УДК 629.7.534.14.001

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕТАЛОННИХ РОЗВЯЗКІВ У ДИНАМІЧНОМУ АНАЛІЗІ ВПЛИВУ РУХЛИВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПРУЖНИЙ (АНІЗОТРОПНИЙ) НАПІВПРОСТІР

Ловейкін В.С., д.т.н., проф., Човнюк Ю.В., к.т.н., доц., Яворська А.В., асп.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Запропонований метод еталонних моделей та їх розв'язків для задач динамічного аналізу впливу рухливого навантаження на пружний та пружний анізотропний напівпростір.

Постановка проблеми. Теоретичний аналіз нестаціонарних коливань, хвилеутворень суцільних стискуваних середовищ залучає увагу багатьох дослідників в Україні та за її кордонами. Це обумовлено тим, що у багатьох областях (сільськогосподарської) техніки, і у промисловості (обробка сільськогосподарської сировини) все частіше необхідно розраховувати поля напружень та деформацій, які виникають у суцільних деформівних тілах різноманітної конфігурації та при різного роду впливах (удари, коливання), а також при дії рухливих навантажень.

Динамічні задачі механіки деформівних середовищ належать до розряду досить складних задач, які досліджуються методами математичної фізики. При цьому слід зазначити, що постановка та розв'язок задач теоретичного опису хвильових явищ, коливань у суцільних середовищах, тілах, викликаних у т.ч. дією рухливих навантажень завжди зв'язані із введенням схематизованих моделей та ідеальних процесів(т.з. еталонні моделі та їх (еталонні) розв'язки), які, взагалі кажучи, відповідають певним спостереженням і дослідам з реальними тілами.

Складність розв'язку задач, які стосуються неусталених процесів, що відбуваються у суцільних середовищах обумовлена низкою причин, наприклад, великим розмаїттям *реологічних* властивостей реальних середовищ (анізотропія, в'язкість, повзучість, пластичність, неоднорідність та ін.), що призводить, у свою чергу, до великого розмаїття схематизованих моделей для опису у тому чи іншому наближенні реальних явищ і не дозволяє створити єдину математичну модель суцільного середовища; складність рівнянь, які описують динамічну поведінку стискуваного суцільного середовища тощо.

Незважаючи на велику кількість математичних моделей суцільних середовищ, математичні методи розв'язку динамічних задач розроблені у основному для таких середовищ, як акустичне, пружне та в'язкопружне, рух котрих описується лінійними диференціальними чи інтегро-диференціальними рівняннями.

Однак слід зазначити, що навіть для вказаних середовищ у лінійній постановці проблеми дуже далеко до повного вирішення.

Найбільш простим класом динамічних задач у вказаних середовищах є усталені процеси, котрим присвячена найбільша кількість різних досліджень, публікацій.

Огляд літератури по темі дослідження. Математичні методи, які застосовуються при розв’язуванні задач нестаціонарних коливань, хвилеутворень, хвиль у суцільних пружних (анізотропних) середовищах (у т.ч. при дії рухливих навантажень), досить різноманітні [1-5]. Основними є такі: метод інваріантно-функціональних рішень, запропонований В.І.Смирновим та С.Л.Соболєвим, метод Вінера-Хопфа, метод інтегральних перетворень, узагальненні методи Вольтерра та Адамара, метод плоских хвиль, метод променевої оптики, метод розділення змінних, різноманітні чисельні методи.

У даній роботі наведені лише ті результати, котрі отримані аналітичними методами. Ці результати дозволяють визначити параметри хвильового поля, у різних точках фізичного простору та у будь-який момент часу в усіх розглядуваних задачах.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних закономірностей динаміки пружного (анізотропного) напівпростору при дії на останній рухливого навантаження методом еталонних моделей (та їх розв’язків).

Виклад основного змісту дослідження

1.Постановка динамічних задач для пружного напівпростору.

Загальну плоску динамічну задачу для пружного напівпростору y≤0 можна математично сформулювати так.

Необхідно знайти розв’язок системи рівнянь у напівпросторі y<0:

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\cdot\dfrac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}=\rho\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ; \\ (\lambda+\mu)\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(\lambda+2\mu)\cdot\dfrac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+\mu\cdot\dfrac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}=\rho\cdot\dfrac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{1}$$

відносно величин переміщень (u,v). При цьому u(x,y,t), v(x,y,t) – переміщення вздовж осей ОХ та ОУ, відповідно, які є функціями просторових координат (x,y) та часу t, (λ, μ) – константи Ламе, які характеризують фізико-механічні властивості середовища, ρ – його щільність.

У якості граничних умов можна обрати одне з трьох таких:

$$^{2}.\ \ \sigma_{óó}=-f_1(x,t),\ \ \tau_{xy}=-f_2(x,t)\quad \text{при y=0;} \tag{2}$$

$$^{22}.-\mathrm{v}=f_1(x,t),\ \ \tau_{xy}=-f_2(x,t)\quad \text{при y=0;} \tag{3}$$

$$^{222}.\ \ \mathrm{v}=f_1(x,t),\ \ u=f_2(x,t)\quad \text{при y=0;} \tag{4}$$

а також нульовим початковим умовам:

$$u=\mathrm{v}=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}=0\ \text{ при t=0.} \tag{5}$$

Розв’язок будь-якої із задач (2)-(4) математично досить складний, тому розглянемо деякий частинний випадок динамічного аналізу пружного напівпростору.

2.Вплив рухливого навантаження на пружний напівпростір .

Нехай по поверхні y=0 пружного напівпростору y<0 з постійною швидкістю $\mathcal{D}$ переміщуються нормальне і дотичне навантаження, тобто розглянемо граничні умови (2), коли:

$$\begin{cases} f_1(x,t) = f_1(x - \mathcal{D}t) \cdot H(x - \mathcal{D}t)\ ; \\ f_2(x,t) = f_2(x - \mathcal{D}t) \cdot H(x - \mathcal{D}t)\ , \end{cases} \tag{6}$$

де: H(ξ) – функція Хевісайда аргументу ξ.

Введемо рухливі координати:

$$x' = x - \ddot{A}t, \qquad y' = y, \tag{7}$$

при чому штрихи у подальшому для зручності будемо опускати і введемо потенціали φ та ψ:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{o}} + \frac{\partial \psi}{\partial \acute{o}}; \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial \acute{o}} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{o}}. \tag{8}$$

Тоді задачу у рухливих координатах можна звести до розв'язку хвильових рівнянь:

$$\left(-1 + \frac{\ddot{A}^2}{\grave{a}^2}\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \qquad \left(-1 + \frac{\ddot{A}^2}{b^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \acute{o}^2} = 0, \tag{9}$$

де: (a,b) – швидкості поздовжніх та поперечних хвиль у пружному напівпросторі, відповідно $\left(\grave{a} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \grave{a} > b\right)$, при наступних граничних умовах:

$$\begin{cases} \rho \cdot \left[\left(\grave{a}^2 - 2b^2\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{o}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \acute{o}^2}\right) + 2b^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \acute{o}^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{o} \partial \acute{o}}\right)\right] = -f_1(x) \cdot H(x); \\ \rho b^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{o} \partial \acute{o}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \acute{o}^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{o}^2}\right) = -f_2(x) \cdot H(x). \end{cases} \tag{10}$$

Початкові умови у такій постановці відсутні.

Найбільш цікавим є випадок, коли $\mathcal{D} > a$, тобто так званий надзвуковий режим впливу зовнішніх навантажень. (Цей режим виникає у середовищі, яке має низький модуль пружності Е (модуль Юнга) і ще недостатньо ущільнене під дією зовнішнього рухливого навантаження).

У випадку $\mathcal{D} > a$ рівняння (9) гіперболічного типу і їх загальні розв'язки мають вид:

$$\begin{cases} \phi(\tilde{o}, \acute{o}) = \phi_1(\tilde{o} + \alpha \acute{o}) + \phi_2(\tilde{o} - \alpha \acute{o}); \\ \psi(\tilde{o}, \acute{o}) = \psi_1(\tilde{o} + \beta \acute{o}) + \psi_2(\tilde{o} - \beta \acute{o}), \end{cases} \tag{11}$$

де: $\alpha = \sqrt{\frac{\ddot{A}^2}{\grave{a}^2} - 1}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\ddot{A}^2}{b^2} - 1}.$

Оскільки нижня границя відсутня, то $\varphi_2=\psi_2=0$.

Для визначення φ_1 та ψ_1 підставляємо (11) у граничні умови (10). Отримаємо:

$$\begin{cases} \left(\beta^2 - 1\right) \cdot \phi_1''(\tilde{o}) - 2\beta \cdot \psi_1''(\tilde{o}) = -\frac{f_1(x)}{\rho \ddot{A}^2} \cdot \acute{I}\;(\tilde{o}) \cdot \left(\beta^2 + 1\right); \\ 2\alpha \cdot \phi_1''(\tilde{o}) + \left(\beta^2 - 1\right) \cdot \psi_1''(\tilde{o}) = -\frac{\left(\beta^2 + 1\right)}{\rho \ddot{A}^2} \cdot f_2(x) \cdot \acute{I}\;(\tilde{o}), \end{cases} \tag{12}$$

звідки

$$\begin{cases} \phi_1''(\tilde{o}) = -\frac{\left(\beta^2 + 1\right)}{\rho \ddot{A}^2} \cdot \frac{\left[\left(\beta^2 - 1\right) f_1(x) + 2\beta \cdot f_2(x)\right] \cdot \acute{I}\;(\tilde{o})}{\left[4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2\right]}; \\ \psi_1''(\tilde{o}) = \frac{\left(\beta^2 + 1\right)}{\rho \ddot{A}^2} \cdot \frac{\left[2\alpha \cdot f_1(x) - \left(\beta^2 - 1\right) \cdot f_2(x)\right] \cdot \acute{I}\;(\tilde{o})}{\left[4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2\right]}. \end{cases} \tag{13}$$

Знаючи величини φ_1'', ψ_1'' для напружень δ_{xx}, δ_{yy}, τ_{xy} у напівпросторі $y<0$ будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{o}\tilde{o}} = &-\frac{\left(\beta^2 - 2\alpha^2 + 1\right)}{4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2} \cdot \left[\left(\beta^2 - 1\right) \cdot f_1(x + \alpha y) + 2\beta \cdot f_2(x + \alpha y)\right] \cdot H(x + \alpha y) + \\ &+ \frac{2\beta}{4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2} \cdot \left[2\alpha f_1(x + \beta y) - \left(\beta^2 - 1\right) \cdot f_2(x + \beta y)\right] \cdot H(x + \beta y); \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = &-\frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2} \cdot \left[\left(\beta^2 - 1\right) \cdot f_1(x + \alpha y) + 2\beta \cdot f_2(x + \alpha y)\right] \cdot H(x + \alpha y) - \\ &- \frac{2\beta}{4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2} \cdot \left[2\alpha f_1(x + \beta y) - \left(\beta^2 - 1\right) \cdot f_2(x + \beta y)\right] \cdot H(x + \beta y); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = &-\frac{2\alpha}{4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2} \cdot \left[\left(\beta^2 - 1\right) \cdot f_1(x + \alpha y) + 2\beta \cdot f_2(x + \alpha y)\right] \cdot H(x + \alpha y) + \\ &+ \frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{4\alpha\beta + \left(\beta^2 - 1\right)^2} \cdot \left[2\alpha f_1(x + \beta y) - \left(\beta^2 - 1\right) \cdot f_2(x + \beta y)\right] \cdot H(x + \beta y); \end{aligned} \tag{16}$$

З формул (14)-(16) безпосередньо видно, що вплив поздовжніх та поперечних хвиль на величини напружень у напівпросторі досить суттєвий.

Крім того, з формул (14)-(16) випливають частинні задачі, коли діє тільки нормальне чи тільки дотичне напруження на границі.

Проінтегрувавши величини (12) по *x* для переміщень, отримаємо вирази:

Отже,отримали точний розв’язок задачі. Формули (14)-(16) дозволяють оцінювати вплив різних фізичних постійних на розподіл поля напружень у збуреній області.

Зокрема, неважко оцінити вплив коефіцієнту Пуассона на розподіл напруження σ_{xx} по поверхні напівпростору $y=0$,коли дотичне напруження при y=0 відсутнє.

$$\mathrm{v}(x,y) = -\alpha \cdot \frac{\left(\beta^2+1\right)}{\rho \cdot \text{Д}^2 \cdot \Delta} \cdot \left[\left(\beta^2-1\right) \cdot F_1\left(x+\alpha y\right) + 2\beta \cdot F_2\left(x+\alpha y\right)\right] \cdot H\left(x+\alpha y\right) - $$
$$- \frac{\left(\beta^2+1\right)}{\rho \cdot \text{Д}^2 \cdot \Delta} \cdot \left[2\alpha \cdot F_1\left(x+\beta y\right) - \left(\beta^2-1\right) \cdot F_2\left(x+\beta y\right)\right] \cdot H\left(x+\beta y\right); \qquad (18)$$

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(\xi) d\xi; \qquad F_2(x) = \int_0^x f_2(\xi) d\xi; \qquad \Delta = 4\alpha\beta + \left(\beta^2-1\right)^2.$$

Вважаючи у формулах (14)-(16) y=0 та $f_2=0$ та вводячи коефіцієнт Пуассона υ $\left(\upsilon = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$, для σxx отримаємо вираз:

$$\sigma_{\tilde{o}\tilde{o}}(\tilde{o},0) = F\left(v, \text{Д}_0\right) \cdot f_1(x), \quad \text{Д}_0 = \text{Д}/\grave{a}, \qquad (18)$$

$$F(v,\text{Д}_0) = \frac{\grave{A}_1(v,\text{Д}_0) - \grave{A}_2(v,\text{Д}_0)\hat{A}(v,\text{Д}_0)}{\grave{A}_1(v,\text{Д}_0) - \grave{A}_2(v,\text{Д}_0)};$$

де: $\grave{A}_1(v,\text{Д}_0) = (1-2v)^{3/2} \cdot \sqrt{(\text{Д}_0^2-1)(1-v) - (1-2v)}; \grave{A}_2(v,\text{Д}_0) = \left[\text{Д}_0^2 \cdot (1-v) - (1-2v)\right];$ (19)

$\hat{A}(v,\text{Д}_0) = \left[\text{Д}_0^2 \cdot (1-v) - (\text{Д}_0^2-1)(1-2v)\right].$

На рис.1 показана залежність F(υ, $Д_0$) від коефіцієнта Пуассона υ при різних значеннях параметра $Д_0$. Як випливає з рис.1, вплив коефіцієнта υ на розподіл σ_{xx} при y=0 суттєвий, особливо при $Д_0$=1. При цьому напруження при y=0 змінює знак у залежності від змін коефіцієнта υ, тобто для одних значень υ воно діє як розтягуюче, а для других υ - як стискаюче.

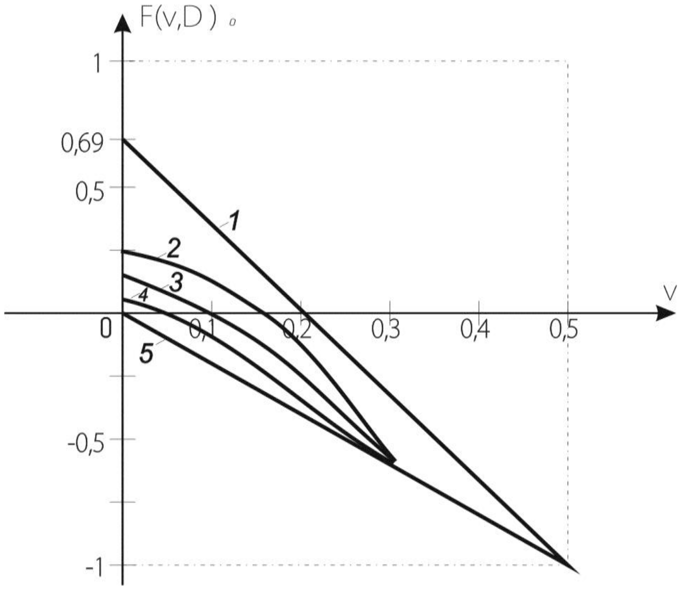

Рис.1 – Залежність напруження σ_{xx} (його знаку) від коефіцієнта Пуассона υ:

$$1 - \text{Д}_0 = \sqrt{1{,}1}; \quad 2 - \text{Д}_0 = \sqrt{2}; \quad 3 - \text{Д}_0 = \sqrt{5}; \quad 4 - \text{Д}_0 = \sqrt{10}; \quad 5 - \text{Д}_0 = \infty.$$

3.Вплив рухливого навантаження на пружний анізотропний на півпростір

Нехай на поверхні анізотропного напівпростору переміщується навантаження у вигляді дельта-функції з постійною швидкістю $\mathcal{D}$. Для довільно розподіленого навантаження розв’язок отримуємо при застосуванні інтеграла Дюамеля до розв’язку , отриманому у даному частинному (еталонна модель) випадку. Розглянемо у подальшому випадок плоскої деформації.

Закон Гука у даній двовимірній задачі у найзагальнішому випадку анізотропії, коли будь-які елементи пружної симетрії відсутні, має вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = a_{11}\varepsilon_{xx} + a_{12}\varepsilon_{yy} + a_{13}\varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} = a_{12}\varepsilon_{xx} + a_{22}\varepsilon_{yy} + a_{23}\varepsilon_{xy}; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = a_{13}\varepsilon_{xx} + a_{22}\varepsilon_{yy} + a_{33}\varepsilon_{xy}, \end{cases} \tag{20}$$

де:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial è}{\partial õ}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}; \varepsilon_{xy} = \frac{\partial è}{\partial õ} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}; \tag{21}$$

де: (u, v) –компоненти вектора переміщення; a_{ij} – пружні константи.

Рівняння, які описують рух середовища у напівпросторі, мають вид:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{13}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{33})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + a_{23}\frac{\partial^2 \mathrm{v}v}{\partial y^2} = \rho \cdot a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ a_{13} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{33})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{33}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} + 2a_{23}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{22}$$

Зручніше перейти до рухомих координат (x′,y′), які визначаються за формулами:

$$x = x' + Ät', \qquad y' = y, \tag{23}$$

причому штрихи у подальшому для спрощення записів будемо опускати.

$$\begin{cases} (a_{11} - \rho Ä^2) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{13}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{33})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + a_{23}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} = 0; \\ a_{13} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{33})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (a_{33} - \rho Ä^2)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} + 2a_{23}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

граничні умови задачі такі:

У рухливих координатах (x,y) рівняння руху мають вид:

$$\sigma_{óó} = -p \cdot \delta(x), \qquad \tau_{óõ} = p_1 \cdot \delta(õ) \text{ при y=0.} \tag{25}$$

Початкові умови у такій постановці,зрозуміло, відсутні. Частинний розв’язок системи (24) будемо шукати у виді:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= [A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)]e^{k \cdot q \cdot y}; \\ \mathrm{v}(x, y) &= [C \cdot \sin(kx) + E \cdot \cos(kx)]e^{k \cdot q \cdot y}. \end{aligned} \tag{26}$$

Підставляючи (26) у (24) для визначення $q^2=\xi$ отримаємо рівняння:

$$\xi^4 + a_0 \cdot \xi^3 + b_0 \cdot \xi^2 + c_0 \cdot \xi + p_0 = 0, \tag{27}$$

де

$$a_0 = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}\right)^{-2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \rho \ddot{A}^2)a_{22}\left(a_{23}a_{33} + a_{23}a_{22} + a_{22}a_{33}\right) + 2a_{33} \cdot \left(a_{23}^2 - a_{22}a_{33}\right)\left(a_{33} - \rho \ddot{A}^2\right) + \\ + 2\left(a_{12} + a_{23}\right)^2 \cdot \left(a_{23}^2 + a_{22}a_{23}\right) - 2\left(a_{13}a_{22}a_{23} + 2a_{13}a_{22}a_{23} + 3a_{33}a_{23}^2\right) + \\ + 4a_{23}a_{33}\left(a_{23}a_{33} + a_{13}a_{22}\right) + 2a_{13} \cdot \left(2a_{13}a_{22}^2 + 3a_{23}^3\right) \end{array} \right\},$$

$$p_0 = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}\right)^{-2} \cdot \left[(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)a_{22}\left(a_{23} - \rho \ddot{A}^2\right) - a_{13}^2\right];$$

$$b_0 = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}\right)^{-2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \rho \ddot{A}^2)\left[8a_{23}^2 \cdot \left(a_{12} + a_{33}\right) - 2a_{22}\left(a_{12} + a_{33}\right)^2 - a_{13}a_{22} \cdot \left(2a_{23} + a_{33}\right) - 6a_{33}a_{23}^2\right] + \\ + a_{22}^2\left(a_{11} - \rho \ddot{A}^2\right)^2 + 2(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) \cdot \left(2a_{22}a_{33} - a_{23}^2\right) + (a_{33} - \rho \ddot{A}^2) \cdot \\ \cdot \left[6a_{13}a_{23} \cdot \left(a_{12} + a_{33}\right) - 2a_{33}\left(a_{12} + a_{33}\right)^2 - 4a_{13} \cdot \left(a_{23}a_{33} + 2a_{13}a_{22}\right)\right] + \\ + a_{33}^2\left(a_{33} - \rho \ddot{A}^2\right)^2 + \left(a_{12} + a_{33}\right)^4 - 12a_{13}a_{23} \cdot \left(a_{12} + a_{33}\right)^2 + \\ + 2a_{13} \cdot \left(4a_{23}a_{33} + 3a_{13}a_{22}\right)\left(a_{12} + a_{33}\right) - 2a_{13}^2 a_{22}a_{33} \end{array} \right\};$$

$$\tilde{n}_0 = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}\right)^{-2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -2a_{33}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)\left(a_{33} - \rho \ddot{A}^2\right)^2 - 2a_{22}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)^2 \cdot \left(a_{33} - \rho \ddot{A}^2\right) + \\ + 4a_{23}^2(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)^2 + 4a_{13}^2\left(a_{33} - \rho \ddot{A}^2\right)^2 + 2\left[2a_{13}a_{23} + \left(a_{12} + a_{33}\right)^2\right] \cdot \\ \cdot (a_{11} - \rho \ddot{A}^2)\left(a_{33} - \rho \ddot{A}^2\right) + a_{13} \cdot \left[a_{13}a_{22} - 8a_{23}\left(\left(a_{12} + a_{33}\right)\right)\right] \cdot (a_{11} - \rho \ddot{A}^2) + \\ + a_{13}^2 \cdot \left[a_{33} - 8\left(a_{12} + a_{33}\right)\right]\left(a_{33} - \rho \ddot{A}^2\right) + 2a_{13}^2 \cdot \left[2a_{13}a_{23} + \left(a_{12} + a_{33}\right)^2\right] \end{array} \right\}. \quad (28)$$

З рівняння (27) визначаємо корені $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, і відповідно, $q_i = \sqrt{\xi_i}, \quad i = 1,2,3,4$ котрі мають вид:

$$q_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-\frac{\grave{a}_0 \pm \grave{A}_0}{4}} \pm \sqrt{\left(\frac{\grave{a}_0 \pm \grave{A}_0}{4}\right)^2 - \left[z + \frac{b_0}{6} + \frac{\grave{a}_0 z + \dfrac{\grave{a}_0 b_0}{6} - c_0}{\pm \grave{A}_0}\right]}, \qquad (29)$$

де

$$\begin{array}{l} \grave{A}_0 = \sqrt{8z + \grave{a}_0^2 - \dfrac{8}{3}b_0}; \quad z = \sqrt[3]{-q_0 + \sqrt{\ddot{A}_0}} + \sqrt[3]{-q_0 - \sqrt{\ddot{A}_0}}; \\ q_0 = -\dfrac{b_0^3}{216} + \dfrac{\grave{a}_0 b_0 \tilde{n}_0}{48} + \dfrac{23\rho_0 \tilde{n}_0}{12} - \dfrac{\rho_0 \grave{a}_0^2}{2} - \dfrac{\tilde{n}_0^2}{2}; \\ \ddot{A}_0 = \dfrac{35}{1728}\grave{a}_0^2 b_0^2 c_0^2 + \dfrac{517}{1296}\rho_0^2 b_0^2 + \dfrac{\rho_0^2 a_0^4}{4} - \dfrac{c_0^4}{4} - \dfrac{7}{324}\rho_0 b_0^4 + \dfrac{\rho_0 b_0^3 \grave{a}_0^2}{216} + \dfrac{b_0^3 c_0^2}{216} + \dfrac{73}{864}\rho_0 \grave{a}_0 b_0^2 c_0 - \\ - \dfrac{\grave{a}_0^3 b_0 c_0 \rho_0}{48} - \dfrac{\grave{a}_0 b_0 c_0^3}{48} - \dfrac{23}{12}\rho_0^2 \grave{a}_0^2 b_0 - \dfrac{23}{12}\rho_0 b_0 c_0^2 + \dfrac{439}{864}\grave{a}_0^2 c_0^2 \rho_0 + \dfrac{a_0^3 c_0^3}{1728} + \dfrac{\grave{a}_0 c_0 \rho_0^2}{36} - \dfrac{\rho_0^3}{27}. \end{array} \qquad (30)$$

Отже, загальний розв’язок (24) має вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{4} \int\limits_0^\infty A_n\left[\sin(kx) + \alpha_n \cdot \cos(kx)\right]e^{kq_n y}dk; \\ \mathrm{v}(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{4} \int\limits_0^\infty A_n\left[\beta_n \sin(kx) + \gamma_n \cdot \cos(kx)\right]e^{kq_n y}dk, \end{array} \right. \qquad (31)$$

де

$$\alpha_n = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n}; \qquad \beta_n = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n}; \qquad \gamma_n = \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_n};$$

$$\Delta_n = q_n \left\{ \begin{aligned} & q_n^4 \left[2a_{23}(a_{23}a_{33} + a_{13}a_{22}) - (a_{12} + a_{33}) \cdot \left(a^2_{23} + a_{22}a_{33} \right) \right] + \\ & + q_n^2 \left[\begin{aligned} & (a_{11} - \rho \ddot{A}^2)\left(a_{12}a_{22} + a_{22}a_{33} - 2a^2_{23} \right) + (a_{33} - \rho \ddot{A}^2)\left(a_{12}a_{33} + a^2_{33} - 2a_{13}a_{23} \right) - \\ & - (a_{12} + a_{33})^3 + 6a_{13}a_{23}(a_{12} + a_{33}) - 2a_{13}(a_{23}a_{33} + a_{13}a_{22}) \end{aligned} \right] + \\ & + \left[2a_{13}a_{23}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) + 2a^2_{13}(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) - (a_{12} + a_{33})(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) - a^2_{13}(a_{12} + a_{33}) \right] \end{aligned} \right\};$$

$$\Delta_{1n} = \left\{ \begin{aligned} & a_{23}\left(a_{22}a_{33} - a^2_{23} \right) q_n^6 + \\ & + \left[2a_{13}a_{22}(a_{12} + a_{33}) - a_{13}\left(a^2_{23} + a_{22}a_{33} \right) - a_{22}a_{23}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) - a_{23}a_{33}(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) \right] \cdot q_n^4 - \\ & - \left[a^2_{13}a_{23} + a_{23}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) + a_{22}a_{13}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) + (a_{13}a_{33} - 2a_{12}a_{13} - 2a_{13}a_{33})(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) \right] \cdot \\ & \cdot q_n^2 + \left[a^3_{13} - a_{13}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) \cdot (a_{33} - \rho \ddot{A}^2) \right] \end{aligned} \right\};$$

$$\Delta_{2n} = q_n \left\{ \begin{aligned} & 2q_n^4 \left[a_{22}a_{33}(a_{12} + a_{13}) - a_{23}\left(a^2_{23} + a_{22}a_{33} \right) \right] + \\ & + 2\left[a_{13}(a_{12} + a_{33})^2 + (a_{23}a_{33} - a_{12}a_{23} - 2a_{23}a_{33})(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) - a_{13}a_{33}(a_{12} + a_{33}) - 3a^2_{13}a_{23} \right] q_n^2 + \\ & + 2\left[a_{13}(a_{12} + a_{33})(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) - a_{23}(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) - a^3_{13} \right] \end{aligned} \right\};$$

$$\Delta_{3n} = \left\{ \begin{aligned} & q_n^6 a_{33}\left(a^2_{23} - a_{22}a_{33} \right) + \\ & + q_n^4 \left[\begin{aligned} & \left(2a_{22}a_{33} - a^2_{23} \right)(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) + a^2_{33}(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) + 4a_{13}a_{23}(a_{12} + a_{33}) - a_{33}(a_{12} + a_{33})^2 - \\ & - 2a_{13}(a_{23}a_{33} + 2a_{13}a_{22}) \end{aligned} \right] + \\ & + q_n^2 \left[\begin{aligned} & (a_{11} - \rho \ddot{A}^2)\left(a^2_{12} + 2a_{12}a_{33} + a^2_{33} + 2a_{13}a_{23} \right) - a_{22}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)^2 + 4a^2_{13}(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) \\ & - 2a_{33}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)(a_{33} - \rho \ddot{A}^2) - 4a^2_{13}(a_{12} + a_{33}) + a^2_{13}a_{33} \end{aligned} \right] + \\ & + \left[a^2_{13}(a_{11} - \rho \ddot{A}^2) + (a_{33} - \rho \ddot{A}^2)(a_{11} - \rho \ddot{A}^2)^2 \right] \end{aligned} \right\};$$

A_1, A_2, A_3, A_4 визначаються з граничних умов (25), котрі приймуть вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{4} \left[a_{12} + \gamma_n q_n a_{22} + a_{23}(\alpha_n q_n + \beta_n) \right] A_n = -\frac{P}{\pi k}; \\ & \sum_{n=1}^{4} \left[\alpha_n a_{12} - q_n \gamma_n a_{22} - a_{23}(q_n - \gamma_n) \right] A_n = 0; \\ & \sum_{n=1}^{4} \left[a_{13} + \gamma_n q_n a_{23} + a_{33}(\alpha_n q_n + \beta_n) \right] A_n = \frac{P_1}{\pi k}; \\ & \sum_{n=1}^{4} \left[\alpha_n a_{13} - q_n \gamma_n a_{23} - a_{33}(q_n - \gamma_n) \right] A_n = 0. \end{aligned} \right. \tag{33}$$

З (33) випливає, що $A_n = \frac{A_{n0}}{k}$, де A_{n0} від k не залежать.

Для величин напружень у випадку, коли q_n – комплексні числа отримаємо:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \sum_{n=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} \left[a_{11} + a_{12}\gamma_n q_n + a_{13}(\alpha_n q_n + \beta_n)\right] A_{n0} I_1(x,y) - \\ -\left[\alpha_n a_{11} - \beta_n q_n a_{12} - a_{13}(q_n - \gamma_n)\right] A_{n0} I_2(x,y) \end{matrix} \right\}; \\
\sigma_{yy} &= \sum_{n=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} \left[a_{12} + \gamma_n q_n a_{22} + a_{23}(\alpha_n q_n + \beta_n)\right] A_{n0} I_1(x,y) - \\ -\left[\alpha_n a_{12} - \beta_n q_n a_{22} - a_{23}(q_n - \gamma_n)\right] A_{n0} I_2(x,y) \end{matrix} \right\}; \\
\tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} \left[a_{13} + \gamma_n q_n a_{23} + a_{33}(\alpha_n q_n + \beta_n)\right] A_{n0} I_1(x,y) - \\ -\left[\alpha_n a_{13} - \beta_n q_n a_{23} - a_{33}(q_n - \gamma_n)\right] A_{n0} I_2(x,y) \end{matrix} \right\},
\end{aligned} \qquad (34)$$

де

$$I_1 = \frac{q_n y}{\left[(q_n y)^2 + x^2\right]\pi}; \qquad I_2 = \frac{x}{\left[(q_n y)^2 + x^2\right]\pi}.$$

Неважко побачити, що у випадку різних уявних коренів q_n , n=1,2,3,4, у анізотропному напівпросторі, у загальному випадку, розповсюджується чотири хвилі – дві поздовжні й дві поперечні.

Якщо a_0, b_0, c_0, p_0 зв'язані співвідношеннями:

$$p_0 = \frac{c_0^2}{a_0^2}, \qquad c_0 = \frac{a_0}{2} \cdot \left(b_0 - \frac{a_0^2}{4} \right) \qquad (35)$$

тоді у анізотропному напівпросторі буде дві хвилі, що відповідає трансверсально-ізотропному пружному тілу.

Якщо при y=0 маємо умови

$$\sigma_{yy} = -p \cdot \phi(x) \quad \text{ïðè} \quad x > 0 \quad \text{é} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \text{ïðè} \quad \text{õ} < 0, \tau_{xy} = 0; \qquad (36)$$

то у (25) необхідно покласти p_1=0 й до I_1 та I_2 застосувати інтеграл Дюамеля,тобто:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) \cdot \frac{q_n y}{\left[(q_n y)^2 + (x-\xi)^2\right]} d\xi; \\
I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) \cdot \frac{(x-\xi)}{\left[(q_n y)^2 + (x-\xi)^2\right]} d\xi.
\end{aligned} \qquad (37)$$

Аналогічно, коли при y=0:

$$\sigma_{yy} = 0; \quad \tau_{yx} = P_1 \cdot \varphi_1(x) \quad \textit{при} \quad x \ge 0, \quad \tau_{yx} = 0 \quad \textit{при} \quad x < 0, \qquad (38)$$

то у (33) вважаємо P=0 і замість I_1 та I_2 візьмемо (37), де φ необхідно замінити на φ_1.

Висновки

1. Застосування методу еталонних розв'язків (моделей) у динамічному аналізі впливу рухливого навантаження на пружний та пружний анізотропний напівпростори дозволяє встановити основні закономірності утворення й просторово-часової еволюції коливань та хвилеутворень у таких середовищах.
2. Отримані результати у подальшому можуть бути використані при

вдосконаленні та уточненні інженерних методів розрахунку подібних систем.

Список використаних джерел

1. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах / И.Г. Филиппов, О.А. Егорычев - М.: Машиностроение, 1977. – 304с.
2. Будаев В.С., Филиппов И.Г.Об одной нестационарной задаче для анизотропного полупространства / В.С. Будаев, И.Г. Филиппов // Прикладная механика. – 1970. – №6. – С.13-16.
3. Будаев В.С. Об одной краевой задаче динамической теории упругих анизотропных сред / В.С. Будаев // Прикладная механика и техническая физика. – 1974. - №3. – С.121-125.
4. Anderson D.V. Elastic ware propagation in layered anisotropic media / D.V. Anderson // Journal of Geophysical Research. -1966. - V.66. –P.2953-2963.
5. Buchwald V.T. Elastic wares in anisotropic media / V.T. Buchwald // Proceedings of Royal Society. - 1959. -V.A253. –Part 1275.

Аннотация

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОННЫХ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ВЛИЯНИЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА АНИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Ловейкин В.С., Човнюк Ю.В., Яворская А.В.

Предложен метод эталонных моделей и их решений для задач динамического анализа влияния подвижной нагрузки на упругое и упругое анизотропное полупространство.

Abstract

APPLICATION OF METHOD OF STANDARD DECISIONS IN DYNAMIC ANALYSIS OF INFLUENCE OF LIVE-LOAD ON ANISOTROPIC HALF-SPACE

V. Loveykin, Y. Chovnyk, A. Yavorskya

The method of reference models and their solutions for problems of the dynamic analysis of influence of mobile loading on elastic and elastic anisotropic halfspace is offered.