

## ПРИМЕНЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ВЫБОРЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ФАСОННОГО ШИПА МОЛОТИЛКИ КУКУРУЗЫ

**Брагинец Н.В., д.т.н., Бахарев Д.Н., к.т.н.**  
(Луганский национальный аграрный университет)

*Предложена математическая модель, описывающая контактную проблему Г. Герца, в случае если площадка контакта участка поверхности зерна кукурузы с поверхностью фасонного шипа отлична от эллиптической.*

**Проблема.** В настоящее время многими учеными и исследователями доказана универсальность математических моделей полученных Г. Герцем при изучении контактной задачи теории упругости. Однако Г. Герц сделал следующее допущение. В результате сжатия тел, характеризующихся в точке контакта двумя главными радиусами кривизны, контактирующая поверхность представляет собой чрезвычайно сплюснутый эллипсоид, который в силу малой толщины можно рассматривать как эллиптическую площадку контакта. Однако это предположение не справедливо для некоторых частных случаев, что подтверждают научные исследования И.Я. Штаермана [1, с. 42]. В частности, при контакте участка поверхности зерна кукурузы любого подвида с криволинейной поверхностью фасонного шипа форма площадки контакта отлична от эллиптической. Поэтому для данного конкретного случая ставится задача - определить общую закономерность образования площадки контакта, ее формы и размера, что являет собой дальнейшее развитие контактной проблемы Г. Герца.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Изучением контактной задачи теории упругости занимались следующие ученые Г. Герц, Ж.В. Буссинеск, Н.А. Кильчевский, И.Я. Штаерман, Дж.А. Зукас, Л.Б. Грещук, Д.Р. Курран, Н.Л. Whittmore, S.N. Petrenko и др [1-5]. Работы данных ученых не выходят за пределы эллиптической формы пятна контакта, за исключением работ И.Я. Штаермана, который разработал математический метод, позволяющий задаваться площадкой контакта произвольной формы. Решение данного рода задач основано на известной теории ньютоновского потенциала соотношения Пуассона

**Целью исследований** является разработка теоретических предпосылок для дальнейшего развития контактной проблемы Г. Герца, в случае если площадка контакта участка поверхности зерна кукурузы с поверхностью фасонного шипа отлична от эллиптической.

**Результаты исследований.** Пусть система контактирующих тел (зерно - шип) в некоторый момент времени находится в равновесии под действием приложенных к ним активных сил и упругих реакций, распределенных по площадке контакта. Тогда [1, с. 36]:

$$\iint_{(\omega)} p(x, y) d\omega = F, \quad (1)$$

где  $F$  – равнодействующая сила, сжимающая тела, Н;

$p(x, y)$  – давление распределенное по области сжатия  $\omega$ , Па

Согласно теории Г. Герца [2, с. 25], начало координат следует поместить в точке касания поверхностей тел до начала процесса нагружения, в касательной плоскости располагаются оси  $OX$  и  $OY$ , а оси  $OZ_1$  и  $OZ_2$  совпадают с направлением внутренних нормалей к поверхностям недеформированных тел в точке их касания (рис. 1).

Кроме того, уравнение недеформированных тел заданы в форме Монжа [1, с. 36]:

$$z_1 = f_1(x, y); \quad z_2 = f_2(x, y). \quad (2)$$

Тогда, после сжатия, уравнение поверхностей тел будет следующим [2, с. 25]:

$$\bar{z}_1 = f_1(x, y) + w_1 - \nu_1 \cdot w_{10} - \nu_2 \cdot w_{20}; \quad (3)$$

$$\bar{z}_2 = f_2(x, y) + w_2 - (1 - \nu_1) \cdot w_{10} - (1 - \nu_2) \cdot w_{20}, \quad (4)$$

где  $w_1, w_2$  – смещение первого и второго тела в начальной точке касания, м;  
 $\nu_1, \nu_2$  – некоторые коэффициенты, определяющие поступательное смещение тел, возникающие благодаря местному смятию поверхностей тел в окрестности начальной точки касания.

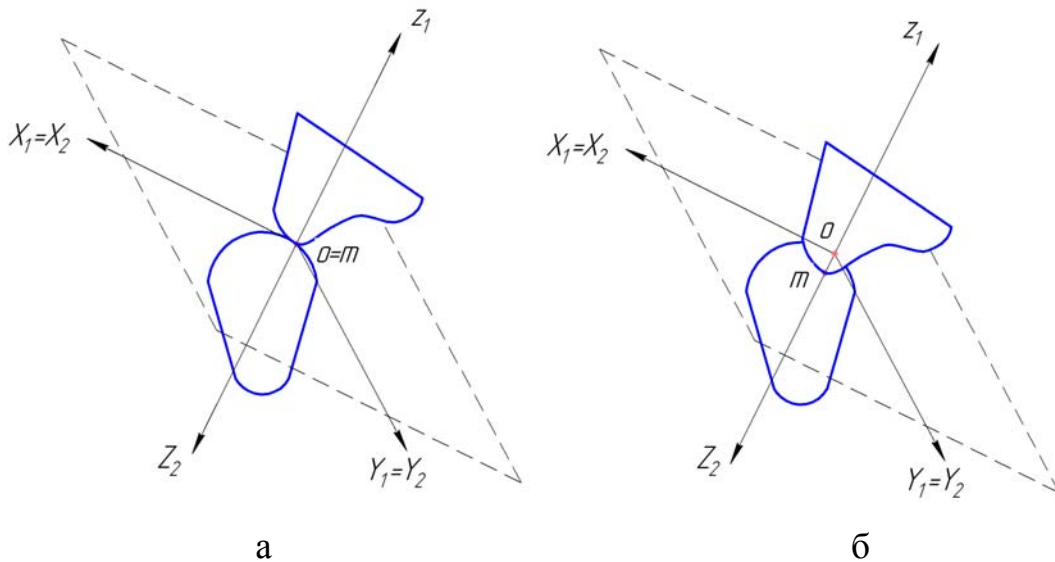


Рис. 1. Схема к определению уравнений контактной проблемы Г. Герца:  $a$  – до деформации;  $b$  – после деформации.

Условие контакта имеет вид [2, с. 25]:

$$\bar{z}_1 = -\bar{z}_2. \quad (5)$$

Тогда [2, с. 25]:

$$w_1 + w_2 = a - f(x, y). \quad (6)$$

$$\bar{\alpha} = w_{10} + w_{20}. \quad (7)$$

где  $\bar{\alpha}$  – сближение тел в следствие сжатия, (местное смятие).

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) \quad (8)$$

В данном случае боковыми смещениями тел пренебрегли.

В случае контакта зерна кукурузы и шипа выполненного из материала значительно превосходящего зерно по прочности (например, сталь) деформируется только зерно, поэтому при выполнении условия (5), симметричном повороте осей координат  $X_2Y_2Z_2$  площадка контакта опишет некоторую поверхность, форма которого задана формой контактирующей поверхности шипа.

Далее следуя методу Г. Герца, следует записать следующее предположение. Если рассматривать локальное распределение напряжений, то, считая область сжатия  $\omega$  малой по сравнению с общими величинами поверхностей тел, можно предположить, что это распределение незначительно отличается от распределения напряжений в упругом полупространстве с плоской границей, которое возникает от действия сил, приложенных в области  $\omega$ , принадлежащей этой границе [1, с. 37].

Из вышеизложенного, на основании теории о равновесии упругого полупространства Ж.В. Буссинеска, вытекает опорное выражение данной контактной проблемы, в виде математической зависимости [2, с. 26]:

$$A \iint_{(\omega)} \frac{p(x', y')}{r} dx' dy' = \alpha - f(x, y). \quad (9)$$

$$A = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2. \quad (10)$$

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}; \quad \mathcal{G}_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}, \quad (11)$$

где  $\mu_i$   $\lambda_i$  – упругие постоянные Ляме.

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (12)$$

где  $x, y, x', y'$  – задаваемые координаты локальной область сжатия  $\omega$ ;

$r$  – расстояние между определенными точками в область сжатия  $\omega$ .

Левую часть выражения (9) можно рассматривать как Ньютонов потенциал простого слоя. Ньютонов потенциал показывает «схожесть» одной функции с отражённой и сдвинутой копией другой.

Г. Герц предположил, что правая часть выражения (9) представляет собой чрезвычайно сплюснутый в направлении оси  $OZ$  эллипсоид [1, с. 39]. Однако это предположение не справедливо для некоторых частных случаев. В частности, при контакте участка поверхности зерна кукурузы любого подвида с криволинейной поверхностью фасонного шипа форма площадки контакта отлична от эллиптической.

Для доказательства этого явления необходимо сделать два допущения, одно из которых основано на результатах исследований, проведенных М.Ф. Рожковским в ННЦИМЭСХ [6, с. 53]. При ударе зерно кукурузы влажностью 20% ведет себя на грани прочностных свойств, если абсолютная деформация зерна в зоне контакта составляет  $0,45 \cdot 10^{-3}$  м.

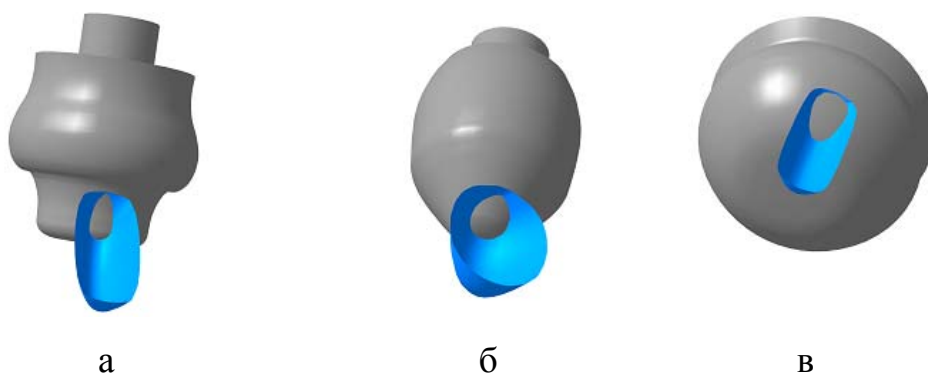
Второе допущение основано на результатах исследований проведенных С.А. Алферовым [7, с. 50]. Кинетическая энергия ударяющегося зерна, находящегося в початке, полностью переходит в потенциальную энергию его деформации, деформацией шипа будем пренебрегать, поскольку последняя значительно меньше деформации зерна.

С целью подтверждения предположения о том, что при проникновении участка поверхности фасонного шипа в тело зерна кукурузы, на глубину регламентированную первым допущением ( $0,45 \cdot 10^{-3}$  м), образуется площадка контакта, форма которой отлична от эллиптической были разработаны 3D-модели поверхности зерна шести основных подвидов кукурузы возделываемых в Украине (восковидная, зубовидная, кремнистая, сахарная, лопающаяся и пленчатая) и смоделирован их контакт с шипами 3D-модели которых построены на основании данных о биологических прототипах.

В качестве биологических прототипов шипов были приняты жвалы 11-ти видов насекомых - амбарных вредителей: Четырехпятнистый грибоед, Березковый зерноед, Гороховая зерновка, Жук Кузька, Зерновой точильщик, Претворяшка злодей, Суринамский мукоед, Хрущак большой мучной, Хрущак большой темный, Хрущак малый булавоусый, Трогодерма черная.

В результате контакта 11-ти видов шипов и 6-ти подвидов зерна было получено 66 площадок контакта. Анализ полученных данных показывает, что наиболее характерной является площадка контакта своей формой напоминающая меридианное сечение птичьего яйца (яйцевидная форма).

В связи с ограничением объема данной научной публикации на рис.2 мы приводим только несколько характерных вариантов пятен контакта.



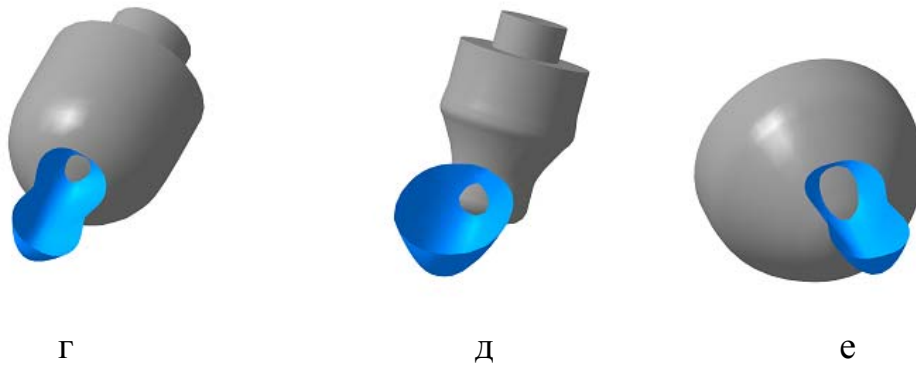


Рис. 2. Форма площадки контакта поверхности 3D-модели шипа, построенного методом вращения контура жвалы биологического прототипа и 3D-модели зерна кукурузы: *а* - восковидная кукуруза – Зерновой точильщик; *б* - пленчатая кукуруза – Претворяшка злодей; *в* - сахарная кукурузы – Хрушак малый булавоусый; *г* - зубовидная кукуруза – Четырехпятнистый грибоед; *д* – пленчатая кукуруза - Березковый зерноед; *е* - зубовидная кукуруза - Трогодерма черная

На основании вышеизложенного можно заключить, что в правой части выражения (9), в данном конкретном случае поверхность  $f(x,y)$  является поверхностью яйцевидной формы.

Разработкой модели меридианного сечения и поверхности яйца занимался английский исследователь Т.К. Картер [8, с. 1].

На основании исследований Т.К. Картера и выражения (9) нами предлагается математическая модель, описывающая изучаемый частный случай контактной проблемы:

$$A \iint_{(\omega)} \frac{p(x', y')}{r} dx' dy' = \alpha - \int_0^1 \pi y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (13)$$

Координаты  $x, y$  задаются на основании данных о главных радиусах кривизны контактирующих тел, которые определяются их линейными размерами.

Поскольку линейные размеры жвал амбарных вредителей малы, то их необходимо увеличить в соответствии с масштабным множителем линейного преобразования  $k_{l(s)}$  [9, с. 69]:

$$k_{l(s)} = \frac{S_1}{S}. \quad (14)$$

где  $S_1$  - площадь поверхности зерна в початке, подлежащей захвату,  $m^2$ ;

$S$  – площадь рабочей поверхности исполнительного органа биологического прототипа,  $m^2$ .

Результаты расчета масштабного множителя линейного преобразования приведены в табл. 1

Таблица 1. Результаты расчета масштабного множителя линейного преобразования

Амбарный вредитель	Площадь рабочей поверхности жвалы $S$ , мм <sup>2</sup>	Подвид кукурузы	Площадь поверхности зерна в початке, подлежащей захвату $S_l$ , мм <sup>2</sup>
Четырехпятнистый грибоед	0,0157	Сахарная	11,4
Березковый зерноед	0,0168	Восковидная	13,1
Гороховая зерновка	0,0298	Зубовидная	9,6
Жук Кузька	0,0420	Кремнистая	15,7
Зерновой точильщик	0,0250	Лопающаяся	6,12
Претворяшка злодей	0,0237	Пленчатая	7,5
Суринамский мукоед	0,0026	Среднее значение	10,57
Хрущак большой мучной	0,1716		
Хрущак большой темный	0,1975		
Хрущак малый булавоусый	0,0105		
Трогодерма черная	0,0098		
Среднее значение	0,0495		
Масштабный множитель линейного преобразования $k_{l(s)} = 10,57 / 0,0495 = 213,54$			

В качестве допущения принято то, что  $S_l$  составляет  $\frac{1}{4}$  часть площади верхней поверхности зерна, среднего размера, свободно выступающей с участка смежных зерен в необмолоченном початке. Кроме того, площадь  $S$  рассчитана на основании средней толщины жвалы каждого амбарного вредителя.

**Выводы.** 1. В результате сжатия тел, характеризующихся в точке контакта двумя главными радиусами кривизны, (зерна кукурузы различных подвидов и фасонных шипов разной формы) контактирующая поверхность отлична от эллиптической.

2. В данном частном случае контактирующая поверхность принимает яйцевидную форму описываемую выражением Т.К. Картера. В этом случае основное выражение контактной проблемы Г. Герца получает дальнейшее развитие и примет вид выражения (13).

3. Координаты точек на поверхности яйцевидной формы зависят от главных радиусов кривизны контактирующих тел, определяемых на основании масштабного множителя линейного преобразования, который в данном случае составляет 213,54.

### Список использованных источников

1. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел / Н.А. Кильчевский. – М.: ОГИЗ государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949, - 254 с.

2. Зукас Дж.А., Николас Т, Свифт., Грещук Л.Б., Курран Д.Р. Динамика удара: Пер. с англ. / Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. и др. - М.: Мир, 1985. - 296 с.
3. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел / Н.А. Кильчевский. – К.: Наукова думка, 1969, - 247 с.
4. Whittemore H.L. U.S. Bur. Standards Tech. / Whittemore H.L., Petrenko S.N., Paper 201, 1961.
5. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н.А. Кильчевский – К.: Наукова думка, 1976.- 357 с.
6. До визначення механізму деформації і руйнування зернових матеріалів/ М.Ф. Рожківський // Вісник аграрної науки. – 2000. – С. 50-53.
7. 108. Механизм повреждения зерна при ударе/ С.А. Алферов, А.А. Панов // Механизация и электрификация сельского хозяйства. -1981. - №213.-С. 50-51.
8. 109. Яйцо птицы - загадка мироздания. Режим доступа: <http://www.balatsky.ru/AVES/ovo.htm>
9. Брагинец Н.В., Бахарев Д.Н. Бионические основы моделирование рабочих органов исполнительных механизмов поточно-технологических линий обмолота кукурузы // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка / Сучасні проблеми вдосконалення технічних систем і технологій у тваринництві. Випуск 108. – Харків: ХНТУСГ, 2011. – С. 64–70.

## Анотація

### **Застосування контактної задачі теорії пружності при виборі раціональних конструктивних параметрів фасонного шипа молотарки кукурудзи**

Брагінець М.В., Бахарев Д.М.

*Запропонована математична модель, що описує контактну проблему Г. Герца, у випадку якщо майданчик контакту ділянки поверхні зерна кукурудзи з поверхнею фасонного шипа відмінний від еліптичного.*

## Abstract

### **Application of contact task of theory of resiliency at the choice of rational structural parameters of the shaped thorn of threshing machine of corn**

N.Braginets, D.Bakharev

*A mathematical model, describing a contact problem H Hertz, is offered, in case if the ground of contact of area of surface of grain of corn with the surface of the shaped thorn is different from elliptic.*