные значения величин удельного трения  $\tau_l$  и  $\tau_r$ , действующих на левой и правой границах области пластичности:

$$\tau_i = f_i \sigma_{iv}, \quad i \in \{l, r\}. \quad (28)$$

где:  $f$  и  $\sigma_{iv}$  - коэффициенты внешнего трения, и нормальные напряжения, действующие на левой  $L^u L^d$  ( $i = l$ ) и правой  $R^u R^d$  ( $i = r$ ) границах области  $L^u UR^u R^d L^d$ .

Поскольку трение  $T_i$  уравнивается касательными напряжениями  $\sigma_{ir}$  ( $i \in \{l, r\}$ ) действующими вдоль границ  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$ , то это значит, что  $\tau_i$  не всегда реализуется полностью, а значит справедливо неравенство

$$|\sigma_{ir}| \leq \tau_i = f_i \sigma_{iv}, \quad i \in \{l, r\}, \quad (29)$$

где знак модуль в левой части  $|\sigma_{ir}|$  обусловлен тем, что, во-первых, касательное напряжение  $\sigma_{ir}$  может быть, как положительным, так и отрицательным, а, во-вторых, внешнее трение вдоль границ  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$  возможно только в случае сжатия, т.е. когда вдоль рассматриваемых поверхностей нормальная компонента  $\sigma_{iv} > 0$ , а, значит, и удельное трение  $\tau_i > 0$ .

Для того, что бы граничные условия (29) можно было использовать в дальнейшем необходимо касательную  $\sigma_{ir}$  и нормальную  $\sigma_{iv}$  компоненты полного напряжения

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{iv}^2 + \sigma_{ir}^2}, \quad i \in \{l, r\}, \quad (30)$$

действующего вдоль границ  $L^u L^d$  ( $i = l$ ) и  $R^u R^d$  ( $i = r$ ) выразить через компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$ . С целью вычисления напряжений  $\sigma_{iv}$  и  $\sigma_{ir}$ , ( $i \in \{l, r\}$ ) используем элементарные прямоугольные треугольники, располагающиеся вдоль границ  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$ . На рис. 2 они выделены затемнением. Длина их катетов равна  $dx$  и  $dy$ . Ориентация нормальных составляющих напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , опять-таки понятна исходя из физической сути задачи. А для того, что бы определиться с тем, как ориентированы касательные напряжения,  $\sigma_{ir}$  следует задействовать правило парности [7-9]. Строго говоря, оно формулируется применительно к поверхностям, пересекающимся под прямым углом, но, тем не менее, в случае плоского напряженного состояния справедливо следующее: чем ближе к

прямоугольной величина угла треугольника ограничивающего элементарный объем среды, тем справедливее положения упомянутого правила. Опираясь на это замечание можно утверждать, что у вершины среднего по величине угла треугольника векторы  $\sigma_{xy}$  должны ориентироваться навстречу векторам  $\sigma_{ir}$ , а у вершины прямого угла векторы  $\sigma_{xy}$  должны быть попарно равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

В отношении знаков касательных напряжений воспользовавшись правилом из работы [9] можно сказать, что вблизи левой границы  $L^u L^d \sigma_{xy} > 0$ , а вблизи правой  $R^u R^d \sigma_{xy} < 0$ . Таким образом, при переходе слева направо через область  $L^u U R^u R^d L^d$  касательные напряжения  $\sigma_{xy}$  изменяют свой знак "+" на "-". Это согласуется с интервалами

$$\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2}\pi[, \varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (11) \text{ и выражением для } \sigma_{xy} \quad (3).$$

В дальнейшем, используя известный опыт, по обоснованию возможных интервалов значений угла  $\varphi$  [9], примем, что в условии (11)  $\varphi_{x_0} = \frac{1}{2}\pi$ , а, значит,

$$\varphi \in ]0, \pi[. \quad (31)$$

Для вычисления  $\sigma_{iv}$  запишем векторные уравнения силового баланса, состоящие из составляющих напряжений и весовых сил,  $\frac{1}{2} \vec{\gamma} dx dy$  действующих на элементарные треугольники в направлении нормали к их гипотенузам

$$\frac{dx}{\sin \beta_i} \vec{\sigma}_{iv} = \vec{\sigma}_{yy} dx + \vec{\sigma}_{xx} dy + \vec{\sigma}_{xy} dx + \vec{\sigma}_{xy} dy + \frac{1}{2} \vec{\gamma} dx dy, \quad i \in \{l, r\} \quad (32)$$

где дифференциалы  $dx, dy$  связаны соотношением  $dx : dy = tg \beta_i = const$  и являются бесконечно малыми величинами одного порядка. В случае предельного перехода, когда  $(dx, dy) \rightarrow 0$ , произведение  $dx, dy$  дает бесконечно малую величину более высокого порядка чем сами множители  $dx$  и  $dy$ . Таким образом, применив предельную теорему [9] и определения  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  (3) переписываем выражения (32) в скалярном виде:

$$\frac{dx}{\sin \beta_i} \sigma_{iv} = \sigma_{yy} dx \sin \beta_i + \sigma_{xx} dy \cos \beta_i + \zeta (\sigma_{xy} dx \cos \beta_i + \sigma_{xy} dy \sin \beta_i),$$

$$\zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[. \end{cases} \quad (33)$$

После преобразования они дают:

а) в компонентах тензора напряжений

$$\sigma_{iv} = \sigma_{yy} \sin^2 \beta_i + \sigma_{xx} \cos^2 \beta_i + \zeta \sigma_{xy} \sin 2\beta_i \quad (34)$$

где:  $i, \zeta$  - соответствует (33);

б) в развернутом виде

$$s_i + k \cos 2(\varphi_i - \zeta \beta_i); \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2} \pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2} \pi, \pi[. \end{cases} \quad (35)$$

Для вычисления  $\sigma_{ir}$  поступим аналогично выкладкам ((32) - (35)) и запишем векторные уравнения силового баланса, состоящие из составляющих напряжений и весовых сил  $\frac{1}{2} \vec{\gamma} dx dy$  действующих на элементарные треугольники в направлении их гипотенуз.

$$\frac{dx}{\sin \beta_i} \vec{\sigma}_{ir} = \vec{\sigma}_{yy} dx + \vec{\sigma}_{xx} yx + \vec{\sigma}_{xy} dx + \vec{\sigma}_{xy} dy + \frac{1}{2} \vec{\gamma} dx dy, \quad i \in \{l, r\} \quad (36)$$

или в скалярном виде, с учетом определений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  (3) и предельной теоремы [9]

$$\frac{dx}{\sin \beta_i} \sigma_{ir} = \sigma_{yy} dx \cos \beta_i - \sigma_{xx} dy \sin \beta_i - \zeta (\sigma_{xy} dx \sin \beta_i - \sigma_{xy} dy \cos \beta_i), \quad (37)$$

где:  $i, \zeta$  - соответствует (33).

После преобразования они дают:

а) в компонентах тензора напряжений

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\beta_i + \sigma_{xy} \cos 2\beta_i; \quad (38)$$

б) в развернутом виде

$$\sigma_{ir} = k \sin 2(\varphi_i - \zeta \beta_i); \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2} \pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2} \pi, \pi[. \end{cases} \quad (39)$$

Далее подставляем значения  $\sigma_{iv}$  (35) и  $\sigma_{ir}$  (39) в условие (29). После введения

Замены  $s = s_i$  и  $\varphi = \varphi_i$ , где  $s_i$  и  $\varphi_i$  значения величин  $s$  и  $\varphi$  вдоль  $i$ -той границы ( $i \in \{l, r\}$ ), получаем искомую форму граничных условий (условий трения), которые действуют вдоль отрезков прямых  $L^u L^d$  ( $i = l$ ) и  $R^u R^d$  ( $i = r$ ):

$$\frac{k|\sin 2(\varphi_i - \zeta \beta_i)|}{s_i + k \cos 2(\varphi_i - \zeta \beta_i)} \leq f_i; \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[. \end{cases} \quad (40)$$

Решив (40) относительно  $s_i$  получаем :

$$s_i \geq k \left[ \frac{|\sin 2(\varphi_i - \zeta \beta_i)|}{f_i} - \cos 2(\varphi_i - \zeta \beta_i) \right];$$

$$\zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[. \end{cases} \quad (41)$$

В отношении угловых точек  $L^u$  и  $R^u$  уточним, что в них должны выполняться как ограничение (19) или (24), так и условия трения (40).

Следовательно, выполнив подстановку  $s_i = s = k$  (24) в (40) и введя замену  $\varphi_i = \varphi_{iu}$  находим:

$$|tg(\varphi_{iu} - \zeta \beta_i)| \leq f_i \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[. \end{cases} \quad (42)$$

где:  $\varphi_{iu}$  - значения угла  $\varphi$  в точках  $L^u$  ( $i = l$ ) и  $R^u$  ( $i = r$ ).

Решив последнее относительно  $\varphi_{iu}$ , с учетом того, что  $0 \leq \beta_i < \frac{1}{2}\pi$ , находим :

$$(\varphi_{iu} - \zeta \beta_i) \in \left[ -\frac{1}{2}\pi, 0 \right]; \quad tg(\varphi_{iu} - \zeta \beta_i) \leq 0;$$

$$0 < [\arctg(-f_i) + \zeta \beta_i] \leq \zeta \beta_i; \quad \varphi_{iu} \leq \zeta \beta_i \quad (43)$$

$$(\varphi_{iu} - \zeta \beta_i) \in \left[ 0, \frac{1}{2}\pi \right]; \quad tg(\varphi_{iu} - \zeta \beta_i) \geq 0;$$

$$\zeta \beta_i \leq \varphi_{iu} \leq (\arctg(-f_i) + \zeta \beta_i); \quad (44)$$

$$(\varphi_{iu} - \zeta\beta_i) \in \left[ \frac{1}{2}\pi, \pi \right]; \quad \operatorname{tg}(\varphi_{iu} - \zeta\beta_i) < 0$$

$$\frac{1}{2}\pi + \zeta\beta_i \leq [\operatorname{arctg}(-f_i) + \zeta\beta_i] \leq \varphi_{iu} < \pi. \quad (45)$$

На этом формулировка граничных условий заканчивается.

Для анализа полученных соотношений (рис. 3) проанализируем графики граничных зависимостей полусуммы главных нормальных напряжений  $s$  от величины угла  $\varphi$ , отвечающие соотношению на абсциссе (10), условию трения (41), а также условию (42). Все показанные графики соответствуют уровню  $L^u R^u$ . Ниже этой горизонтали, т.е. когда  $y \geq y | R^u$  соотношение  $s |_{y=const} = s(\varphi)$  (10) выполняется в пределах всего зазора между левой  $L^u R^d$  и правой  $R^u R^d$  границами области.  $L^u U R^u R^d L^d$ , в то время как условие трения (41) с индексами ( $i \in \{l, r\}$ ) работают только у соответствующих границ. Условие (42) не действует когда  $y \geq y | R^u$ . Фактическая ширина интервала изменения угла  $\varphi$ .

$$\varphi |_{y=const} \in [\varphi | L^u L^d, \varphi | R^u R^d], \quad (46)$$

на момент начала решения задачи неизвестна, поэтому на рис. 3 отображен полный интервал (31).

Поскольку при переходе от левой границы к правой касательные напряжения  $\sigma_{xy}$  изменяют свой знак с положительного на отрицательный, то имея ввиду (3) можно утверждать, что для интервала возможных значений угла  $\varphi$  (46) справедливо

$$\frac{1}{2}\pi \in [\varphi | L^u L^d, \varphi | R^u R^d], \quad (47)$$

а, значит, первая кривая  $s |_{y=const} = s(\varphi)$  (10) физической сущности задачи не соответствуют. Можно ожидать, что минимально узкий, но, тем не менее, возможный, интервал изменения  $\varphi$  соответствует такому значению постоянной  $C_y^+$  при котором график № 2 соотношения (10), с касанием проходит над кривой условия трения (41) с индексом ( $ir$ ).

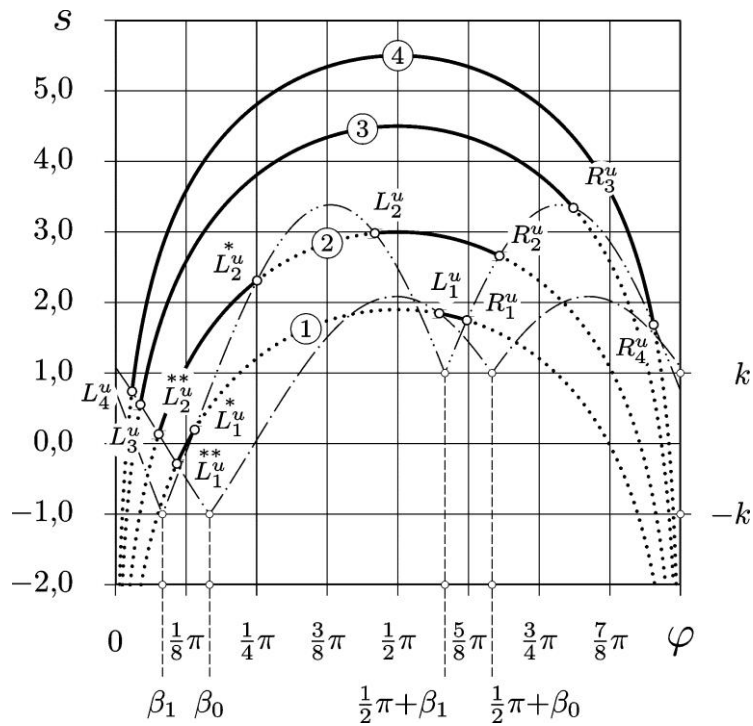


Рис. 3 - Граничные зависимости полусуммы главных нормальных напряжений  $s$  от величины угла  $\varphi$ , отвечающие: а) соотношению на абсциссе ((10) - .....—) при различных уровнях интенсивности внешней нагрузки (кривые 1, 2, 3 и 4, которым соответствует  $C_y^+ = 1,986$ ;

2,843; 4,5 и 5,5); б) условию трения (41) на левой ( $\beta_l = \frac{1}{6}\pi$ ,  $f_l = \text{tg}0,50$  - .....—) и правой (

$\beta_r = \frac{1}{12}\pi$ ,  $f_r = \text{tg}0,30$  - .....—) границах области пластичности. Сцепление  $k = 0,8$

Именно такое напряженное состояние можно рассматривать как начальное, т.е. такое, которое соответствует минимальному количеству среды, располагающейся над уровнем  $L^u R^u$  при котором еще возможно достижение состояния пластичности. Кривые № 3 и № 4 соответствуют ситуации, когда ниже линии  $L^u R^u$  состояние пластичности достигается гарантировано. Поскольку условие (41) представляет собой неравенство, то возможно, что при увеличении  $y > y|_{R^u}$  интервал (46) возможных значений угла  $\varphi$  будет сужаться.

## Выводы

В терминах теории пластичности задача формирования валка органических удобрений валкообразователем ранее не решалась. Выведенные впервые граничные условия дают возможность определить все недостающие постоянные коэффициенты из соотношений, которые выполняются вдоль линий параллельных осей декартовой системы координат. Они же в дальнейшем позволят построить поля напряжений, которые складываются в объеме удобрений впереди валкообразователя, а, значит, определиться с параметрами валкообразователя, которые минимизируют возможность проявления сводообразования и положительно скажутся на равномерность формируемого валка удобрений.

## Список использованных источников

1. Томленов А.Д. Теория пластического деформирования материалов. - М.: Металлургия, 1972. -408 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975. - 398 с.
3. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. - М.: Изд.-во Моск. ун-та, 1979. - 208 с.
4. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: - К.: Наукова думка, 1981. - 496 с.
5. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для машиностроит. спец. вузов. - М.: Высш. шк., 1990. -368 с.
6. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле // Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения.- К.: Выща школа, 1991. -Ч. 1. - 264 с.
7. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 2000. - 286 с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. -9-е изд., перераб. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. -512 с.
9. Мельник В. И. Предельное равновесие сплошных неупругих сред: [монография] / В. И. Мельник. - Харьков: Издательство КП Типография № 13, 2006. - 368 с.
10. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. [4-е изд.]. - М.: Наука, 1990. — 272 с.

## Анотація

### ГРАНИЧНІ УМОВИ ДЛЯ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФОРМУВАННЯ ВАЛКА ОРГАНІЧНИХ ДОБРИВ

Мельник В.І., Романашенко О.А.

*Задачі формування валка органічних добрив валкоутворювачем базуються на застосуванні теорії пластичності. Приведені основні рівняння і сформульовані граничні умови.*

## Abstract

### BORDER TERMS FOR TASK OF DESIGN PROCESSES OF FORMING OF ROLLER OF ORGANIC FERTILIZERS

V. Melnik, A. Romanashenko

*The task of forming of roller of organic fertilizers of roller is based on application of theory of plasticity. Basic equalizations over are brought and border terms are set forth.*