



**Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Факультет лісового господарства, деревооброблювальних
технологій та землевпорядкування
Кафедра управління земельними ресурсами та кадастру**

СУЧАСНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

**Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт**

**для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форми навчання
(частина I)**

Харків
2023

Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет лісового господарства, деревооброблювальних технологій та земле-
впорядкування
Кафедра управління земельними ресурсами та кадастру

СУЧАСНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форми навчання
(частина I)

Затверджено
рішенням Науково-методичної
ради факультету
лісового господарства,
деревооброблювальних
технологій та землевпорядкування
Протокол № 5
від 8 лютого 2023 р.

Харків
2023

УДК 378.22:657.1/.6(063)

C32

Схвалено на засіданні кафедри управління земельними ресурсами та кадастру
Протокол № 7 від 30 січня 2023 р.

Рецензенти:

Сопов Д.С. - канд. наук про Землю, доц. проф., в.о.зав. каф хімії, географії та наук про землю, ЛНУ ім Т. Г. Шевченко

Шевченко С.А. – доцент кафедри деревооброблювальних технологій та системотехніки лісового комплексу Держаного біотехнологічного університету

C32 Сучасні методи обробки геодезичних вимірів: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт (частина I) / ДБТУ; уклад.: С.Г. Могильний, Д.Д. Хайнус, С.О. Винограденко. – Харків: ДБТУ, 2023. – 30 с.

Методичні рекомендації курсу "Сучасні методи обробки геодезичних вимірів" для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної та заочної форм навчання і присвячені теорії і практиці обробки й оцінки точності результатів геодезичних вимірів методом найменших квадратів.

Методи обчислень орієнтовані на застосування сучасних табличних і формульних процесорів, при їх відсутності – мікрокалькуляторів, щоб здобувачі засвоїли не тільки теорію обчислень, але й культуру виконання й оформлення геодезичних обчислень.

УДК 378.22: 657.1/.6(063)

Відповідальний за випуск: С.О. Винограденко, канд. екон. наук, доцент.

© Могильний С.Г., Хайнус Д.Д.,
Винограденко С.О., 2023

© Державний біотехнологічний
університет, 2023

ЗМІСТ

	стор.
ПЕРЕДМОВА	4
Завдання № 1. Математична обробка результатів рівноточних вимірів однієї величини	6
Завдання № 2. Математична обробка результатів нерівноточних вимірів однієї величини	11
Завдання № 3. Оцінка точності по різницям подвійних вимірів	16
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	22
ДОДАТОК 1	23
ДОДАТОК 2	24
ДОДАТОК 3	25
ДОДАТОК 4	26
ДОДАТОК 5	27
ДОДАТОК 6	28
ДОДАТОК 7	29

ПЕРЕДМОВА

Освоєння теорії математичної обробки вимірювань є однією з найважливіших складових підготовки студентів спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»

Недостатньо вивчити відповідні формули та методи, необхідно освоїти та закріпити навички правильного виконання та оформлення результатів, так щоб вони були не тільки без помилок, а й без пояснень були зрозумілі фахівцю, та не містили неоднозначності результатів. У процесі практичних обчислень студент освоює формули, порядок обчислень та його записів, а й осмислює сутність теоретичних положень методів обробки даних.

Тому виконання завдань передбачає використання сучасних засобів табличних або формульних процесорів типу Excel або MathCad (вільна версія для студентів). За відсутності зазначених засобів допустиме використання калькулятора, методичні вказівки містять усі необхідні форми та пояснення.

Результатом виконання завдань є електронний документ у форматі використаного засобу обчислень. Документ пересилається поштою викладачеві для перевірки та оцінки, де зберігається в архіві протягом та навчального року.

Переважно використовуються процесори, що зводить до мінімуму помилок студента під час введення даних з клавіатури.

Організація виконання робіт . Кожен студент отримує за електронною поштою комплекс індивідуальних завдань на весь курс (зразок див. Додаток 1).

Студент на чергову тему теорії, виконує його в години лабораторних робіт в аудиторії, консультуючись при необхідності у викладача. Якщо він не встиг виконати завдання до кінця, то завершує його у години самостійної роботи. Студент заочної форми навчання виконує завдання самостійно, за потреби може консультуватися дистанційно у викладача.

Викладач перевіряє виконане завдання та опитує студента для оцінки рівня освоєння теми, виставляючи поточну оцінку. В оцінці враховується також правильність обчислень, акуратність, чіткість і логічність розташування записів у документі.

У міру викладу лекційного матеріалу та виконання чергового завдання студенту видається таке індивідуальне завдання. Таким чином, до кінця семестру формується звіт з робіт та за поточними оцінками виставляється у відомість загальна оцінка.

Трудомісткість індивідуальних завдань розрахована так, щоб при старанній роботі студент міг виконати його у відведений для завдання годинник аудиторних занять.

У цих методичних вказівках вміщено зразки індивідуальних завдань та необхідні пояснення до їх виконання.

Завдання №1

Математична обробка результатів рівноточних вимірів однієї величини

Мета роботи. Практичне освоєння формул обробки багаторазових рівноточних вимірювань однієї величини, освоєння методики та засобів визначення найбільш надійного значення вимірної величини та оцінка точності.

Вихідні дані задаються викладачем індивідуально для кожного студента та містять результати багаторазового виміру кута чи довжини.

Зміст завдання . За заданими результатами вимірювань, виконаних в тих самих умовах, обчислити найбільш надійне значення вимірної величини, оцінити його точність і точність одного вимірювання.

Порядок виконання завдання. Форму обчислень у середовищі Excel розміщено у Додатку 2, за її зразком студент може розмістити елементи таблиці. Зміст та формули обчислень наведені нижче у поясненнях під час використання калькулятора.

Результати вимірів кута теодолітом Т-2 поміщені в стовпець 2 формуляра для обчислень (табл.1.1). Однакові для всіх вимірювань величини $127^{\circ}48'$ записуються тільки один раз у рядку 1.

Обчислення середнього арифметичного. Для спрощення обчислень середнього арифметичного вибирається величина

$$x_0 = 127^{\circ} 48' 30'',$$

яка досить близька до всіх вимірних значень. Обчислюються відхилення ε_i вимірювань x_0 за формулою

$$\varepsilon_i = x_i - x_0 \quad (1.1)$$

та записуються в стовпець 3.

У стовпці 4 обчислюються величини ε_i^2 . За стовпцями 3 та 4 обчислюються суми $[\varepsilon]$ та $[\varepsilon^2]$ записуються в нижньому рядку табл.1.1.

Подальші обчислення виконуються та записуються у формуляр (таблиця 1.2), у якому рядками розташовуються номери операцій, що вказують їх

послідовність, відповідні формули та результати.

Середнє арифметичне \bar{x} обчислюється за формулою

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad (1.2)$$

де n –число вимірів. Отримане значення \bar{x} заокруглюється до десятих секунд (див. операції (1) –(3)). Через округлення величина \bar{x} містить помилку $\beta = 0'',04$.

У стовпцях 5 табл.1.1 обчислюють відхилення v_i окремих вимірів від середнього арифметичного

$$v_i = x_i - \bar{x} \quad (1.3)$$

та квадрати відхилень у стовпці 6.

Контролем правильності обчислення \bar{x} та v_i є виконання рівності $[v] = 0$, яка через помилку округлення $\beta = 0'',04$ величини \bar{x} матиме вигляд:

$$[v] \leq n \cdot \beta. \quad (1.4)$$

Таблиця 1.1.

№ п /п	Результати вимірів	ε_i сік	ε_i^2	v_i сік	v_i^2
1	2	3	4	5	6
1	127 °48 '30 ",1	+0,1	0,01	-0,5	0,25
2	33,7 " _	+3,7	13,69	+3,1	9,61
3	30,9 " _	+0,9	0,81	+0,3	0,09
4	30,6 " _	+0,6	0,36	0,0	0,00
5	30,0 " _	0,0	0,00	-0,6	0,36
6	32,5 " _	+2,5	6,25	+1,9	3,24
7	29,1 " _	-0,9	0,81	-1,5	2,25
8	31,1 " _	+1,1	1,21	+0,5	0,25
9	28,6 " _	-1,4	1,96	-2,0	4,00
10	30,7 " _	+0,7	0,49	+0,1	0,01
11	31,8 " _	+1,8	3,24	+1,2	1,44
12	28,6 " _	-1,4	1,96	-2,0	4,00
	$x_0 = 127^\circ 48' 30''$	$[\varepsilon] = +7,7$	$[\varepsilon^2] = 30,79$	$[v] = 0,5$	$[v^2] = 25,87$

В даному випадку маємо

$$[v] = 0'',5 \leq n \cdot \beta = 0,04 \cdot 12 = 0,5''.$$

Розбіжність не перевищує помилки округлення.

Оцінка точності вимірів . Оцінка точності ґрунтується на величині $[v^2]$, сумі квадратів відхилень від середнього арифметичного, тому вона обчислюється з контролем. Один раз у табл. 1.1 та вдруге за контрольною наступною формулою

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} \quad (1.5)$$

у табл.1.2 –операції (4) –(6). Результати відрізняються на 0,35, що припустимо при прийнятій точності обчислень.

Середня квадратична помилка m одного виміру виділяється за формулою Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{25,5}{12-1}} = \pm 1'',5. \quad (1.6)$$

Надійність величини m характеризується помилкою середньої квадратичної помилки, що обчислюється за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{1'',5}{\sqrt{2(12-1)}} = \pm 0'',3 \quad (1.7)$$

(Див. оп . (8) Табл.1.2).

Оскільки число вимірів $n=12$ невелике, то більш об'єктивною оцінкою для m_0 істиною середньої квадратичної помилки одного виміру служить довірчий інтервал

$$m_0 \in [\gamma_1^{(n-1)} m; \gamma_2^{(n-1)} m]. \quad (1.8)$$

Для цього задається довірна ймовірність і $\omega = 0,95$ з таблиці (Додаток 6) вибирають величини $\gamma_1^{(n-1)}$ для $\gamma_2^{(n-1)}=12$ і обчислюються межі довірчого інтервалу (див. оп. (9) –(12)).

Таблиця 1.2.

№ операції	Формули	Дані	№ операції	Формули	Дані
------------	---------	------	------------	---------	------

1	x_0	127° 48' 30"	4	$[\varepsilon^2]$	30,79
2	$\frac{[\varepsilon]}{n}$	+0'',64	5	$-\frac{[\varepsilon]^2}{n}$	-4,94
3	\bar{x}	127° 48' 30'',6	6	$[v^2]$	25,85
7	$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$	$\pm 1'',5$	14	$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$	$\pm 0,4''$
8	$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$	$\pm 0,3''$	15	$M_m = \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$	$\pm 0,1''$
9	ω	0,95			
10	$\gamma_1^{(n-1)}$	0,708	11	$\gamma_2^{(n-1)}$	1,698
12	$m_0 \in$	[1'',06; 2'',55]	16	$M_0 \in$	[0'',28; 0'',68]
13	$m_0 \in$	[0'',90; 2'',09]	17	$M_0 \in$	[0'',20; 0'',60]
18	t_{n-1}	2,20	20	t_0	1,96
19	$X \in$	[127° 48' 29'',7; 127° 48' 31'',5]	21	$X \in$	[127° 48' 29'',8; 127° 48' 31'',4]

При досить великому n числі вимірювань довірчий інтервал m_0 можна побудувати на основі величини m_m . У цьому випадку випадкова величина

$$\zeta = \frac{m-m_0}{m_m} \quad (1.9)$$

має функцію щільності ймовірностей близьку до нормального наступного виду:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (1.10)$$

Довірчий інтервал у цьому випадку матиме вигляд

$$m_0 \in [m - t_0 m_m; m + t_0 m_m], \quad (1.11)$$

де $t_0 = 1.96$ при довірчій ймовірності $\omega = 0,95$. Підставивши отримані значення, отримаємо довірчий інтервал (див. оп. (13)).

Довірчий інтервал оп. (13) суттєво відрізняється від інтервалу оп. (12), оскільки $n = 12$ при тій же довірчій ймовірності, припущення, прийняті для

побудови довірчого інтервалу оп. (13), суттєво спотворюють результат.

Оцінка точності середнього арифметичного. Середня квадратична помилка M середнього арифметичного, що обчислюється за формулою

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1'',5}{\sqrt{12}} = 0'',4, \quad (1.1 2)$$

надійність якої оцінюється величиною M_m

$$M_m = \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0'',4}{\sqrt{2(12-1)}} = 0'',1$$

(Див. оп. (14), (15)).

Довірчий інтервал для M_0 істинного значення середньої квадратичної помилки середнього арифметичного \bar{x} будується так само, як і для величини m за формулою

$$M_0 \in [\gamma_1^{(n-1)} M; \gamma_2^{(n-1)} M], \quad (1.1 3)$$

де величини $\gamma_1^{(n-1)}$ і $\gamma_2^{(n-1)}$ те, що і у формулі (1.8) (див. оп. (16)).

Довірчий інтервал, аналогічний формулі (1.10), M_0 обчислений в операції (17). Природно, що межі довірчих інтервалів (16) та (17) відрізняються, оскільки побудовані на різних теоретичних припущеннях. Слід приймати інтервал (16), як обґрунтований, оскільки він враховує обмеженість числа вимірів.

Справжнє значення X вимірної величини характеризується довірчим інтервалом

$$X \in [\bar{x} - t_{n-1} M; \bar{x} + t_{n-1} M], \quad (1.1 4)$$

в якому t_{n-1} визначається з розподілу Стюдента з $n - 1$ ступенем свободи для заданої довірчої ймовірності за таблицею (Додаток 7). Для довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ при $n - 1 = 11$ отримаємо $t_{n-1} = 2,20$, а довірчий інтервал матиме вигляд записаний у графі відповідної операції (19).

Середнє арифметичне \bar{x} можна розглядати як нормальну випадкову величину з дисперсією, що дорівнює M . Тоді випадкова величина

$$\xi = \frac{\bar{x} - X}{M} \quad (1.15)$$

має функцію щільності ймовірностей виду (1.10), а довірчий інтервал для X

істинного значення виміряної величини визначається за наступними формулами:

$$X \in [\bar{x} - t_0 M; \bar{x} + t_0 M], \quad (1.16)$$

За довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ коефіцієнт $t_0=1.96$. Підставивши отримані значення, отримаємо довірчий інтервал (див. оп . (21)).

Завдання №2

Математична обробка результатів нерівноточних вимірів однієї величини

Мета роботи. Практичне освоєння формул для обробки багаторазових - нерівноточних вимірів однієї величини, освоєння методики та засобів визначення найбільш надійного значення вимірюваної величини та оцінка точності.

Початкові дані. Видаються викладачем індивідуально для кожного студента та містять результати багаторазових нерівноточних вимірів кута або довжини.

Зміст завдання . За заданими результатами вимірювань обчислити найбільш надійне значення вимірюваної величини, оцінити його точність та помилку одиниці ваги.

Порядок виконання завдання . Форму обчислень у середовищі Excel розміщено у Додатку 3, за її зразком студент може розмістити елементи таблиці. Зміст та формули обчислень наведені нижче у поясненнях при використанні калькулятора.

Результати вимірювання довжини світлодіальноміром поміщені у формуляр для обчислень (табл.2.1). Середні квадратичні помилки окремих результатів, записані в колонці 3.

Таблиця 2.1

№ П /П	Результати вимірювань,м	m_i мм	Вага, $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$	ε_i , мм	$p_i \varepsilon_i$	$p_i \varepsilon_i^2$	v_i мм	$p_i v_i$	$p_i v_i^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	250,477	3,3	3,3	7	23,1	161,7	2,0	6,6	13,2
2	,484	6,0	1,0	14	14,0	196,0	9,0	9,0	81,0
3	,472	2,7	4,9	2	9,8	19,6	-3,0	-14,8	44,4
4	,475	3,3	3,3	5	16,5	82,5	0,0	0,0	0,0
5	,466	4,9	1,5	-4	-6,0	24,0	-9,0	-13,5	121,4
6	,473	3,5	2,9	3	8,7	26,1	-2,0	-5,9	11,8
7	,479	6,3	0,9	9	8,1	72,9	4,0	3,6	14,5
8	,477	3,0	4,0	7	28,0	196,0	2,0	8,0	16,0
9	,471	3,4	3,1	1	3,1	3,1	-4,0	-12,5	49,8

10	,478	2,7	4,9	8	39,2	313,6	3,0	14,8	44,4
	$x_0 = 250,470$		$[p] = 29,9$		$[p\varepsilon] = 14,4$	$[p\varepsilon^2] = 1095,5$		$[pv] = -4$	$[pv^2] = 396,7$

Як помилку одиниці ваги приймаємо $\mu = \pm 6$ мм, щоб величини ваги були числа близьких порядків (колонка 4).

Для зменшення величин чисел, як і в роботі №1, вибрано наближене значення $x_0 = 250,470$ та обчислені у колонці 5 відхилення

$$\varepsilon_i = x_i - x_0. \quad (2.1)$$

Обчисливши в колонці 6 добутки $p_i \varepsilon_i$ та їх суму $[p\varepsilon]$, за формулою

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} \quad (2.2)$$

обчислюють \bar{x} у формулярі (табл. 2.2, оп. (1)–(3)), \bar{x} округляють до 0.001м. Помилка заокруглення $\beta = -0,2$ мм (див. оп. (2)).

У колонці 8 табл. 2.1 обчислюються v_i відхилення вимірів від середнього арифметичного

$$v_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.3)$$

а в колонці 9 – добутки $p_i v_i$. Сума $[pv]$ повинна задовольняти умову

$$[pv] = 0, \quad (2.4)$$

але через помилки округлення воно набуде вигляду

$$|[pv]| \leq |\beta[p]| = 5.8. \quad (2.5)$$

Таблиця 2.2

№ операції	Формули	Дані	№ операції	Формули	Дані
1	x_0	250,470	4	$[p\varepsilon^2]$	1095,5
2	$\frac{[p\varepsilon]}{[p]}$	+0,0048	5	$-\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$	-698,34
3	\bar{x}	250,475	6	$[pv^2]$	397,2
7	$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$	$\pm 6,6$	14	$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}}$	$\pm 1,2$
8	$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$	$\pm 1,6$	15	$M_m = \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$	$\pm 0,3$

9	ω	0,95			
10	$\gamma_1^{(n-1)}$	0,688	11	$\gamma_2^{(n-1)}$	1,826
12	$\mu_0 \in$	[4,5; 12,1]	16	$M_0 \in$	[0,8; 2,2]
13	$\mu_0 \in$	[3,5; 9,7]	17	$M_0 \in$	[0,6; 1,8]
18	t_{n-1}	2,262	20	t_0	1,96
19	$X \in$	[250,472; 250,478]	21	$X \in$	[250,473; 250,477]

Виконання умови (2.5) свідчить про те, що середнє вагове \bar{x} та поправки v_i вірно обчислені.

Для оцінки величини μ одиниці ваги за результатами вимірів у колонці 10 табл. 2.1 обчислюються величини $p_i v_i^2$ та їх сума $[pv^2]$. Контролем є повторне обчислення суми за формулою

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} \quad (2.6)$$

(див. оп . (4)÷(6) табл. 2.2).

Помилка одиниці ваги μ обчислюється за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \quad (2.7)$$

а точність значення μ за формулою Гауса

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad (2.8)$$

(див. оп . (7) та (8)).

Оскільки кількість вимірів $n = 10$ невелика, то довірчий інтервал для μ_0 справжнього значення помилки одиниці ваги буде об'єктивнішою характеристикою точності величини μ . Для прийнятої довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ таблиці (Додаток 6) вибираються $\gamma_1^{(n-1)}=0,688$ і $\gamma_2^{(n-1)}=1,826$, а потім будується довірчий інтервал за формулою

$$\mu_0 \in \left[\gamma_1^{(n-1)} \mu; \gamma_2^{(n-1)} \mu \right], \quad (2.9)$$

який записано у графі операції (12).

Якщо вважати, що випадкова величина μ має розподіл ймовірностей,

близький до нормального закону, то можна точність характеризувати, за аналогією з формулою (1.11), довірчим інтервалом наступного виду

$$\mu_0 \in [\mu - t_0 m_\mu; \mu + t_0 m_\mu]. \quad (2.10)$$

Для довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ коефіцієнт $t_0 = 1,96$, тоді отримаємо

$$\mu_0 \in [3,5; 9,7] \quad (2.11)$$

(Див. оп . (13))

Природно, що межі довірчих інтервалів (12) та (13) відрізняються, оскільки побудовані на різних теоретичних припущеннях. Слід приймати інтервал (12) як більш обґрунтований, оскільки він враховує обмеженість числа вимірювань.

Середня квадратична помилка M вагового середнього обчислюється за формулою

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \quad (2.12)$$

а її точність m_M оцінюється за формулою

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (2.13)$$

Як і μ_0 справжнього значення помилки одиниці ваги, так M_0 справжнього значення середньої квадратичної помилки вагового середнього будуються довірчі інтервали, аналогічні (2.9) і (2.10). Перший довірчий інтервал на основі розподілу χ_{n-1}^2 матиме вигляд

$$M_0 \in [\gamma_1^{(n-1)} M; \gamma_2^{(n-1)} M], \quad (2.14)$$

де $\gamma_1^{(n-1)}$ й $\gamma_2^{(n-1)}$ коефіцієнти самі, як і формулі (2.9), і довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ дорівнюють: $\gamma_1^{(n-1)} = 0,688$ і $\gamma_2^{(n-1)} = 1,826$.

Другий довірчий інтервал типу (2.10) матиме вигляд

$$M_0 \in [M - t_0 m_M; M + t_0 m_M], \quad (2.15)$$

де коефіцієнт t_0 для довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ дорівнюватиме $t_0 = 1,96$. Результати побудови довірчих інтервалів вміщено у табл. 2.2 у графах операцій з (14) по (17).

Оцінка надійності X істинного значення вимірної виконується за

допомогою довірчого інтервалу, що будується за розподілом Стюдента за формулою

$$X \in [\bar{x} - t_{n-1}M; \bar{x} + t_{n-1}M], \quad (2.16)$$

де коефіцієнт t_{n-1} вибирається з таблиці (Додаток 7) і для довірчої ймовірності $= 0,95$ дорівнюватиме $t_{n-1} = 2,262$. Отримаємо довірчий інтервал, розміщений у графі операції (19).

Довірчий інтервал, побудований за нормальним законом розподілу ймовірностей, матиме вигляд

$$X \in [\bar{x} - t_0M; \bar{x} + t_0M], \quad (2.17)$$

За довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ коефіцієнт $t_0=1.96$. Підставивши отримані значення, отримаємо довірчий інтервал (див. оп . (21) табл.2.2).

Оцінка точності по різницям подвійних вимірів

Цілі роботи . У геодезичній практиці різниці подвійних вимірів однорідних величин є однією з основних характеристик похибок вимірів, якими оцінюється їх точність. Математико-статистична модель, що лежить в основі визначення показників точності вимірів, залежить від виду вимірів та співвідношень точності.

Мета даної роботи є освоєння математичного апарату обробки двох найбільш типових випадків аналізу різниць подвійних вимірювань однорідних величин.

Зміст роботи . За індивідуальними вихідними даними, що видаються викладачем, кожен студент виконує аналіз різниць подвійних вимірів для двох випадків вимірювань.

Порядок виконання роботи розглянемо двох конкретних прикладах.

Приклад I. Форма обчислень у середовищі Excel міститься у Додатку 3, за її зразком студент може розмістити елементи таблиці. Зміст та формули обчислень наведені нижче у поясненнях під час використання калькулятора.

Вимірювання координат зображень точок на знімку виконано на стереокомпаратор двічі (табл.3.1 (колонка 2)). Умови виміру для всіх точок знімка однакові, тому результати можна вважати рівноточними .

Обчислюються різниці d_i подвійних вимірів

$$d_i = x'_i - x_i, \quad (3.1)$$

де x'_i і x_i – результати вимірювань, відповідно другого та першого. Різниці занесені в колонку 3 і виражені для зручності записів мкм .

Для оцінки наявності в різницях d_i залишкової систематичної складової помилок обчислені: $[d] = 22$ –сума різниць та $[|d|] = 78$ – сума абсолютних величин різниць (колонка 3, табл.3.1). Якщо виконується умова

$$[d] \leq 0,25[|d|], \quad (3.2)$$

то систематична помилка відсутня. У цьому прикладі умова не виконується, т.к.

$$22 > 0,25 \cdot 78.$$

Таблиця 3.1

№ п /п	Результати вимірювань, мм	d_i мкм	d_i^2	d'_i , мкм	$d_i'^2$
1	2	3	4	5	6
1	381.340				
	381.349	9	81	7.7	58.8
2	380.663		0		0.0
	380.658	-5	25	-6.3	40.1
3	396.574		0		0.0
	396.563	-11	121	-12.3	151.3
4	401.269		0		0.0
	401.268	-1	1	-2.3	5.3
5	429.509		0		0.0
	429.514	5	25	3.7	13.7
6	425.834		0		0.0
	425.838	4	16	2.7	7.3
7	459.416		0		0.0
	459.423	7	49	5.7	32.5
8	491.006		0		0.0
	491.002	-4	16	-5.3	28.1
9	488.323		0		0.0
	488.317	-6	36	-7.3	53.3
10	486.337		0		0.0
	486.337	0	0	-1.3	1.7
11	516.253		0		0.0
	516.258	5	25	3.7	13.7
12	519.248		0		0.0
	519.246	-2	4	-3.3	10.9
13	520.934		0		0.0
	520.945	11	121	9.7	94.1
14	540.187		0		0.0
	540.192	5	25	3.7	13.7
15	535.545		0		0.0
	535.548	3	9	1.7	2.9
		$[d] = +20$ $[d] = +78$	$[d^2] = 554$	$[d'] = 0,4$	$[d'^2] = 527$

Отже, необхідно в оцінці точності враховувати θ – середню величину різниць

$$\theta = \frac{[d]}{n}, \quad (3.3)$$

де n – кількість різниць. Розмір $\theta=1,33\text{мкм}$ (оп . 1 табл. 3.2) є наслідком залишкових систематичних помилок, викликани наявністю люфту у вимірювальних гвинтах стереокомпаратора.

Різниці, d'_i – виправлені на величину θ , обчислені за формулою

$$d'_i = d_i - \theta \quad (3.4)$$

та з округленням до 0,1мкм записані в колонці 4 табл. 3.1. Помилка округлення $\beta = +0,03\text{мкм}$.

Контроль правильності обчислення величин d'_i за допомогою співвідношення

$$[d'] \leq n \cdot \beta \quad (3.5)$$

Таблиця 3.2

№ операції	Формули	Дані	№ операції	Формули	Дані
1	$\theta = \frac{[d]}{n}$	1,33	4	$[d^2]$	554
2	$[d]$	78	5	$-\frac{[d]^2}{n}$	-26,6
3	$[d'^2]$	527	6	$[d'^2]$	527,8
7	$m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}$	±4,2	8	ω	0,95
9	$\gamma_1^{(n-1)}$	0,732	10	$\gamma_2^{(n-1)}$	1,577
11	$m_0 \in$	[3,1; 6,6]	12	$m_{\bar{x}}$	3,0

В даному випадку $\beta = +0,03\text{мкм}$, а $[d'] = 0,4\text{мкм}$, що менше ніж

$$n \cdot \beta = 0,03 \cdot 15 = 0,45\text{мкм}.$$

Для обчислення середньої квадратичної помилки одного вимірювання

визначається величина $[d'^2]$ колонки 6 табл.3.1, значення якої контролюється співвідношенням:

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}. \quad (3.6)$$

Як свідчать результати (оп. (3) ÷ (6)), співвідношення виконується з точністю до помилок округлення.

Величина m середньої квадратичної помилки одного виміру визначається за формулою (див. оп . 7 табл. 3.2):

$$m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}, \quad (3.7)$$

$m_{\bar{x}}$ –середня квадратична помилка арифметичної середини із двох вимірів (див. оп . 12 табл. 3.2):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

Оцінка надійності визначення m_0 –істинної середньої квадратичної помилки одного виміру, виконується за допомогою довірчого інтервалу

$$m_0 \in [\gamma_1^{(n-1)} m; \gamma_2^{(n-1)} m], \quad (3.9)$$

де m –середня квадратична помилка одного виміру, обчислена за формулою (3.7); $\gamma_1^{(n-1)}$ та $\gamma_2^{(n-1)}$ для $n=15$ –коефіцієнти, визначені для розподілу χ_{n-1}^2 (Додаток 6). Для довірчої ймовірності $\omega = 0,95$ результати обчислень поміщені в рядки оп . (9) ÷ (11) табл.3.2.

Приклад 2. Форма обчислень у середовищі Excel міститься у Додатку 4, за її зразком студент може розмітити елементи таблиці. Зміст та формули обчислень наведені нижче у поясненнях під час використання калькулятора.

Перевищення між пунктами геометричним нівелюванням виміряно двічі, різниці перевищень записані в колонку 2 табл. 3.3, а довжини ходів у км –у колонку 3. Оцінити $m_{\text{км}}$ –середню квадратичну помилку визначення перевищення одного кілометра нівелірного ходу.

Оскільки довжини ходів нівелювання різні, то різниці d_i нерівноточні, необхідно встановити їх ваги.

Таблиця 3.3.

№ п / п	Різниці d_i мм	Довжи ни ходів L , км	Ваги $p_i = \frac{5}{L_{\text{км}}}$	$d_i \sqrt{p_i}$	$p_i d_i^2$
1	2	3	4	5	6
I	32.3	2.40	2.1	46.8	2190.9
2	12.4	2.90	1.7	16.2	261.4
3	-57.2	8.60	0.6	-44.3	1963.1
4	76.3	8.90	0.6	59.1	3493.0
5	57.6	5.40	0.9	54.6	2986.0
6	-29.6	1.50	3.3	-53.8	2891.3
7	-50.4	2.50	2.0	-71.3	5080.3
8	-16.7	1.80	2.8	-27.9	780.9
9	0.1	3.20	1.6	0.1	0.0
1	30.0	6.40	0.8	26.8	720.0
II	-12.2	6.80	0.7	-10.2	104.2
1	-0.1	1.10	4.5	-0.2	0.0
1	4.8	3.20	1.6	6.1	36.9
1	34.4	3.50	1.4	40.7	1656.7
1	23.8	5.00	1.0	23.8	566.4
1	-15.0	4.80	1.0	-15.0	225.0
				$[d\sqrt{p}] = 51,5$ $[d\sqrt{p}] = 497,0$	$[pd^2] = 22956,2$

Прийемо, що m_{d_i} – середня квадратична величина різниці d_i виражається формулою

$$m_{d_i} = m_{\text{км}} \sqrt{L_i}, \quad (3.10)$$

де $m_{\text{км}}$ – середня квадратична помилка визначення перевищення на 1 км нівелірного ходу; L_i – довжина ходу км. Тоді вага p_i різниці d_i визначається з виразу

$$p_i = \frac{k}{m_{\text{км}}^2 \cdot L_i} \quad (3.11)$$

Для даних у табл. 3.3 приймемо, що

$$\frac{k}{m_{\text{км}}^2} = 5, \quad (3.12)$$

так щоб ваги p_i обчислювалися за формулою

$$p_i = \frac{5}{L_i} \quad (3.13)$$

Обчислені ваги поміщені колонку 4 табл. 3.3. ε_i

Наявність у різницях d_i систематичних помилок оцінюється перевіркою нерівності

$$[d\sqrt{p}] \leq 0,25[|d\sqrt{p}|], \quad (3.14)$$

для перевірки якого в колонці 5 обчислені величини $d_i\sqrt{p_i}$ та знайдено їх суми, а порівняння виконано в табл.3.4 (див. оп. (1) та (2)). Отже, можна прийняти, що різницю d_i не містять систематичних помилок.

Таблиця 3.4.

№ операції	Формули	Дані	№ операції	Формули	Дані
1	$[d\sqrt{p}]$	51,5	2	$0,25[d\sqrt{p}]$	124,2
3	$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}$	$\pm 26,8$	4	$m_{\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{5}}$	$\pm 12,0$
			5	ω	0,95
6	$\gamma_1^{(n)}$	0,745	7	$\gamma_2^{(n)}$	1.5 22
8	$m_0 \in$	[8,9; 18,3]			

Помилка одиниці ваги μ в цьому випадку обчислюється за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \quad (3.15)$$

Виконавши обчислення отримаємо $\mu = \pm 26,8$ мм. Ця величина відповідно до формули (3.12) дорівнює середній квадратичній помилці ходу довжиною 5 км, тоді

$$m_{\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{5}} = \frac{26,8}{\sqrt{5}} = \pm 12,0 \text{ мм.} \quad (3.16)$$

Надійність величини $m_{\text{км}}$ характеризується довірчим інтервалом

$$m_{0_{\text{км}}} \in [\gamma_1^{(n)} m_{\text{км}}; \gamma_2^{(n)} m_{\text{км}}] \quad (3.17)$$

У разі при довірчій ймовірності $\omega=0,95$ для $n=16$ з таблиці (Додаток I) знайдемо $\gamma_1^{(n)}=0,745$ і $\gamma_2^{(n)}=1,522$, звідки отримаємо

$$m_{0_{\text{км}}} \in [8,9; \quad 18,3].$$

Список рекомендованої літератури

1. Войтенко С.П., Математична обробка геодезичних вимірів / С.П.Войтенко , Р.В. Шульц, О.Й. Кузьмич, Ю.В. Кравченко: за ред. Войтенко С.П., -К. : Знання, 2015. -654 з
2. Большаков В.Д., Гайдаєв П.А. Теорія математичної обробки геодезичних вимірів. М. Надра, 1977
3. Папазов М.Г. Могильний С.Г. Теорія помилок та спосіб найменших квадратів: підручник для студентів вузів, які навчаються за спеціальністю "Маркшейдерське " справа "/ М. Г. Папазов, С. Г. Могильний. - Москва : Надра, 1968. - 304 с .: Табл. - Бібліогр .: С. 300 (16 назв.).
4. Большаков І.Д., Маркузу Ю.І. Практикум з теорії математичної обробки геодезичних вимірів. М., Надра , 1968.
5. Кудрявцев Є.М. Mathcad 11: Повний посібник з російської версії. - М.: ДМК Прес, 2005. - 592 с., іл

Завдання за курсом ТОГИ гр.

студенту

<pre> Завдання_1 Варіант 23 +-----+-----2022-----+ № Виміряна величина +-----+-----+ 1 88 26' 05.8" 2 88 26' 02.7" 3 88 26' 12.8" 4 88 26' 01.0" 5 88 26' 01.0" 6 88 26' 01.0" 7 88 26' 01.0" 8 88 26' 01.0" 9 88 26' 04.7" 10 88 26' 05.4" 11 88 26' 01.0" 12 88 26' 00.7" 13 88 26' 01.5" 14 88 26' 01.0" 15 88 26' 04.9" 16 88 26' 18.8" 17 88 26' 01.0" +-----+-----+ Видано студенту _____ </pre>	<pre> Завдання_2 Варіант 23 +-----+-----2022-----+ Вимірювання , С.К.О. , № м мм +-----+-----+ 1 2670.578 4.3 2 2670.582 1.9 3 2670.572 0.7 4 2670.583 2.4 5 2670.580 1.8 6 2670.579 6.0 7 2670.578 2.1 8 2670.574 0.9 9 2670.578 3.2 10 2670.575 1.3 11 2670.584 0.6 12 2670.573 0.7 13 2670.583 2.2 14 2670.578 1.3 15 2670.579 1.9 16 2670.575 0.8 17 2670.577 2.6 +-----+-----+ Видано студенту _____ </pre>
<pre> Завдання_3 Варіант 23 +-----+-----2022-----+ 1-е 2-ге № вимір , м м вимір, мм +-----+-----+ 1 71.031 71.046 2 19.037 19.040 3 13.542 13.543 4 117.715 117.707 5 9.862 9.846 6 86.200 86.208 7 115.834 115.831 8 35.096 35.094 9 62.653 62.664 10 44.130 44.126 11 87.814 87.804 12 24.184 24.188 13 27.124 27.130 14 116.227 116.246 15 70.655 70.644 16 59.631 59.657 17 99.068 99.060 +-----+-----+ Видано студенту _____ </pre>	<pre> Завдання_4 Варіант 23 +-----+-----2022-----+ Нев'язка ходу Довжина ходу № мм км +-----+-----+ 1 1.5 4.1 2 -0,5 2.1 3 9.5 3.9 4 6.3 10.5 5 -0,8 4.5 6 7.2 10.6 7 -10.1 3.8 8 15.7 3.3 9 2.1 7.9 10 -1.8 2.6 11 -4.5 7.0 12 -11.8 10.3 13 24.4 6.0 14 25.0 9.5 15 5.2 1.9 16 -4.9 5.9 17 -5.9 8.7 +-----+-----+ Видано студенту _____ </pre>
<pre> Завдання_5 Варіант 23 +-----+-----2022-----+ Пункт Пункт Виміряне вимір . візир . направлення +-----+-----+ D 0 00 00.0 " A B 38 28' 31.0" C 68 19' 15.9" +-----+-----+ A 0 00 00.0 " D B 246 14' 20.5" C 283 16' 37.9" +-----+-----+ A 0 00 00.0 " B D 27 45' 48.6" C 300 10' 02.4" +-----+-----+ A 0 00 00.0 " C D 34 57' 25.0" B 90 19 19.2 " +-----+-----+ </pre>	<pre> Координати вихідних пунктів +-----+-----+ Пункт Координати X Y +-----+-----+ A 73234.810 45917.026 : D 75082.293 46431.661 : +-----+-----+ Видано студенту _____ </pre>

Таблиця 1. Обробка рівноточних вимірів

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	результати вимірів									
2	o	i	"	ε_i	v_i	v_i^2	довірча ймовірність	$\omega = 0,95$	$t_0 =$	1.96
3	88	26	5.8	-4.20	1.96	3.84	с.к.п. середнього M=	1.24		
4	88	26	2.7	-7.3	-1.14	1.30	$m_m =$	0.88		
5	88	26	12.8	2.80	8.96	80.26	довірчий інтервал для m	3.24	6.68	
6	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07	$M_m =$	0.22		
7	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07	довірчий інтервал для M	0.81	1.67	
8	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07	$\gamma_1^{(n-1)} =$	0.71	$\gamma_2^{(n-1)} =$	1.522
9	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07	довірчий інтервал для m	3.51	7.55	
10	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07	довірчий інтервал для M	0.88	1.89	
11	88	26	4.7	-5.30	0.86	0.74				
12	88	26	5.4	-4.60	1.56	2.43	$t_{n-1} =$	2.12		
13	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07	$\bar{x} =$ результат	88 26 3.84		
14	88	26	0.7	-9.30	-3.14	9.87	довірчий інтервал $X_{ср}$	1.21	6.47	
15	88	26	1.5	-8.50	-2.34	5.48				
16	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07				
17	88	26	4.9	-5.10	1.06	1.12				
18	88	26	18.8	8.80	14.96	223.77				
19	88	26	1.0	-9.00	-2.84	8.07				
20			$[\varepsilon] =$	-104.70	0.00	393.38				
21	$x_0 =$	10.0	$\bar{x} =$	3.84	$m =$	4.96				

Таблиця 2 Обчислення нерівноточних повторних вимірів

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	№	виміри, м	с.к.п., мм	p	e	pe	pee	v	pv	pv		довірча ймовірність	$\omega = 0,95$	$t_0 =$	1.96
2	1	2670.578	4.3	0.34	3.0	1.01	3.04	1.06	0.36	0.38					
3	2	2670.582	1.9	1.73	7.0	12.12	84.83	5.06	8.76	44.33		с.к.п. одиниці ваги μ , мм	10.18		
4	3	2670.572	0.7	12.76	-3.0	-38.27	114.80	-4.94	-63.01	311.22		с.к.п. середнього вагового $X_{ср}$, мм	1.14		
5	4	2670.583	2.4	1.09	8.0	8.68	69.44	6.06	6.58	39.85		$m_\mu =$	1.80	$m_M =$	0.20
6	5	2670.580	1.8	1.93	5.0	9.65	48.23	3.06	5.90	18.07		$\gamma_1^{(n-1)} =$	0.71	$\gamma_2^{(n-1)} =$	1.522
7	6	2670.579	6	0.17	4.0	0.69	2.78	2.06	0.36	0.74		довірчий інтервал для μ	7.20	15.49	
8	7	2670.578	2.1	1.42	3.0	4.25	12.76	1.06	1.50	1.59		довірчий інтервал для M	0.81	1.74	
9	8	2670.574	0.9	7.72	-1.0	-7.72	7.72	-2.94	-22.68	66.68		$t_0 =$	1.96		
10	9	2670.578	3.2	0.61	3.0	1.83	5.49	1.06	0.65	0.69		довірчий інтервал для μ	6.65	13.70	
11	10	2670.575	1.3	3.70	0.0	0.00	0.00	-1.94	-7.17	13.91		довірчий інтервал для M	0.75	1.54	
12	11	2670.584	0.6	17.36	9.0	156.25	1406.25	7.06	122.58	865.43		$t_{n-1} =$	2.12		
13	12	2670.573	0.7	12.76	-2.0	-25.51	51.02	-3.94	-50.25	197.97		вагове середнє $X_{ср} =$	2672.5146		
14	13	2670.583	2.2	1.29	8.0	10.33	82.64	6.06	7.83	47.43		довірчий інтервал $X_{ср}$	2670.087	2674.942	
15	14	2670.578	1.3	3.70	3.0	11.09	33.28	1.06	3.92	4.16					
16	15	2670.579	1.9	1.73	4.0	6.93	27.70	2.06	3.57	7.35					
17	16	2670.575	0.8	9.77	0.0	0.00	0.00	-1.94	-18.94	36.74					
18	17	2670.577	2.6	0.92	2.0	1.85	3.70	0.06	0.06	0.00					
19															
20	$X_0 =$	2670.575	$[p] =$	78.98	$[pe] =$	153.19	1953.68		0.00						
21	$\mu =$	2.5				1.94									
22									$[pv] =$	1656.54					
23									контроль:	1656.54					

Таблиця 4 Оцінка точності вимірів за подвійними рівно точними вимірюваннями

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1		1-е изм., мм	2-е изм., мм	d, мкм	d*d	d	довірча ймовірність	$\omega = 0,95$			
2	1	71.031	71.046	-15.0	225.0	15.0					
3	2	19.037	19.040	-3.0	9.0	3.0	с.к.п. одного виміру, m	7.94			
4	3	13.542	13.543	-1.0	1.0	1.0					
5	4	117.715	117.707	8.0	64.0	8.0	$\gamma_1^{(n-1)} =$	0.750	$\gamma_2^{(n-1)} =$	1.499	
6	5	9.862	9.846	16.0	256.0	16.0	довірчий інтервал для m	5.95	11.90		
7	6	86.200	86.208	-8.0	64.0	8.0					
8	7	115.834	115.831	3.0	9.0	3.0					
9	8	35.096	35.094	2.0	4.0	2.0					
10	9	62.653	62.664	-11.0	121.0	11.0					
11	10	44.130	44.126	4.0	16.0	4.0					
12	11	87.814	87.804	10.0	100.0	10.0					
13	12	24.184	24.188	-4.0	16.0	4.0					
14	13	27.124	27.130	-6.0	36.0	6.0					
15	14	116.227	116.246	-19.0	361.0	19.0					
16	15	70.655	70.644	11.0	121.0	11.0					
17	16	59.631	59.657	-26.0	676.0	26.0					
18	17	99.068	99.060	8.0	64.0	8.0					
19		dcp=	-1.82		2143.0						
20			[d]=	-31.0	[d]=	155.0					
21		[d] ≤ 0,25[d]		сістематична складова похибок відсутня							

Таблиця 5. Оцінка точності вимірів за подвійними нерівно точними вимірюваннями

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		d, mm	L, км	p_i	$d_i\sqrt{p_i}$	$ d\sqrt{p} $	$d_i p_i$	ε_i	$p_i \varepsilon_i$	$p_i \varepsilon_i^2$	$p_i d_i^2$				
2	1	1.5	4.1	1.22	1.66	1.66	1.83	-1.53	-1.87	2.85	2.74	довірча ймовірність	$\omega = 0,95$		
3	2	-0.50	2.10	2.38	-0.77	0.77	-1.19	-3.53	-8.40	29.66	0.60				
4	3	9.50	3.90	1.28	10.76	10.76	12.18	6.47	8.30	53.68	115.71	одиниця ваги, μ	6.90		
5	4	6.30	10.50	0.48	4.35	4.35	3.00	3.27	1.56	5.09	18.90	с.к.п. на 1км ходуб ткм	3.09		
6	5	-0.80	4.50	1.11	-0.84	0.84	-0.89	-3.83	-4.25	16.29	0.71	$\gamma_1^{(n-1)} =$	0.745	$\gamma_2^{(n-1)} =$	1.522
7	6	7.20	10.60	0.47	4.94	4.94	3.40	4.17	1.97	8.20	24.45	$\gamma_1^{(n-1)} =$		$\gamma_2^{(n-1)} =$	
8	7	-10.10	3.80	1.32	-11.59	11.59	-13.29	-13.13	-17.28	226.82	134.22	довірчий інтервал для ткм	2.30	4.70	
9	8	15.70	3.30	1.52	19.33	19.33	23.79	12.67	19.20	243.25	373.47				
10	9	2.10	7.90	0.63	1.67	1.67	1.33	-0.93	-0.59	0.55	2.79				
11	10	-1.80	2.60	1.92	-2.50	2.50	-3.46	-4.83	-9.29	44.85	6.23				
12	11	-4.50	7.00	0.71	-3.80	3.80	-3.21	-7.53	-5.38	40.49	14.46				
13	12	-11.80	10.30	0.49	-8.22	8.22	-5.73	-14.83	-7.20	106.75	67.59				
14	13	24.40	6.00	0.83	22.27	22.27	20.33	21.37	17.81	380.59	496.13				
15	14	25.00	9.50	0.53	18.14	18.14	13.16	21.97	11.56	254.06	328.95				
16	15	5.20	1.90	2.63	8.44	8.44	13.68	2.17	5.71	12.40	71.16				
17	16	-4.90	5.90	0.85	-4.51	4.51	-4.15	-7.93	-6.72	53.28	20.35				
18	17	-5.90	8.70	0.57	-4.47	4.47	-3.39	-8.93	-5.13	45.82	20.01				
19				$[p]$	$[d\sqrt{p}]$	$[d\sqrt{p}]$	$[dp]$		$[p\varepsilon]$	$[p\varepsilon\varepsilon]$					
20				18.94	54.84	128.25	57.38		0.000	1524.64	1698.47				
21				містить систематичну складову dcp			3.03		контроль	1524.64					

Значення нижньої $\gamma_1^{(n-1)}$ та верхньої $\gamma_2^{(n-1)}$ меж довірчого інтервалу

$$m_0 \in [\gamma_1^{(n-1)}m; \gamma_2^{(n-1)}m], \left(m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \right)$$

ω	0.99		0.98		0.95		0.90	
$n-1$	$\gamma_1^{(n-1)}$	$\gamma_2^{(n-1)}$	$\gamma_1^{(n-1)}$	$\gamma_2^{(n-1)}$	$\gamma_1^{(n-1)}$	$\gamma_2^{(n-1)}$	$\gamma_1^{(n-1)}$	$\gamma_2^{(n-1)}$
1	0.356	159.	0.388	79.8	0.446	31.9	0.510	15.90
2	0.434	14.124	0.466	9.975	0.521	6.285	0.578	4.415
3	0.483	6.467	0.514	5.111	0.566	3.729	0.620	2.920
4	0.519	4.396	0.549	3.669	0.599	2.874	0.649	2.372
5	0.546	3.485	0.576	3.003	0.624	2.453	0.672	2.089
6	0.569	2.980	0.597	2.623	0.644	2.202	0.690	1.915
7	0.588	2.660	0.616	2.377	0.661	2.035	0.705	1.797
8	0.604	2.439	0.631	2.204	0.675	1.916	0.718	1.711
9	0.618	2.278	0.645	2.076	0.688	1.826	0.729	1.645
10	0.630	2.154	0.656	1.977	0.699	1.755	0.739	1.593
11	0.641	2.056	0.667	1.898	0.708	1.698	0.748	1.551
12	0.651	1.976	0.677	1.833	0.717	1.651	0.755	1.515
13	0.660	1.191	0.685	1.779	0.725	1.611	0.762	1.485
14	0.669	1.854	0.693	1.733	0.732	1.577	0.769	1.460
15	0.676	1.806	0.700	1.694	0.739	1.548	0.775	1.437
16	0.683	1.764	0.707	1.659	0.745	1.522	0.780	1.418
17	0.690	1.727	0.713	1.629	0.750	1.499	0.785	1.400
18	0.696	1.695	0.719	1.602	0.756	1.479	0.790	1.384
19	0.702	1.666	0.725	1.578	0.760	1.461	0.794	1.370
20	0.707	1.640	0.730	1.556	0.765	1.444	0.798	1.358

Таблиця розподілу Стюдента

ω	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70
r						
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.963
2	9.925	6.964	4.303	2.920	1.886	1.386
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	1.250
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	1.190
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	1.156
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	1.134
7	3.499	2.998	2.365	1.895	1.415	1.119
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	1.108
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	1.100
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	1.093
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	1.088
12	3.055	2.681	2.179	1.782	1.356	1.083
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	1.079
14	2.977	2.624	2.145	1.761	1.345	1.076
15	2.947	2.602	2.131	1.753	1.341	1.074
16	2.921	2.583	2.120	1.746	1.337	1.071
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	1.069
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	1.067
19	2.861	2.539	2.093	1.729	1.328	1.066
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	1.064
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	1.063
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	1.061
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.319	1.060
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	1.059
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	1.058
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	1.058
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	1.057
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	1.056
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	1.055
30	2.750	2.457	2.042	1.697	1.310	1.055
40	2.704	2.423	2.021	1.684	1.303	1.050
60	2.660	2.390	2.000	1.671	1.296	1.045
120	2.617	2.358	1.980	1.658	1.289	1.041
∞	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	1.035

Навчальне видання

СУЧАСНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Методичні вказівки до виконання

Укладачі:

Могильний Сергій Георгійович
Хайнус Дмитро Дмитрович
Винограденко Сергій Олександрович

Формат 60 x 84 1/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний

Умовн. друк. арк. – .

Наклад – прим.

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44