

В.А. Куценко, канд. техн. наук, доц. (*ХДУХТ, Харків*)

І.В. Лебединець, канд. техн. наук, доц. (*ХДУХТ, Харків*)

І.П. Педорич, ст. викл. (*ХДУХТ, Харків*)

ПОБУДОВА МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН

Класична теорія пружності завдяки працям багатьох поколінь науковців розвилась у потужну наукову дисципліну, а її розв'язки широко використовуються під час проектування та розрахунків інженерних споруд, різноманітних механізмів, будівельних конструкцій, елементів машин та їх деталей. Однак в останні десятиліття потреби практики стимулювали бурхливий розвиток нових розділів механіки, які узагальнюють і уточнюють відомі положення класичної теорії. Одним із таких нових напрямків стала лінійна теорія пружності неоднорідних тіл, механічні властивості яких – функції координат точок тіла.

Неоднорідність є характерною властивістю практично всіх матеріалів, що використовуються в техніці та будівництві. Вона обумовлена цілою низкою чинників, які умовно можна поділити на три групи:

1. Дія довкілля (температурні поля, радіоактивне випромінювання, вплив активних рідин і газів, нерівномірна вологість, тощо).

2. Особливості технології виготовлення (прокатка, кування, затвердіння литва й бетону, тужавіння матеріалу, термічна та хімічна обробка тощо). У цю ж групу можна включити й властивість деяких матеріалів змінювати свої характеристики пружності в залежності від напруженого стану.

3. Реалізація проектного задуму (наявність арматури, включення шарів із інших матеріалів тощо, що є важливим джерелом зменшення ваги, габаритів і собівартості конструкцій, які проектуються.

Застосуємо матричні й операторні методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь для побудови так званих «технічних» теорій деформацій пластин, пружні властивості яких змінюються за товщиною та є інтегровними функціями.

Тобто матеріал може бути як неперервно неоднорідним, так і кусково. В останньому випадку тіло складається зі злитованих (зчеплених) між собою тонкіших шарів.

Раніше розглядалися лише окремі сторони проблеми з переважною увагою до пластин із необмеженою протяжністю в плані.

Причому вивчалися як конкретні випадки зміни параметрів пружності за товщиною, так і частково довільні.

Будь-яка просторова задача теорії пружності для тіл із такою неоднорідністю зводиться до розв'язування системи наступних лінійних диференціальних рівнянь рівноваги у переміщеннях за заданими краєвими умовами:

$$\frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + X = 0;$$

$$\frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 u_y + G \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + Y = 0;$$

$$\frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 u_z + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial z} + 2G' \frac{\partial u_z}{\partial z} + Z = 0.$$

Визначаємо напруження та переміщення:

$$u_x = -\frac{1}{a_4} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial z} + \Lambda_1 \right) + a_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \Lambda_2 \right];$$

$$u_z = -a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial z} + \Lambda_1 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{a_4} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial z} + \Lambda_1 \right) + a_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \Lambda_2 \right] \right\};$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial z} + \Lambda_1 \right) - \Lambda_2 \right]; \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial L}{\partial z} + \Lambda_1 \right), \quad \sigma_z = \frac{\partial^4 L}{\partial x^4};$$

$$\frac{\partial^4 \Lambda_1}{\partial x^4} = Z, \quad \frac{\partial^3 \Lambda_2}{\partial x^3} = X.$$

Отже, просторова задача теорії пружності для ізотропних тіл, з неоднорідністю, що є функцією однієї декартової координати z , зведена до розв'язування двох лінійних диференціальних рівнянь за відповідних краєвих умов.