УДК 631.4: 631.316: 631.3.004.67

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОЧВЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ КУЛЬТИВАТОРНОЙ ЛАПЫ С ИЗМЕНЕННОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Макаренко А.Н., к.т.н., доцент
(ФГБОУ ВПО «Белгородская государственная сельскохозяйственная академия имени В.Я. Горина»)

В статье описывается моделирование движения частицы почвы по рабочей поверхности культиваторной лапы с дополнительными крошащими элементами. Такой подход может быть использован при проектировании рабочих органов почвообрабатывающих машин, имеющих рабочую поверхность отличную от традиционной

Для того чтобы теоретически правильно обосновать параметры культиваторной лапы с дополнительными крошащими элементами необходимо смоделировать закон движения частицы почвы по ее рабочей поверхности, а затем на основании анализа полученных закономерностей обосновывать геометрические параметры крошащих элементов.

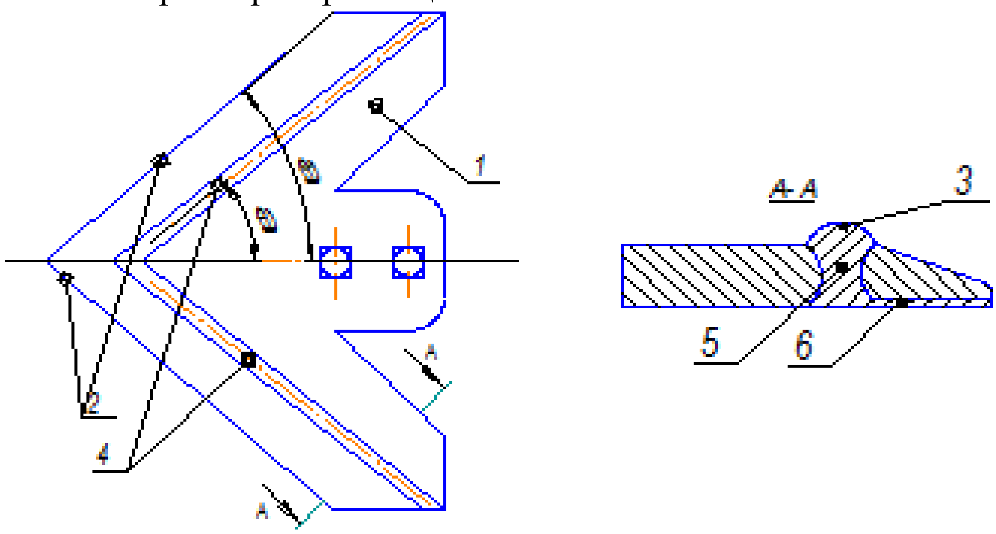

Рис. 1. Конструкция культиваторной лапы с крошащими элементами: 1 – лемех; 2 – режущая кромка; 3 – валик; 4 – линии наплавки; 5 – зона проплавления; 6 – технологическая канавка

Культиваторная лапа (рис. 1) состоит из лемеха 1 с режущей кромкой 2. Вдоль режущей кромки 2 сверху ее выполнен валик 3 из износостойкого материала, который расположен по линии наплавки 4 под углом α_1, меньшим или равным углу раствора лемеха α_2. Валик 3 получен при наплавке с проплавлением материала культиваторной лапы в зоне 5, которая расположена по линии наплавки 4. Движение частицы почвы по поверхности валика можно рассматривать как движение по поверхности клина.

Инерциальность системы отсчета, неподвижной относительно культиваторной лапы во время рабочего процесса.

Пусть t – время; t = 0 и t = T_0 – начало и конец рабочего процесса, совершаемого рабочим органом (лапой) O (лапа жестко закреплена на стойке, неподвижной по отношению к корпусу машины); A – плоскость, являющаяся рабочей поверхностью лапы. Обозначим h - плоскость микрорельефа поля и будем считать ее горизонтальной.

Для дальнейшего примем следующие допущения:

1. С течением времени $t \in [0;T_0]$ движение тела O будем считать только поступательным.

2. Если $\vec{V} = \vec{V}(t)$- скорость движения лапы и $\vec{V_0} = \frac{1}{t}\int_0^{T_0} \vec{V}(t)dt$, то при

$$t \in [0;T_0], \quad \left.\begin{array}{l} \vec{V}(t) = \vec{V_0} \\ \vec{V}(t) \parallel h \end{array}\right\} \qquad (1)$$

3. Ускорение лапы O относительно h пренебрежимо мало.

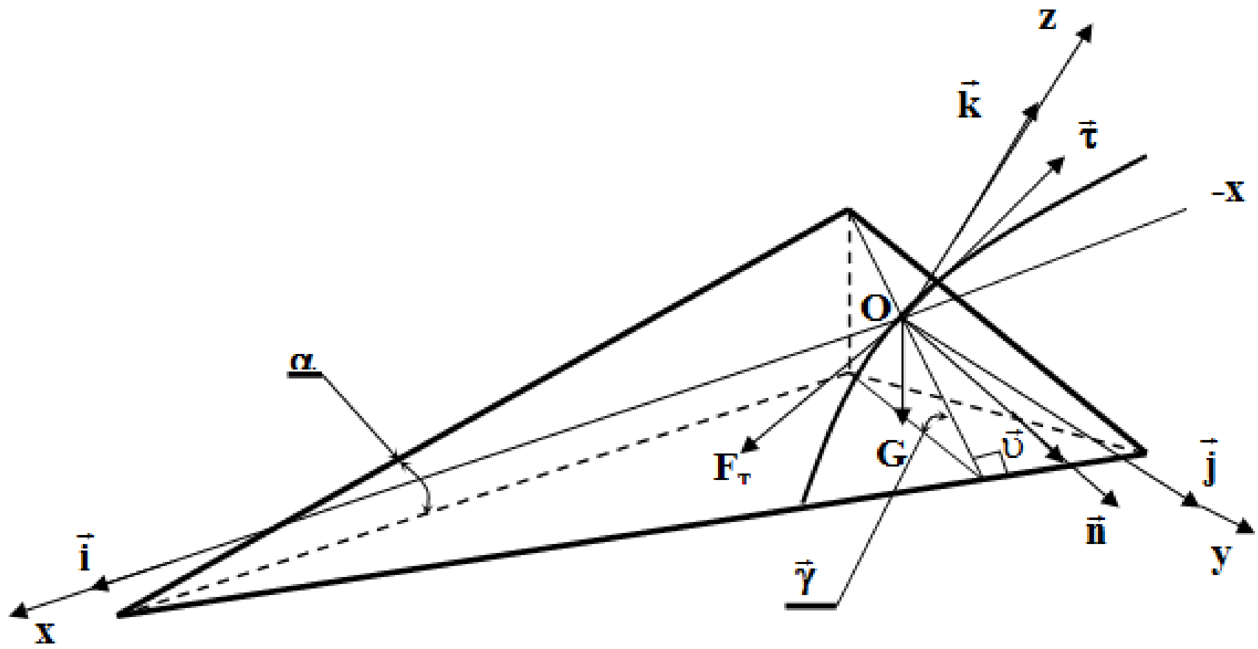

Рис. 2. Схема движения комка по рабочей поверхности

Следовательно, подвижную систему координат, жестко связанную с телом O можно считать инерциальной при $0 \le t \le T_0$.

Из выше сказанного следует, что движение частиц почвы по отношению к подвижной системе координат (их перемещение по рабочей поверхности лапы) описывается такими же уравнениями, как если бы они двигались относительно неподвижной системы (рис. 2).

Пусть почвенный комок τ столкнулся во время рабочего процесса с плоскостью A и продолжает свое движение, перемещаясь по ней чисто поступательно, контактируя при этом с ней одной и той же элементарной площадкой dS своей поверхности. Предполагаем, что касание комка с рабочей поверхностью лапы происходит при t = 0 в точке O, которая принадлежит плоскости A.

Из условий (1) следует, что если

$$\alpha = (h \hat{;} A), \text{ то } \alpha = const \tag{2}$$

Примем следующие обозначения:

M_{t_0} - положение центра инерции M площадки dS в момент $t = t_0$.

Введем неподвижную относительно тела O прямоугольную систему координат O_{xyz}:

ось O_y параллельна плоскости рабочей поверхности A и перпендикулярна направлению движения;

ось $O_z \perp A$, а луч O_z^+ направлен вверх.

Следовательно, O_{xyz} – инерциальная система отсчета.

<u>Уравнение движения почвенных частиц по рабочей поверхности.</u>

Одним из ребер трехгранного угла во время работы можно считать ось O_x, поэтому на основании (2) получим

$$(h \hat{;} O_x) = \alpha \tag{3}$$

Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ - единичные векторы лучей O_x^+, O_y^+ и O_z^+ соответственно, (x; y) – координаты точки M_t в системе xOy, L – траектория описываемая радиус-вектором и лежащая в плоскости A.

$$\vec{r} = OM_t = \vec{r}(t), \ \vec{r} \in C^2 \tag{4}$$

Введем обозначения:

$\vec{\tau} = \vec{\tau}(S) = \dfrac{d\vec{r}}{dS}$ - единичный вектор касательной к кривой L

$\vec{\tau}(M)$ - единичный вектор касательной к линии (кривой) L в точке $M \in L$;

$\Theta(M)$ - угол между положительным направлением оси x и положительным направлением касательной в точке M;

K - кривизна кривой L в точке M;

$$\rho = \frac{1}{K} \text{ - радиус кривизны;} \tag{7}$$

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \left| \frac{\Delta\Theta}{\Delta S} \right|, \tag{8}$$

где $\Delta\Theta = \Theta(N) - \Theta(M)$ - угол смежности $\Rightarrow \rho = \rho(S), \quad S \in L$;

$$\vec{n} = \vec{n}(S) = \rho(S)\frac{d\vec{\tau}}{dS} \tag{9}$$

$\vec{n}$ - единичный вектор нормали к L (в соответствии с первой формулой Френе) [1, 2], направленный в сторону вогнутости кривой;

$\vec{V} = \dot{\vec{S}}(t)$,

S – перемещение лапы О;

m – приведенная к точке М масса почвенной частицы τ;

R – абсолютная величина приложенной к М нормальной реакции плоскости А;

F – коэффициент трения;

$$\varphi \text{ – угол трения, } \varphi = arctg\ f; \qquad (10)$$

$\vec{F}$ - главный вектор системы внешних сил, действующих на комок τ во время его движения по рабочей поверхности;

$\vec{g}$ - ускорение свободного падения.

$$\vec{g} \perp h; \qquad (11)$$

В силу (3), (10) и ортогональности (перпендикулярности) системы координат имеем

$$(\vec{i}\,\hat{;}\,\vec{g}) = \frac{\pi}{2} - \alpha;\ (\vec{k}\,\hat{;}\,\vec{g}) = \pi - \gamma \qquad (11')$$

Согласно тригонометрическим формулам [3] отсюда имеем

$$\vec{g} = g(\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\vec{i} + g \cdot \cos(\pi - \gamma))\vec{k} =$$

$$= g(\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha) + g(\cos\pi \cdot \cos\gamma + \sin\pi \cdot \sin\gamma);$$

$$\vec{g} = g(\sin\alpha \cdot \vec{i} - \cos\gamma \cdot \vec{k}) \qquad (12)$$

Для сохранения стандартного вида формул будем записывать естественный трехгранник кривой L и единичный вектор нормали к А соответственно в форме $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$. Для производных от векторов $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ сопровождающего трехгранника справедливы формулы Серре-Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = K\vec{n}; \quad \frac{d\vec{n}}{dS} = -K\vec{n}; \quad \frac{d\vec{b}}{dS} = -T\vec{b}, \qquad (13)$$

где Т – кручение.

Система сил состоит из равнодействующей гравитационных сил

$$\vec{G} = m\vec{g} \qquad (14)$$

нормальной реакции $R\upsilon$ плоскости А и диссипативной силы $fR\vec{\tau}$, значит

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{R} - fR\tau \text{ или } \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \qquad (15)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{V}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}, \qquad (16)$$

$\vec{\upsilon}$ - единичный вектор нормали.

Так как $\dot{\vec{r}} = \vec{\tau}$ (16.1), то дифференцируя еще раз по L и используя первую формулу Френе, получаем

$$\ddot{\vec{r}} = K\vec{n}. \tag{16.2}$$

Для упрощения расчетов выразим формулу (16.2) через текущие координаты и их производную $\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$.

Из (15) учитывая(12), (14) и (16) и инерциальности любой системы отсчета, жестко связанной с телом О, следует, что движение почвенного комка τ по рабочей поверхности лапы описывается уравнением:

$$m(\dot{V}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}) = mg(\sin\alpha \cdot \vec{i} - \cos\gamma \cdot \vec{k}) + R\vec{\upsilon} - fR\vec{\tau}. \tag{17}$$

Будем считать траекторию L, в соответствии с опытными данными, выпуклой вверх. Вследствие этого

$$\frac{d\Theta}{dS} < 0. \tag{18}$$

Умножая скалярно обе части (17) на $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$, находим в силу (13) и равенств $(\vec{i}\,\hat{;}\,\vec{\tau}) = \frac{\pi}{2} - \Theta$, $(\vec{j}\,\hat{;}\,\vec{n}) = 0$, вытекающих из (7)

$$(\vec{i}\,\hat{;}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \Theta,$$

$$m\,(\dot{V}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n})\,\vec{\tau} = (mg\,(\sin\alpha \cdot \vec{i} + \cos\gamma \cdot \vec{k}) + R\vec{\upsilon} + fR\vec{\tau})\,\vec{\tau},$$

$$\frac{V^2}{\rho} = g\,\sin\alpha \cdot \cos\Theta \tag{19}$$

$$\vec{n}m\,(\dot{V}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}) = (mg\,(\sin\alpha \cdot \vec{i} - \cos\gamma \cdot \vec{k}) + R\vec{\upsilon} - fR\vec{\tau})\,\vec{n},$$

$$m\dot{V} = mg\,\sin\alpha \cdot \cos\Theta - fR, \tag{20}$$

$$m\,(\dot{V}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n})\,\vec{b} = [mg\,(\sin\alpha \cdot \vec{i} - \cos\gamma \cdot \vec{k}) + R\vec{\upsilon} - fR\vec{\tau}]\,\vec{b};$$

$$R = mg\,\cos\alpha, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\rho} = (1/V)\dot{\Theta}. \tag{22}$$

Система (19)…(22) позволяет получить полное аналитическое описание движения почвенных частиц по рабочей поверхности культиваторной лапы.

Так как L – гладкая кривая, то текущая координата S на дуге L может быть выражена через Θ, т.е. $S = S(\Theta)$.

Отсюда вытекает, что x и y (значит V, ρ) представимы в виде функции параметра Θ:

$$x = x(S) = x(S(\Theta)) = x(\Theta)$$
$$y = y(S) = y(S(\Theta)) = y(\Theta)$$
$$z = z(S) = z(S(\Theta)) = z(\Theta).$$

С помощью уравнений (19)…(22) все кинематические характеристики движения комка почвы по плоскости А выражаются через Θ.

Вычисление линейной скорости.

В силу (19) и (20)

$$\frac{V^2}{\rho} = g \sin\alpha \cdot \cos\Theta$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\Theta}}{V} \quad (xV^2)$$

$$\frac{V^2}{\rho} = \dot{\Theta} V = g \sin\alpha \cdot \cos\Theta, \tag{23}$$

а на основании (20) и (21)

$$\dot{V} = g(\sin\alpha \cdot \cos\Theta - f \cos\alpha). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что $V = V(\Theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV}{V} = -f \frac{\cos\alpha}{\cos\Theta \sin\alpha} d\Theta$$

$$\frac{dV}{V} = -f \frac{ctg\alpha}{\cos\Theta} d\Theta. \tag{25}$$

Пусть в начальный момент времени движение почвенного комка по рабочей поверхности

$$\Theta = 0; \quad V = V_0. \tag{26}$$

Решение задачи Коши (25) и (26) единственно [4].

$$\int \frac{dV}{V} = \int -f \frac{ctg\alpha}{\cos\Theta} d\Theta;$$

$$\ln V = -\int f\, ctg\alpha / \cos\Theta \quad d\Theta;$$

$$\ln V = -f\, ctg\alpha \int \frac{d\Theta}{\cos\Theta}.$$

Применяя формулы приведения [3] получим

$$\ln V = -f\, ctg\alpha \int \frac{d(\Theta + \frac{\pi}{2})}{\sin(\Theta + \frac{\pi}{2})}.$$

По формулам, приведенным в [3] имеем

$$\ln V = -f\ ctg\alpha\ \ln\left|tg(\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{4})\right|;$$

$$\ln V = \ln\left|tg(\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{4})\right|^{-f\ ctg\alpha} + \ln C;$$

где С – постоянная интегрирования.

$$V = C\left|tg(\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{4})\right|^{-f\ ctg\alpha};\ \Theta = 0;\quad V = V_0;$$

$$V_0 = C\left|tg\frac{\pi}{4}\right|^{-f\ ctg\alpha};$$

так как $\left|tg\frac{\pi}{4}\right|^{-f\ ctg\alpha} = 0$, то $C=V_0$;

$$V = V_0\, tg^{-f\ ctg\alpha}(\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{4}).$$

Таким образом, система уравнений (19)…(22) на практике позволяет вычислить и обосновать геометрические параметры рабочего органа, установить линейную скорость почвенных частиц и получить траекторию их движения.

Список использованных источников

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 2. - М.:, Л.:, Изд. 3 исправленное, государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1951, - 864 с.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. - М.:. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956, - 420 с.
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Справочник по математике. -3-е изд., перераб. - М.: Просвещение, 1995. - 448с. ил.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1965. Выпуск 3. - 424 с.

Abstract

Analytical description of the movement of soil particles on the working surface of the foot cultivator with a modified geometry

A.Makarenko

The paper describes the simulation of particle motion on the working surface of the soil cultivator legs with additional elements crumbly. This approach can be used in the design of the working bodies of tillage machines, having a working surface is different from the traditional one

Анотація

Аналітичне опис руху грунтових частинок по робочій поверхні культиваторні лапи зі зміненою геометрією

А. Макаренко

У статті описується моделювання руху частинки грунту по робочій поверхні культиваторні лапи з додатковими кришаться елементами. Такий підхід може бути використаний при проектуванні робочих органів грунтообробних машин, які мають робочу поверхню відмінну від традиційної