М.І. Погожих, д-р техн. наук, проф. *(ХДУХТ, Харків)*
Л.О. Пархоменко, ст. викл. *(ХДУХТ, Харків)*
Є.О. Іштван, ст. викл. *(ХДУХТ, Харків)*

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛІВ ТЕМПЕРАТУРИ ПІД ЧАС ТЕПЛООБМІНУ ДЛЯ ТІЛ СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

Проблеми енергоефективності тепломасообмінних процесів, у тому числі сушіння, можуть розв'язуватися аналізом експериментальних даних та (або) фізико-математичним (теоретичним) моделюванням. Останнє, так чи інакше, слід порівнювати з експериментом для уточнення моделі та її наближення (адаптації) до технічних рішень.

Метою роботи є визначення умов для методики аналізу розподілу температури в тілі скінченних розмірів шляхом фізико-математичного моделювання процесу теплообміну.

Розподіл температури в прямокутному паралелепіпеді $\Omega = \{-l_1 \le x \le l_1, \quad -l_2 \le y \le l_2, \quad -l_3 \le z \le l_3\}$ ($l_1, l_2, l_3 > 0$), всередині якого відсутні джерела теплоти, описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T\,,\ (x, y, z) \in \Omega \setminus \partial\Omega\,,\ t > 0\,. \tag{1}$$

Тут $T(t, x, y, z)$ – температура тіла в точці (x, y, z) в момент часу t; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $\chi = \frac{\lambda}{\rho c}$, $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ – коефіцієнт температуропровідності, λ, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ – коефіцієнт теплопровідності; c, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ – питома теплоємність речовини; $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – густина речовини. Через $\partial\Omega$ позначено межу області Ω.

Розглянемо дві початково-крайові задачі для рівняння (1).

Задача 1. Нехай в початковий момент часу температура тіла є сталою:

$$T(0, x, y, z) = T_0\,,\ (x, y, z) \in \Omega \setminus \partial\Omega\,; \tag{2}$$

нехай протягом деякого часу температура поверхні тіла $\partial\Omega = \{x = \pm l_1,\ y = \pm l_2,\ z = \pm l_3\}$ підтримується сталою T_1:

$$T = T_1\,,\ (x,y,z) \in \partial\Omega\,,\ t > 0\,. \tag{3}$$

Задача 2. Нехай в початковий момент часу температура тіла є сталою:

$$T(0,x,y,z) = T_1\,,\ (x,y,z) \in \Omega \setminus \partial\Omega\,; \tag{4}$$

нехай на поверхні тіла $\partial\Omega$ відбувається теплообмін із середовищем температури T_0:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - T_0) = 0\,,\ (x,y,z) \in \partial\Omega\,,\ t > 0\,. \tag{5}$$

Тут $\frac{\partial}{\partial n}$ – оператор диференціювання за зовнішньою нормаллю до поверхні $\partial\Omega$; α, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ – коефіцієнт тепловіддачі. Розв'язок рівняння (1) з початковою умовою (2) та крайовою умовою (3) записується у вигляді

$$T = T_1 + \frac{64}{\pi^3}(T_0 - T_1) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m+n}}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)} \times$$

$$\times \cos\frac{(2l+1)\pi x}{2l_1} \cos\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2} \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l_3} e^{-\beta_{l,m,n} t}\,, \tag{6}$$

де $\beta_{l,m,n} = \frac{\chi \pi^2}{4}\left[\frac{(2l+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2m+1)^2}{l_2^2} + \frac{(2n+1)^2}{l_3^2}\right]$.

Розв'язок рівняння (1) з початковою умовою (4) та крайовою умовою (5) записується у вигляді

$$T = T_0 + 8h^3 (T_1 - T_0) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{1,l} x)\cos(\gamma_{2,m} y)\cos(\gamma_{3,n} z)}{\cos(\gamma_{1,l} l_1)\cos(\gamma_{2,m} l_2)\cos(\gamma_{3,n} l_3)} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[(h^2 + \gamma_{1,l}^2) l_1 + h\right]\left[(h^2 + \gamma_{2,m}^2) l_2 + h\right]\left[(h^2 + \gamma_{3,n}^2) l_3 + h\right]} e^{-\chi(\gamma_{1,l}^2 + \gamma_{2,m}^2 + \gamma_{3,n}^2)t}\,. \tag{7}$$

Тут $h = \frac{\alpha}{\lambda}$, $\gamma_{i,j}$ – додатні корені рівняння $\gamma\,\mathrm{tg}(\gamma l_i) = h$ ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,\infty}$).