УДК 681.5

МЕТОД АРИФМЕТИЧЕСКОГО СРАВНЕНИЯ ЧИСЕЛ В КЛАССЕ ВЫЧЕТОВ

Загуменная Е. В.[1] , Кошман С. А.[1] , Маврина М. А.[2] , Краснобаев В. А.[2]

[1]Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко
[2]Полтавский национальный технический университет им. Ю. Кондратюка

Предложен метод арифметического сравнения чисел в классе вычетов (КВ), основанный на использовании позиционного признака непозиционного кода (ППНК) в КВ.

Постановка проблемы. Известно, что основным преимуществом непозиционной системы счисления в классе вычетов (КВ) является возможность организации процесса быстрой обработки информации, т.е. возможность создания методов и средств, обеспечивающих высокую пользовательскую производительность решения определенного класса задач (реализация арифметических операций сложения, вычитания, умножения). Это достигается за счет использования таких свойств КВ, как независимость и малоразрядность остатков $\{a_i\}$, совокупность которых представляет число $A_{кв} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ по n основаниям (модулям) данного КВ, путем применения табличной машиной арифметики [1].

Необходимость реализации непозиционных операций (например, часто встречающейся в алгоритмах управления операция сравнения двух чисел $A_{кв} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ и $B_{кв} = (b_1, b_2, ..., b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, ..., b_n)$ при решении задач различного назначения компьютерной системой обработки информации (КСОИ), снижает общую эффективность использования КВ. Это обусловлено значительным временем реализации (по сравнению с временем выполнения вышеперечисленных арифметических операций) операции сравнения двух чисел в КВ. Поэтому исследования и разработка методов, алгоритмов и средств сравнения чисел в КВ является важной и актуальной научно-прикладной задачей.

Анализ последних исследований и публикаций. Существуют три группы методов сравнения чисел в КВ [1, 2].

К первой группе мы отнесем методы непосредственного сравнения, основанные на преобразовании чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$ из кода КВ в позиционную двоичную систему счисления (ПСС) $A_{псс} = \overline{\alpha_1, \alpha_2 .... \alpha_\rho}$ и $B_{псс} = \overline{\beta_1, \beta_2, ... \beta_\rho}$ (ρ-разрядность чисел $A_{ПСС}$ и $B_{ПСС}$) и дальнейшего их сравнения на основе использования двоичных позиционных схем сравнения.

К второй группе методов относятся методы основанные на принципе нулевизации. Процедура процесса нулевизации заключается в переходе из исходного числа $A_{кв} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$, представленного в КВ, к числу вида $A_{кв} = (0, 0, ..., 0, \gamma_n^{(A)})$. После чего, по значению $\gamma_n^{(A)}$ определяется интервал $[\, jm_i, (j+1)m_i)$ попадания числа $A_{кв}$. Аналогично проводится нулевизация числа $B_{кв} = (b_1, b_2, ..., b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, ..., b_n)$, откуда получаем значения $\gamma_n^{(B)}$. Позиционное сравнение полученных значений $\gamma_n^{(A)}$ и $\gamma_n^{(B)}$ определяет результат сравнения чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$.

К третьей группе методов, отнесем методы основанные на определении (выделении) или формировании специальных признаков, так называемых, ППНК.

Цель статьи. Разработка метода арифметического сравнения двух чисел в КВ, применение которого повышает быстродействие реализации операции сравнения.

Основные материалы исследования. Рассмотрим метод сравнения чисел $A_{кв} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ и $B_{кв} = (b_1, b_2, ..., b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, ..., b_n)$ основанный на формировании специального однорядового кода (ОК) этих чисел.

Пусть КВ задан совокупностью $\{m_i\}$, $i = \overline{1,n}$, попарно простых чисел. Наибольший общий делитель (НОД) любой пары оснований m_i и m_j $(i, j = \overline{1,n}; i \neq j)$ равен единице, т.е., НОД $(m_i, m_j) = 1$. Для общности рассуждений пусть КВ будет упорядоченным $(m_i < m_{i+1})$.

Суть данного метода заключается в том, что первоначально исходные числа $A_{кв}$ и $B_{кв}$ посредством констант нулевизации (КН) вида $KH_{m_i}^{(A)} = (a_1', a_2', ..., a_{i-1}', a_i, a_{i+1}', ..., a_n')$ и $KH_{m_i}^{(B)} = (b_1', b_2', ..., b_{i-1}', b_i, b_{i+1}', ... b_n')$ приводятся к числам $A_{m_i} = A_{кв} - KH_{m_i}^{(A)} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n) - (a_1', a_2', ..., a_{i-1}', a_i, a_{i+1}', ..., a_n') = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_{i-1}^{(1)}, 0, a_{i+1}^{(1)}, ..., a_n^{(1)})$ и $B_{m_i} = B_{кв} - KH_{m_i}^{(B)} = (b_1, b_2, ..., b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, ..., b_n) - (b_1', b_2', ..., b_{i-1}', b_i, b_{i+1}', ..., b_n') = (b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, ..., b_{i-1}^{(1)}, 0, b_{i+1}^{(1)}, ..., b_n^{(1)})$, кратным одному определенному m_i модулю КВ. Далее, посредством совокупности $0, m_i, 2 \cdot m_i, ..., (N-2) \cdot m_i, (N-1) \cdot m_i$ из N констант, кратных основанию m_i, параллельно проводятся операции $A_{m_i} - K_A \cdot m_i = Z_{K_A}^{(A)}$ и $B_{m_i} - K_B \cdot m_i = Z_{K_B}^{(B)}$ $(K_A(K_B) = \overline{0, N-1})$ т.е.

$$\begin{cases} A_{m_i} - 0 \cdot m_i = Z_0^{(A)}, \\ A_{m_i} - 1 \cdot m_i = Z_1^{(A)}, \\ A_{m_i} - 2 \cdot m_i = Z_2^{(A)}, \\ \qquad \dots \\ A_{m_i} - (N-2) \cdot m_i = Z_{N-2}^{(A)}, \\ A_{m_i} - (N-1) \cdot m_i = Z_{N-1}^{(A)}; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} B_{m_i} - 0 \cdot m_i = Z_0^{(B)}, \\ B_{m_i} - 1 \cdot m_i = Z_1^{(B)}, \\ B_{m_i} - 2 \cdot m_i = Z_2^{(B)}, \\ \qquad \dots \\ B_{m_i} - (N-2) \cdot m_i = Z_{N-2}^{(B)}, \\ B_{m_i} - (N-1) \cdot m_i = Z_{N-1}^{(B)}, \end{cases} \qquad (2)$$

где $N_{m_i} = \prod_{\substack{k=1; \\ k \neq i.}}^{n} m_k$ (N_{m_i} - количество двоичных разрядов в записи ОК $K_{N_{m_i}}^{(n_A)}$ и $K_{N_{m_i}}^{(n_B)}$ или количество сумматоров, осуществляющих операции вида $A_{m_i} - K_A \cdot m_i = Z_{K_A}^{(A)}$ или $B_{m_i} - K_B \cdot m_i = Z_{K_B}^{(B)}$).

Таким образом, формируется ОК вида двоичной последовательности $K_{N_{m_i}}^{(n_A)} = \{ Z_{N_{m_i}-1}^{(A)} Z_{N_{m_i}-2}^{(A)} \dots Z_2^{(A)} Z_1^{(A)} Z_0^{(A)} \}$ для числа $A_{кв}$, при этом только одно значение $Z_{K_A}^{(A)} = 0$, если $A_{m_i} - n_A \cdot m_i = 0$. Остальные значения $Z_{K_A}^{(A)} = 1$, если $A_{m_i} - \ell \cdot m_i \neq 0$, $\ell = \overline{0, N-1}$, $\ell \neq n_A$.

В этом случаи ОК вида $K_{N_{m_i}}^{(n_A)}$ и $K_{N_{m_i}}^{(n_B)}$ представляет собой последовательность, состоящую из N_{m_i} двоичных разрядов. В этой последовательности только один двоичный разряд нулевой, а остальные – единичные. Место положения нулевых разрядов ОК $K_{N_{m_i}}^{(n_A)}$ и $K_{N_{m_i}}^{(n_B)}$ определяют ППНК n_A и n_B соответственно чисел A и B. Аналогичным образом формируется ОК вида $K_{N_{m_i}}^{(n_B)} = \left\{ Z_{N_{m_i}-1}^{(B)} Z_{N_{m_i}-2}^{(B)} \dots Z_2^{(B)} Z_1^{(B)} Z_0^{(B)} \right\}$ для числа $B_{кв}$, при этом значение $Z_{K_B}^{(B)} = 0$ (если $B_{m_i} - n_B \cdot m_i = 0$), а остальные значения $Z_{K_B}^{(B)} = 1$ если $B_{m_i} - \ell \cdot m_i \neq 0$, $\ell = \overline{0, N-1}$, $\ell \neq n_B$.

Для наглядности сути метода сравнения рассмотрим геометрическую интерпретацию предложенного метода сравнения двух чисел. На рисунке 1 представлен числовой отрезок (0, M], соответствующий диапазону представления сравниваемых чисел $A_{кв} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и $B_{кв} = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$. Данный отрезок разбит на N_{m_i} интервалов $[jm_i, (j+1)m_i)$, длиною m_i единиц каждый.

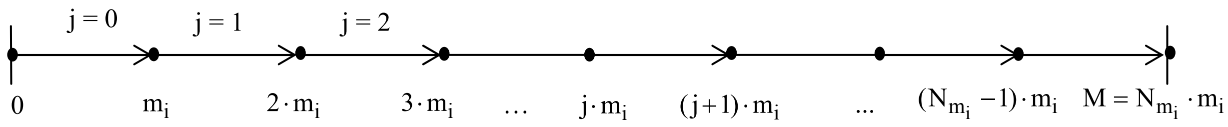

Рисунок 1 – Интервалы разбиения числовой оси [0,M) для произвольного основания m_i КВ.

Операция преобразования исходных чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$ посредством констант нулевизации $KH_{m_i}^{(A)} = (a_1', a_2', \dots, a_{i-1}', a_i, a_{i+1}', \dots, a_n')$ и $KH_{m_i}^{(B)} = (b_1', b_2', \dots, b_{i-1}', b_i, b_{i+1}', \dots, b_n')$ к виду $A_{m_i} = A_{кв} - KH_{m_i}^{(A)} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - (a_1', a_2', \dots, a_{i-1}', a_i, a_{i+1}', \dots, a_n') = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{i-1}^{(1)}, 0, a_{i+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$ и $B_{m_i} = B_{кв} - KH_{m_i}^{(B)} = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n) - (b_1', b_2', \dots, b_{i-1}', b_i, b_{i+1}', \dots, b_n') = (b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{i-1}^{(1)}, 0, b_{i+1}^{(1)}, \dots, b_n^{(1)})$ равносильна смещению сравнимых чисел на левый край соответствующих интервалов $[j_1 m_i, (j_1+1)m_i)$ и $[j_2 m_i, (j_2+1)m_i)$ их первоначального нахождения, что соответствует приведению их к числам A_{m_i} и B_{m_i}, кратным модулю m_i КВ. После чего определяется номера $j_1 = n_A$ и $j_2 = n_B$ этих интервалов (см. выражения (1) и (2)), что является позиционным признаком непозиционного кода в КВ.

Важнейшей характеристикой процесса сравнения чисел есть точность W сравнения. В случае сравнения чисел в КВ точность W_{m_i} сравнения двух чисел $A_{кв} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и $B_{кв} = (b_1, b_2, \dots,$

$b_{i-1}, b_i, b_{i+1,}..., b_n)$ зависит от местоположения интервалов $[j_1 m_i, (j_1+1)m_i)$ и $[j_2 m_i, (j_2+1)m_i)$ нахождения этих чисел на числовой оси 0÷M (рис. 1), т.е. от номеров j_1 и j_2 этих интервалов.

В случае $j_1 \neq j_2$, алгоритм сравнения двух чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$ следующий. Если $j_1 > j_2$, тогда $A_{кв} > B_{кв}$, а если $j_1 < j_2$ тогда - $A_{кв} < B_{кв}$.

При $j_1 = j_2 = j$ точность W_{m_i} сравнения зависит от величины интервала $[jm_i, (j+1)m_i)$, т.е. от значения m_i модуля КВ. Для случая $j_1 = j_2 = j$ $A_{m_i} = B_{m_i} = j \cdot m_i$, что свидетельствует, что $A_{кв} = B_{кв}$. Однако это не всегда соответствует действительности.

Исходя из геометрической интерпретации (1) предложенного метода для произвольного модуля КВ очевидно, что точность W_{m_i} сравнения зависит от величины интервала $[jm_i, (j+1)m_i)$ в котором находятся сравниваемые числа $A_{кв}$ и $B_{кв}$ т.е. от значения модуля m_i КВ. В этом случае максимальная точность сравнения достигается для упорядоченного КВ при $m_i = m_1$. Однако в этом случае количество N_0 оборудования устройства для реализации данного метода сравнения будет максимальным. Это обусловлено необходимостью иметь в наличии $N_{m_i} = 2 \cdot \prod_{i=2}^{n} m_i$ сумматоров, реализующих операции вида (1) и (2).

Исходя из геометрической интерпретации (рис.1) предложенного метода для произвольного модуля m_i КВ очевидно, что точность A_{m_i} сравнения зависит от величины интервала $[jm_i, (j+1)m_i)$, т.е. от величины модуля в соответствии с которым был образован ОК. В этом случае точность сравнения в КВ можно определить следующим выражением

$$W_{m_i} = 1/m_i . \tag{3}$$

Однако, в случае $m_i = m_n$, количество N_{m_n} оборудования устройства сравнения двух чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$, зависящие в основном от количества входящих в него двух групп сумматоров, реализующих операции $A_{m_n} - K_A \cdot m_n = Z^{(A)}_{K_A}$ и $B_{m_n} - K_B \cdot m_n = Z^{(B)}_{K_B}$, определяется выражением (4)

$$N_{m_n} = \prod_{k=1}^{n-1} m_k . \tag{4}$$

Для произвольного значения m_i модуля КВ формула (4) будет иметь следующий вид

$$N_{m_i} = \prod_{\substack{k=1;\\ k\neq i.}}^{n-1} m_k . \tag{5}$$

В зависимости от величины модуля m_i рассмотрим варианты методов арифметического сравнения чисел в КВ.

Пусть $m_i = m_n = max$. В этом случае точность W_{m_n} сравнения определяется величиной интервала $[jm_n, (j+1)m_n)$ и будет минимальной. При этом количество оборудования N_{m_n} сравнивающего устройства (см. выражение (5)) также будет минимальным, также будет минимальным.

Пусть $m_i = m_1 = min$. В этом случае для упорядоченного КВ обеспечивается максимальная точность сравнения, которая определяется величиной интервала $[jm_1, (j+1)m_1)$. При этом количество оборудование устройства для арифметического сравнения двух чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$ в КВ максимально и равно $N_{m_1} = \prod_{k=2}^{n} m_k = m_2 \cdot m_3 ... m_{n-1} \cdot m_n$.

Для КВ минимальное основание равно $m_1 = 2$. В этом случае точность сравнения будет равна двум единицам, что не позволяет добиться максимальной точности сравнения равной единицы (см. выражение (3)).

Необходимо разработать такой метод сравнения, результат бы которого определялся с максимальной точностью $W_{max} = 1$ и при минимальном количестве оборудования N_{min}, что обеспечивается выбором основания $m_i = m_n = max$, так как оно удовлетворяет обеспечения условию N_{min}. введем процедуру сравнения непосредственных остатков a_n и b_n исходных чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$ по основанию m_n. В этом случаи достигается максимальная точность сравнения - до единицы интервала. Так, как позиционное сравнения остатков a_n и b_n проводятся параллельно во времени с формированием ОК, то быстродействие сравнения двух чисел не снижается.

Зная величины a_n и b_n, n_A и n_B, процедуру сравнения двух чисел $A_{кв} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ и $B_{кв} = (b_1, b_2, ..., b_{i-1}, b_i, b_{i+1,}..., b_n)$ математически можно представить в виде (6)÷(8).

Таким образом,

$$A_{кв} = B_{кв}, \text{ если } [(n_A = n_B) \wedge (a_n = b_n)]; \tag{6}$$

$$A_{кв} > B_{кв}, \text{ если } \{(n_A > n_B) \vee [(n_A = n_B) \wedge (a_n > b_n)]\}; \tag{7}$$

$$A_{кв} < B_{кв}, \text{ если } (n_A < n_B) \vee [(n_A = n_B) \wedge (a_n < b_n)] . \tag{8}$$

Метод арифметического сравнения двух чисел $A_{кв}$ и $B_{кв}$ представим на рис. 4.

1. Запись во входные регистры сравниваемых в КВ чисел

$$A_{кв}=(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n) \text{ и }$$
$$B_{кв}=(b_1,b_2,...,b_{i-1},b_i,b_{i+1},...,b_n).$$

↓

2. Выборка по значениям a_n и b_n из БКН констант нулевизации вида

$$KH^{(A)}_{m_n}=(a'_1,a'_2,...,a'_{i-1},a'_i,a'_{i+1},...,a_n)$$

и $KH^{(B)}_{m_n}=(b'_1,b'_2,...,b'_{i-1},b'_i,b'_{i+1},...b_n)$.

Одновременно производится сравнение остатков a_n и b_n.

↓

3. Определение чисел

$$A_{m_n}=A_{кв}-KH^{(A)}_{m_n}=$$
$$=(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n)-$$
$$-(a'_1,a'_2,...,a'_{i-1},a'_i,a'_{i+1},...,a_n)=$$
$$=(a^{(1)}_1,a^{(1)}_2,...,a^{(1)}_{i-1},a^{(1)}_i,a^{(1)}_{i+1},...,0) \text{ и }$$
$$B_{m_n}=B_{кв}-KH^{(B)}_{m_n}=$$
$$=(b_1,b_2,...,b_{i-1},b_i,b_{i+1},...,b_n)-$$
$$-(b'_1,b'_2,...,b'_{i-1},b'_i,b'_{i+1},...,b_n)=$$
$$=(b^{(1)}_1,b^{(1)}_2,...,b^{(1)}_{i-1},b^{(1)}_i,b^{(1)}_{i+1},...,0)$$

кратных значению модуля m_n КВ.

↓

4. Посредством сумматоров, используя совокупность констант 0, $m_n,...,(N-1)\cdot m_n$, по формулам

$$A_{m_n}-K_A\cdot m_n=Z^{(A)}_{K_A} \text{ и}$$

$B_{m_n}-K_B\cdot m_n=Z^{(B)}_{K_B}$ определяются компоненты $z^{(A)}_i$ и $z^{(B)}_j$ ОК, который представляется в виде

$$K^{(n_A)}_{N_{m_n}}=\{Z^{(A)}_{N_{m_n}-1}\,Z^{(A)}_{N_{m_n}-2}\ldots Z^{(A)}_2 Z^{(A)}_1\,Z^{(A)}_0\}$$

и

$$K^{(n_B)}_{N_{m_n}}=\{Z^{(B)}_{N_{m_n}-1}\,Z^{(B)}_{N_{m_n}-2}\ldots Z^{(B)}_2\,Z^{(B)}_1\,Z^{(B)}_0\}.$$

↓

5. По виду ОК

$$K^{(n_A)}_{N_{m_n}}=\{Z^{(A)}_{N_{m_n}-1}\,Z^{(A)}_{N_{m_n}-2}\ldots Z^{(A)}_2 Z^{(A)}_1\,Z^{(A)}_0\}$$
$$K^{(n_B)}_{N_{m_n}}=\{Z^{(B)}_{N_{m_n}-1}\,Z^{(B)}_{N_{m_n}-2}\ldots Z^{(B)}_2\,Z^{(B)}_1\,Z^{(B)}_0\}$$

определяются значения двоичных разрядов ОК для которых $Z^{(A)}_{n_A}=0$ и $Z^{(B)}_{n_B}=0$.

После чего формируются количественные значения n_A и n_B ППНК.

↓

6. Определение результата арифметического сравнения чисел A_{KB} и $B_{кв}$ в соответствии с выражениями

$A_{кв}=B_{кв}$, если $[(n_A=n_B)\wedge(a_n=b_n)]$;

$A_{кв}>B_{кв}$, если $(n_A>n_B)\vee[(n_A=n_B)\wedge(a_n>b_n)]$;

$A_{кв}<B_{кв}$, если $(n_A<n_B)\vee[(n_A=n_B)\wedge(a_n<b_n)]$.

Рисунок 4 – Метод арифметического сравнения двух чисел в КВ

Выводы Разработан метод арифметического сравнения чисел в КВ, который основан на получении и сравнении ППНК.

Список использованных источников

1. Акушский И. Я. Машинная арифметика в остаточных классах / И. Я. Акушский, Д. И. Юдицкий. – М.: Советское радио, 1968. – 440 с.

2. Жихарев В. Я. Методы и средства обработки информации в непозиционной системе счисления в остаточних классах / В. Я. Жихарев, Я. В. Илюшко, Л. Г. Кравец, В. А. Краснобаев. – Ж.:Волынь, 2005. – 219 с.

3. Краснобаев В. А. Методы сравнения чисел, представленных кодом системы остаточных классов / В. А. Краснобаев. // Электронное моделирование. - 1988. – Том.10, № 2. – С. 84 – 87.

Анотація

МЕТОД АРИФМЕТИЧНОГО ПОРІВНЯННЯ ЧИСЕЛ У КЛАСІ ЛИШКІВ

Загуменна К. В., Кошман С. О., Мавріна М. О., Краснобаєв В. А.

Пропонується метод арифметичного порівняння чисел у класі лишків (КЛ), заснований на використанні позиційної ознаки непозиційного коду.

Abstract

A METHOD OF ARITHMETIC COMPARISON OF NUMBERS IS IN CLASS OF TAKE-OUTS

K. Zagumenna ., S. Koshman, M. Mavrina, V. Krasnobayev

The method of arithmetic comparison of numbers is offered in the class of take-outs, based on the use of position sign of unposition koda (PSUK) in Apt.