

ДО РОЗРОБКИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ МОБІЛЬНИХ МАШИН

Антощенко Р.В., к.т.н, доц.

*Харківський національний технічний університет
сільського господарства ім. П.Василенка*

В роботі розглядаються питання розробки математичної моделі нелінійної динаміки мобільних машин, що дозволяє досліджувати їх роботу, оцінювати динаміку та вплив збурюючих сил і моментів, а також профілю опорної поверхні

Вступ. При дослідженнях динаміки сільськогосподарських машин для зниження витрат праці на створення математичного апарату скорочують кількість ступенів свободи. Основна маса досліджень проводяться на плоских моделях з обмеженою їх кількістю. Проте при русі машини по опорній поверхні її рельєф робить значний вплив на динаміку руху машини, яка у свою чергу призводить до зміни енергетичних показників (витрат енергії на рух). Тому дослідження динаміки і витрат енергії мобільними машинами вивчене не достатньо.

Аналіз основних публікацій, досліджень. Мобільні машини такі як трактори і автомобілі досліджуються за допомогою математичних моделей [1-4]. Один з методів дослідження поодинокі мобільної машини розглянутий в роботах [1, 2], де розглядається робота окремої машини без причепа або навісного знаряддя. Плоско-паралельний рух машинно-тракторного агрегату досліджений в роботі [5].

Мета та постановка задачі. Метою даної роботи є розробка математичної моделі нелінійної динаміки мобільних машин, що дозволяє досліджувати її роботу, оцінювати вплив нерівностей опорної поверхні, нерівномірність тягового зусилля по бортах та в тягових режимах збурюючий момент причіпної або навісної машини.

Основна частина. Векторні величини, що визначають нелінійну динаміку мобільної машини (ММ), такі як швидкість центру мас, кутова швидкість, тощо, а також керуючі впливи та збурення, що діють на ММ (сила тяги, моменти, збурюючі сили та моменти), задаються в різних системах координат. Щоб використати ці параметри в процесі отримання і аналізу рівнянь динаміки мобільних машин, необхідно мати математичний апарат для знаходження проєкцій векторних величин в різних системах координат.

Взаємозв'язок між ортогональними системами координат в прикладних завданнях динаміки може бути описаний з використання кутів Ейлера (модифікованих кутів Ейлера-Крилова) [6].

Кути Ейлера є трьома кутами, що визначають послідовні повороти (чи взаємне положення) твердого тіла або системи координат, з ним жорстко

пов'язаної, відносно початкової системи координат.

При використанні кутів Ейлера для опису положення ММ в просторі (для визначення взаємного положення систем координат) необхідно задавати(обумовлювати) послідовність поворотів і зв'язок між осями і кутами.

Кути Ейлера використовуються для формування матриць направляючих косинусів, що визначають взаємне положення двох ортогональних систем координат (рис. 1).

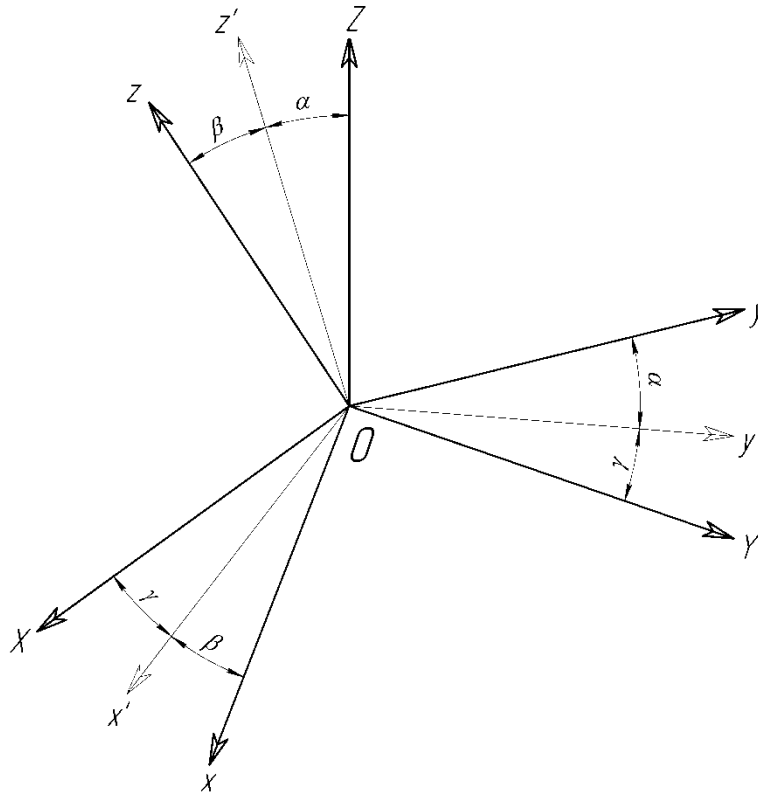


Рис. 1 – Положення двох ортогональних систем координат:

XYZ – осі початкової(нерухомою) системи координат; $x'Y'z'$ – осі рухливої системи координат; т. O – початок системи координат; α, β, γ – кути крену, тангажа та рискання

Матриця направляючих косинусів є прямокутною таблицею 3×3 , елементами якої є косинуси кутів між осями початкової і рухливої систем координат (рис. 2).

	X	Y	Z
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Рис. 2 – Матриця направляючих косинусів для переходу від нерухомої системи координат до рухливої системи координат:

XYZ – осі початкової(нерухомою) системи координат; $x'Y'z'$ – осі рухливої системи координат; a_{ij} – направляючі косинуси (тригонометричні функції кутів Ейлера)

Динамічна модель мобільної машини на прикладі колісного трактора представлена на рис. 3.

Система координат, що пов'язана з місцевістю, визначається осями X, Y, Z . Рухлива система координат пов'язана з корпусом машини – x, y, z . Центр рухливої системи координат розташовується в центрі мас машини, причому вісь x співпадає з подовжньою горизонтальною віссю машини і спрямована вперед, вісь y – також розташована в горизонтальній площині машини і спрямована вліво по ходу машини, вісь z – спрямована вертикально вгору.

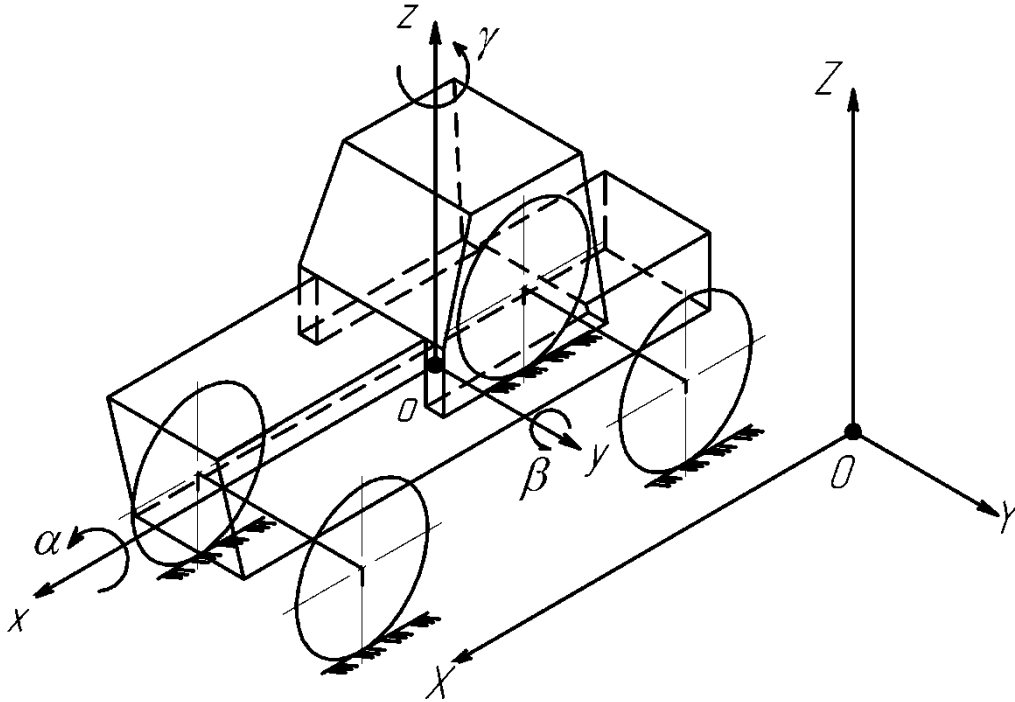


Рис. 3 – Динамічна модель мобільної машини:

X, Y, Z – осі системи координат, пов'язаної з місцевістю; x, y, z – осі рухливої системи координат пов'язаної з корпусом машини; т. О – початок системи координат, пов'язаної з місцевістю; т. о – початок системи координат, пов'язаної з мобільною машиною; α, β, γ – кути повороту мобільної машини навколо осей x, y, z

Перехід з рухливої системи координат в інерціальну здійснюється за допомогою матриці направляючих косинусів:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де: $a_{11} = \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta$;
 $a_{12} = \cos \alpha \sin \gamma$;
 $a_{13} = \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha - \cos \gamma \cos \beta$;
 $a_{21} = \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \cos \beta$;
 $a_{22} = \cos \alpha \cos \gamma$;

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha + \sin \gamma \sin \beta; \\
a_{31} &= \sin \beta \cos \alpha; \\
a_{32} &= -\sin \alpha; \\
a_{33} &= \cos \beta \cos \alpha.
\end{aligned}$$

Визначимо величини проекцій вектору швидкості на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{cases}
\dot{X} = a_{11}\dot{x} + a_{12}\dot{y} + a_{13}\dot{z} \\
\dot{Y} = a_{21}\dot{x} + a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{z} \\
\dot{Z} = a_{31}\dot{x} + a_{32}\dot{y} + a_{33}\dot{z}
\end{cases} \quad (2)$$

Продиференціюємо отримані рівняння (2) для визначення прискорень центру мас машини відносно нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned}
\ddot{X} &= a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{y} + a_{13}\ddot{z} + (\dot{\gamma} \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \\
&+ \dot{\alpha} \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \beta - \dot{\beta} \cos \gamma \sin \beta) \dot{x} + (-\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \gamma + \\
&+ \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \gamma) \dot{y} + (\dot{\gamma} \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha - \dot{\beta} \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \\
&+ \dot{\alpha} \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha + \dot{\gamma} \sin \gamma \sin \beta - \dot{\beta} \cos \gamma \cos \beta) \dot{z} \\
\ddot{Y} &= a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{y} + a_{23}\ddot{z} + (-\dot{\gamma} \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \dot{\beta} \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha + \\
&+ \dot{\alpha} \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha - \dot{\gamma} \cos \gamma \cos \beta + \dot{\beta} \sin \gamma \sin \beta) \dot{x} + (\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \gamma + \\
&+ \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \gamma) \dot{y} + (-\dot{\gamma} \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha - \dot{\beta} \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha + \\
&+ \dot{\alpha} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha) \dot{z} \\
\ddot{Z} &= a_{31}\ddot{x} + a_{32}\ddot{y} + a_{33}\ddot{z} + (\dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha - \dot{\alpha} \sin \beta \sin \alpha) \dot{x} - (\dot{\alpha} \cos \alpha) \dot{y} - \\
&- (\dot{\beta} \sin \beta \cos \alpha + \dot{\alpha} \cos \beta \sin \alpha) \dot{z}
\end{aligned} \quad (3)$$

Система рівнянь руху машини в має вигляд:

$$\begin{cases}
m\ddot{x} = F_x \\
m\ddot{y} = F_y \\
m\ddot{z} = F_z \\
I_x \ddot{\alpha} = M_x \\
I_y \ddot{\beta} = M_y \\
I_z \ddot{\gamma} = M_z
\end{cases} \quad (4)$$

де: m – маса машини;

$F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ – узагальнені сили і моменти, що діють на корпус;

I_x, I_y, I_z - приведені моменти інерції машини до відповідних осей.

Висновки

Нелінійна математична модель динаміки мобільної машини дозволяє досліджувати внутрішні і зовнішні дії в трьох площинах з максимальною

кількістю ступенів свободи.

Список використаних джерел

1. *Смирнов, Г.А.* Теория движения колесных машин: учеб. для студентов машиностроит. спец. вузов [Текст] / Г.А. Смирнов. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.
2. *Popp, K.* Ground Vehicle Dynamics [Text] / Karl Popp and Werner Schiehlen. – Springer, 2010. – 353 p.
3. *Wong, J.Y.* Theory of ground vehicles [Text] / J.Y. Wong. – 3rd ed. – John Wiley & Sons, Inc., 2001. – 558 p.
4. *Rajamani, R.* Vehicle dynamics and control [Text] / Rajesh Rajamani. – Springer, 2006. – 485 p.
5. *Маршалов, Э.С.* Моделирование движения МТА в составе автотракторной машины и фронтально навесного культиватора [Текст] // Совершенствование систем автомобилей, тракторов и агрегатов: Материалы II Международной конференции / Под ред. д.т.н., проф., академика А.Л. Новоселова/ Академия транспорта РФ, АлтГТУ им. И.И. Ползунова – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2000 – С. 93-96.
6. *Алешин, Б.С.* Ориентация и навигация подвижных объектов [Текст] / Под ред. Б.С. Алешина, К.К. Веремеенко, А.И. Черноморского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 424 с.

Аннотация

К РАЗРАБОТКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ МОБИЛЬНЫХ МАШИН

Антощенко Р.

В работе рассматриваются вопросы разработки математической модели нелинейной динамики мобильных машин, что позволяет исследовать их работу, оценивать динамику и влияние возмущающих сил и моментов, а также профиля опорной поверхности

Abstract

TO DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL NONLINEAR DYNAMICS OF MOBILE MACHINES

R. Antoshchenkov

Development of mathematical model of nonlinear dynamics of mobile machines are presented in this article, that allows to investigate their work, estimate a dynamics and influence of revolting forces and moments and also profile of underlayment.