УДК 631.313.02:621.891

МОДЕЛЬ ВІДНОСНОГО ЗНОШУВАННЯ РОБОЧОГО ОРГАНУ ЯК ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ТА ПРОГРАМНА ПІДТРИМКА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ВІДЛІКІВ ЙОГО РЕАЛІЗАЦІЙ

Борак К.В.
(Житомирський національний агроекологічний університет)

Отримано розв'язок стохастичного диференціального рівняння, як моделі випадкового процесу зношування робочих органів дискових ґрунтообробних знарядь та розроблена програмна підтримка для можливості його вирішення за допомогою ПЕОМ.

Постановка проблеми. Відомо, що моделювання і розкриття основних закономірностей динаміки абразивного зношування робочих органів (РО) та формування його оптимальної геометрії є найважливішою триботехнічною задачею в проблемі підвищення ефективності роботи і довговічності РО ґрунтообробних машин [2]. Робочі поверхні деталей дискових ґрунтообробних знарядь (ДГЗ) пристосовуючись до умов взаємодії з ґрунтом, поступово зношуються під силовим впливом [1].

Аналіз останніх досліджень. Строго кажучи, тертя і зношування робочих поверхонь РО ДГЗ є випадковим процесом [1, 3], що обумовлений зміною геометричних розмірів. Використовуючи класичну схему протікання процесу на мікроскопічному рівні, зношування РО можна описати стохастичним диференціальним рівнянням [4]:

$$dU(t) = \varphi\left[U(t), t\right]dt + \psi\left[U(t), t\right]dw(t), \tag{1}$$

де $U(t)$ є функцією відносного зносу, $\varphi\left[U(t), t\right]$ та $\psi\left[U(t), t\right]$ є детермінованими функціями, що характеризують інтенсивність зносу, а функція $w(t)$ є випадковою складовою (випадковим процесом), котра зазвичай являє собою стандартний вінеровський процес. Функція відносного зносу $U(t)$ представляється як:

$$U(t) = \frac{u(t)}{\bar{u}}, \tag{2}$$

де $u(t)$ є поточним зносом, й $\bar{u}$ є граничним зносом. Слід зауважити, що за умови незалежності випадкових величин $w(t_1)$ і $w(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, $t_1 \in [0; T]$, $t_2 \in [0; T]$, функція $U(t)$ є неперервним марківським процесом [4] на сегменті спостереження $[0; T]$ тривалістю T.

Відомо [1], що випадковий марківський процес $U(t)$ повністю визначається щільністю $\omega(U, t)$ умовної імовірності переходу, котра в загальному вигляді задовольняє узагальненому інтегральному рівнянню Маркова, яке при певних припущеннях зводиться до рівняння Колмогорова — Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial\omega(U,t)}{\partial t}=-\frac{\partial\left[v(U,t)\omega(U,t)\right]}{\partial U}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left[c(U,t)\omega(U,t)\right]}{\partial U^2} \qquad (3)$$

щодо щільності розподілу $\omega(U,t)$ випадкового процесу $U(t)$ як розв'язку рівняння (1), де $v(U,t)$ є функціональним коефіцієнтом, що описує середню швидкість випадкового процесу зношування $u(t)$, а $c(U,t)$ є функціональним коефіцієнтом, що характеризує швидкість зміни умовної дисперсії процесу.

Результати досліджень. Звісно, у позначеннях стохастичного рівняння (1) рівняння Колмогорова — Фоккера — Планка (3) для його розв'язку перепишеться як [5, 6]:

$$\frac{\partial\omega(U,t)}{\partial t}=-\frac{\partial\left(\varphi\left[U(t),t\right]\omega(U,t)\right)}{\partial U}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left[\left(\psi\left[U(t),t\right]\right)^2\omega(U,t)\right]}{\partial U^2}. \qquad (4)$$

Звичайно, довговічність РО визначається величиною зносу, тому розглянемо визначення закону розподілу за величиною зносу РО. Припустимо, що зміну середнього значення зносу та його дисперсії можна описати лінійною залежністю. Це припущення дозволяє записати рівняння кінетики зношування у такому виді:

$$dU(t)=D_U dt+S_U dw(t), \qquad (5)$$

де D_U й S_U є сталими величинами, що характеризують інтенсивність детермінованої і випадкової складової процесу зношування відповідно. При цьому розв'язок стохастичного рівняння (1) за початкової умови $U_0=U(0)$ можна розуміти як випадковий процес:

$$U(t)=U_0+\int_0^t D_U d\tau+\int_0^t S_U dw(\tau)=U_0+D_U t+S_U\int_0^t dw(\tau), \qquad (6)$$

де стандартний вінеровський процес $w(t)$ може бути виражений через неперервну нормально розподілену випадкову величину $\zeta(t)$ з нульовим математичним сподіванням й одиничною дисперсією:

$$w(t)=\zeta(t)\sqrt{t}, \qquad (7)$$

а диференціалом стандартного вінеровського процесу $w(t)$ є:

$$dw(t)=\zeta(t)\sqrt{dt}. \qquad (8)$$

Таким чином, маючи L відліків випадкової величини $\zeta(t)$:

$$\left\{\zeta_j=\zeta(\tau_j)\right\}_{j=1}^{L} \quad \forall\ \tau_{i+1}=\tau_i+\frac{T}{L} \text{ для } i=\overline{1,L-1} \text{ при } \tau_1=\frac{T}{L} \text{ і } \tau_L=T, \qquad (9)$$

можна виписати чисельну процедуру для визначення L відліків випадкового процесу (6):

$$U\left(\tau_j\right)=U_0+D_U\tau_j+\sqrt{\frac{T}{L}}S_U\sum_{i=1}^{j}\zeta_i \quad \text{для} \quad j=\overline{1,L}. \tag{10}$$

Для моделювання розв’язку (6) у формі відліків (10) оцінимо константи D_U й S_U. Величину зносу елемента робочої поверхні за проміжок часу t_2-t_1 можна уявити як різницю випадкових процесів:

$$\Delta u\left(t_2,t_1\right)=u\left(t_2\right)-u\left(t_1\right), \tag{11}$$

на основі чого математичне сподівання і дисперсія::

$$M\left[\Delta u\left(t_2,t_1\right)\right]=M\left[u\left(t_2\right)\right]-M\left[u\left(t_1\right)\right], \tag{12}$$

$$D\left[\Delta u\left(t_2,t_1\right)\right]=D\left[u\left(t_2\right)\right]+D\left[u\left(t_1\right)\right]. \tag{13}$$

З урахуванням (11) - (13) оцінки коефіцієнтів $\varphi\left[U\left(t\right),t\right]$ та $\psi\left[U\left(t\right),t\right]$ у рівнянні (1) та (4) для умовного граничного зношування $\Delta u_{\lim}$, за якого значення $u\left(t_2\right)$ й $u\left(t_1\right)$ некорельовані, набувають виду:

$$\varphi\left[U\left(t\right),t\right]=\frac{M\left[u\left(t_2\right)\right]-M\left[u\left(t_1\right)\right]}{\left(t_2-t_1\right)\left(\Delta u_{\lim}\right)}, \tag{14}$$

$$\psi\left[U\left(t\right),t\right]=\sqrt{\frac{D\left[u\left(t_2\right)\right]+D\left[u\left(t_1\right)\right]}{\left(t_2-t_1\right)\left(\Delta u_{\lim}\right)^2}}. \tag{15}$$

Таким чином, коефіцієнтами у розв’язку (6) та для відліків (10) є:

$$D_U=\frac{M\left[\Delta u\left(t_2,t_1\right)\right]}{\left(t_2-t_1\right)\left(\Delta u_{\lim}\right)}, \tag{16}$$

$$S_U=\frac{\sqrt{D\left[\Delta u\left(t_2,t_1\right)\right]}}{\Delta u_{\lim}\sqrt{t_2-t_1}}. \tag{17}$$

Оцінки (16) і (17) дозволяють виписати відліків (10) розв’язку (6) у готовому для програмування виді:

$$U\left(\tau_j\right)=U_0+\frac{M\left[\Delta u\left(t_2,t_1\right)\right]}{\left(t_2-t_1\right)\left(\Delta u_{\lim}\right)}\tau_j+\frac{\sqrt{D\left[\Delta u\left(t_2,t_1\right)\right]T}}{\Delta u_{\lim}\sqrt{L\left(t_2-t_1\right)}}\sum_{i=1}^{j}\zeta_i \quad \text{для} \quad j=\overline{1,L}. \tag{18}$$

Розроблений код програмного Matlab-модуля “znos_proc”, котрий здійснює обчислення відліків (10) випадкового процесу (6) та візуалізує їх на фоні детермінованої складової цього процесу:

$$M\left[U\left(t\right)\right]=U_0+D_Ut \tag{19}$$

Цей модуль (програмна функція) має п’ять вхідних аргументів (параметрів) і повертає користувачу два вихідних аргументи. Вхідними параметрами є проміжок спостереження T, початкове значення U_0 відносного зносу, інтенсивність детермінованої D_U і випадкової складової S_U процесу зношування, а також довжина L реалізації випадкової величини $\zeta\left(t\right)$. Вихідними параметрами Matlab-модуля “znos_proc” є відліки (10) випадкового процесу (6) та відліки детермінованої складової (19) цього процесу. Ці два набори відліків повертаються у командне вікно Matlab при спеціальному синтаксисі виклику Matlab-модуля “znos_proc”.

Якщо інтенсивність детермінованої складової процесу зношування не є сталою, що, власне характерно для серійних та зміцнених РО ДГЗ, то стохастичне рівняння (5) перепишеться у виді:

$$dU(t) = D_U(t)dt + S_U dw(t), \tag{20}$$

де інтенсивність випадкової складової процесу зношування S_U є сталою. Розв’язком рівняння (20) в інтегральній формі за початкової умови $U_0 = U(0)$ є випадковий процес:

$$U(t) = U_0 + \int_0^t D_U(\tau)d\tau + \int_0^t S_U dw(\tau) = U_0 + \int_0^t D_U(\tau)d\tau + S_U \int_0^t dw(\tau), \tag{21}$$

відліки якого:

$$U(\tau_j) = U_0 + \frac{T}{L}\sum_{i=1}^{j} D_U(\tau_i) + \sqrt{\frac{T}{L}} S_U \sum_{i=1}^{j} \zeta_i \quad \text{для} \quad j = \overline{1, L}. \tag{22}$$

Для моделювання випадкового процесу (21) зношування серійних РО ДГЗ також створюємо програмний Matlab-модуль, але вже з шістьома вхідними аргументами, де замість аргументу D_U будуть два параметри, які визначатимуть нелінійний характер функцій $D_U(t)$. Така детермінована нелінійна інтенсивність зазвичай дає очікувану функцію зносу виду:

$$M\left[U(t)\right] = U_0 + \alpha t^{\beta} \tag{23}$$

Окремо для моделювання випадкового процесу (21) зношування зміцнених РО ДГЗ створюємо програмний Matlab-модуль “znos_zmitsneni_ro_proc”. Детермінована нелінійна інтенсивність зношування таких РО є такою, що очікувану функцію зносу є практично лінійною з невеликим нахилом, а потім, ближче до періоду закінчення експлуатація зношування стрімко збільшується, нагадуючи гілку праву параболи з точкою мінімуму:

$$M\left[U(t)\right] = \begin{cases} U_0 + \alpha t,\ t \in [0; t_{c1}], \\ U_0 + at^2 + bt + c,\ t \in [t_{c1}; T]. \end{cases} \tag{24}$$

Оскільки у момент часу $t = t_{c1}$ очікуване зношування є неперервним, то з (24) слідує, що:

$$U_0 + \alpha t_{c1} = U_0 + at_{c1}^2 + bt_{c1} + c,$$

$$\alpha = \frac{at_{c1}^2 + bt_{c1} + c}{t_{c1}}. \tag{25}$$

Додатково коефіцієнти a, b, c параболічної частини функції (24) при $t \in [t_{c1}; T]$ є такими, що у моменти часу $t = t_{c1}$ і $t = t_{c2}$ відомі значення:

$$U_{c1} = M\left[U(t_{c1})\right] - U_0, \tag{26}$$

$$U_{c2} = M\left[U(t_{c2})\right] - U_0. \tag{27}$$

Отже, з урахуванням (25) детермінованою складовою (24) випадкового процесу (21) зношування зміцнених РО ДГЗ є функція:

$$M\left[U\left(t\right)\right]=\begin{cases} U_0+\dfrac{at_{c1}^2+bt_{c1}+c}{t_{c1}}t,\ t\in\left[0;\,t_{c1}\right], \\ U_0+at^2+bt+c,\ t\in\left[t_{c1};\,T\right]. \end{cases} \qquad (28)$$

Спроектовані додатково програмні Matlab-модулі “znos_seriyni_ro_proc” і “znos_zmitsneni_ro_proc”, як і модуль “znos_proc”, у сукупності дозволяють повністю контролювати параметри чисельного розв’язку (21) стохастичного диференціального рівняння (1), залежно від того, якого типу робоча поверхня використовується, після чого прогнозувати знос за верхньою огинаючою ансамблю реалізацій випадкового процесу $\left\{U\left(t\right)\right\}_{t\in[0;\,T]}$. Як і раніше, під U можна розуміти і нормоване зношування таке, що $0\le U\left(t\right)\le 1$, а початкова умова $U_0=U\left(0\right)=0$ відповідатиме абсолютно новій робочій поверхні.

Висновки. Отримано математичну модель динаміки зношування РО ДГЗ, що дозволяє конструкторам дискових знарядь визначати інтенсивність зношування РО без проведення складних експлуатаційних випробувань.

Список літератури

1. Бобрицький В.М. Підвищення зносостійкості різальних елементів робочих органів ґрунтообробних машин: дис. канд. тех. наук: 05.02.04 / Бобрицький Віталій Миколайович. – Кіровоград, 2007. – 182 с.

2. Виноградов В.Н., Абразивное изнашивание / В.Н. Виноградов, Г.М. Сорокин, М.Г. Колокольников. – М.: Машиностроение, 1990. – 224 с.

3. Костецкий Б.И. Фундаментальные закономерности трения и износа. – Киев: Знание, 1981. – 31 с.

4. Костецкий Б.И. Марковская модель износа и прогнозирования долговечности изнашиваемых деталей / Б.И. Костецкий, В.П. Стрельников, В.Г. Таций // Проблемы трения и изнашивания. – Вып. 10.– К.: Техника, 1976.– С.10-15.

5. Кузнецов Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения / Кузнецов Д. Ф. – [4-е изд., испр. и доп.]. – Сб. : Изд-во Политехнического университета, 2010. – 816 с.

6. Kloeden P. E. Numerical solution of stochastic differential equations : [monograph] / P. E. Kloeden, E. Platen. – Berlin : Springer-Verlag, 1992. – 632 p.

Аннотация

МОДЕЛЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ИЗНОСА РАБОЧЕГО ОРГАНА КАК СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ТА ПРОГРАММНАЯ ПОДДЕРЖКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОТСЧЕТОВ ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ

Борак К.В.

Получено решение стохастического дифференциального уравнения, как модели случайного процесса изнашивания рабочих органов дисковых почвообрабатывающих орудий и разработана программная поддержка для возможности его решения с помощью ЭОМ.

Abstract

MODEL OF RELATIVE WEAR OF WORKINGS ORGANS AS CASUAL PROCESS AND SOFTWARE SUPPORT IS FOR DETERMINATION OF COUNTING OUT OF HIS REALIZATION

K. Borak

The decision of stochastic differential equalization is got, as models of casual process of wear of workings organs of disk soil-cultivating instruments and software support is developed for possibility of his decision by computer.

УДК 621.923

МАТЕМЕТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗВОРОТНОЇ ТЕЧІЇ КОРМОВОЇ СУМІШІ В ГІДРОДИНАМІЧНОМУ ПОДРІБНЮВАЧІ

Мерінець Н.А., аспірант
(Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка)

В результаті математичного моделювання зворотної течії кормової суміші в гідродинамічному подрібнювачі визначена потужність необхідна для приводу шнеку в залежності від проміжку між шнеком і кожухом подрібнювача.

Постановка проблеми та її актуальність. Для інтенсивного і рентабельного ведення свинарства згідно з рекомендаціями учених для годівлі тварин необхідно готувати рідкі кормові суміші вологістю 50…75%, що забезпечить зростання приростів на 10 – 12% і зменшить витрати корму у порівнянні із сухим годуванням [1]. Тому удосконалення засобів механізації приготування рідких кормів, які будуть відрізнятися простотою конструкції, низькими енергоємністю і металоємністю є актуальною і перспективною науковою задачею для розвитку тваринницької галузі України.