**Міністерство освіти і науки України**

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська**

# ВИЩА МАТЕМАТИКА. МОДУЛЬ 1

**Тексти лекцій**

**Харків 2023**

**Міністерство освіти і науки України**

**ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ**
**БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська

# ВИЩА МАТЕМАТИКА. МОДУЛЬ 1

Рекомендовано
науково-методичною радою факультету мехатроніки
в якості текстів лекцій
для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський)
денної (заочної) форми навчання
за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»

Харків 2023

Г 88
УДК 512.64+514.12+ 517.2+517.3+517.9 (075.8)

Рецензенти:
В. Кузнєцов, доктор ф.-м.н., проф., Український державний університет науки і технологій;
О. Сіняєва, старший викладач кафедри фізики та математики, Харківський державний біотехнологічний університет

Рекомендовано кафедрою фізики та математики,
протокол №3 від 31.10. 2022
Затверджено науково-методичною радою факультету мехатроніки,
протокол №4 від 04.05. 2023

Автори: В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська

Г 88 В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська Вища математика. Модуль 1: Тексти лекцій. – Х.: ХДБУ, 2023. – 205 с.

Викладено теоретичні та практичні основи таких розділів вищої математики: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної, диференціальне числення функції багатьох змінних та диференціальні рівняння.

Теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю прикладів, які подаються з розв’язанням. Запропоновано питання для самоперевірки.

Видання розроблено відповідно до діючої програми з "Вищої математики" для здобувачів вищої освіти спеціальності "Прикладна механіка".

Іл.: 108; табл.: 1; бібліогр.: 14 назв.

# ЛЕКЦІЯ 1

1.1 Визначники та їх властивості.

1.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера.

## 1.1 Визначники

### 1.1.1 Основні поняття

**Означення. Матрицею розміру $m\times n$** називають прямокутну таблицю з $m\times n$ елементів, яка складається з $m$ рядків та $n$ стовпців. Матриця записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

або скорочено

$$A=(a_{ij}),\quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n})\quad \left(A=(a_{ij})_{m\times n}\right),$$

де $a_{ij}$ – елементи $i$ – го рядка і $j$ – го стовпця.

Квадратній матриці $A$ порядку $n$ можна зіставити число $det\,A$ (або $\Delta$, або $|A|$), яке називають її визначником.

**Означення. Визначником (детермінантом) другого порядку**, який складається з чотирьох елементів $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$, називається число, яке позначається через $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і обчислюється за правилом

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

Елементи $a_{11}$, $a_{12}$ складають **головну діагональ** визначника, а елементи $a_{21}$, $a_{22}$ – **побічну діагональ**.

**Приклад**. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$.

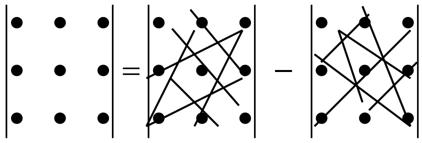
**Розв’язання**.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=3\cdot(-5)-4\cdot(-2)=7.$$

**Означення. Визначником третього порядку**, який складається з дев’яти елементів, називається число, яке позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ та обчислюється за правилом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.2}$$

Для обчислення визначника третього порядку зручно використати правило трикутників (або Саррюса), яке ілюструється схемою (рис.1.1):



основи трикутників паралельні головній діагоналі

основи трикутників паралельні побічній діагоналі

Рис.1.1

**Приклад**. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

**Розв'язання.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot 5 + (-2)\cdot 1\cdot 4 - (-2)\cdot 3\cdot(-2) - 2\cdot 5\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 1 = -\,65\,.$$

**Означення. Визначником *n* – го порядку,** який складається з $n^2$ елементів називають число $\Delta_n$, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

де числа $a_{ij}$ – елементи визначника, $i$ – номер рядка, $j$ – номер стовпця ( $i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}$).

Правило обчислення визначника базується на поняттях мінору $M_{ij}$ та алгебраїчного доповнення $A_{ij}$ елемента $a_{ij}$.

**Означення. Мінором $M_{ij}$ елемента $a_{ij}$** називають визначник $(n-1)$ – го порядку $\Delta_{n-1}$, який утворюється з визначника $n$ – го порядку $\Delta_n$ викреслюванням $i$ – го рядка та $j$ – го стовпця.

**Означення. Алгебраїчним доповненням $A_{ij}$ елемента $a_{ij}$** називають вираз

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \qquad (1.3)$$

**Правило обчислення визначника *n* – го порядку.** Визначник дорівнює сумі $n$ добутків елементів будь – якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,. \qquad (1.4)$$

**Приклад**. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

**Розв'язання**.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(6-(-5)) - 2(2-0) - 3(-1-0) = 43.$$

### 1.1.2 Властивості визначників

Сформулюємо основні властивості визначників, які притаманні визначникам будь – якого порядку. Деякі з цих властивостей розглянемо на прикладі визначників третього порядку.

1) Величина визначника не зміниться, якщо:

– всі його рядки замінити стовпцями з тими самими номерами, і навпаки, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 51$.

– до елементів будь – якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи паралельного рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

2) Визначник дорівнює нулю, якщо:

– всі елементи будь – якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю;

– відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні між собою, тобто визначник має два однакових рядки (стовпці);

– відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні.

Наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot1 + (-2)\cdot4\cdot5 + 1\cdot(-4)\cdot(-2) - (-2)\cdot2\cdot(-2) - 2\cdot5\cdot(-4) - 4\cdot1\cdot1 = 0$.

У цьому визначнику відповідні елементи першого та другого рядків пропорційні.

3) Величина визначника змінить знак на протилежний, якщо в ньому переставити місцями два рядки або два стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4) Величина визначника помножиться на число $k$, якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) помножити на це число. І навпаки, якщо всі елементи будь – якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

Наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2(-4-10-6+8-30-1) = -86$.

Усі властивості доводяться за допомогою правила обчислення визначника. Наприклад, доведемо третю властивість:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\left( a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

## 1.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера.

### 1.2.1 Основні поняття

Система $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.5}$$

де числа $a_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n})$ називають **коефіцієнтами системи**, числа $b_i$ – **вільними членами.**

Якщо хоча б одне $b_i \neq 0$, то систему (1.5) називають **неоднорідною**, у противному випадку ( якщо всі вільні члени $b_i = 0,\ i=\overline{1,m}$) – **однорідною**.

**Означення.** Система рівнянь називається **сумісною,** якщо вона має хоча б один розв’язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв’язку.

**Означення.** Сумісну систему лінійних рівнянь називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв’язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше одного розв’язку.

Розв’язати систему рівнянь означає дослідити її на сумісність. Якщо система сумісна, то знайти її розв’язок.

### 1.2.2 Правило Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему лінійних рівнянь (1.5), якщо $m = n = 3$ (число рівнянь і невідомих співпадають):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.6}$$

Визначник основної матриці системи $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називають **головним визначником системи.**

Складемо **допоміжні визначники системи** (1.6):

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тут $\Delta x_i$ – визначник, який утворюється заміною $i$-го стовпця у головному визначнику стовпцем вільних членів системи.

Якщо головний визначник системи (1.6) $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера**:**

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

Для системи $n$ лінійних рівнянь із $n$ невідомими формули

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n} \tag{1.7}$$

називають **формулами Крамера.**

**Приклад**. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера. Зробити перевірку.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

**Розв'язання. О**бчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(6-2) = -4,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-14-(-18)) = -4,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (10-14) = -4$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-45-(-49)) = -4.$$

За формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Перевірка.

$$\begin{cases} 3\cdot1-3\cdot1+2\cdot1=2 \\ 4\cdot1-5\cdot1+2\cdot1=1, \\ 5\cdot1-6\cdot1+4\cdot1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2=2 \\ 1=1 \\ 3=3 \end{cases}.$$

## Питання для самоперевірки

1 Дати означення матриці.
2 Дати означення визначників другого та третього порядку.
3 Дати означення мінору елемента визначника.
4 Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?
5 Навести правило обчислення визначника $n$ – го порядку.
6 Які перетворення не змінюють величину визначника?
7 Яке перетворення змінює лише знак визначника?
8 За яких умов визначник може дорівнювати нулю?
9 Які існують методи розв’язання систем лінійних?
10 Яку систему алгебраїчних рівнянь називають лінійною?
11 Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною, несумісною, визначеною і невизначеною?
12 Сформулюйте метод Крамера розв’язання системи лінійних рівнянь.

## ЛЕКЦІЯ 2

2.1 Матриці та дії над ними. Обернена матриця.

2.2 Матричний запис системи рівнянь. Теорема Кронікера-Капеллі.

### 2.1 Матриці та операції над ними

### 2.1.1 Основні поняття

**Означення. Матрицею розміру $m \times n$** називають прямокутну таблицю з $m \times n$ елементів, яка складається з $m$ рядків та $n$ стовпців. Матриця записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

або скорочено

$$A = (a_{ij}), \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}) \quad \big(A = (a_{ij})_{m \times n}\big),$$

де $a_{ij}$ – елементи $i$ – го рядка і $j$ – го стовпця.

**Класифікація матриць**

- **Прямокутна матриця** – це матриця, для якої $m \neq n$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ – прямокутна матриця розміру $3 \times 2$.

- **Квадратна матриця –** це матриця, для якої $m = n$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця розміру $2 \times 2$, яку називають матрицею 2 – го порядку.

- **Діагональна матриця –** це квадратна матриця, в якої тільки елементи головної діагоналі відмінні від нуля:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- **Одинична матриця $E$ –** це діагональна матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Нульова матриця *O*** – це матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Матриця – стовпець або матриця – рядок** – це матриці, які містять один стовпець або один рядок і мають розмір $m\times 1$ або $1\times n$ відповідно. Їх вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

- **Транспонована матриця $A^T$ –** це матриця, яка одержана з даної матриці *A* заміною рядків стовпцями.

Якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, тоді $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

- Дві матриці *A* і *B* **рівні** між собою (*A* = *B*), якщо вони мають однаковий розмір і їх відповідні елементи рівні між собою.

### 2.1.2 Операції над матрицями

### Додавання матриць

**Сумою двох матриць** $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$ однакових розмірів є матриця *C*=*A* + *B*, $C=(c_{ij})_{m\times n}$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad (i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}). \tag{2.1}$$

**Приклад**.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається **різниця *C* двох матриць** $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$**:**

$$C=A-B, \ c_{ij}=a_{ij}-b_{ij} \quad (i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}). \tag{2.2}$$

### Множення матриці на число

**Добутком матриці** $A=(a_{ij})_{m\times n}$ **на число *к*** є матриця $B=k\cdot A,\ B=(b_{ij})_{m\times n}$, кожний елемент якої обчислюється за правилом $b_{ij}=ka_{ij} \quad (i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,n})$.

**Приклад.**

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad k=3, \quad k\cdot A=\begin{pmatrix} 21 & 15 & -12 \\ 3 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $-A=(-1)\cdot A$ називають **протилежною до матриці *A***.

Операції додавання, віднімання матриць і множення матриці на число мають такі властивості:

1. $A + B = B + A;$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C;$
3. $A + O = A;$
4. $A - A = O;$
5. $E \cdot A = A;$
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B;$
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot B;$
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha \beta) \cdot A,$

де $A, B, C$ – матриці, $\alpha$ і $\beta$ – числа.

## Добуток матриць

**Добутком матриць** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{n\times k}$ є матриця $C = A \cdot B$, $C = (c_{ij})_{m\times k}$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \quad (i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,k}), \tag{2.3}$$

тобто елемент $i$ – го рядка $j$ – го стовпця матриці добутку $C$ дорівнює сумі добутків елементів $i$ – го рядка матриці $A$ на відповідні елементи $j$ – го стовпця матриці $B$.

**Приклад**. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

**Розв'язання**. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(-2) & 3\cdot 0 + 1\cdot 4 & 3\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ (-2)\cdot 1 + 5\cdot(-2) & (-2)\cdot 0 + 5\cdot 4 & (-2)\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -12 & 20 & 11 \end{pmatrix}$.

**Зауваження**. Добуток двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці.

Операція множення матриць має такі властивості:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot B + A \cdot C$;
4. $\alpha \cdot (A B) = (\alpha A) \cdot B$

## Обернена матриця

**Означення.** Квадратна матриця $A$ називається **невиродженою (неособливою),** якщо її визначник відмінний від нуля: $det\, A \neq 0$. Якщо $det\, A = 0$, то матриця $A$ називається виродженою.

**Означення.** Матриця $A^{-1}$ називається **оберненою до квадратної матриці** $\boldsymbol{A}$, якщо $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$, де $E$ – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця $A$.

**Зауваження**. Обернена матриця існує тільки для невироджених квадратних матриць.

## Формула обчислення оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

де $A_{ij}$ - алгебраїчні доповнення елементів $a_{ij}$ матриці $A$.

**Приклад**. Знайти $A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

**Розв'язання.** Обчислимо визначник матриці

$\det A = 4\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot 2\cdot(-2) + 1\cdot(-2)\cdot 0 - (3\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot(-2)\cdot 0 + 4\cdot 2\cdot(-2)) = -12+16 = 4 \neq 0$,
тому обернена матриця існує.

Знайдемо алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ для кожного елемента матриці $A$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=4, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-5, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2, \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6.$$

За формулою обчислення оберненої матриці маємо:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 6 & 0 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Матричний запис системи рівнянь.
### 2.2.1 Матричний спосіб розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими, тобто систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.5}$$

Систему (2.5) можна записати у **матричному вигляді**

$$A \cdot X = B, \tag{2.6}$$

де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – **матриця коефіцієнтів системи**, яку називають **основною**,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – **матриця – стовпець невідомих** $x_j$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – **матриця – стовпець вільних членів** $b_i$.

Знайдемо розв'язок даної системи рівнянь у випадку, коли $\Delta \neq 0$. Помножимо обидві частини рівняння (2.6) зліва на матрицю $A^{-1}$:

$$A^{-1}\cdot A \cdot X = A^{-1}\cdot B.$$

Оскільки $A^{-1}\cdot A = E,\ E\cdot X = X,$ то

$$X = A^{-1}\cdot B \tag{2.7}$$

Знаходження розв'язку системи $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими за формулою (2.7) називають **матричним способом розв'язання системи.**

**Приклад**. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним способом.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

**Розв'язання.** Розв'язок системи матричним способом знаходиться за формулою $X = A^{-1}\cdot B$. Складемо матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю системи $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

для цього обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці $A$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3,$$

Визначник головної матриці системи $\Delta = -4$, отже

$$X = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} (-8)\cdot 2 + 0\cdot 1 + 4\cdot 3 \\ (-6)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + (-3)\cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

або $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

### Питання для самоперевірки

1 Дати означення матриці.
2 Що називають розміром матриці?
3 Які існують види матриць?
4 Сформулюйте правила додавання, віднімання матриць, множення матриці на число і множення матриць.
5 Яка матриця називається оберненою і за якою формулою вона знаходиться?
6 Які існують методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
7 У чому полягає матричний спосіб розв'язання системи лінійних рівнянь?

## ЛЕКЦІЯ 3

3 Теорема Кронікера-Капеллі.

### 3.1 Ранг матриці

Нехай задана матриця ***A*** розміру $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Виберемо в ній довільно ***k*** рядків та ***k*** стовпців. Елементи, що знаходяться на перетині виділених рядків та стовпців, утворюють квадратну матрицю ***k***-того порядку, визначник якої називають мінором ***k***-того порядку матриці ***A***. Обираючи різними способами ***k*** рядків та ***k*** стовпців, одержимо деяку кількість мінорів ***k***-того порядку. Матриця має мінори будь-якого порядку: від першого (елементи матриці-мінори 1-го порядку) до найменшого із чисел ***m*** та ***n***.

Розглянемо в матриці ***A*** ті її мінори різних порядків, які відмінні від нуля і нехай їх найбільший порядок = ***r***.

**Означення. Рангом матриці** називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.

Із цього означення випливає, що матриця *A* має ранг, що дорівнює *r*, якщо серед її мінорів порядку *r* є хоча б один відмінний від нуля, а всі мінори матриці вищого порядку, ніж *r* , дорівнюють нулю.

Наприклад, у матриці

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ мінор третього порядку $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, а мінорів

четвертого порядку і вищих в матриці *A* немає. Тому ранг матриці *A* дорівнює трьом.

Ранг матриці *A* позначають *rangA*, або *r(A)*.

Ранг матриці обчислюється або способом окантування мінорів, або способом зведення метриці до діагональної.

Суть способу окантування мінорів полягає в тому, що, коли знайдено мінор *M* *k*- го порядку, відмінний від нуля, то далі досить розглянути лише ті мінори (*k+1*) - го порядку, які окантовують мінор *M.* Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює *k*.

Обчислюючи ранг матриці способом окантування мінорів, слід переходити від мінорів нижчих порядків до мінорів вищих порядків.

Наприклад, знайдемо ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ способом окантування мінорів. Для цього обчислимо спочатку мінор другого порядку, розташований в правому верхньому куті цієї матриці:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Мінор третього порядку, що окантовує його:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 1 - 18 = -33 \neq 0.$$

Мінори четвертого порядку, які окантовують мінор $M_3$

$$M_4' = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -18 & 13 & -4 & 2 \\ 13 & -10 & 3 & 1 \\ -23 & 16 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 13 & 2 \\ 13 & -10 & 1 \\ 23 & 16 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -44 & 33 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 66 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -44 & 33 \\ 88 & 66 \end{vmatrix} = 0$$ (властивість 6).

$$M_4'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

(властивість 3).

Мінорів п'ятого порядку і вищих матриця $A$ не має, тому її ранг дорівнює трьом.

Таким чином, *rang A=3*

Суть другого способу полягає в тому, що з допомогою елементарних перетворень матриці зводимо її до діагональної. При цьому ранг матриці не змінюється.

Під елементарними перетвореннями матриці розуміють:

1 заміну рядків стовпцями, а стовпців - відповідними рядками;

2 переставлення двох будь-яких рядків (стовпців);

3 викреслення рядка (стовпця), всі елементи якого дорівнюють нулю;

4 множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на одне й те саме число, відмінне від нуля;

5 додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на довільне число.

Дві матриці називають еквівалентними, якщо від кожної з них можна перейти до другої з допомогою скінченного числа елементарних перетворень. Еквівалентні матриці мають однакові ранги.

Еквівалентність матриць позначають так: $A \sim B$

Зауважимо, що будь-яку матрицю шляхом елементарних перетворень можна привести до діагональної форми. Підрахувавши в такій матриці число відмінних від нуля елементів, розташованих на головній діагоналі, одержимо ранг даної матриці.

Знайдемо ранг тієї самої матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, що й в попередньому прикладі, але способом зведення її до діагональної.

Для цього виконаємо такі елементарні перетворення:

1 поміняємо місцями перший і другий рядки;

2 спочатку елементи першого рядка помножимо на $-2$ і додамо до відповідних елементів другого рядка; потім елементи першого рядка помножимо на -4 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

3 помножимо елементи першого стовпця по черзі на 2, $-1$, 4, $-2$ і додамо відповідно до елементів другого, третього, четвертого і п'ятого стовпців;

4 розділимо елементи четвертого стовпця на 3;

5 поміняємо місцями другий і четвертий рядки;

6 віднімемо від елементів другого рядка відповідні елементи третього рядка;

7 спочатку помножимо елементи другого рядка на $-4$ і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця; потім елементи другого стовпця помножимо на 3 і додамо до відповідних елементів п'ятого стовпця;

8 віднімемо від елементів третього рядка відповідні елементи четвертого рядка;

9 спочатку помножимо елементи третього стовпця на $(-3)$ і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця; потім елементи третього стовпця помножимо на 4 і додамо до відповідних елементів п'ятого стовпця.

Всі елементарні перетворення, які ми виконали, зручно записати так:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через те що на головній діагоналі одержаної матриці лише три елементи відмінні від нуля, то її ранг дорівнює трьом, а тому і ранг даної матриці $A$ також дорівнює трьом, бо ці матриці еквівалентні. Отже, $rang A=3$.

## 3.2 Теорема Кронекера - Капеллі

Німецький математик Леопольд Кронекер ( 1823-1891) та італійський математик Альфред Капеллі (1855-1910) довели дуже важливу теорему, яка використовується у багатьох випадках.

Позначимо через $\boldsymbol{A}$ основну матрицю системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1i}\,x_i + \dots + a_{1n}x_n \ = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2i}\,x_i + \dots + a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad = \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ \dots + a_{ki}\,x_i + \dots + a_{kn}x_n \ = b_k \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mi}\,x_i + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

яка складена з коефіцієнтів при невідомих, а через $\widetilde{A}$ – розширену матрицю цієї системи, яка одержана шляхом доповнення матриці $A$ стовпцем вільних членів,

тобто $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

**Теорема Кронекера – Капеллі.** Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці

$$\boldsymbol{r(A) = r(\widetilde{A}),} \tag{2}$$

причому, система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\boldsymbol{r(A) = r(\widetilde{A}) = n.} \tag{3}$$

Якщо

$$\boldsymbol{r(A) = r(\widetilde{A}) < n,} \tag{4}$$

система має безліч розв'язків.

**Приклад 1** За теоремою Кронекера – Капеллі дослідити систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

і у випадку її сумісності знайти всі розв'язки матричним способом.

**Розв'язання.** Складемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і розширену матрицю } B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ранги цих матриць способом окантування мінорів. Мінор другого порядку, розташований в лівому верхньому куту матриці $A$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Мінор третього порядку, що окантовує його: $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$

Мінорів вищого порядку матриця $A$ не має. Тому $rangA = 3$.

Через те що для матриці $B$ не можна скласти мінора четвертого порядку (матриця $B$ має лише три рядки), то її ранг також дорівнює трьом.

Таким чином, $rangA=rangB=n=3$ і дорівнює числу невідомих, отже, згідно з теоремою Кронекера – Капеллі, система має єдиний розв'язок. Знайдемо його матричним способом. У матричній формі дану систему можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3x1},$$

або коротко $AX = B$, звідки $X = A^{-1}B$, де $A^{-1}$ −матриця, обернена до матриці $A$.

Обернена матриця $A^{-1}$ існує, бо $\Delta = \det A = -8 \neq 0$ (обчислення дивіться вище).

Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці $A$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2, \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4+1) = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2+4) = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6.$$

Тоді $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$

Тепер знайдемо шуканий розв'язок

$$X = A^{-1}C - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2+6+7 \\ 2+2+5 \\ 4-4+6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/8 \\ -9/8 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = -11/8;\ x_2 = -9/8;\ x_3 = -3/4.$

**Приклад 2** Дослідити систему $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases}$

за теоремою Кронекера – Капеллі і у випадку сумісності розв'язати її.

**Розв'язання.** Знайдемо ранги матриці системи

$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ і розширеної матриці $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Мінор $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}=23\neq 0.$ Мінори третього порядку, які його окантовують, дорівнюють нулю. Дійсно, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix}=72+196-75+80-63-210=0.$

Тому $rangA=2$.

Для знаходження рангу матриці $B$ досить обчислити лише один мінор третього порядку $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$, який окантовує мінор $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$, бо всі інші вже знайдені і дорівнюють нулю.

Отже, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}=-23\neq 0,$ а тому $rangB=3$.

Через те $rangA\neq rangB$, завдана система несумісна.

**Приклад 3** Розв'язати систему $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$

**Розв'язання.**

Матриця системи $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, розширена матриця $B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$.

Знайдемо ранг матриці $A$. Мінор другого порядку, розташований у правому верхньому кутку матриці: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$

Мінори третього порядку, які окантовують його, дорівнюють нулю.

Справді, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0$ (властивість 6), $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0$ (властивість 3),

Отже, $rangA=2$.

Знайдемо тепер ранг матриці $B$. Для цього досить обчислити ще один мінор третього порядку, а саме $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, який також дорівнюй нулю за властивістю 3 визначників.

Таким чином, всі мінори третього порядку матриці, які окантовують мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнюють нулю, а мінорів вищого порядку матриця $B$ не має. Тому $rang\ B$=2. Через те що $rangA= rangB$ =2 < 4 (число невідомих), то згідно з теоремою Кронекера – Капеллі, система має безліч розв'язків. Знайдемо їх. Оскільки в системі лише два незалежних рівняння (ранги матриць дорівнюють двом), то одне з них можна відкинути, наприклад третє, і розв'язати одержану систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \\ x_1 - 2x_3 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

Будемо вважати невідомими $x_3$ і $x_4$, бо визначник другого порядку, складений з коефіцієнтів при $x_3$ і $x_4$, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ і виразимо через них $x_1$ і $x_2$. Для цього від першого рівняння віднімемо друге, що дасть $2x_4 = 2$, звідки $x_4 = 1$.

Тепер з першого рівняння системи одержимо $x_3 = 2x_2 - x_1$.

Таким чином, шукані розв'язки системи $x_3 = 2x_2 - x_1$, $x_4 = 1$, де $x_1$ і $x_2$ – довільні числа.

**Приклад 4** Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 4x_3 = -14, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Обчислення показують, що $rangA= rangB$ =3 (пропонуємо перевірити це самостійно). Отже, система сумісна.

З даних чотирьох рівнянь добираємо три лінійно незалежних.

Для цього в матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ знаходимо відмінний від нуля мінор третього порядку. Таким мінором є, наприклад, визначник, який складається з другого, третього та четвертого рядків. Отже, перше рівняння системи в лінійною комбінацією інших, і його можна відкинути.

Розглянемо систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

Її визначник $\Delta = -5 \neq 0$, а тому розв'язуючи систему за формулами Крамера або матричним способом знаходимо єдиний розв'язок (1; –1;2), який задовольняє і першому рівнянню даної системи, в чому легко упевнитися безпосередньою перевіркою.

Отже, при розв'язуванні довільної системи лінійних рівнянь треба додержуватися такого порядку.

1 Знайти значення *r(A)* і *r(B)*; встановити сумісність системи.

2 Якщо система сумісна *(r(A)=r(B) =r)*, то вибрати в матриці *A* відмінний від нуля мінор *r* -го порядку. Цей мінор визначає вибір лінійно незалежних рівнянь і вільних невідомих. Решту рівнянь відкинути.

3 Перенести вільні невідомі у праву частину рівнянь.

4 Розв’язати одержану систему за формулами Крамера, тобто знайти загальний розв'язок системи.

5 Якщо буде потрібно, знайти частинні розв’язки системи.

### Питання для самоперевірки

1 Що називається рангом матриці?

2 Якими способами обчислюється ранг матриці? В чому полягає їх суть?

2 Сформулюйте теорему Кронекера - Капеллі.

## ЛЕКЦІЯ 4

4.1 Основні поняття векторної алгебри.

4.2 Лінійні операції над векторами.

4.3 Проекція вектора на вісь. Координати вектора.

4.4 Добутки векторів та їх застосування.

4.5 Правила дій над векторами, заданими своїми координатами.

Величини, які повністю визначаються своїм числовим значенням, називають скалярними. Прикладами скалярів є площа, довжина, робота, маса, тощо. Інші величини, наприклад, сила, швидкість, прискорення, визначаються не тільки своїм числовим значенням, але і напрямком. Такі величини називають векторними і геометрично їх зображують за допомогою вектора.

### 4.1 Основні поняття векторної алгебри

Нехай *A* і *B* – дві різні точки площини або простору.

**Означення.** Відрізок *AB*, в якому точку *A* вважають початком, а точку *B* – кінцем, називають **вектором** і позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (скорочено: вектор – це напрямлений відрізок).

Вектор $\overrightarrow{BA}$ ( у нього початок у точці $B$, а кінець – у точці $A$) називають **протилежним** вектору $\overrightarrow{AB}$.

**Означення. Довжиною або модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка $AB$ і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

**Означення.** Вектор, довжина якого дорівнює нулю (або одиниці) називають **нульовим** ( або **одиничним**).

Нульовий вектор немає напрямку.

**Означення.** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які належать одній або паралельним прямим, називають **колінеарними.**

Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно.

**Означення.** Два вектори називають **рівними** ($\vec{a}=\vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакову довжину.

Із означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити в будь-яку точку простору паралельно самому собі і при цьому отримають вектор, рівний даному.

Множину всіх векторів, які дорівнюють даному, називають **вільними векторами** і позначають малими латинськими буквами: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

**Означення.** Три вектори у просторі називають **компланарними**, якщо вони належать одній або паралельним площинам.

## 4.2 Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами належать операції додавання, віднімання, а також множення на число.

### Додавання векторів

Під **сумою векторів** $\overrightarrow{OA}$ = $\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}$ = $\vec{b}$ (які приведені до загального початку $0$ ) розуміють вектор $\overrightarrow{OD}$ = $\vec{c}$, який є діагоналлю паралелограма, побудованого на даних векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.4.1). Це правило додавання векторів називають **правилом паралелограма.**

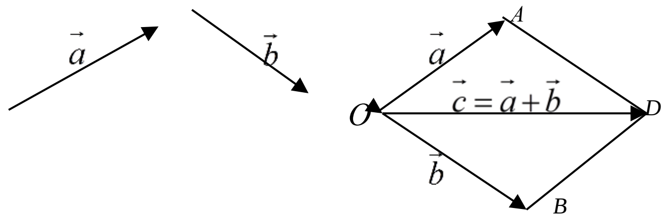



Рис. 4.1

Суму векторів можна знайти за правилом трикутника (рис.4.2)

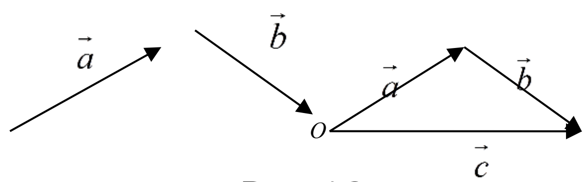



Рис. 4.2

### Віднімання векторів

Під **різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, тобто віднімання векторів можна замінити додаванням вектора $\vec{a}$ з вектором, протилежним вектору $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (рис.4.3).

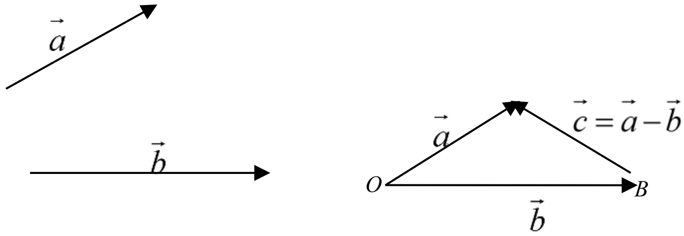



Рис. 4.3

### Множення вектора на число

**Добутком вектора** $\vec{a}$ **на число** $\lambda$ називають вектор $\lambda\,\vec{a}$, який має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$; причому довжина цього вектора дорівнює $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$. Якщо $\lambda = 0$, то отримують **нульовий вектор** $\vec{0}$**,** тобто $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$.

Наприклад, якщо заданий вектор $\vec{a}$ , то вектори $-2\vec{a}$ і $3\vec{a}$ мають вигляд

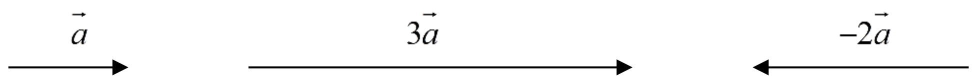



Рис. 4.4

Очевидно, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{b}||\vec{a}$. І навпаки, якщо $\vec{b}||\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), то при деякому $\lambda$ виконується рівність $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Основні властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативний закон додавання),
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативний закон додавання),
3. $\lambda(\mu\cdot\vec{a}) = \lambda\cdot\mu\cdot\vec{a}$,
4. $(\lambda + \mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{a}$,
5. $\lambda\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a} + \lambda\cdot\vec{b}$.

Зауваження. Ці властивості дозволяють проводити перетворення в векторній алгебрі так, як це робиться в звичайній алгебрі.

### 4.3 Проекція вектора на вісь. Координати вектора

Нехай у просторі задана вісь *l*, тобто напрямлена пряма.

**Означення. Проекцією точки *M* на вісь *l*** називають основу $M_1$ перпендикуляра $MM_1$, який проведений із точки *M* на вісь *l*.

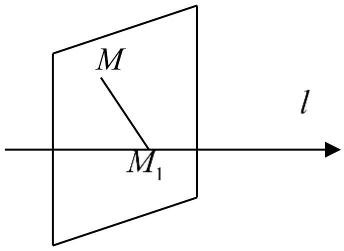



Рис. 4.5

Точка $M_1$ є точкою перетину осі $l$ з площиною, яка проходить через точку $M$ і перпендикулярна цій осі (рис.4.5).

Нехай $\overrightarrow{AB}$ – довільний вектор ($\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). Позначимо через $A_1$ і $B_1$ проекції на вісь $l$ початку $A$ і кінця $B$ вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис.4.6).

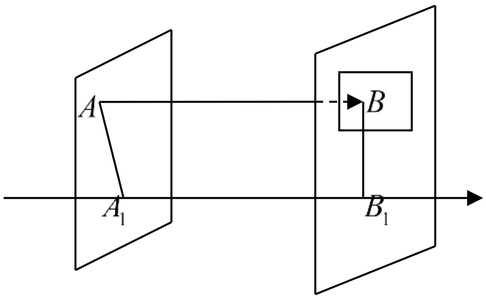



Рис. 4.6

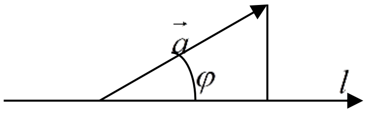



Рис. 4.7

**Означення. Проекцією вектора** $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ називають додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь $l$ є однаково напрямлені і від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь $l$ є протилежно напрямлені.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ позначається $пр_l\overrightarrow{AB}$ і дорівнює добутку його довжини на косинус кута $\varphi$, який утворює цей вектор з додатним напрямком осі $l$ (рис.4.7).

Геометрично проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ можна визначити довжиною відрізку $A_1B_1$, яка береться зі знаком „+“, якщо $0 \le \varphi \le \pi/2$, та зі знаком „ – “, якщо $\pi/2 \le \varphi \le \pi$.

Розглянемо прямокутну систему координат $Oxyz$ у просторі.

**Означення.** Трійка векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називається **координатним базисом**, якщо ці вектори задовольняють умовам:

1) $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, тобто вектори є одиничними;

2) вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ лежать відповідно на осі $Ox$, $Oy$, $Oz$;

3) кожен вектор $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ напрямлений у додатному напрямі своєї осі.

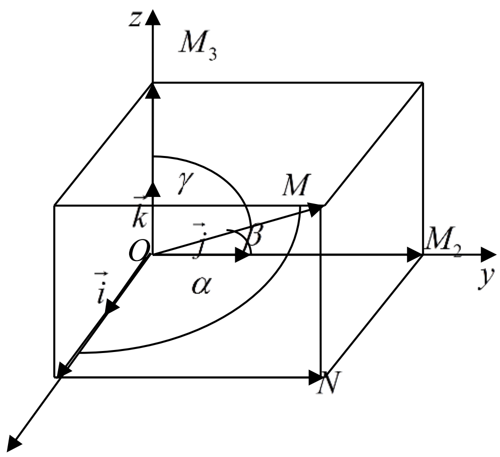



Рис. 4.8

Позначимо проекції довільного вектора $\vec{a}$ на координатні осі *Ox, Oy, Oz* відповідно через $a_x,\ a_y,\ a_z$ .

Будь – який вектор $\vec{a}$ ($\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, рис.4.8) може бути розкладений за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто поданий у вигляді

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\,. \tag{4.1}$$

Числа $a_x,\ a_y,\ a_z$ називають **координатами вектора** $\vec{a}$, тобто координати вектора – це його проекції на відповідні координатні осі.

Векторну рівність $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ називають розкладом вектора за базисом і записують у символічному вигляді

$$\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)\,.$$

## 4.4 Добутки векторів

### 4.4.1 Скалярний добуток

**Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними.

Позначають скалярний добуток через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і за означенням

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \tag{4.2}$$

де $\varphi=\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$.

Формулу (4.2 ) можна переписати у вигляді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\vec{a}\,.$$

Скалярний добуток має такі властивості :

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переставний закон),
- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сполучний закон),
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивний закон),
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$

Зокрема, для скалярного добутку ортів маємо:
$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0\,.$

### 4.4.1.1 Деякі застосування скалярного добутку

**Кут між векторами**

Кут між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \tag{4.3}$$

Звідси випливає **умова перпендикулярності векторів** $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0. \tag{4.4}$$

**Проекція вектора у заданому напрямі**

Проекція вектора $\vec{a}$ у напрямі вектора $\vec{b}$ визначається за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}}}{|\vec{b}|} \quad \left( np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \right). \tag{4.5}$$

**Робота сталої сили** (механічний зміст скалярного добутку)

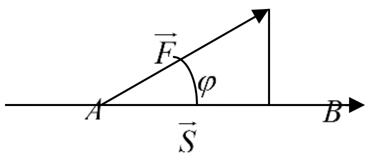


Рис. 4.9

Нехай матеріальна точка переміщується прямолінійно із положення $A$ в положення $B$ під дією сили $\vec{F}$, яка утворює кут $\varphi$ із переміщенням $\vec{S}=\overrightarrow{AB}$ (рис.4.9).

Відомо, що робота сили $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$ дорівнює

$$A = F\cdot S\cdot\cos\varphi = \vec{F}\cdot\vec{S}. \tag{4.6}$$

Отже, робота сталої сили при прямолінійному переміщенні її точки прикладання дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

### 4.4.2 Векторний добуток

**Означення. Векторним добутком двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма $S$, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (**геометричний зміст векторного добутку**), тобто

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi, \quad \varphi = \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right); \tag{4.7}$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$;
3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку, тобто якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ буде відбуватися проти годинникової стрілки (рис.4.10).

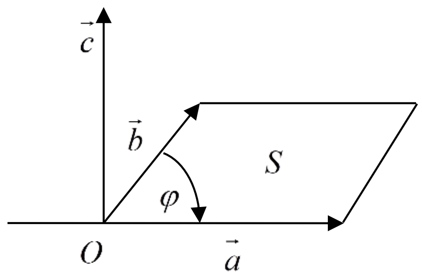



Рис. 4.10

Позначають векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ або $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$.

Векторний добуток векторів має такі властивості:

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антипереставний закон);
- $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ (асоціативний закон відносно множення на число);
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (дистрибутивний закон відносно додавання).

### 4.4.2.1 Деякі застосування векторного добутку

**Площа паралелограма і трикутника**

Із означення векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$, (рис.4.10), тобто

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.8)$$

**Момент сили відносно точки**

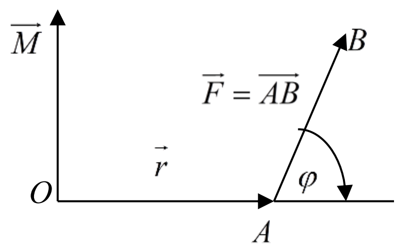



Рис. 4.11

Якщо сила $\vec{F}$ прикладена до точки $A$ (рис.4.11), то момент сили $\vec{F}$ відносно точки $O$ є вектор $\overrightarrow{M}$, який дорівнює векторному добутку радіус – вектора точки прикладання $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ на вектор сили $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M}=\vec{r}\times\vec{F}. \qquad (4.9)$$

**Колінеарність векторів**

Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}. \qquad (4.10)$$

**Лінійна швидкість обертання**

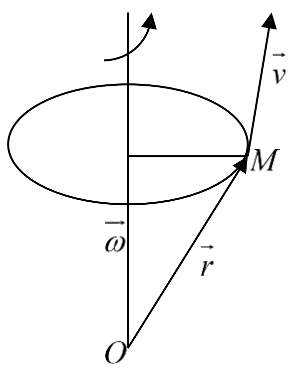



Рис. 4.12

Швидкість $\vec{v}$ точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ визначається формулою Ейлера

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r},\quad \vec{r}=\overrightarrow{OM},$$

де $O$ – деяка нерухома точка осі (рис.4.12).

### 4.4.3 Мішаний добуток трьох векторів

**Означення. Мішаним добутком трьох векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, помноженому скалярне на вектор $\vec{c}$, тобто $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Позначають мішаний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ або $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}. \tag{4.11}$$

Мішаний добуток трьох векторів має такі властивості:

- Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного і скалярного добутку: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;
- Мішаний добуток змінює знак від переставлення двох будь-яких співмножників: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$;
- Абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (**геометричний зміст мішаного добутку).**

#### 4.4.3.1 Деякі застосування мішаного добутку

**Об'єм паралелепіпеда і трикутної піраміди**

Об'єми паралелепіпеда $V_{пар}$ і трикутної піраміди $V_{пір}$ з ребрами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначаються формулами

$$V_{пар} = \left|\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\ \right|, \tag{4.12}$$

$$V_{пір} = \frac{1}{6}\left|\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\ \right|. \tag{4.13}$$

**Умова компланарності векторів**

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ **компланарні** тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю **(**$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$):

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ -\ \text{компланарні}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0. \tag{4.14}$$

**Взаємна орієнтація векторів у просторі**

Визначення взаємної орієнтації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ базується на таких правилах:

якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}>0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – права трійка;

якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}<0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – ліва трійка.

### 4.5 Правила дій над векторами, заданими координатами

Будемо вважати, що у базисі ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задано координатами $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$.

1**)** *Якщо* в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\overrightarrow{AB}$, причому його початкова і кінцева точки мають координати $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ відповідно, то вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$.

2) **Довжина вектора** $\vec{a}$ обчислюється за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{4.15}$$

3) **Орт вектора** $\vec{a}$ визначається рівністю

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right). \tag{4.16}$$

4) **Координати суми (різниці) векторів** дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат доданків:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)\,. \tag{4.17}$$

Це правило випливає з властивостей проекції вектора на вісь.

5) **Координати добутку вектора на число** дорівнюють добутку відповідних координат даного вектора на це число

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)\,. \tag{4.18}$$

6) **Скалярний добуток двох векторів** дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z\,. \tag{4.19}$$

**Доведення.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$

$$= a_x b_x \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{i}^2 + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k}^2 =$$

$$= \left|\ \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1,\ \ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0\ \right| =$$

$$= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z\,.$$

7) **Векторним добутком двох векторів** є вектор, який можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{4.20}$$

Доведення цієї формули аналогічно доведенню формули скалярного добутку.

8) **Мішаним добутком векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є число, яке дорівнює значенню визначника третього порядку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{4.21}$$

9) **Косинус кута між двома векторами** обчислюється з векторної рівності $\cos\varphi = \cos(\vec{a}\ \hat{,}\ \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

або у координатному вигляді

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\,. \tag{4.22}$$

10) **Умова колінеарності двох векторів** рівносильна рівності

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \ \text{ або } \ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}, \text{тобто}$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (4.23)$$

11) **Умова перпендикулярності двох векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ рівносильна рівності:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$$

тобто у координатному вигляді

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (4.24)$$

**Приклад.** Дано вектори $\vec{a}=(-1;2;5)$, $\vec{b}=(3;1;-2)$, $\vec{c}=(4;1;7)$.
Необхідно:

1) знайти орти векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
2) перевірити, чи є вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно перпендикулярними;
3) перевірити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на колінеарність;
4) перевірити, чи є вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарними;
5) знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
6) обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

**Розв'язання.** 1) Скористаємося формулами

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\frac{a_y}{|\vec{a}|};\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right), \text{ де } |\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Дійсно,

$$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30};\ \vec{a}^0=\left(\frac{-1}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{5}{\sqrt{30}}\right).$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14};\ \vec{b}^0=\left(\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{-2}{\sqrt{14}}\right).$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{16+1+49}=\sqrt{66};\ \vec{c}^0=\left(\frac{4}{\sqrt{66}};\frac{1}{\sqrt{66}};\frac{7}{\sqrt{66}}\right).$$

2) Скористаємося умовою перпендикулярності

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

$$\vec{a}\perp\vec{c} \Leftrightarrow a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 0,$$

$$\vec{b}\perp\vec{c} \Leftrightarrow b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0.$$

Обчислимо скалярні добутки векторів

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot3+2\cdot1+5\cdot(-2)=-11\neq 0$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не перпендикулярні;
$\vec{a}\cdot\vec{c}=(-1)\cdot4+2\cdot1+5\cdot7=33\neq 0$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні;
$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot4+1\cdot1+(-2)\cdot7=-1\neq 0$, тобто вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні.

3) Скористаємося умовою колінеарності $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

$\frac{-1}{3} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{5}{-2}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні;

4) Скористаємось умовою компланарності трьох векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 16 + 15 - (20 + 42 + 2) = -72,$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні.

5) Площу паралелограма знайдемо за формулою: $S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\|$,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 13\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Отже, $S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-9)^2 + 13^2 + (-7)^2} = \sqrt{299}$ ( кв.од.).

6) Об’єм паралелепіпеда знайдемо за формулою $V = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right| = \left\| \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix} \right\|$.

Отже, $V = \left\| \begin{matrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -7 \end{matrix} \right\| = |26| = 26$ (куб.од.).

## Питання для самоперевірки

1 Дайте означення вектора і його довжини.
2 Що називається базисом на площині та у просторі?
3 Які вектори називають колінеарними, компланарними, рівними між собою?
4 Що називають координатами вектора?
5 Як розкласти вектор за координатним базисом?
6 Як визначаються операції додавання, віднімання, множення на число?
7 Що називається скалярним, векторним, мішаним добутком векторів?
8 Як виконуються операції над векторами, які задані координатами?
9 Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності і компланарності векторів.
10 Сформулюйте приклади застосування скалярного, векторного, мішаного добутків.

## ЛЕКЦІЯ 5

5.1 Прямокутна та полярна системи координат на площині. Відстань між двома точками.

3.2 Пряма на площині, її рівняння. Основні задачі.

В аналітичній геометрії геометричні об’єкти (криві, поверхні) вивчаються за допомогою методів алгебри. В основі такого вивчення лежить метод координат. Таким чином, за допомогою методу аналітичної геометрії з геометричними об’єктами зіставляються їх рівняння і за даними рівняннями об’єктів з’ясовуються їх геометричні властивості.

### 5.1 Системи координат на площині
### 5.1.1 Основні поняття

Під системою координат на площині треба розуміти спосіб, який дозволяє чисельно визначити положення точки на площині. Важливими координатними системами на площині є прямокутна (декартова) і полярна системи.

#### Прямокутна система координат

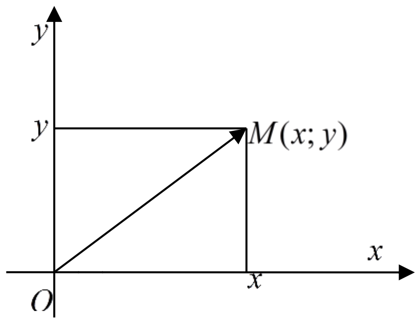



Рис.5.1

**Прямокутна система координат на площині** визначається двома взаємно перпендикулярними напрямними прямими – осями координат (*Ox* – вісь абсцис, *Oy* – вісь ординат), на кожній із яких вибраний одиничний відрізок (масштаб). Точка перетину осей координат *O* називається початком координат (рис.5.1).

Систему координат позначають через *Oxy*, а площину, в якій розташована система координат, називають **координатною площиною**.

Аналогічно визначається прямокутна система координат у просторі ( за допомогою трьох координатних осей *Ox, Oy, Oz*).

Розглянемо довільну точку *M* площини *Oxy*. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіус – вектором точки *M*.

**Координатами точки *M*** у системі координат *Oxy* називають координати радіус – вектора $\overrightarrow{OM}$ . Якщо $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, то координати точки *M* записуються так: $M(x; y)$, де $x$ називають **абсцисою**, а $y$ – **ординатою точки** *M*.

**Полярна система координат**

Полярна система координат визначається наданням точці О, яка називається **полюсом**, променя *OP*, який називається **полярною віссю** і відрізком *OE* (**масштабом**) (рис.5.2).

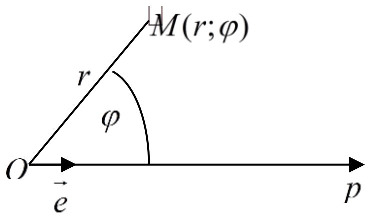


Рис.5.2

Положення точки $M$ у полярній системі координат визначається двома числами: її відстанню $\boldsymbol{r}$ від полюса $O$, яку називають **полярним радіусом**, і кутом $\varphi = \angle POM$, який утворюється відрізком $OM$ із полярною віссю і називається **полярним кутом.** При цьому підрахунок кутів виконують у напрямі, який є протилежним руху годинникової стрілки. Числа $r$ і $\varphi$ називають **полярними координатами точки $M$** і записують $M(r, \varphi)$

Для здобуття всіх точок площини достатньо полярний кут $\varphi$ обмежити проміжком $(-\pi;\pi]$( або $0 \le \varphi < 2\pi$ ), а полярний радіус – проміжком $[0;+\infty)$. У цьому випадку кожній точки площині ( крім $O$ ) відповідає єдина пара чисел $r$ і $\varphi$ та навпаки.

### Зв'язок між прямокутними і полярними координатами

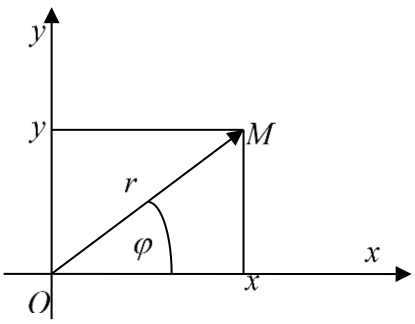


Рис.5.3

Нехай $x$ і $y$ – прямокутні координати точки $M$ у системі координат $Oxy$, а $r$ і $\varphi$ – її полярні координати при відповідному виборі координатних систем (рис.5.3).

Прямокутні координати точки $M$ виражаються через її полярні координати таким чином:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad (5.1)$$

Полярні координати точки $M$ виражаються через її прямокутні координати таким чином:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ tg\varphi = y / x. \end{cases} \quad (5.2)$$

**Приклад.** Дано точка $M(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{3})$. Знайти полярні координати точки $M$.

**Розв'язання.** Знайдемо $r$ і $\varphi$:

$$r = \sqrt{1+1/3} = 2/\sqrt{3}, \quad tg\varphi = \frac{-\sqrt{3}/3}{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ звідки } \varphi = \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in Z.$$

Оскільки точка $M$ належить до 3-ої чверті, то $n = -1$ і $\varphi = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Отже, полярні координати точки $M$: $r = 2/\sqrt{3}, \; \varphi = -\dfrac{5\pi}{6}$ або $M\left(2/\sqrt{3}; -\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

### 5.1.2 Основні застосування метода координат на площині

### Відстань між двома точками

Визначимо відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині $Oxy$. Шукана відстань $d$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $d = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, тобто

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{5.3}$$

### Поділ відрізка у заданому відношенні

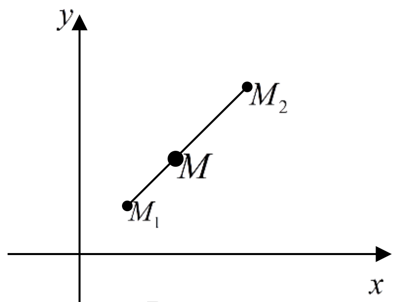


Рис.5.4

Поділимо відрізок $M_1M_2$, де точки $M_1$ і $M_2$ мають координати $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, у відношенні $\lambda > 0$, тобто визначимо координати такої точки $M(x;y)$ (рис.5.4) відрізка $M_1M_2$, що $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$. Але $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$, тобто $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ та $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x; y_2 - y)$, тобто $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$.

Отже, $(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} = \lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j}$. Оскільки рівні вектори мають рівні відповідні координати, то $\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \end{cases}$

Тобто
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Ці формули називають **формулами поділу відрізка у заданому відношенні.** Зокрема, при $\lambda = 1$ визначається середина відрізка $M_1M_2$ за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{5.5}$$

Зауваження. Якщо $\lambda = 0$, то точки $M_1$ і $M$ співпадають, якщо $\lambda < 0$ ( $\lambda \neq -1$), то точка $M$ лежить зовні відрізка $M_1M_2$ і говорять, що **точка *M* поділяє відрізок $M_1M_2$ зовнішнім чином.**

### Площа трикутника

Якщо точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – вершини трикутника $ABC$, то можна довести, що його площа обчислюється за формулами:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \quad \text{або} \quad S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пропонуємо ці формули довести самостійно.

### 5.1.3 Перетворення системи координат

Задача перетворення системи координат полягає у встановленні залежності між координатами довільної точки площини в різних системах координат.

**Паралельний перенос осей**

Під паралельним переносом осей координат розуміють перехід від системи координат $Oxy$ до нової системи $O_1x_1y_1$, при якому змінюється положення початку координат, а напрямок осей і масштаб залишаються незмінними.

Нехай початок нової системи координат (точка $O_1$) має координати $(x_0; y_0)$ у старій системі координат, тобто $O_1(x_0; y_0)$. Позначимо через $(x; y)$ і $(x'; y')$ координати довільної точки $M$ площини відповідно в системі координат $Oxy$ і в новій системі $O_1x_1y_1$ (рис. 5.5)

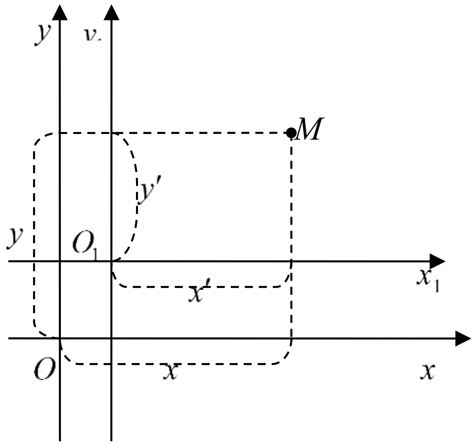



Рис.5.5

Легко встановити зв'язок між старими $(x; y)$ і новими $(x'; y')$ координатами:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \tag{5.6}$$

## 5.2 Лінії на площині

### 5.2.1 Основні поняття

Лінію на площині часто задають як множину точок, які мають будь – яку загальну, тільки їм притаманну геометричну властивість. Таку множину ще називають **геометричним місцем точок** (ГМТ). Тобто лінію на площині можна розглядати як ГМТ.

Наприклад, колом називають ГМТ, рівновіддалених від однієї даної точки (центра кола); серединний перпендикуляр – це ГМТ, рівновіддалених від кінців цього відрізка і т.д.

Введення на площині системи координат дозволяє визначати положення точки площини, якщо задати два числа – її координати, а положення лінії на площині визначають за допомогою її рівняння.

**Означення. Рівнянням лінії ( або кривої) на площині** називають рівняння, яке зв'язує змінні ( $x$ і $y$ – у декартовій системі координат, $r$ і $\varphi$ – у полярній системі координат), якому задовольняють координати будь – якої точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить їй.

Рівняння лінії у прямокутній системі координат має вигляд

$$y = f(x) \text{ або } F(x;y) = 0.$$

Змінні $x$ і $y$ називають **поточними координатами.**

У полярній системі координат рівняння лінії задається рівностями вигляду

$$r = f(\varphi) \text{ або } F(r;\varphi) = 0.$$

Зауваження. Не кожне рівняння $F(x;y)=0$ визначає деяку лінію. Наприклад, рівняння $x^2+y^2=0$ визначає точку $O(0;\ 0)$, а рівняння $x^2+y^2+1=0$ не визначає ніякого геометричного об'єкта.

Лінію на площині можна задати **параметричними рівняннями** вигляду:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (5.7)$$

де $x$ і $y$ – координати довільної точки $M(x;\ y)$ на лінії, а $t$ – змінна, яку називають **параметром**. Параметр $t$ визначає положення точки ( $x;\ y$) на площині.

Наприклад, параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$$

задають параболу $y = x^2$ (це легко отримати підстановкою $t = x$ до другого рівняння).

Лінію на площині можна задати **векторним рівнянням**

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad (5.8)$$

де $t$ – скалярний змінний параметр.

Кожному значенню $t_0$ відповідає певний вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ площини. Якщо параметр $t$ змінюється, то кінець вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ описує деяку лінію (рис.5.6).

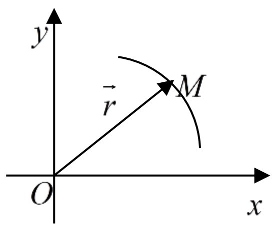


Рис.5.6

Векторному рівнянню відповідає два скалярних рівняння (5.7).

Рівняння лінії дозволяє вивчення геометричних властивостей лінії замінити дослідженням її рівняння. Так, для встановлення приналежності точки $A(x_0;\ y_0)$ до даної лінії достатньо перевірити, чи задовольняють координати точки $A$ рівнянню цієї лінії у вибраній системі координат.

**Приклад.** Перевірити, чи належать точки $A(1\ ;\ 0)$ і $B(1;\ 1)$ лінії $x^2+y^2=1$.

**Розв'язання.** Підставимо до рівняння лінії замість $x$ і $y$ координати точки $A$ й отримаємо рівність 1 + 0 = 1. Це означає, що точка $A$ належить цій лінії.

Точка $B$ не належить даній лінії, оскільки $1 + 1 \neq 1$.

Задача знаходження точок перетину двох ліній, які задані рівняннями $F_1(x;y)=0$ і $F_2(x;y)=0$, зводиться до визначення точок, координати яких задовольняють рівнянням обох ліній, тобто зводиться до розв'язання системи рівнянь: $\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0. \end{cases}$

**Приклад.** Знайти точку перетину ліній $x+y=4$ і $x^2+y^2=16$.

**Розв'язання.** Для знаходження точок перетину ліній розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=16, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x=4-y, \\ (4-y)^2+y^2=16, \end{cases}$

звідки $16-8y+y^2+y^2=16$; $2y^2-8y=0$; $y(y-4)=0$; $y_1=0$; $y_2=4$; $x_1=4$; $x_2=0$.

Отже, лінії перетинаються у двох точках $M_1(4;\ 0)$, $M_2(0;\ 4)$.

### 5.2.2 Рівняння прямої на площині. Основні задачі

Пряму ще називають лінією першого порядку. Різним способам завдання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні вигляди її рівнянь.

#### Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині $Oxy$ положення прямої визначається ординатою $b$ точки $N$ перетину прямої з віссю $Oy$ і кутом нахилу $\alpha$ прямої до осі $Ox$ (рис.5.7).

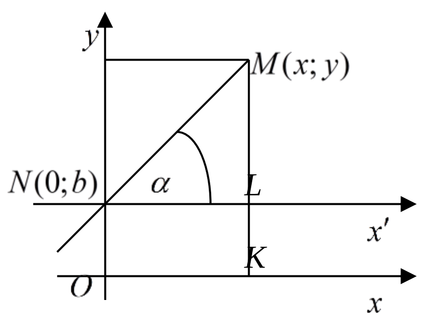



Рис.5.7

Під **кутом нахилу прямої до осі** $\boldsymbol{Ox}$ розуміють той кут, на який треба повернути вісь $Ox$ проти годинникової стрілки, щоб вона збіглась із даною прямою. Число $k=tg\alpha$ називають **кутовим коефіцієнтом**. Складемо рівняння прямої, для цього візьмемо довільну точку $M(x;y)$, яка належить цій прямій. З рис.5.7 видно

$$MK=ML+LK,$$

тобто

$$y=tg\alpha\cdot x+b.$$

Позначимо через $k=tg\alpha$ і отримаємо рівняння

$$y=kx+b, \tag{5.9}$$

якому задовольняють координати будь – якої точки $M(x;y)$ на прямій. Можна показати, що координати будь – якої точки $P(x;y)$, яка не належить даній прямій, отриманому рівнянню не задовольняють.

### Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння першого степеня відносно $x$ і $y$ у загальному вигляді:

$$Ax+By+C=0,$$

де

$$A^2+B^2\neq 0.$$

Покажемо, що це рівняння є рівнянням прямої. Дійсно, вважаючи, що $B\neq 0$, розв'яжемо його відносно змінної $y$: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$.

Якщо позначити $-\frac{A}{B}=k$; $-\frac{C}{B}=b$, то останнє рівняння матиме вигляд $y=kx+b$, тобто отримали рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Також можна показати, що будь – яка пряма визначається рівнянням

$$Ax+By+C=0, \tag{5.10}$$

яке називають **загальним рівнянням прямої на площині.**

### Дослідження загального рівняння прямої на площині

- Якщо $A = 0$, то рівняння набуває вигляду $y=-\frac{C}{B}$ і визначає пряму, яка паралельна осі $Ox$;
- Якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі $Oy$;
- Якщо $C = 0$, то рівняння має вигляд $Ax + By = 0$ і визначає пряму, яка проходить через початок координат;
- Якщо $A = C = 0$, то рівняння має вигляд $y = 0$ і визначає вісь $Ox$;
- Якщо $B = C = 0$, то рівняння набуває вигляду $x = 0$ і визначає вісь $Oy$.

### Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0;y_0)$ і її напрям визначається кутовим коефіцієнтом $k$. Скористаємося рівнянням $y=kx+b$, де $в$ – поки невідома величина. Оскільки пряма проходить через точку $M(x_0;y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівнянню прямої, отже, $b=y_0-kx_0$. Таким чином, шукане рівняння прямої має вигляд $y=kx+y_0-kx_0$, тобто

$$y-y_0=k(x-x_o). \tag{5.11}$$

Отримане рівняння з різними значеннями $k$ називають **рівнянням в'язки прямих із центром у точці** $M(x_0;y_0)$.

### Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$. Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через точку $M_1$

$$y-y_1=k(x-x_1),$$

де $k$ – поки невідомий коефіцієнт.

Оскільки пряма проходить через точку $M_2$, то координати цієї точки задовольняють рівняння: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

Звідси знаходимо $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{5.12}$$

### Рівняння прямої у відрізках

Нехай пряма перетинає вісь $Ox$ у точці $M_1(a;\,0)$, а вісь $Oy$ – у точці $M_2(0;в)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$ (рис.5.8).У цьому випадку рівняння прямої, яка проходить через дві точки, має вигляд

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$$

або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{5.13}$$

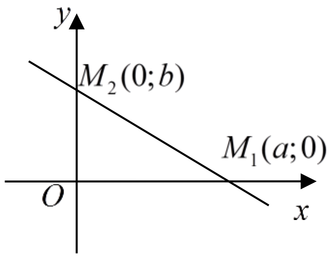


Рис.5.8

### Рівняння прямої, яка проходить через задану точку і перпендикулярна даному вектору

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;\,y_0)$ і перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A;B)$ (рис.5.9).

Нехай $M(x;\,y)$ – довільна точка на прямій. Будуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{5.14}$$

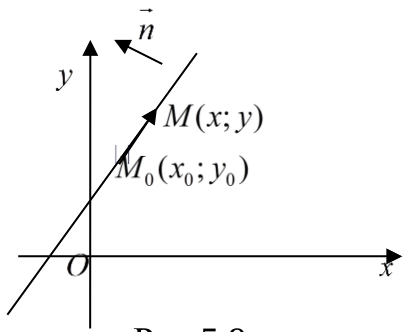


Рис.5.9

Вектор $\vec{n} = (A;B)$, який є перпендикулярним прямій, називають **нормальним вектором прямої** (геометричний зміст коефіцієнтів загального рівняння прямої).

### Відстань від точки до прямої

Треба знайти відстань від точки $M_0(x_0;\,y_0)$ до прямої $L$, яка задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ (рис.5.10).

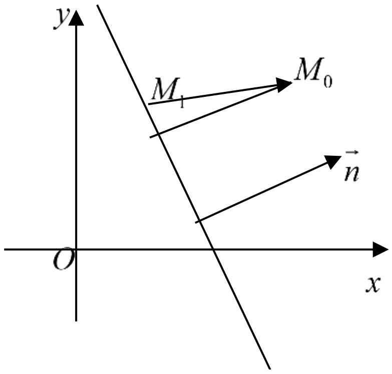



Рис.5.10

Відстань $d$ від точки $M_0$ до прямої $L$ дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на напрям нормального вектора $\vec{n}=(A;B)$, де $M_1(x_1;\ y_1)$ – довільна точка, яка належить прямій $L$ :

$$d=\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=$$

$$=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Оскільки точка $M_1(x_1;y_1)$ належить прямій $L$, то $Ax_1+By_1+C=0$. Отже,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (5.15)$$

## Кут між двома прямими

Нехай прямі $L_1$ і $L_2$ задані рівняннями: $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$ (рис.5.11.).

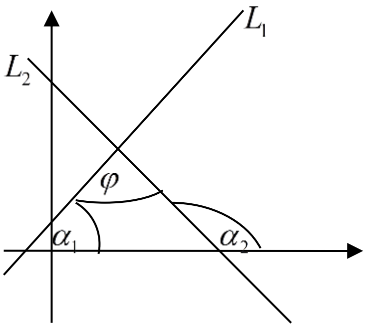



Рис.5.11

Знайдемо кут $\varphi$, на який треба повернути у додатному напрямі пряму $L_1$ навколо точки їх перетину до прямої $L_2$, щоб вони збіглися.

Маємо $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$, тоді

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}.$$

Але $tg\alpha_1=k_1$, $tg\alpha_2=k_2$, тому

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}. \qquad (5.16)$$

Якщо потрібно обчислити гострий кут між прямими, то застосовують формулу

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Із формули кута між прямими $L_1$ і $L_2$ випливає **умова паралельності двох прямих:**

$$k_1=k_2 \text{ або } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (5.17)$$

і **умова перпендикулярності двох прямих:**

$$k_1\cdot k_2=-1 \text{ або } A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (5.18)$$

## Взаємне розташування двох прямих на площині

Нехай маємо дві прямі

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ і } A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

Обчислимо визначники

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_1B_2-A_2B_1,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}=-C_1B_2+C_2B_1,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}=-A_1C_2+A_2C_1.$$

Можливі такі випадки:

1) якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за допомогою формул Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Цей випадок означає, що прямі перетинаються.

2) якщо $\Delta=0$ і при цьому відмінний від нуля хоча б один із визначників $\Delta_x$, $\Delta_y$, то система розв'язків не має; тобто прямі паралельні.

3) Якщо $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, то система має нескінчену множину розв'язків, тобто прямі збігаються.

**Приклад.** Дано координати вершин трикутника *ABC*:

$$A(3;-2);\ B(1;4);\ C(-2;1).$$

Необхідно:

1) скласти рівняння сторони *AB* і визначити її кутовий коефіцієнт;
2) скласти рівняння висоти, яка проведена з вершини *C*;
3) скласти рівняння прямої, яка проведена з вершини *C* паралельно *AB*;
4) знайти довжину висоти трикутника, проведеної з вершини *C*;
5) визначити точку перетину прямих *AB* і *CD*;
6) обчислити тангенс кута між прямими *AC* и *BC*;
7) виконати рисунок.

### Розв'язання.

1) Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$ де $A(x_2;y_2)$, $B(x_1;y_1)$;

Отримаємо $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-4}{-2-4}$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-6}$; $-3(x-1)=y-4$.

Отже, рівняння прямої $AB$: $3x+y-7=0$.

Кутовий коефіцієнт прямої $AB$: $k_{AB}=-\dfrac{A}{B}=-3$.

2) Складемо рівняння висоти, яка проведена з вершини $C$, тобто рівняння прямої $CD\perp AB$.

З умови перпендикулярності двох прямих маємо $k_1\cdot k_2=-1$,

тобто $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$, звідки $k_{CD}=\dfrac{1}{3}$.

Скористаємось рівнянням в'язки прямих, які проходять через точку $C(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0)\ .$$

Таким чином, рівняння прямої $CD$: $y-1=\dfrac{1}{3}(x+2)$ або $x-3y+5=0$.

3) Складемо рівняння прямої $CK\parallel AB$. З умови паралельності прямих маємо: $k_{CK}=k_{AB}=-3$.

Таким чином, рівняння прямої $CK$: $y-1=-3(x+2)$ або $3x+y+5=0$.

4) скористаємось формулою відстані від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ,$$

тобто $d=\dfrac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$.

5) визначимо точку $D$ перетину прямих $AB$ і $CD$, для цього розв'яжемо систему їх рівнянь: $\begin{cases}3x+y-7=0,\\ x-3y+5=0.\end{cases}$

Скористаємось формулами Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-9-1=-10,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -5 & -3\end{vmatrix}=-21+5=-16,\qquad \begin{cases}x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=1,6\\[2mm] y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=2,2\end{cases};\quad D(1,6;\,2,2)\ -\ \text{точка перетину.}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-15-7=-22,$$

6) скористаємось формулою $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ $(k_{AC}=k_1,k_{BC}=k_2)$.

Кутові коефіцієнти прямих, які проходять через дві точки ($A$ і $C$; $B$ і $C$), обчислимо за формулою

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\quad (A(x_1;y_1);\ C(x_2;y_2)\ \text{та}\ B(x_1;y_1);C(x_2;y_2)).$$

$$k_{AC} = \frac{1+2}{-2-3} = -\frac{3}{5},$$

$$k_{BC} = \frac{1-4}{-2-1} = 1,$$

звідки

$$tg\varphi = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-1\cdot\frac{3}{5}} = 4.$$

7) будуємо рисунок:

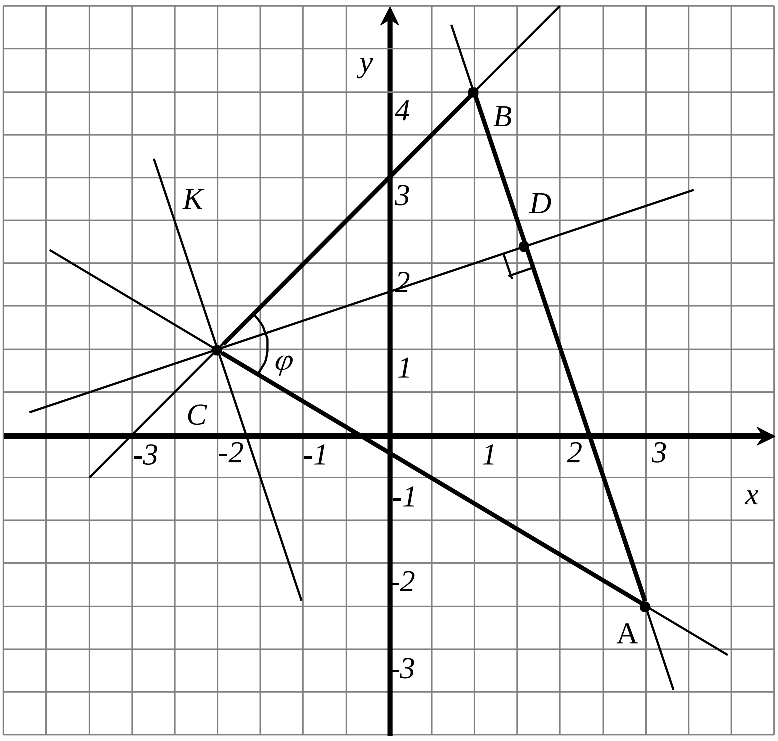



Рис. 5.12

## Питання для самоперевірки

1 Що називається рівнянням лінії у деякій системі координат?
2 Які дві основні задачі розглядаються в аналітичній геометрії?
3 Як однозначно може бути визначено положення прямої на площині?
4 Яке рівняння називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?
5 Виведіть рівняння прямої, яка проходить: через дві задані точки площини; через задану точку в заданому напрямі.
6 Запишіть умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

## ЛЕКЦІЯ 6

6.1 Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їх властивості.

6.2 Перетворення координат. Зведення загального рівняння 2-го порядку до канонічного вигляду.

### 6.1 Лінії другого порядку на площині

Лінію, яка в деякій прямокутній системі координат визначається алгебраїчним рівнянням *n*-го степеня відносно змінних $x$ і $y$, називають **кривою *n* -го порядку.**

Зокрема, якщо $n = 2$, то рівняння $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ визначає **криву другого порядку** (вважається $A^2 + B^2 \neq 0$). Розглянемо випадок, коли $B = 0$. Пізніше буде встановлено, що останнє рівняння визначає на площині (за винятком вироджених випадків) коло, еліпс, гіперболу або параболу. Слід зауважити, що ці криві та їх дуги досить часто застосовують в архітектурі.

### Коло

**Означення. Коло радіуса *R* із центром у точці $C(a;b)$** – це множина точок $M$ на площині, рівновіддалених від даної точки $C$ (рис.6.1), тобто $MC = R$.

Виведемо рівняння кола. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка кола з центром у точці $C(a;в)$ і радіуса $R$. За означенням кола $MC = R$, тобто

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (6.1)$$

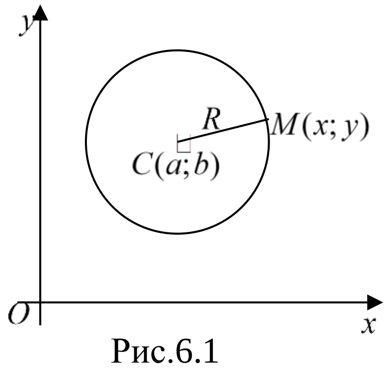


Рис.6.1

Отримали рівняння, якому задовольняють координати будь – якої точки $M(x;y)$ кола і не задовольняють координати жодної точки, яка йому не належить.

Зокрема, $x^2 + y^2 = R^2$ – **канонічне рівняння кола** з центром у початку координат радіуса $R$.

### Еліпс

**Означення. Еліпсом** називається множина точок на площині, для яких сума відстаней від двох даних точок площини (**фокусів**) є величиною сталою (і більшою за відстань між фокусами).

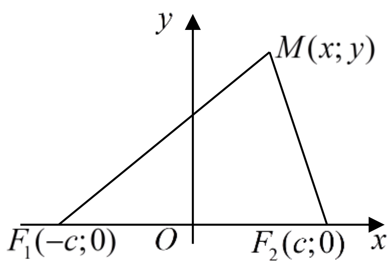



Рис.6.2

Нехай на площині вибрана прямокутна система координат $Oxy$ (рис.6.2) і вибрані точки $F_1(+c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокуси еліпса. Якщо $M(x;y)$ – довільна точка еліпса, то за означенням еліпса

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

тобто

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Виконаємо перетворення:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Покладаємо $b^2 = a^2 - c^2$.

Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Остаточно маємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– **канонічне рівняння еліпса**,} \qquad (6.2)$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Параметри $a$ і $b$ у канонічному рівнянні еліпса називаються **півосями еліпса**.

## Дослідження форми еліпса

Встановимо форму еліпса, користуючись його канонічним рівнянням.

1.Змінні $x$ та $y$ входять до рівняння (6.2) у парних степенях , тобто якщо точка $(x;y)$ належить еліпсу, то йому належать також точки $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$. Звідси випливає, що еліпс є симетричним відносно осей $Ox$ *і* $Oy$. Отже, $Ox$ *і* $Oy$ – о**сі симетрії еліпса**, а точку $O(0;0)$ називають **центром еліпса**, як перетин осей симетрії.

2. Неважко показати, що точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ є точками перетину еліпса з осями координат. Точки $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ називають **вершинами еліпсу.** Відрізки $A_1A_2$ *і* $B_1B_2$, а також їх довжини $2a$ і $2b$ називають відповідно **великою та малою осями еліпса.** Числа $a$ і $b$ називають **великою та малою півосями** відповідно ($OA_1 = a$, $OB_1 = b$). Довжину відрізка $F_1F_2$ називають **відстанню між фокусами** ($F_1F_2 = 2c$).

3. З рівняння (6.2) випливають нерівності $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \le 1$ або $-a \le x \le a$ і $-b \le y \le b$. Таким чином, можна стверджувати, що всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, який утворюється прямими $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. У рівнянні (6.2) сума доданків $\frac{x^2}{a^2}$ і $\frac{y^2}{b^2}$ дорівнює одиниці, тому якщо зростає $|x|$, то $|y|$ спадає і навпаки.

Із вищенаведеного виходить, що еліпс має форму, зображену на рис.6.3 (овальна замкнена крива).

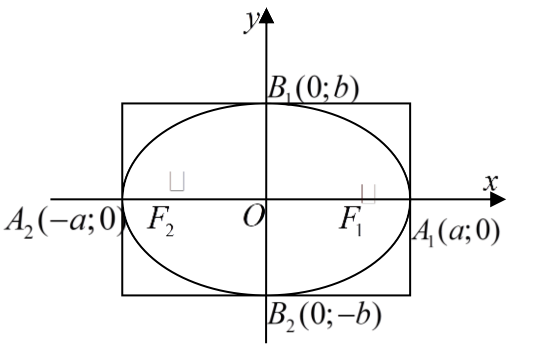



Рис.6.3

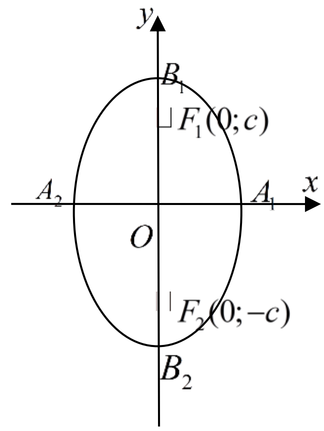



Рис.6.4

Якщо $a<b$, то рівняння (6.2) визначає еліпс, велика вісь якого $B_1B_2 = 2b$ належить осі $Oy$, а мала вісь – осі $Ox$ (рис.6.4).

Фокуси такого еліпса перебувають на великій осі у точках $F_1(0;c)$ і $F_2(0;-c)$, де $c^2 = b^2 - a^2$.

Якщо $a = b$, одержимо $x^2 + y^2 = a^2$ – рівняння коло.

## Гіпербола

**Означення. Гіперболою** називається множина точок на площині, для яких абсолютна величина різниці відстаней від двох даних точок площини **(фокусів)** є величиною сталою ( і меншою за відстань між фокусами).

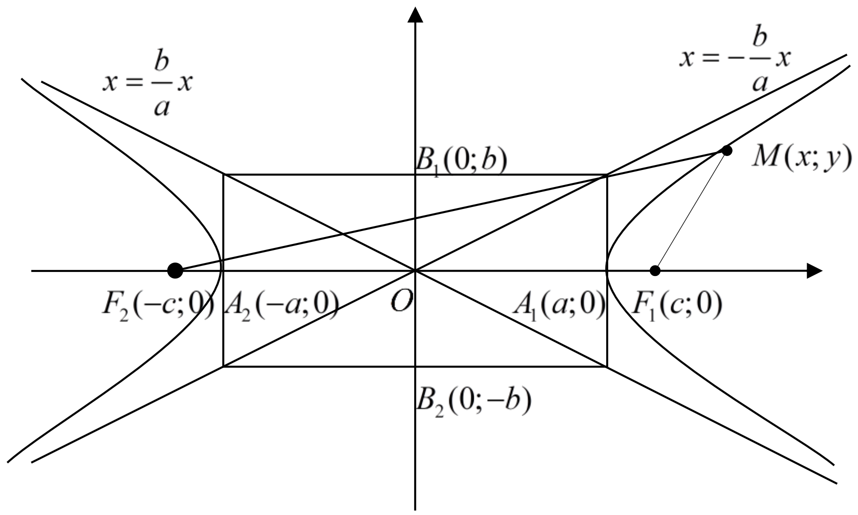



Рис.6.5

Якщо у прямокутній системі координат *Oxy* (рис.6.5) вибрати точки $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – **фокуси гіперболи**, то за означенням гіперболи для її довільної точки $M(x;y)$ виконується рівність

$$\left|F_1M - F_2M\right| = 2a,$$

тобто

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– **канонічне рівняння гіперболи**,} \qquad (6.3)$$

Де $b^2 = c^2 - a^2$.

Якщо провести дослідження форми гіперболи такі, як і у випадку з еліпсом, то отримаємо криву, яка зображена на рис. 3.17 і складається з двох нескінчених гілок.

На рис.6.5:

$OA_1 = a$ – дійсна піввісь;

$OB_1 = b$ – уявна піввісь;

$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь;

$F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами;

*Ox*, *Oy* – осі симетрії гіперболи;

Точка $O(0;0)$ – центр симетрії гіперболи як точка перетину осей симетрії;

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини гіперболи.

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називається **основним прямокутником гіперболи.**

**Асимптоти гіперболи**

Асимптотою нескінченої кривої називають таку пряму, для якої відстань від точки *M* на кривій до цієї прямої прямує до нуля при нескінченому віддаленні точки *M* від початку координат.

Розв’яжемо рівняння гіперболи (6.3) відносно *y*

$$y = \pm\frac{b}{a}x\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

і зробимо граничний перехід, коли *x* прямує до нескінченості.

Отримаємо

$$y = \pm\frac{b}{a}x \quad \text{– **рівняння асимптот гіперболи**.} \qquad (6.4)$$

Якщо піввісі гіперболи рівні, тобто $a = b$, то гіпербола називається **рівнобічною**.

Крива, яка визначається рівнянням $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ також є гіперболою (рис.6.6), дійсна вісь якої $2b$ розташована на осі *Oy*, а уявна вісь $2a$ – на осі *Ox*.

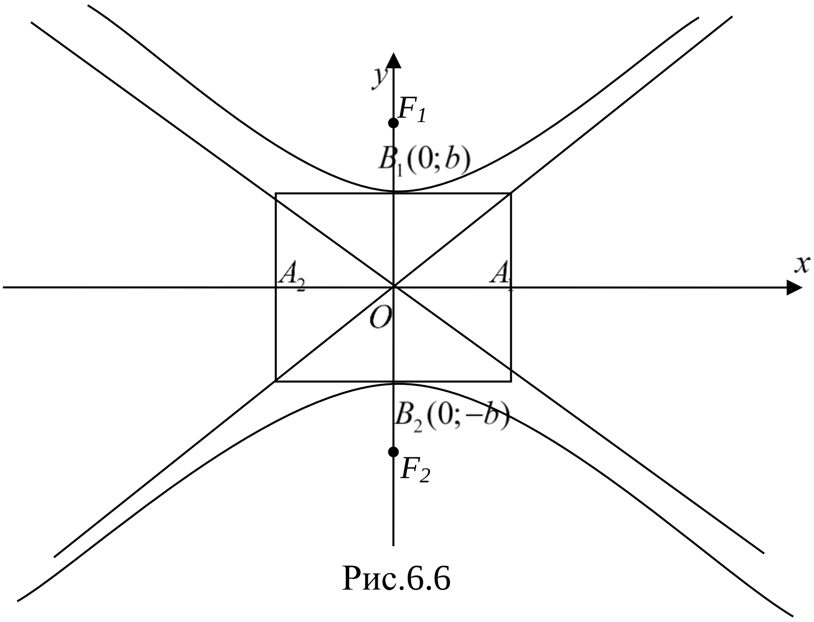



Рис.6.6

На рис. 6.6:

$OB_1 = b$ – дійсна піввісь;
$OA_1 = a$ – уявна піввісь;
$A_1A_2 = 2a$ – уявна вісь;
$B_1B_2 = 2b$ – дійсна вісь;
$F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами;
$Ox$, $Oy$ – осі симетрії гіперболи;
Точка $O(0;0)$ – центр симетрії гіперболи;
Точки $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;-b)$ – вершини гіперболи.

Зазначимо, що фокуси гіперболи завжди перебувають на дійсній осі. Очевидно, що гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ мають спільні асимптоти і називаються **спряженими.**

## Парабола

**Означення. Параболою** називається множина точок на площині, для кожної з яких відстань до заданої точки $F$ (**фокуса)** дорівнює відстані до заданої прямої (**директриси**).

Відстань від фокуса $F$ до директриси називається **параметром параболи** і позначається через $p$ ( $p>0$).

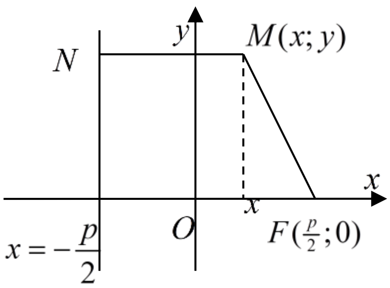



Рис.6.7

Якщо у прямокутній системі координат $Oxy$ (рис.6.7) вибрати $F(\frac{p}{2};0)$ – **фокус параболи** і **директрису**, яка задана рівнянням $x=-\frac{p}{2}$, то згідно з означенням координати довільної точки $M(x;y)$ на параболі задовольняють рівнянню $MF=MN$, тобто $\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=\sqrt{(x+p/2)^2}$

Після перетворень отримаємо

$$y^2 = 2px \text{ – } \textbf{канонічне рівняння параболи}. \qquad (6.5)$$

Точка $O(0;0)$ – вершина параболи; вісь $Ox$ – вісь симетрії параболи (рис.6.8($a$)).

Рівняння $y^2 = -2px,\ \ x^2 = 2py,\ \ x^2 = -2py$ також визначають параболи, які зображені на рис.6.8.

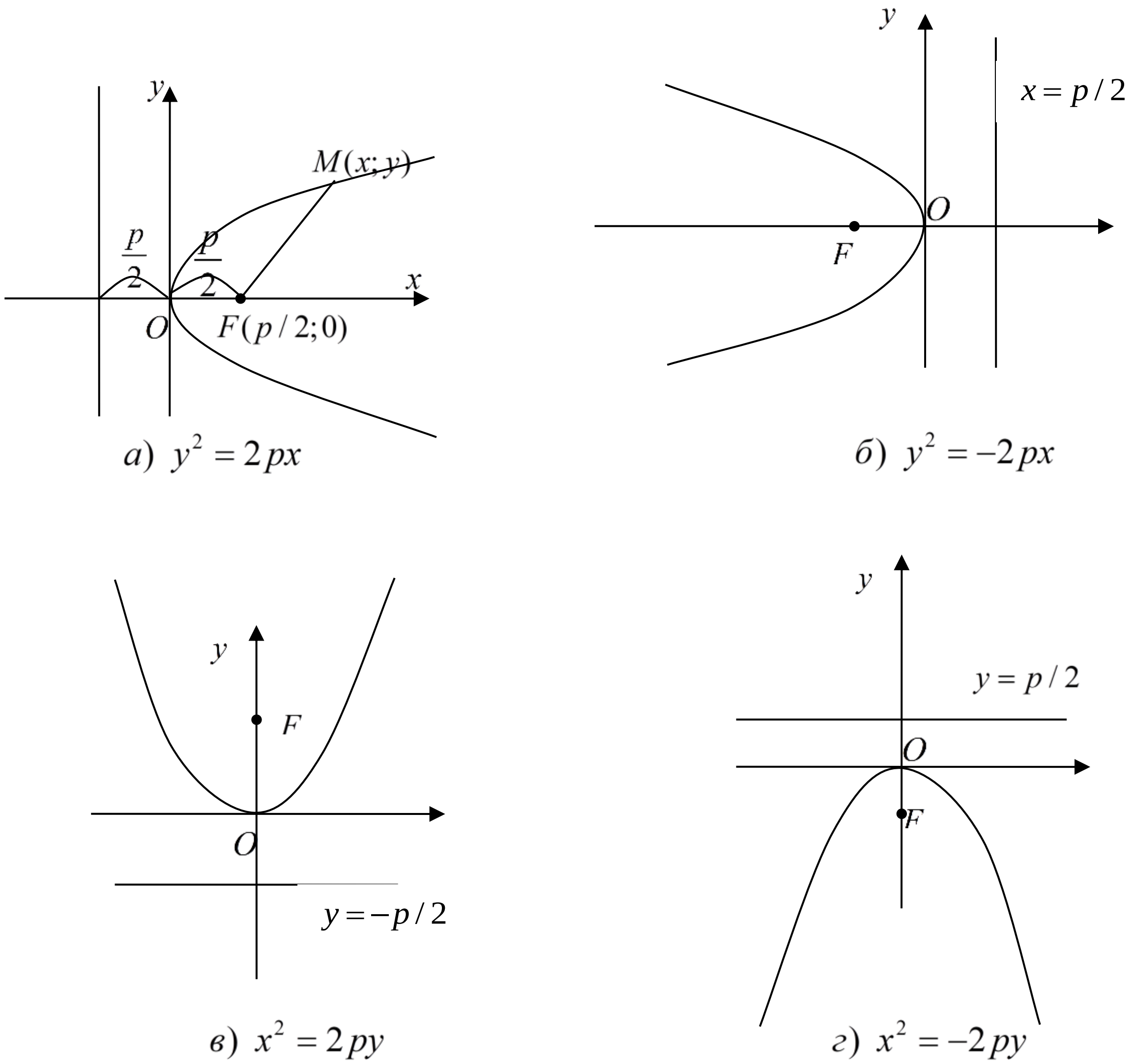



Рис.6.8

## Ексцентриситет кривих другого порядку

**Означення. Ексцентриситетом еліпса і гіперболи** називається відношення відстані між фокусами до довжини великої осі кривої:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Ексцентриситет   характеризує форму кривої та є мірою «сплюснутості».

Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ (при $\varepsilon = 0$ еліпс стає колом). Оскільки для еліпса $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, то чим менший його ексцентриситет, тим еліпс ближче за формою до кола.

Для гіперболи $1 < \varepsilon < \infty$. Вважають, що парабола має ексцентриситет, який дорівнює одиниці.

**Приклад.** Необхідно спроектувати парк таким чином, щоб його межи проходили по лінії, яка є гіперболою, а асфальтовані доріжки по асимптотам цієї гіперболи. Розрахунки довели, що рівняння гіперболи має вигляд $16x^2 - 9y^2 = 14400$ ($x$ та $y$ подані у метрах). Знайти рівняння доріжок, фокуси і ексцентриситет гіперболи, якщо відомо, що початок координат розташували у точці перетину асимптот.

**Розв'язання.** Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд $y = \pm\frac{b}{a}x$, тобто треба знайти дійсну $a$ та уявну $b$ півосі. Для цього перетворимо рівняння гіперболи до канонічного вигляду: $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{1600} = 1$. Звідки $a$ = 30, $b$ = 40, отже, с = 50 ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$). Рівняння доріжок – $y = \pm\frac{4}{3}x$, координати фокусів – $F_1(50;0)$, $F_2(-50;0)$ і ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{5}{3}$ .

**Приклад.** У будівлі арочний отвір має форму параболи. Виміри показали, що висота арки дорівнює 9 м, а максимальна ширина арочного отвору – 6 м. Необхідно знайти форму арки (рівняння параболи).

**Розв'язання.** Рівняння параболи шукатимемо у вигляді $x^2 = -2py$ (рис.6.9). Координати точки $A$ (3;9) на параболі задовольняють її рівнянню, тобто 9 = $-2p \cdot 9$, $2p$ = 1. Отже, рівняння параболи має вигляд: $x^2 = -y$.

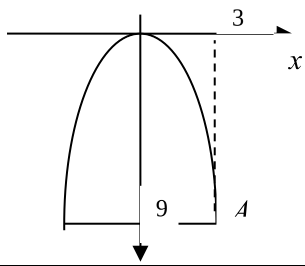



Рис.6.9

## Приведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду

Важливою задачею аналітичної геометрії є дослідження загального рівняння другого порядку, приведення його до найпростішого (канонічного) виду.

У загальному випадку за допомогою перетворення повороту і паралельного переносу осей координат можна одержати найпростіше рівняння кривої другого порядку і визначити вид кривої ( за винятком випадків виродження і розпадіння).

Розглянемо далі лише приклади рівнянь другого порядку при $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

**Приклад.** Привести рівняння другого порядку до канонічного вигляду та встановити вид кривих:

*а*) $x^2+2y^2-4x+16y=0$;

*б*) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

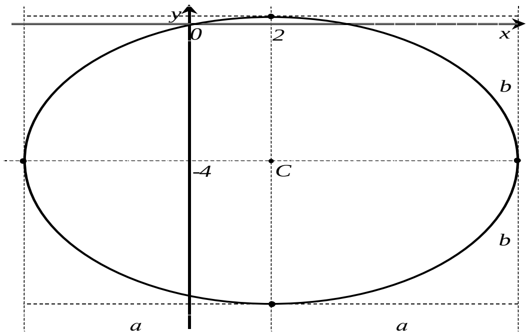
*в*) $3x^2-10x+y+3=0.$

**Розв'язання.**

*а*) $x^2+2y^2-4x+16y=0$

$(x^2-4x+4-4)+2(y^2+8y+16-16)=0;$

$(x-2)^2+2(y+4)^2-4-32=0$;




$(x-2)^2+2(y+4)^2=36$;

$$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{18}=1.$$

Рис.6.10

Рівняння приведено до вигляду $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, тобто отримали рівняння еліпса з центром у точці *C(x₀;y₀)*: *C(2;-4)*, півосі якого $a=\sqrt{36}=6$, $b=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

*б*) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

$16(x^2-4x+4-4)-9(y^2+2y+1-1)+199=0$;

$16(x-2)^2-64-9(y+1)^2+9+199=0$;

$16(x-2)^2-9(y+1)^2=-144 \quad \Big| \quad :-144$;

$$-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1 \quad .$$

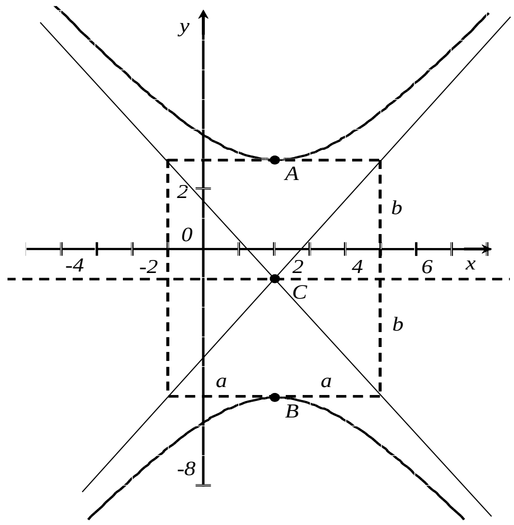



Рис.6.11

Рівняння приведено до вигляду: $-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,

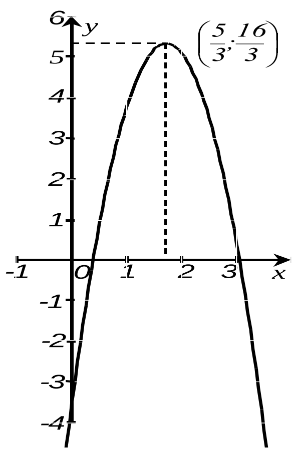
тобто отримали гіперболу з центром у точці $C(x_0;y_0)$: *C(2;-1)*, півосі якої $a=\sqrt{9}=3$; $b=\sqrt{16}=4$.

*в*) $3x^2-10x+y+3=0.$

$3\left(x^2-\dfrac{10}{3}x\right)+y+3=0;\quad 3\left(x^2-2\cdot\dfrac{5}{3}x+\dfrac{25}{9}-\dfrac{25}{9}\right)+y+3=0;$

$3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{75}{9}-3-y;\quad \left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2=-\dfrac{1}{3}\left(y-\dfrac{16}{3}\right);$

$\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2=-\dfrac{1}{3}\left(y-\dfrac{16}{3}\right)$ .




Рівняння приведено до вигляду: $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$,

тобто отримали параболу з вершиною у точці $C(x_0;y_0)$: $C\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{16}{3}\right)$, Рис.6.12

гілки якої напрямлені вздовж осі *Oy* у від'ємному напрямі.

**Питання для самоперевірки**

1 Виведіть канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи.

2 Які геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи?

3 Що називається асимптотами гіперболи?

# ЛЕКЦІЯ 7

Рівняння поверхні у просторі. Площина. Різні види її рівнянь.

Пряма у просторі, різні види рівнянь прямої.

7.1 Рівняння поверхні та лінії у просторі.

7.2 Рівняння площини у просторі

7.3 Площина. Основні задачі. Кут між площинами.

7.4 Рівняння прямої лінії у просторі

7.5 Пряма лінія у просторі. Основні задачі

## 7.1 Рівняння поверхні та лінії у просторі

Поверхню у просторі, як правило, можна розглядати як геометричне місце точок, які задовольняють деякій умові. Наприклад, сфера радіуса $R$ з центром у точці $C$ є ГМТ, рівновіддалених від точки $C$ на відстань $R$.

**Означення. Рівнянням поверхні** у прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x;\ y;\ z) = 0$ із трьома змінними $x$, $y$, $z$, якому задовольняють координати кожної точки, що належить поверхні, і не задовольняють координати точок, які не належать цій поверхні.

Змінні $x, y, z$ у рівнянні поверхні називають **поточними координатами**. Рівняння $F(x;\ y;\ z) = 0$, взагалі кажучи, визначає у просторі деяку поверхню. Вираз «взагалі кажучи» означає, що в деяких випадках рівняння $F(x;\ y;\ z) = 0$ може визначати не поверхню, а точку, лінію, або не визначати ніякого геометричного образу.

Так, рівнянню $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задовольняють лише координати точки $O(0,0,0)$, а рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ не визначає ніякого геометричного об’єкту.

В аналітичній геометрії у просторі, як і в аналітичній геометрії на площині, розв’язуються дві основні задачі:

1. за заданими геометричними властивостями поверхні складають її рівняння;
2. за заданим рівнянням поверхні досліджують форму цієї поверхні.

Найпростішою поверхнею у просторі є площина.

Лінію у просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, які є спільними для двох поверхонь.

Якщо дві поверхні визначаються рівняннями $F_1(x;\ y;\ z) = 0$ і $F_2(x;\ y;\ z) = 0$, то система рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x;y;z) = 0, \\ F_2(x;y;z) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

визначає лінію, тобто геометричне місце точок, координати яких задовольняють цим рівнянням ( рис.7.1).

Рівняння системи (7.1) називаються **рівняннями лінії у просторі**.

Наприклад, $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ є рівняння осі *Ox*.

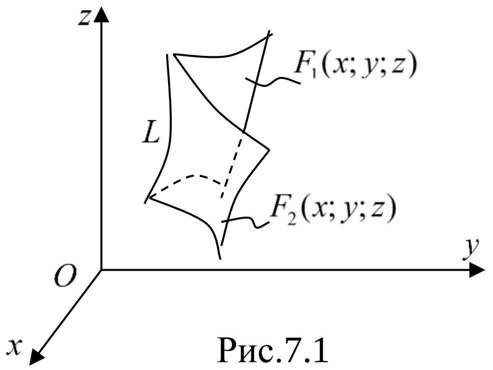



Рис.7.1

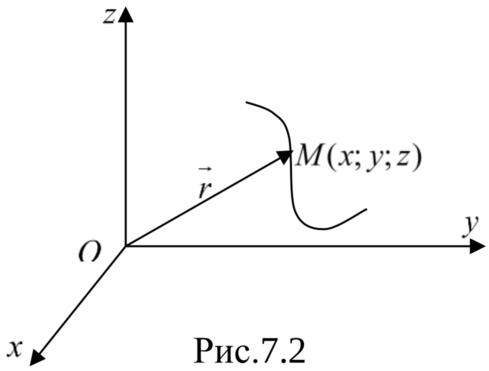



Рис.7.2

Лінію у просторі можна розглядати як траєкторію руху точки (рис.7.2). У цьому випадку її визначають векторним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{7.2}$$

або параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \tag{7.3}$$

проекцій вектора $\vec{r}(t)$ на осі координат.

Наприклад, параметричні рівняння гвинтової лінії мають вигляд

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}. \end{cases}$$

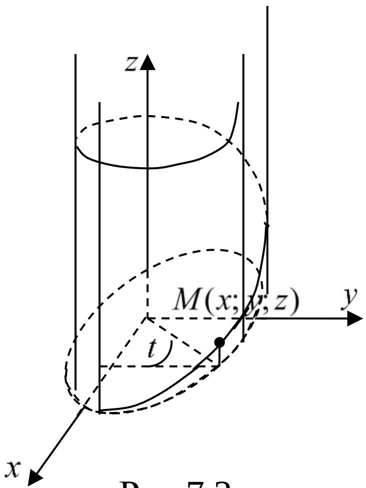



Рис.7.3

Якщо точка *M* рівномірно рухається вздовж твірної кругового циліндра, а сам циліндр рівномірно обертається навколо осі, то точка *M* описує гвинтову лінію ( рис. 7.3).

В архітектурній практиці циліндричні гвинтові лінії використовують для утворення контурів каркаса і поверхонь гвинтових сходів, гвинтових пандусів для в'їзду автомашин у багатоповерхових гаражах, для влаштування розв'язок у двох рівнях на перетині магістралей.

## 7.2 Рівняння площини у просторі

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Площину в просторі *Oxyz* можна визначити різними способами, кожному з яких відповідає певний вигляд її рівняння.

**Рівняння площини, яка проходить через задану точку в заданому напрямі**

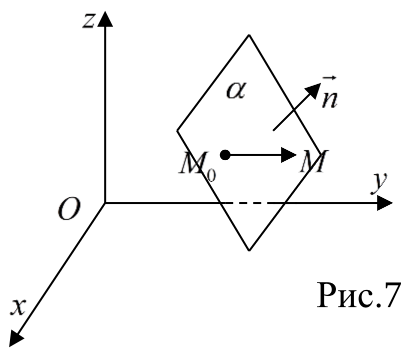



Рис.7.4

Треба у просторі *Oxyz* скласти рівняння площини $\alpha$, яка задана перпендикулярним до неї вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ і проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис.7.4).

**Означення.** Будь – який вектор, що відрізняється від нуля , перпендикулярний до площини, називають **нормальним вектором** площини і позначають через

$$\vec{n} = (A; B; C).$$

Нехай точка $M(x; y; z)$ – довільна точка площини, тоді вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ і $\vec{n} = (A; B; C)$ - взаємно перпендикулярні, тому $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$ тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (7.4)$$

Координати будь – якої точки, яка належить площині $\alpha$, задовольняють рівнянню, а координати точок, які не належать площині $\alpha$ , цьому рівнянню не задовольняють (для них $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \neq 0$).

Сукупність площин, які проходять через задану точку (при різних значеннях *A*,*B*,*C*) називають **в'язкою площин**, а рівняння (7.4) – **рівнянням в'язки площин.**

### Загальне рівняння площин

Розглянемо загальне рівняння першого степеня відносно змінних $x,\ y,\ z$ :

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (7.5)$$

Вважаючи, що хоча б один із коефіцієнтів *A, B, C* не дорівнює нулю (наприклад, *B*≠0), рівняння перепишемо у вигляді: $A(x - 0) + B\left(y + \dfrac{D}{B}\right) + C(z - 0) = 0$.

Тобто будь – яке рівняння першого степеня відносно змінних *x, y, z* можна звести до рівняння площини і, навпаки, будь – яка площина визначається рівнянням першого степеня.

Рівняння (7.5) називається **загальним рівнянням площини.**

### Дослідження загального рівняння площини

Розглянемо, які окремі положення відносно системи координат *Oxyz* займає площина $Ax + By + Cz + D = 0$, якщо деякі коефіцієнти цього рівняння дорівнюють нулю:

1. Якщо *D = 0,* то маємо рівняння $Ax + By + Cz = 0$, що визначає площину, яка проходить через початок координат;

2. Якщо *C = 0*, то маємо рівняння $Ax+By+D=0$, що визначає площину, яка паралельна осі *Oz*;
3. Якщо *C = D = 0*, то маємо рівняння $Ax+By=0$, що визначає площину, яка проходить через вісь *Oz*.
4. Якщо *B = C = 0*, то маємо рівняння $Ax+D=0$ , що визначає площину, яка паралельна площині *Oyz*.
5. Якщо *A = B = D = 0*, то маємо рівняння $Cz=0$, тобто *z = 0*, яке визначає координатну площину *Oxy*.

Аналогічно рівняння *x = 0, y = 0* визначають координатні площини, *Oyz* та *Oxz* відповідно.

### Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Складаємо рівняння площини $\alpha$, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, що не належать одній прямій.

Нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка площини $\alpha$. Тоді вектори $\vec{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\vec{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$ належать площині $\alpha$, отже, вони є компланарними. Тому їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\vec{M_1M}\cdot\vec{M_1M_2}\cdot\vec{M_1M_3}$=0, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (7.6)$$

Рівняння (7.6) називають **рівнянням площини, яка проходить через три задані точки**.

### Рівняння площини у відрізках

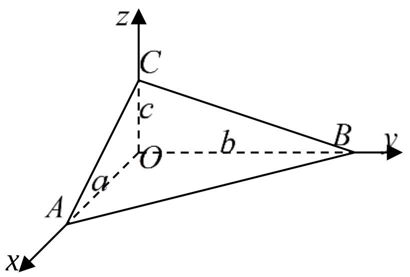



Рис.7.5

Розглянемо площину, яка перетинає всі три координатні осі (тобто жоден із коефіцієнтів *A, B, C* загального рівняння площини не дорівнює нулю).

Нехай площина відсікає на осях координат відрізки довжиною *a, в* і *c*, тобто проходить через точки *A(a;0;0), B(0;b;c), C(0;0;c).*

Підставляючи координати цих точок до рівняння (7.6), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (7.7)$$

Рівняння (7.7) називають **рівнянням площини у відрізках.**
Це рівняння можна використовувати для побудови площини.

## 7.3 Площина. Основні задачі

### Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини $\alpha_1$ та $\alpha_2$ задані рівняннями

$$\alpha_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\alpha_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

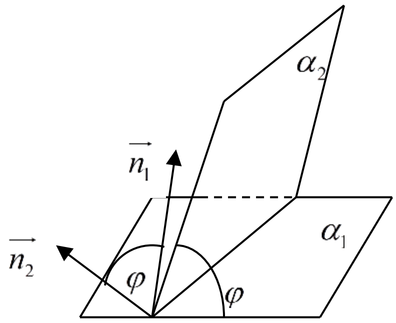


Рис.7.7

Під **кутом між двома площинами** розуміють один із двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами (якщо вони паралельні, то кут беремо рівним *0* або $\pi$).

Кут $\varphi$ між нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ площин $\alpha_1$ та $\alpha_2$ дорівнює одному з цих кутів (рис 7.7).

Тому $$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \text{ або } \cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (7.8)$$

Для знаходження гострого кута слід взяти модуль правої частини.

Якщо площини $\alpha_1$ та $\alpha_2$ перпендикулярні, то перпендикулярні їх нормальні вектори, тобто $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (і навпаки).

Тому $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, або

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (7.9)$$

Рівність (7.19) визначає **умову перпендикулярності двох площин**.

Якщо площини $\alpha_1$ та $\alpha_2$ паралельні, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (7.10)$$

Співвідношення (7.10) є **умовою паралельності двох площин**.

### Відстань від точки до площини

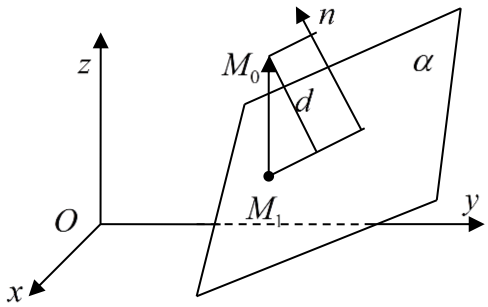


Рис.7.8

Визначимо відстань $d$ від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини

$\alpha$: *Ax+By+Cz+D=0* (рис 7.8).

Нехай точка $M_1(x_1; y_1; z_1)-$ довільна точка на площині $\alpha$.

Тоді $$d = \left| np_{\vec{n}} \overline{M_1M_0} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| =$$

$$=\left|\frac{(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Оскільки точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ належить площині $\alpha$, то $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, тобто $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$.

Отже,

$$d=\frac{|\mathrm{Ax_0+By_0+Cz_0+D}|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (7.11)$$

## 7.4 Рівняння прямої у просторі

### Векторне рівняння прямої

**Означення.** Будь-який вектор, що відрізняється від нуля, паралельний прямій, називається **напрямним вектором цієї прямої** і позначається через $\vec{S}=(m;n;p)$.

Нехай у просторі *Oxyz* треба скласти рівняння прямої *l*, яка задана точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і паралельним їй вектором $\vec{S}=(m;n;p)$ (напрямним) (рис.7.9).

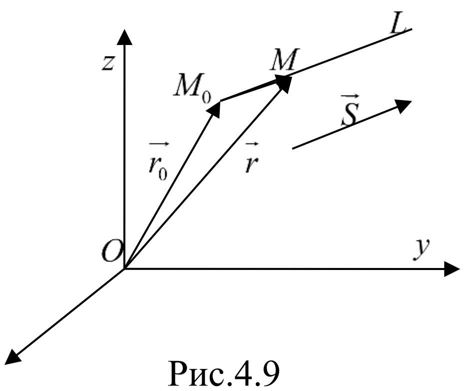



Рис.4.9

Якщо точка $M(x;y;z)-$ довільна точка на прямій *l*, то вектори $\vec{r}_0=\overline{OM_0}=(x_0;y_0;z_0)$, $\vec{r}=\overline{OM}=(x;y;z)$ і $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ задовольняють співвідношенню $\vec{r}=\vec{r}_0+\overline{M_0M}$ (рис. 7.9).

Оскільки вектор $\overline{M_0M}$, який належить прямій *l*, паралельний вектору $\vec{s}$, то $\overline{M_0M}=t\vec{s}$, де *t* – скалярний множник, який називається **параметром**. Рівняння можна записати у вигляді $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}$.

### Параметричні рівняння прямої

Рівняння $\vec{r}=\vec{r}_0+t\,\vec{s}$ можна переписати у вигляді

$$x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=(x_0+tm)\,\vec{i}+(y_0+tn)\,\vec{j}+(z_0+tp)\,\vec{k}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (7.12)$$

Рівняння (7.12) називають **параметричними рівняннями прямої у просторі**.

## Канонічні рівняння прямої у просторі

Якщо із параметричних рівнянь виключати параметр $t$, то отримаємо **канонічні рівняння прямої**, яка задана точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S}=(m;n;p)$ :

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (7.13)$$

**Зауваження**. Обертання на нуль одного із знаменників рівняння означає рівність нулю відповідного чисельника.

Наприклад, рівняння $\frac{x+1}{5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-2}{0}$ визначає пряму, яка проходить через точку $M_0(-1;4;2)$ і перпендикулярна осі $Oz$ ( проекція вектора $\vec{S}$ на вісь $Oz$ дорівнює нулю ). Це означає, що пряма належить площині $z = 2$, тому для всіх точок прямої виконується рівність $z - 2 = 0$.

## Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві точки

Нехай пряма $l$ проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$.

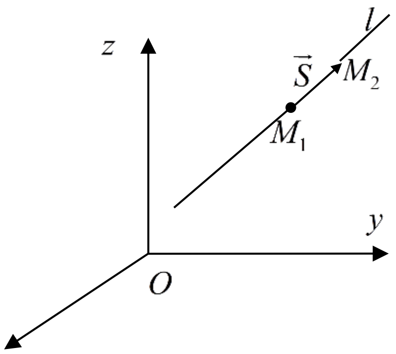



Рис.7.10

Тоді за напрямний вектор $\vec{S}$ можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, тобто $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис 7.10).

Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (7.14)$$

Рівняння (7.16) називають **рівняннями прямої, яка проходить через дві точки.**

## Загальні рівняння прямої

Пряму $l$ у просторі $Oxyz$ можна визначити як лінію перетину двох не паралельних між собою площин, тобто системою рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$ – **загальні рівняння прямої.** (7.15)

Тут $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ – нормальні вектори площини $\alpha_1$ і $\alpha_2$.

Від загальних рівнянь (7.15) можна перейти до канонічних (7.13).

Оскільки пряма $l$ перпендикулярна $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, то за напрямний вектор $\vec{S}$ прямої $l$ можна взяти векторний добуток $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$: $\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

## 7.5 Пряма лінія у просторі. Основні задачі

## Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі $l_1$ і $l_2$ визначаються напрямними векторами $\vec{S_1}=(m_1;n_1;p_1)$ та $\vec{S_2}=(m_2;n_2;p_2)$. Під кутом між двома прямими розуміють кут між їх напрямними векторами $\vec{S_1}$ та $\vec{S_2}$. Тому за відомою формулою з векторної алгебри

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}}{\left|\vec{S_1}\right|\cdot\left|\vec{S_2}\right|} \quad \text{або} \quad \cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (7.16)$$

Для визначення гострого кута між прямими $l_1$ і $l_2$ чисельник правої частини слід узяти за модулем.

Якщо прямі $l_1$ і $l_2$ перпендикулярні, то їх напрямні вектори перпендикулярні, тобто $\vec{S_1}\perp\vec{S_2}$ або $\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}=0$.

Отже, **умова перпендикулярності двох прямих** має вигляд:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (7.17)$$

Якщо прямі $l_1$ і $l_2$ паралельні, то паралельні їх напрямні вектори $\vec{S_1}$ та $\vec{S_2}$, тобто $\vec{S_1}\parallel\vec{S_2}$, або $\vec{S_1}=\lambda\vec{S_2}$.

Отже, **умова паралельності двох прямих** має вигляд:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (7.18)$$

### Питання для самоперевірки

1 Як визначаються в аналітичній геометрії лінія, поверхня та інші множини точок? Наведіть приклади.

2 Як однозначно може бути визначене положення площини у просторі?

3 Який вектор називається нормальним вектором площини?

4 Яке рівняння називають загальним рівнянням площини у просторі? У чому полягає зміст його коефіцієнтів?

5 Виведіть рівняння площини, яка проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор.

6 Виведіть рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

7 Як однозначно може бути визначене положення прямої у просторі?

8 Який вектор називають напрямним вектором прямої?

9 Виведіть канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.

10 Виведіть рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

11 Як визначити кут між двома площинами; двома прямими.

## ЛЕКЦІЯ 8

8.1 Пряма та площина в просторі. Основні задачі.

8.2 Поверхні другого порядку.

### 8.1 Пряма та площина у просторі. Основні задачі

#### Кут між прямою і площиною

Нехай пряма $l$ і площина $\alpha$ визначаються відповідно напрямним вектором $\vec{S}=(m;n;p)$ і нормальним вектором $\vec{n}=(A;B;C)$.

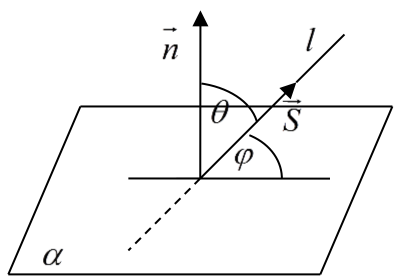


Рис.8.1

**Кутом між прямою та площиною** будемо називати будь – який із двох суміжних кутів, утворених прямою та її проекцією на площину.

Позначимо через $\varphi$ кут між прямою $l$ і площиною $\alpha$, а через $\theta$ – кут між векторами $\vec{n}=(A;B;C)$ і $\vec{S}=(m;n;p)$ (рис.8.1). Спочатку знайдемо $\cos\theta$ за формулою кута між векторами:

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{S}\right|}.$$

Визначимо синус кута $\varphi$, вважаючи $\varphi\le\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta.$$

Оскільки $\sin\varphi\ge 0$, то маємо формулу кута між прямою і площиною:

$$\sin\varphi=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{8.1}$$

#### Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Якщо пряма $l$ паралельна площині $\alpha$, то вектори $\vec{S}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, а тому $\vec{S}\cdot\vec{n}=0$ (рис.8.2).

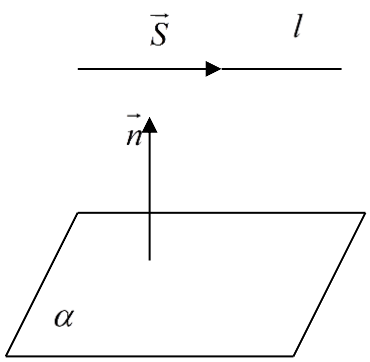


Рис.8.2

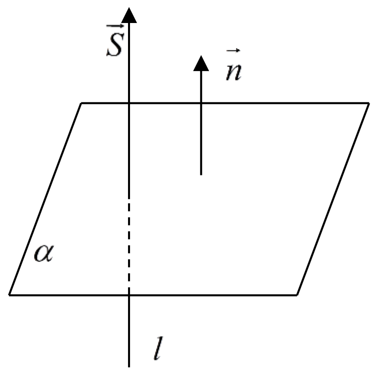


Рис.8.3

Отже, **умова паралельності прямої і площини** має вигляд

$$Am+Bn+Cp = 0. \tag{8.2}$$

Якщо пряма $l$ перпендикулярна площині $\alpha$, то вектори $\vec{s}$ і $\vec{n}$ паралельні (рис 8.3).

Отже, **умова перпендикулярності прямої і площини** має вигляд

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{8.3}$$

**Перетин прямої і площини**

Нехай треба знайти точку перетину прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$.

Для цього наведемо канонічні рівняння прямої до рівняння у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{8.4}$$

Підставимо ці вирази до рівняння площини замість *x, y, z*, отримаємо рівняння

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$$

або

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0.$$

Якщо пряма не належить площині або вони не паралельні, тобто $Am+Bn+Cp\neq 0$, то знайдемо $t$: $t=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$.

Координати шуканої точки перетину прямої і площини знайдемо, якщо занести обчислене значення параметра $t$ до рівняння прямої (8.4).

**Приклад.** Дано координати точок $S_0, S_1, S_2, S_3$ і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$:

| $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $\vec{a}$ | $\vec{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *(-1;2;1)* | *(3;-4;2)* | *(4;1;-3)* | *(2;-1;-2)* | *(1;3;-5)* | *(-3;1;4)* |

Необхідно:

1) скласти рівняння площини $\alpha_1$, яка проходить через точку $S_0$ і має нормальний вектор $\vec{n}=\vec{b}$;

2) скласти рівняння площини $\alpha_2$, яка проходить через точки $S_1, S_2, S_3$;

3) скласти рівняння площини $\alpha_3$, яка проходить через точку $S_1$ і паралельна векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$;

4) скласти рівняння площини $\alpha_4$, яка проходить через точки $S_2, S_3$ і паралельна вектору $\vec{a}$;

5) знайти відстань від точки $S_0$ до площини $\alpha_2$ і записати канонічні рівняння перпендикуляра $l_1$, який опущений із точки $S_0$ на площину $\alpha_2$;

6) записати канонічні рівняння прямої $l_2$, яка проходить через точки $S_1$, $S_2$;

7) перевірити, чи перетинаються прямі $l_1$ і $l_2$.

**Розв'язання:**

1) Використовуючи рівняння площини, яка проходить через точку $S_0$ і має нормальний вектор $\vec{n}=\vec{b}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \text{ де } \vec{n}=(A,B,C);\ S_0(x_0,y_0,z_0),$$

Отримаємо $-3(x+1)+1(y-2)+4(z-1)=0$ або $-3x+y+4z-9=0$.

Остаточно маємо шукане рівняння площини $\alpha_1$: $3x-y-4z+9=0$.

2) Запишемо рівняння площини, яка проходить через три точки $S_1$, $S_2$, $S_3$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \text{ де } S_1(x_1,y_1,z_1);\ S_2(x_2,y_2,z_2);\ S_3(x_3,y_3,z_3).$$

Отримаємо $\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2-2 \end{vmatrix}=0$ або $\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=0$.

Обчислимо визначник за загальним правилом, розкладаючи його за елементами першого рядка:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}-(y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$-5(x-3)+9(y+4)+8(z-2)=0.$$

Отже, маємо шукане рівняння площини $\alpha_2$: $5x-9y-8z-35=0$.

3) Рівняння площини, яка проходить через точку $S_1$ і паралельна векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ можна визначити як рівняння площини, що проходить через три точки: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$, де $S_1(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$.

Отримаємо рівняння $\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$. Обчислимо визначник шляхом його розкладу за елементами першого рядка:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-(y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$17(x-3)+11(y+4)+10(z-2)=0,$$

тобто маємо шукане рівняння площини $\alpha_3$: $17x + 11y + 10z - 27=0$.

4) Запишемо рівняння площини, яка проходить через точки $S_2$, $S_3$ і паралельна вектору $\vec{a}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0, \text{ де } S_2(x_1,y_1.z_1);\ S_3(x_2,y_2,z_2);\ \vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right).$$

Маємо рівняння $\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+3 \\ 2-4 & -1-1 & -2+3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$,

Звідси

$$(x-4)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

Тобто

$$7(x-4) - 9(y-1) - 4(z+3) = 0;$$

$$\alpha_3:\ 7x - 9y - 4z - 31 = 0.$$

5) Використовуючи формулу (7.11), визначимо відстань від точки $S_0$ до площини $\alpha_2$.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ де } S_0(x_1, y_1, z_1).$$

Рівняння площини $\alpha_2$ визначили раніше: $5x - 9y - 8z - 35 = 0$, тобто

$$d = \frac{|5(-1) - 9 \cdot 2 - 8 \cdot 1 - 35|}{\sqrt{5^2 + (-9)^2 + (-8)^2}} = \frac{|-66|}{\sqrt{170}} \approx 5,7.$$

Запишемо канонічні рівняння перпендикуляра $l_1$, який опущений із точки $S_0(x_1, y_1, z_1)$ на площину $\alpha_2$.

Оскільки пряма $l_1$ перпендикулярна площині $\alpha_2$, то нормальний вектор площини $\overrightarrow{n_2} = (5; -9; -8)$ буде одночасно і напрямним вектором перпендикуляра $l_1$. Тому рівняння прямої $l_1$ матиме вигляд

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z-1}{-8}.$$

6) Запишемо канонічні рівняння прямої , яка проходить через дві точки $S_1$ і $S_2$ : $\quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, де $S_1(x_1, y_1.z_1)$; $S_2(x_2, y_2, z_2)$.

Звідси маємо шукане рівняння прямої $l_2$:

$$l_2:\ \frac{x-3}{4-3} = \frac{y+4}{1+4} = \frac{z-2}{-3-2}; \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-2}{-5}.$$

7) Перевіримо, чи перпендикулярні прямі $l_1$ і $l_2$, рівняння яких отримали вище. Отже, відомі їх напрямні вектори $\overrightarrow{s_1} = (5; -9; -8)$ і $\overrightarrow{s_2} = (1; 5; -5)$.

Використовуючи умову перпендикулярності прямих, отримаємо $\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 5 \cdot 1 + (-9) \cdot 5 + (-8) \cdot (-5) = 0$, тобто прямі $l_1$ і $l_2$ перпендикулярні.

### 8.2 Поверхні другого порядку

Поверхні, порядок яких вищий за перший, називають кривими. Ці поверхні відрізняються багатою різноманітністю форм і надають широкі можливості для цікавих архітектурних рішень.

**Означення.** Поверхня, яка в деякій системі координат *Oxyz* визначається алгебраїчним рівнянням другого степеня, називається **поверхнею другого порядку.**

У загальному вигляді рівняння другого порядку відносно змінних *x, y, z* має вигляд

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0,$$

де коефіцієнти при змінних – деякі дійсні числа.

## Циліндричні поверхні

**Означення.** Поверхня, що утворена рухом прямої *L*, яка рухається у просторі, зберігаючи сталий напрям і перетинаючи кожного разу деяку криву *K*, називається **циліндричною поверхнею або циліндром**.

При цьому крива *K* називається **напрямною циліндра**, а пряма *L* – його **твірною** (рис.8.4).

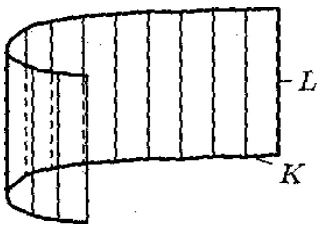



Рис.8.4

Нехай на площині *Oxy* лежить деяка крива *K*, рівняння якої має вигляд

$$F(x;y) = 0.$$

Побудуємо циліндр із напрямною *K* і твірними, паралельними осі *Oz* (рис.4.13) і доведемо, що рівняння цього циліндра має вигляд

$$F(x;y) = 0, \tag{8.5}$$

тобто не містить координати *z*.

Дійсно, нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка на циліндрі, яка належить деякій твірній *L*.

Позначимо через *N* точку перетину цієї твірної і площини *Oxy*, тоді точка *N* належить і кривій *K* та її координати задовольняють рівнянню кривої *F(x;y) = 0*. Але точка *M* має такі ж абсцису *x* і ординату *y*, як і точка *N*, тобто координати точки *M* також задовольняють рівнянню *F(x;y) = 0*. Оскільки точка *M* – довільна точка циліндра, то рівняння *F(x;y) = 0* – рівняння циліндра.

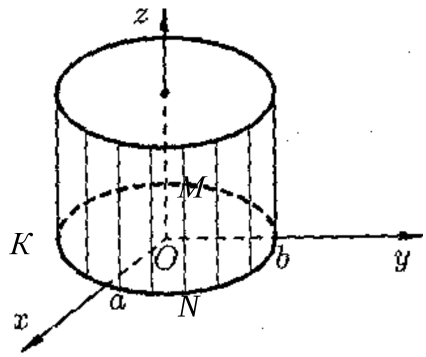



Рис.8.5

Аналогічно можна показати, що рівняння *F(x;z) = 0* визначає циліндр, твірні якого паралельні осі *Oy*, а рівняння *F(y;z) = 0* – циліндр з твірними, які паралельні осі *Ox*.

Назва циліндра визначається назвою напрямної.

Якщо напрямною циліндра є еліпс на площині *Oxy*, який задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8.6}$$

то відповідна циліндрична поверхня називається **еліптичним циліндром** (рис.8.5).

Частковим випадком еліптичного циліндра є **круговий циліндр**, рівняння якого має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.

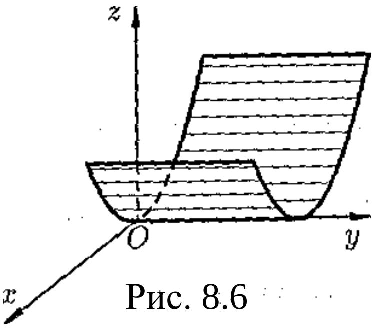



Рис. 8.6

Рівняння

$$x^2 = 2pz \tag{8.7}$$

визначає у просторі $Oxyz$ **параболічний циліндр** (рис. 8.6).

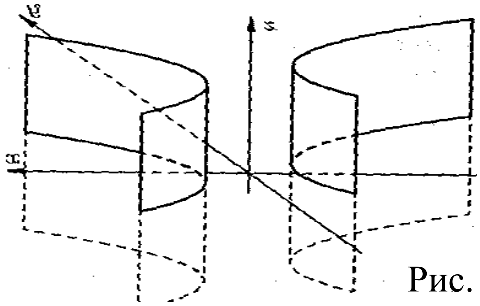


Рис. 8.7

Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (8.8)

визначає у просторі $Oxyz$ **гіперболічний циліндр** (рис. 8.7).

### Поверхні обертання. Конічні поверхні

**Означення.** Поверхня, яка утворюється обертанням кривої навколо осі, розташованої в її площині, називається **поверхнею обертання**.

Нехай деяка крива $L$ належить площині $Oyz$. Рівняння цієї кривої запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} F(y;z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

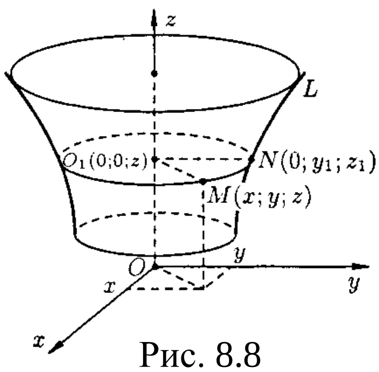



Рис. 8.8

Знайдемо рівняння поверхні, яка утворюється обертанням кривої $L$ навколо осі $Oz$ (рис. 8.8).

Нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка на поверхні. Проведемо через точку $M$ площину, яка перпендикулярна осі $Oz$ і позначимо точки перетину її з віссю $Oz$ і кривою $L$ відповідно через $O_1(0;0;z)$ та $N(0;y_1;z_1)$. Оскільки відрізки $O_1M$ і $O_1N$ є радіусами

одного кола, тому $O_1N = O_1M$, тобто

$$|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ або } y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Крім того, звісно, $z_1 = z$. Оскільки точка $N$ належить кривій $L$, то її координати задовольняють рівнянню $\begin{cases} F(y;z) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$, тому $F(y_1;z_1) = 0$.

Звідси $$F(\pm\sqrt{x^2+y^2};z)=0. \quad (8.9)$$

Рівняння (8.9) – шукане **рівняння поверхні обертання**. Йому задовольняють координати будь – якої точки $M$ на цій поверхні і не задовольняють координати точок, які не належать поверхні обертання.

Якщо крива $\begin{cases} F(y;z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ обертається навколо $Oy$, то рівняння поверхні обертання має вигляд

$$F(y;\pm\sqrt{x^2+z^2})=0. \quad (8.10)$$

Якщо крива $L$ належить площині $Oxy$ $(z = 0)$ і має рівняння $F(x,y) = 0$, то рівняння поверхні обертання, яка утворюється обертанням кривої $L$ навколо осі $Ox$, записується у вигляді:

$$F(x;\pm\sqrt{y^2+z^2})=0. \quad (8.11)$$

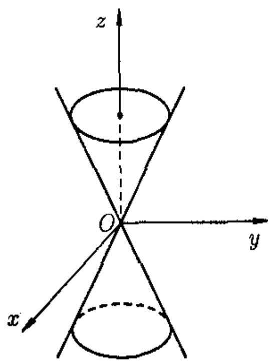


Рис. 8.9

Наприклад, якщо пряма $y=z$ обертається навколо осі $Oz$ (рис 8.9), то отримаємо поверхню обертання:

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{або} \quad x^2+y^2=z^2. \quad (8.12)$$

Рівняння $x^2+y^2=z^2$ визначає **конус другого порядку**.

**Означення.** Поверхня, яка утворюється обертанням прямої, яка проходить через задану точку $P$ і перетинає дану плоску лінію $K$, що не проходить через точку $P$, називається **конічною поверхнею або конусом**.

При цьому лінія $K$ називається **напрямною**, а пряма, яка описує поверхню, – **твірною.**

Розглянемо поверхні, які є просторовими аналогами кривих другого порядку. За заданим рівнянням поверхні другого порядку в деякій прямокутній системі координат у просторі будемо визначати її властивості. За допомогою методу перерізів геометричний вигляд поверхні вивчається за лініями перетину цієї поверхні з координатними площинами або площинами, які їм паралельні.

## Еліпсоїд

**Означення. Еліпсоїдом** називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (8.13)$$

Рівняння (8.13) називається **канонічним рівнянням еліпсоїда**.

Для дослідження форми еліпсоїда розглянемо перерізи поверхні площинами, які паралельні площині $Oxy$.

Рівняння таких площин: $z = h$, де $h$ – довільне число.

Лінія, яка утворюється в перерізі , визначається системою двох рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

Досліджуємо рівняння :

1. Якщо $|h|>c,\ c>0,\ mo\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$; отже, точок перетину поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ і площини $z = h$ не існує;
2. Якщо $|h|=c$, тобто $h=\pm c$, тому $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; отже, лінія перетину вироджується у дві точки *(0;0;c)* і *(0;0;-c)*. Площини $z=\pm c$ торкаються поверхні;
3. Якщо $|h|<c$, то рівняння $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases}$ запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

Як видно, лінія перетину є еліпсом із півосями $a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ .

При цьому, чим менше $|h|$, тим більші півосі $a_1$ і $b_1$. При $h=0$ вони досягають своїх найбільших значень $a_1=a$ і $b_1=b$.

Рівняння $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases}$ набувають вигляду $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ h=0. \end{cases}$.

Аналогічні результати отримуємо, якщо розглянемо перерізи поверхні площинами $x=h$ , $y=h$.

Крім того, можна показати, що еліпсоїд має 6 вершин із координатами:

*(a;0;0), (-a;0;0), (0;в;0), (0;-в;0), (0;0;c), (0;0;-c).*

Осями симетрії еліпсоїда є координатні осі *Ox, Oy, Oz* , а площинами симетрії – координатні площини *Oxy, Oxz, Oyz*.

Таким чином, наведений аналіз дозволяє зобразити еліпсоїд як замкнену овальну поверхню (рис. 8.10).

Величини *a, b, c* називають **піввісями еліпсоїда.**

Якщо всі ці числа різні, то еліпсоїд називають **трьохвісним.** Якщо деякі дві піввісі рівні, то еліпсоїд можна розглядати як поверхню, яка утворена обертанням еліпса навколо однієї з його осей.

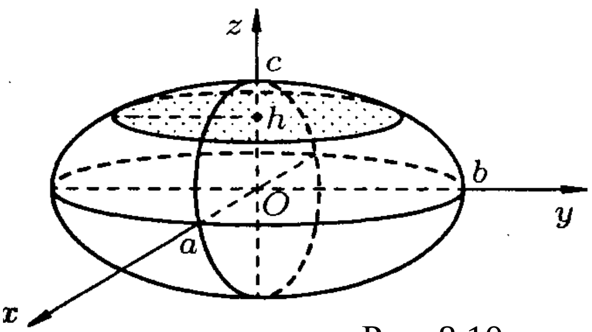


Рис. 8.10

Якщо еліпс обертається навколо великої осі, то еліпсоїд називають **витягнутим,** якщо навколо малої осі – **стиснутим**.

Якщо $a = b = c$, то еліпсоїд є сферою, яка визначається рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

## Гіперболоїди

**Означення. Однополим гіперболоїдом** називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (8.14)$$

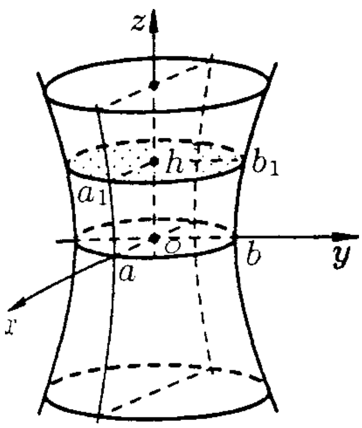


Рис. 8.11

**Означення. Двополим гіперболоїдом** називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (8.15)$$

Аналіз за методом перерізів показує, що лініями перетину однополого гіперболоїда з координатними площинами і площинами, які їм паралельні, є еліпси та гіперболи.

Цей результат дозволяє зобразити однополий гіперболоїд як поверхню, яка має форму трубки, що нескінченно розширюється (рис. 8.11).

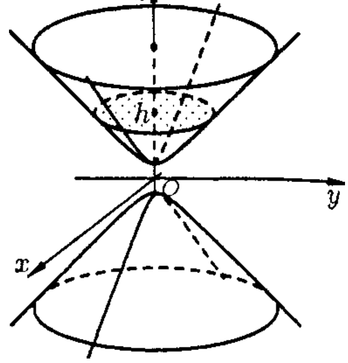


Рис. 8.12

Зауваження. Можна довести, що через будь – яку точку однополого гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ можна провести дві прямі, які йому належать.

Аналіз за методом перерізів дозволяє зобразити двополий гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ як поверхню, яка складається з двох частин, що мають форму двох опуклих нескінченних чаш (рис. 8.12).

**Параболоїди**

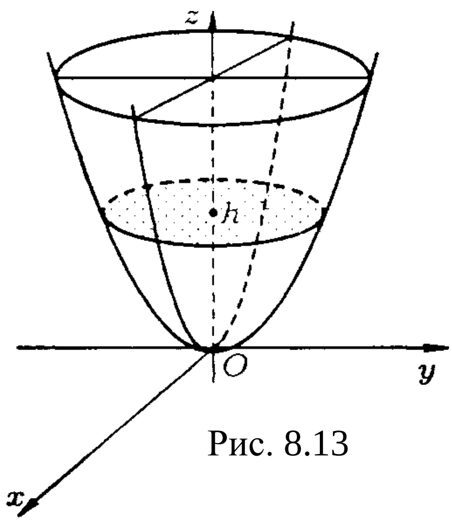



Рис. 8.13

Існують дві поверхні, які є просторовими аналогами парабол на площині. Їх називають параболоїдами( еліптичним і гіперболічним).

**Означення. Еліптичним параболоїдом** називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \text{ де } p>0,\ q>0. \qquad (8.16)$$

**Означення. Гіперболічним параболоїдом** називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

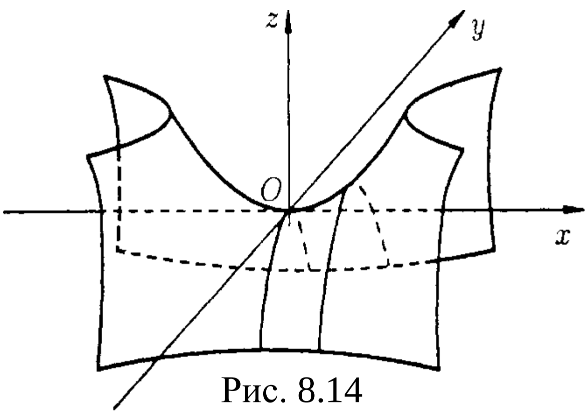



Рис. 8.14

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad \text{де } p>0,\ q>0. \qquad (8.17)$$

Аналіз за методом перерізів дозволяє зобразити еліптичний параболоїд як поверхню, яка має вигляд опуклої чаші, що нескінченно розширюється (рис. 8.13), а гіперболічний параболоїд – як поверхню, яка має форму сідла (рис. 8.14).

Поверхні, які складаються з прямих ліній, називають **лінійчатими.** До них належать циліндричні, конічні поверхні, а також однополий гіперболоїд і гіперболічний параболоїд. Лінійчаті поверхні є цінними з точки зору технології будівельного виробництва. Так, відомий інженер В.Г. Шухов запропонував ідею використання лінійчатого характеру однополого гіперболоїда в будівельній техніці. Такі конструкції виявилися легкими і міцними.

Цінна якість гіперболічного параболоїда (як лінійчатої поверхні) полягає в тому, що у процесі побудови складних споруд з’являється можливість спряження її частин за прямолінійними твірними.

**Питання для самоперевірки**

1 Як визначити кут між прямою і площиною?

2 Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямої і площини.

3 Яка поверхня називається поверхнею другого порядку?

4 Перелічить основні види поверхонь другого порядку.

## ЛЕКЦІЯ 9

9.1 Функція та її властивості. Способи завдання функції.

9.2 Основні елементарні функції та їх графіки.

### 9.1.1 Функція та її основні властивості

**Означення. Змінною величиною (змінною)** називається величина, яка набуває різних числових значень.

Якщо значення величини не змінюється, то її звуть **сталою**.

Змінні величини зазвичай позначають через *x, y, z,…*і т.д., а сталі – *a, b, c,…*і т.д. Нехай задані дві непорожних множини $X$ і $Y$.

**Означення.** Відповідність, за якою з кожним значенням змінної $x \in X$ (яка належить множині *X*) зіставляють цілком певне значення змінної $y \in Y$, називається **функцією** і позначається $y = f(x)$ або $y = y(x)$. Змінну *x* називають **незалежною змінною** або **аргументом**, а змінну *y* – **залежною змінною** або **функцією**.

**Означення.** Сукупність усіх значень незалежної змінної *x*, для яких визначаються значення функції *y* називають **областю визначення функції або областю існування** і позначають *D*(*f*) або $D(y)$. Сукупність усіх різних значень змінної *y*, які обчислюються за правилом $f(x)$, називають **областю зміни функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. У наших позначеннях $D(f) = X$, $E(f) = Y$.

Значення, якого набуває функція $y = f(x)$ при $x = x_0$, позначають $f(x_0)$ і називають **частинним значенням функції**.

### 9.1.2 Способи задання функції

Найбільш розповсюдженими є три способи задання функції: аналітичний, табличний, графічний .

1) При **аналітичному способі** функцію задають у вигляді однієї або декількох формул або рівнянь. Розрізняють такі форми аналітичного задання функції:

- **Явна форма задання функції:** $y = f(x)$.

Наприклад, $y = \sqrt{1-x^2}$, $\quad y = \begin{cases} x+1, \text{ якщо } -1 \le x < 0, \\ 1 \ , \text{ якщо } \ 0 \le x \le 1, \\ \sin\frac{\pi}{2}x, \text{ якщо } 1 < x \le 2. \end{cases}$

- **Неявна форма задання функції:** $F(x; y) = 0$.

Наприклад, $y^2 - x + 1 = 0$.

- **Параметрична форма задання функції:** $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$

При параметричному заданні функції значення змінних $x$ і $y$, які відповідають одне одному, визначають через третю величину, яку називають **параметром.**

Наприклад, функція $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \end{cases}$ $t \in [0;\pi\ \ /]$ шляхом виключення параметра $t$ допускає запис у явній формі $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

2) При **табличному способі** функцію задають у вигляді таблиці (рис.9.1)

| $x$ | $x_1$ $x_2$ … $x_n$ |
|---|---|
| $y$ | $y_1$ $y_2$ … $y_n$ |

Рис.9.1

де $x_i$, $y_i$ – значення аргументу і функції ($i = \overline{1;n}$).

3) при **графічному способі** у деякій прямокутній системі координат на площині будують сукупність усіх точок (**графік функції** $y = f(x)$), для яких абсциса $x$ і ордината $y$ є значеннями відповідно аргументу і функції.

До основних властивостей функцій належать:

- область визначення та область зміни;
- парність або непарність;
- періодичність;
- обмеженість;
- існування оберненої функції;
- існування асимптот графіка функції;
- диференційованість;
- неперервність;
- монотонність, існування екстремуму;
- опуклість, угнутість, існування точок перегину;
- інтегруємість і ін.;

Наведемо означення цих понять, за винятком тих понять, які будуть розглянуті нижче.

**Означення.** Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині $X$, називається **парною**, якщо для всіх $x \in X$ виконуються умови $-x \in X$ і $f(-x) = -f(x)$; і **непарною**, якщо для всіх $x \in X$ виконуються умови $-x \in X$ і $f(-x) = f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі $Oy$, а непарної – відносно початку координат.

Наприклад, $y = x^2$, $y = \cos x$ – парні функції;

$y = x^3$, $y = \sin x$ – непарні функції;

$y = x + 1$, $y = \ln x$ – функції загального вигляду, тобто ні парні, ні непарні.

**Означення.** Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині $X$, називається **періодичною з періодом *T***, якщо для будь – якого значення аргументу $x \in X$ виконуються умови: $f(x \pm T) = f(x)$.

Зазвичай під періодом функції розуміють найменший із усіх додатних періодів ( якщо такий існує).

Наприклад, функції $y = \cos x,\ y = \sin x$ періодичні та мають найменший додатний період $2\pi$ .

**Означення.** Функція $y = f(x)$ , яка визначена на множині $X$, називається **обмеженою на цій множині,** якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| < M$ (тобто графік обмеженої функції розташований між прямими $y = - M$ і $y = M$).

Наприклад, функція $y = \sin x$ є обмеженою в області визначення, оскільки $|\sin x| \le 1$ при $x \in R$.

Нехай $D(f)$ і $E(f)$ – відповідно області визначення і зміни функції $y = f(x)$. Якщо кожному значенню $y \in E(f)$ відповідає єдине значення $x \in D(f)$, то визначена функція $x = \varphi(y)$ з областю визначення $E(f)$ та областю зміни $D(f)$ . Така функція $\varphi(y)$ називається **оберненою** до функції $f(x)$ , її позначають $f^{-1}$ і записують $x = f^{-1}(y)$. Функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ називають **взаємно оберненими**. Наприклад, $y = a^x$ і $y = \log_a x$ ($a > 0,\ a \ne 1$) є взаємно оберненими функціями.

**Означення.** Функція $y = f(x)$ , яка визначена на множині $X$, називається **зростаючою (спадаючою) на множині** $X_1 \subset X$ **,** якщо для будь – яких значень $x_1$ і $x_2 \in X_1$ із нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$), тобто більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$), то функцію називають **неспадною (незростаючою) на множині** $X_1$**.**

Зростаючі, незростаючі, спадні та неспадні функції називають **монотонними**, а зростаючі і спадні функції – **строго монотонними.**

Наприклад, функція $y = e^x$ є зростаючою при $x \in R$, а функція $y = \log_{1/2} x$ спадає при $x > 0$.

## 9.2 Основні елементарні функції та їх графіки

**1. Степенева функція** $y = x^\alpha$ **,** де $\alpha$ – дійсне число, що відмінне від нуля.

При $\alpha = 1,\ \alpha = 3,\ \alpha = 5$ функція визначена на всій числовій осі: $D(y) = R$. Область зміни функції $E(y) = R$ (рис.9.2).

При $\alpha = 2,\ \alpha = 4,$ функція визначена на всій числовій осі: $D(y) = R$. Область зміни функції $E(y) = [0; +\infty)$ (рис.9.3).

При $\alpha = -1$ область визначення $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Область зміни функції $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ (рис.9.4).

При $\alpha = \frac{1}{2}$ область визначення $D(y) = [0; +\infty)$. Область зміни функції $E(y) = [0; +\infty)$ (рис.9.5).

**2. Показникова функція** $y = a^x$ ($a > 0,\ a \ne 1$) визначена для всіх дійсних значень $x$ . Область зміни функції $E(y) = (0; +\infty)$ (рис.9.6).

**3. Логарифмічна функція** $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ визначена для $x>0$. Область зміни функції $E(y)=(-\infty;+\infty)$ (рис.9.7).

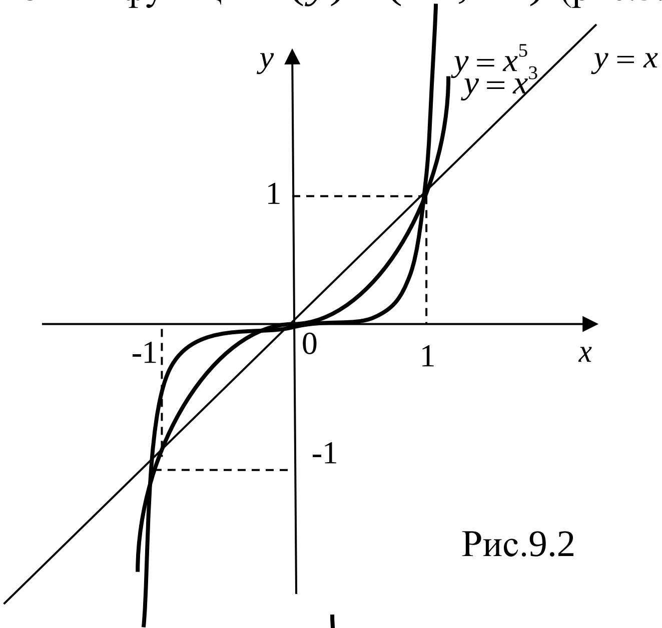



Рис.9.2

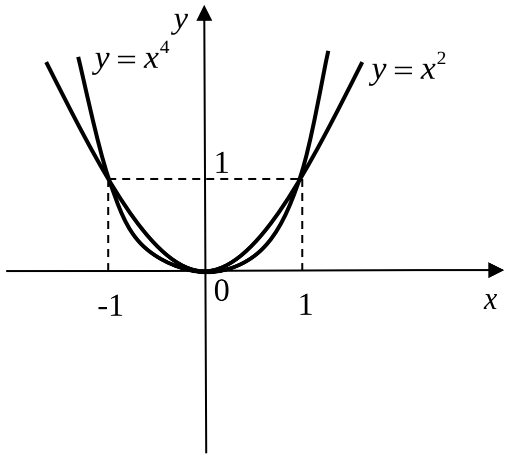



Рис.9.3

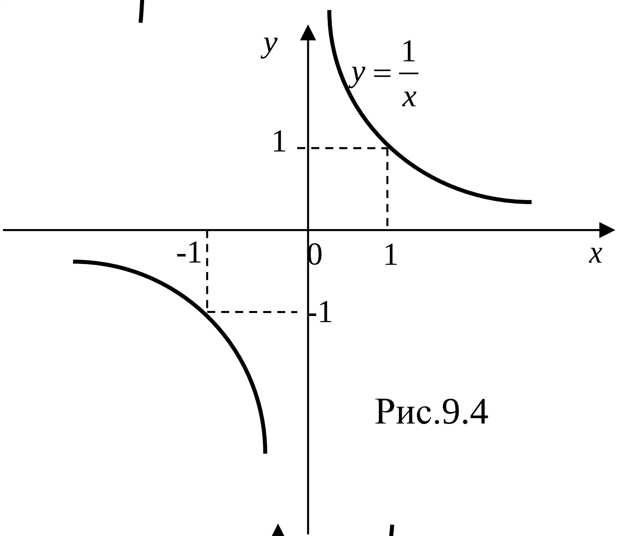



Рис.9.4

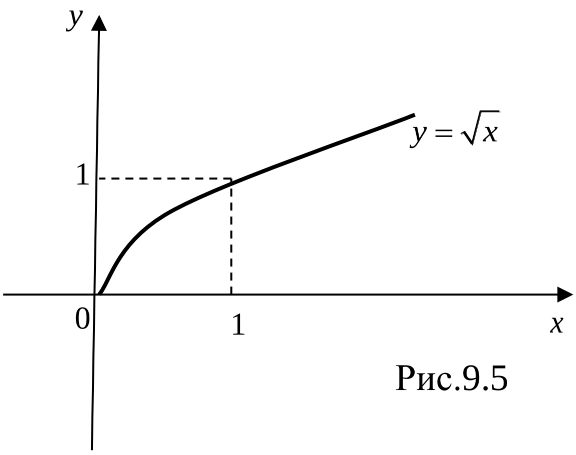



Рис.9.5

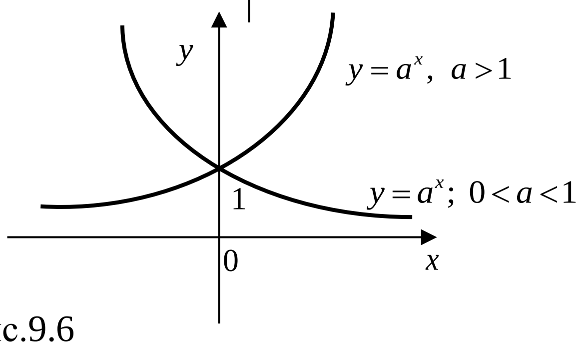



Рис.9.6

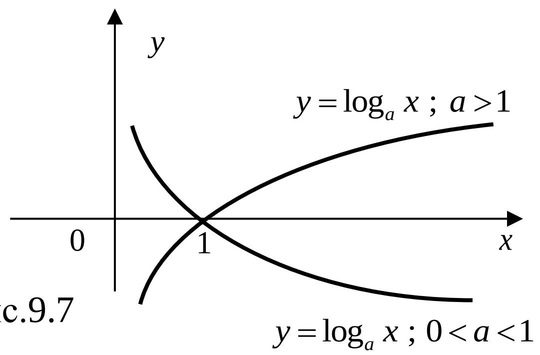



Рис.9.7

**4. Тригонометричні функції** $y=\sin x$ (рис.9.8) і $y=\cos x$ (рис.9.9) визначені на всій числовій осі, а їх область зміни $E(y)=[-1;1]$; функція $y=tgx$ (рис.9.10) визначена для всіх $x$, крім точок $x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z$; функція $y=ctgx$ (рис.9.11) визначена для всіх $x$, крім точок $x=\pi k,\ k\in Z$. Область зміни цих функцій $E(y=tgx)=E(y=ctgx)=R$.

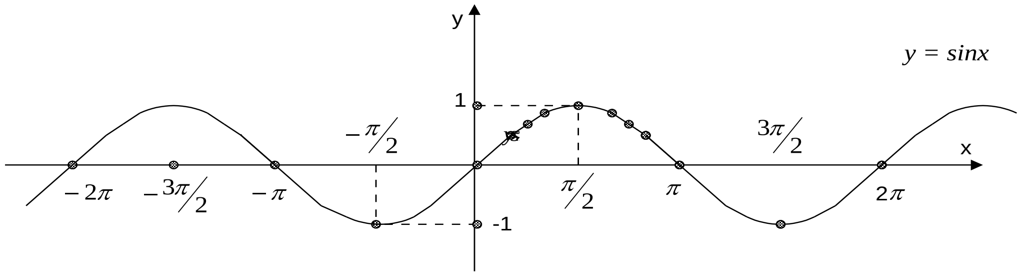



Рис. 9.8

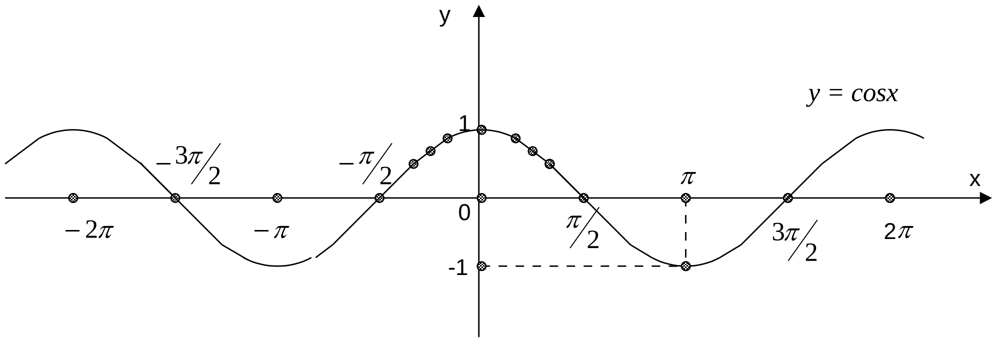



Рис.9.9

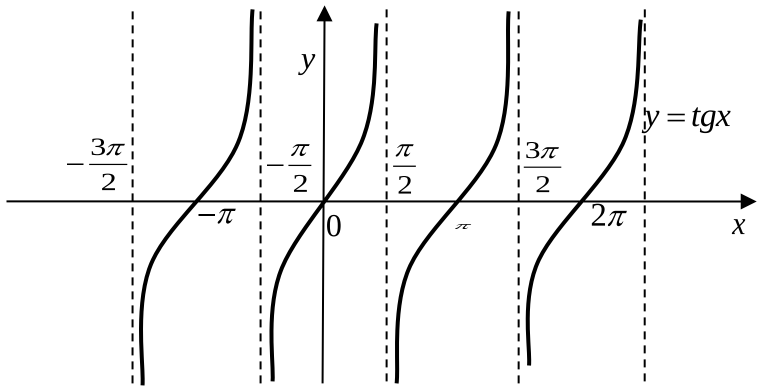



Рис.9.10

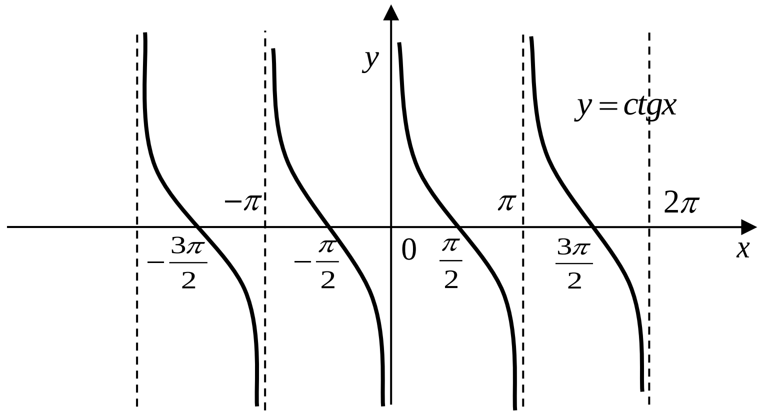



Рис.9.11

5. **Обернені тригонометричні функції**: $y = \arcsin x$ (рис.9.12) визначена на відрізку $[-1;1]$ і набуває значень, які належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $y = \arccos x$ (рис.9.13) визначена на відрізку $[-1;1]$ і набуває значень, які належать відрізку

$[0;\pi]$; $y = arctgx$ (рис.9.14) і $y = arcctgx$ (рис.9.15) визначені для всіх значень *x,* а їх області зміни відповідно $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$ та $0 < arcctgx < \pi$.

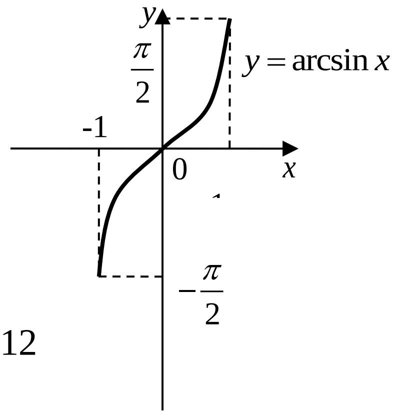



Рис.9.12

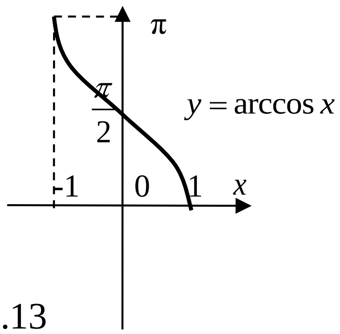
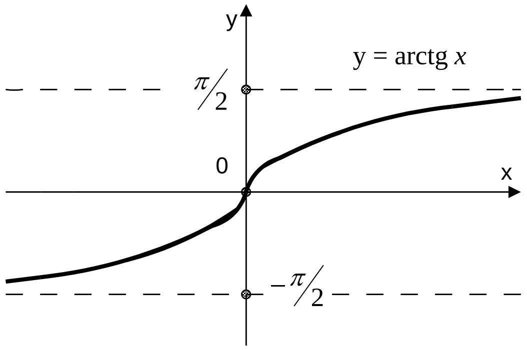



Рис.9.13



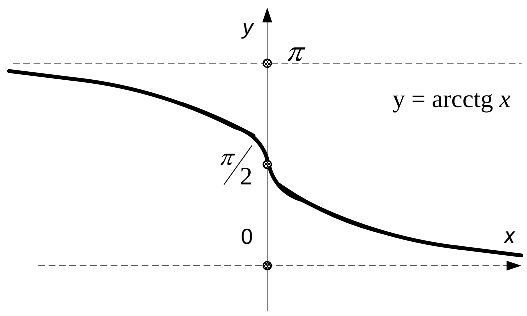




Рис.9.14 Рис.9.15

Слід зазначити, що в тих випадках, коли область визначення функції заздалегідь не вказана, важливо вміти знаходити її, тобто визначати множину тих значень $x$, для яких існує аналітичний вираз $f(x)$.

### Елементарна функція

Функція, яка може бути задана однією формулою, що складається із основних елементарних функцій і сталих величин за допомогою скінченого числа арифметичних операцій (додавання , віднімання, множення, ділення) та операції взяття «функції від функції» називається **елементарною функцією.**

Наприклад, $y = 5^{tg\sqrt{x}}$, $y = \cos^3 \ln\frac{2}{x}$ – елементарні функції;

$y = |x|$, $y = \begin{cases} x^2 + 1, \text{якщо } x \le 0, \\ 1, \quad \text{якщо } x > 0, \end{cases}$ – неелементарні функції.

### Складна функція

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині *X*, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині $X_1$, причому для будь – якого значення $x \in X_1$ існує відповідне значення $u = \varphi(x) \in X$. Тоді на множині $X_1$ визначена функція $u = f(\varphi(x))$, яка називається **складною функцією від *x*** (або **суперпозицією** заданих функцій).

Наприклад, $y = \sin e^x$ є суперпозицією двох функцій $y = \sin u$ і $u = e^x$.

**Питання для самоперевірки**

1 Дайте означення функції.
2 Що називається областю визначення та областю зміни функції; частинним значенням функції?
3 Які існують способи завдання функції?
4 Перелічить основні властивості функцій.
5 Зобразіть графіки основних елементарних функцій.

## ЛЕКЦІЯ 10

10.1 Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції. Перша та друга визначні границі

10.2 Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції. Точки розриву функції.

### 10.1 Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції. Перша та друга особливі границі.

**Під околом точки $x_0$** розуміють будь – якій інтервал ($a$ ; $b$), який містить точку $x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в околі точки $x_0$, за винятком, можливо, самої точки $x_0$.

**Означення.** Число $A$ називається **границею функції** $f(x)$ **при $x$, яке прямує до $x_0$ ($x \to x_0$)**, якщо для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$, яке залежить від $\varepsilon$, таке, що при всіх $x \in (a;b)$, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - \text{A}| < \varepsilon$.

Символічно цей факт записують так : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \text{A}$.

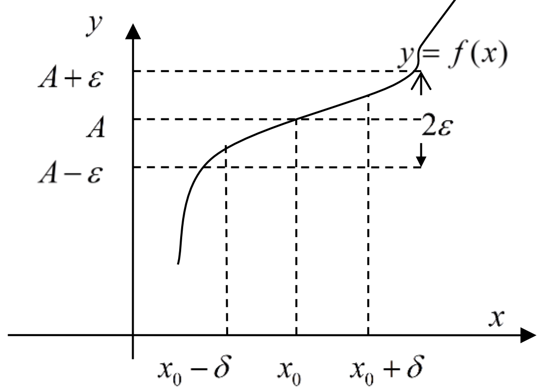
Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то це означає, що для будь – якого числа $\text{M} > 0$ існує число $\delta(\text{M}) > 0$, яке залежить від $M$, таке, що при всіх $x$, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > \text{M}$.

**Границя функції при** $x \to \infty$

Якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \text{A}$, то для будь – якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\text{M}(\varepsilon) > 0$, яке залежить від $\varepsilon$, таке, що при всіх $x$, для яких виконується нерівність $|x| > \text{M}(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x) - \text{A}| < \varepsilon$.

Аналогічно $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, якщо для будь – якого числа $\text{M} > 0$ існує число $\text{N}(\text{M}) > 0$, яке залежить від $\text{M}$, таке, що при всіх $x$, для яких виконується нерівність $|x| > \text{N}$ випливає нерівність $|f(x)| > \text{M}$.

## Геометричний зміст границі функції




Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathrm{A}$, то для всіх точок $x$, які лежать від точки $\boldsymbol{x_0}$ не далі, ніж на відстань $\delta$, точки графіка функції $y = f(x)$ лежать усередині смуги, шириною $2\varepsilon$, яка обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ (рис.10.1).

Рис.10.1

## Односторонні границі

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно й достатньо, щоб мала місце рівність $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$,

де $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – **ліва границя,** а $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – **права границя функції** $f(x)$ **у точці** $x = x_0$**.** Запис $x \to x_0 - 0$ $(x \to x_0 + 0)$ означає, що точка $x$ наближається до точки $x_0$ зліва (справа). Права й ліва границі функції у точці називаються **односторонніми границями функції в цій точці.**

У загальному випадку ліва і права границі функції у точці $x_0$ можуть існувати, але не дорівнювати одна одній. Наприклад, область визначення функції $y = arcctg(1/x)$: $D(y) = R \setminus \{0\}$**,** тобто функція не визначена лише в одній точці $x_0 = 0$. Обчислимо її односторонні границі в цій точці: $\lim\limits_{x\to -0} arcctg(1/x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +0} arcctg(1/x) = \pi$.

Зауваження. Визначення границі функції у точці $x = x_0$ не обов’язково вимагає існування функції в цій точці.

## Нескінченно малі величини (функції)

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

За означенням границі функції ця рівність означає: для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$, таке, що при всіх $x$, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Наприклад, функція $y = \sin x$ є нескінченно малою при $x \to \pi n,\ n \in Z$.

Для нескінченно малих величин виконуються такі властивості:

*а*) алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою;

*б*) добуток нескінченно малої величини на обмежену, коли $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) є нескінченно малим;

*в*) частка від ділення нескінченно малої величини на обмежену, границя якої відрізняється від нуля, є нескінченно малою;

**Доведення** властивості *в*). Нехай $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, $g(x)$ – обмежена функція при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq 0$. Розглянемо функцію $\alpha(x)/g(x)$ при $x \to x_0$. Перепишемо функцію у вигляді $\alpha(x)(1/g(x))$. Оскільки $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, а $1/g(x) \to 1/a$ $(a \neq 0)$, тому маємо нескінченно малу функцію як добуток нескінченно малої на обмежену функцію.

### Нескінченно великі величини

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо для будь – якого числа $\mathrm{M} > 0$ існує число $\delta(\mathrm{M}) > 0$ таке, що при всіх $x$, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > \mathrm{M}$. Тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Наприклад, функція $y = tgx$ є нескінченно великою при $x \to \pi/2$.

**Між нескінченно малими й нескінченно великими величинами існує така залежність**: якщо $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to x_0$, то її обернена величина $\alpha(x) = 1/f(x)$ – нескінченно мала (і навпаки).

### Зв'язок між функцією, її границею та нескінченно малою

**Теорема.** Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала границю $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, необхідно й достатньо виконання рівності $f(x) = a + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$.

**Доведення.** Необхідність: нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Тоді за означенням границі функції для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$, яке залежить від $\varepsilon$, таке, що при всіх $x$, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$. А цей факт означає, що функція $f(x) - a$ має границю, яка дорівнює нулю, тобто є нескінченно малою. Позначимо її через $\alpha(x)$, тоді $f(x) - a = \alpha(x)$. Звідси $f(x) = a + \alpha(x)$, що і треба було довести.

Достатність: нехай виконується рівність $f(x) = a + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Тоді для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$, яке залежить від $\varepsilon$, таке, що при всіх $x$, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Оскільки за умовою $\alpha(x) = f(x) - a$, то маємо $|f(x) - a| < \varepsilon$ при виконанні попередніх умов. А це означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, що і треба було довести.

### Зв'язок між існуванням границі та обмеженістю функції

**Теорема.** Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, де $a$ – скінченна величина, то функція $f(x)$ є обмеженою.

Цю теорему пропонується довести самостійно (аналогічним чином, як і попередні).

## Основні теореми про границі функції

Вважатимемо, що границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$ існують і скінченні.

**Теорема 1.** Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь цих функцій

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\pm f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

**Наслідок**. Якщо функція має границю, то вона єдина.

**Теорема 2.** Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

**Наслідки.**

1. Сталий множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim_{x\to x_0} f(x),\text{ де } c=\text{const}.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$, де $n$ - ціле додатне число.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

Зауваження. Теореми 1 і 2 залишаються справедливими для будь – якого скінченного числа доданків і множників.

**Теорема 3. Г**раниця частки двох функцій дорівнює частці цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},\text{ якщо } \lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0.$$

**Доведення** теореми 1. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=b$.

Тоді $f_1(x)=a+\alpha(x)$, $f_2(x)=b+\beta(x)$, де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$– нескінченно малі при $x\to x_0$ (за теоремою про зв'язок між функцією, її границею та нескінченно малою). Отже, $f_1(x)\pm f_2(x)=(a\pm b)+(\alpha(x)\pm\beta(x))$. Тут $(a\pm b)$ – стала величина, а $(\alpha(x)\pm\beta(x))$ – нескінченно мала при $x\to x_0$ ( як алгебраїчна сума нескінченно малих), тому

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\pm f_2(x))=a_1\pm a_2=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Інші теореми доводяться аналогічно.

**Приклад**. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$.

**Розв'язання**. Щоб перевірити можливість використання теореми про границю частки, треба переконатися в тому, що при граничному значенні аргументу знаменник не дорівнює нулю. Дійсно, при $x=2$ знаменник $x-3=2-3=-1\neq 0$.

Отже, використовуючи теореми про границі функції та їх наслідки, одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2^2-2+1}{2-3}=-3.$$

Отже, якщо до даної функції, границю якої треба знайти при прямуванні аргументу до деякого граничного значення, можна застосувати теореми про границі, то обчислення границі зводиться до підстановки цього граничного значення до виразу функції.

## Ознаки існування границі

**Теорема.** Якщо функції $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ задовольняють нерівності $\varphi(x) < f(x) < g(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a,$ то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a.$

**Теорема (про границю монотонної функції).** Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ або її права границя $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$.

**Наслідок**. Обмежена і монотонна послідовність $x_n,\ n\in N$, має границю.

Ці теореми приймемо без доведення.

## Еквівалентні нескінченно малі

Якщо границя відношення нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ прямує до одиниці при $x\to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими** і пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x\to x_0$.

Наприклад, $sinx{\sim}x$ при $x\to 0$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (доведемо нижче).

Наведемо найважливіші еквівалентності, які використовують при обчисленні границь:

$$x{\sim}sinx{\sim}tgx{\sim}arcsinx{\sim}arctgx{\sim}\frac{a^x-1}{lna}{\sim}\frac{log_a(1+x)}{log_a e} \quad \text{при } x\to 0 .$$

Пропонуємо це твердження довести самостійно.

## Деякі важливі границі

**Перша визначна границя:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

**Доведення.** Розглянемо коло одиничного радіуса**,** позначимо радіанну міру кута $MOB$ через $x$ (рис.10.17).

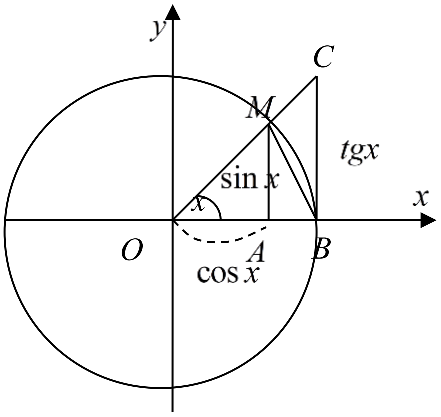



Рис.10.2

Центральний кут $\angle MOA = x$, $|AM| = \sin x$, $|BC| = tgx$. З рис.10.2 маємо $S_{\Delta MOB} < S_{сектораMOB} < S_{\Delta COB}$, тобто $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}tgx$, $\quad 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ або $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то за ознакою існування границі функції $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Якщо $x < 0$, то $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$, де $-x > 0$.

Таким чином, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, отже, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Зауваження. Перша визначна границя розкриває невизначеність вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

**Друга визначна границя:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Ці твердження залишимо без доведення.

Зауваження. Друга визначна границя розкриває невизначеність вигляду $(1^\infty)$.

**Приклад.** Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

**Розв'язання**. Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3.$$

Цей приклад можна розв'язати ще й так. При $x \to 0$ $sin3x \sim 3x$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3 = 3.$$

**Приклад.** Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

**Розв'язання**. При $x\to\infty$ одержуємо невизначеність $(1^\infty)$. Тоді виконуючи необхідні перетворення і використовуючи формулу другої чудової границі, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = (1^\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right)^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}} = = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{3x+2}} = e^{-\frac{2}{3}}.$$

## 10.2 Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці $x_0$ і у деякому її околі.

**Означення.** Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** $x_0$, якщо існує границя цієї функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{10.1}$$

Це означення рівносильне такому: функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** $x_0$, якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0,$$

де $\Delta x = x - x_0$ - **приріст аргументу**;

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ (або $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$) – **приріст функції в точці $x_0$.**

Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то рівність (10.1) можна записати у вигляді

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0), \qquad (10.2)$$

Це означає, що при визначені границь неперервної функції знак функції і знак границі можна замінювати один на одний.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то її називають **неперервною в інтервалі** $(a;b)$**.**

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$ і в точці $x = a$ вона неперервна справа $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а в точці $x = b$ вона неперервна зліва $\left(\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)\right)$, то її називають **неперервною на відрізку** $[a;b]$**.**

Слід пам'ятати, що всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Точки, в яких порушується умова неперервності, називають **точками розриву функції**. Точки розриву можуть належати області визначення або перебувати на границі цієї області.

Усі точки розриву функції поділяють на точки розриву першого та другого роду.

Точка $x_0$ називається **точкою розриву першого роду** функції $f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні границі функції справа та зліва, тобто $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \mathrm{A}_1$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \mathrm{A}_2$. При цьому:

1) якщо $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$, то точка $x_0$ називається **точкою усувного розриву**;

2) якщо $\mathrm{A}_1 \neq \mathrm{A}_2$, то точка $x_0$ називається **точкою скінченного розриву**.

Величину $|\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2|$ називають **стрибком функції в точці розриву**.

Точка $x_0$ називається **точкою розриву другого роду**, якщо в цій точці хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності.

**Приклад.** Дослідити функцію $y = 2^{\frac{1}{x}}$ на неперервність у точках $x = 3$ і $x = 0$.

**Розв'язання**. За означенням функція неперервна в точці $x_0$, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x = 3$ маємо $y(3) = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$;

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad \lim_{x\to 3-0} y = \lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x = 3$ виконується, отже, в цій точці функція неперервна.

Проведемо аналогічні дослідження при $x \to 0$: $y(0) = 2^{\frac{1}{0}}$ не існує,

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty; \quad \lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Умова неперервності при $x=0$ не виконується, отже, в точці $x=0$ функція розривна (має нескінченний розрив).

## Властивості неперервних функцій

Більшість теорем про неперервні функції випливають із відповідних теорем про границі. Наведемо деякі теореми без доведення.

**Теорема.** Сума, різниця, добуток і частка двох неперервних функцій є функцією неперервною (для частки за винятком тих значень аргументу, для яких знаменник дорівнює нулю).

**Теорема (Вейерштраса).** Якщо функція неперервна на відрізку, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значення.

Наслідок. Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Функція, яка зображена на рис.10.3 , неперервна на відрізку $[a;b]$, приймає своє найбільше значення *M* у точці $x_1$, а найменше $m$ – у точці $x_2$. Для будь – якого $x \in [a;b]$ має місце нерівність

$$m < f(x) < M.$$

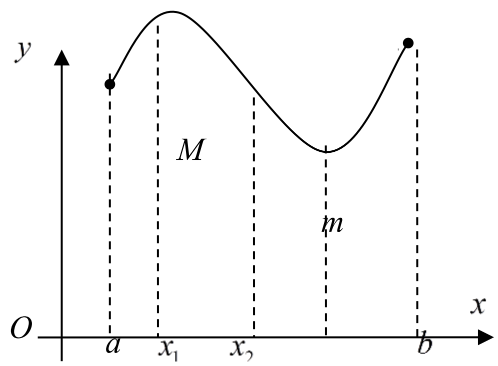



Рис.10.3

**Теорема.** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків, то між точками *а* і *в* знайдеться хоча б одна точка $x = c$ така, що $f(c) = 0$.

Ця теорема допускає просту геометричну ілюстрацію (рис.10.4 ).

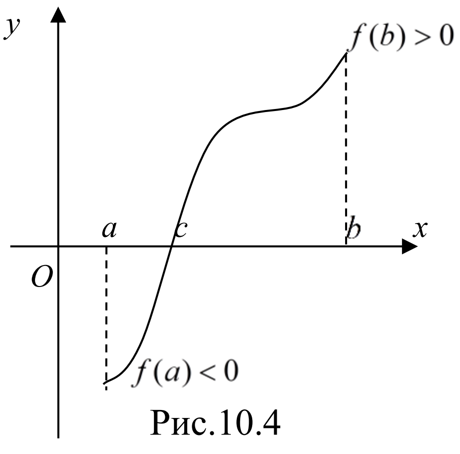



Рис.10.4

## Питання для самоперевірки

1 Що називається границею функції у точці $x_0$?

2 Яка функція називається неперервною в точці?

3 Сформулюйте властивості неперервних функцій.

4 Яка точка називається точкою розриву функції?

5 Дайте класифікацію точок розриву функцій. Наведіть приклади.

## ЛЕКЦІЯ 11

11.1 Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної.
11.2 Правила диференціювання функції.
11.3 Таблиця похідних.
11.4 Диференціал функції.

### 11.1 Похідна і диференціал функції. Геометричний та механічний зміст похідної.

Поняття похідної є одним із основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

**Задачі, які призводять до поняття похідної**

1. **Задача про миттєву швидкість.** Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно вздовж деякої прямої. Візьмемо який-небудь момент часу $t$ і розглянемо проміжок часу $\Delta t$ ( приріст часу) від моменту $t_0$ до моменту $t = t_0 + \Delta t$ . Через $\Delta S$ позначимо шлях, який пройшла точка за проміжок часу $\Delta t$ , тобто $\Delta S = S(t+\Delta t)-s(t)$ . Цей шлях залежить від $\Delta t$ .

Відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ є середньою швидкістю руху точки за час $\Delta t$ .

Границя середньої швидкості руху , якщо проміжок часу $\Delta t$ прямує до нуля є **миттєвою швидкістю руху**. Позначимо цю швидкість через $V$ і отримаємо

$$V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \text{або} \quad V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}.$$

**2. Задача про дотичну.** Візьмемо на деякій неперервній кривій $L$ дві точки $M$ і $M_1$. Пряму, яка проходить через ці точки називають **січною** (рис.11.1).

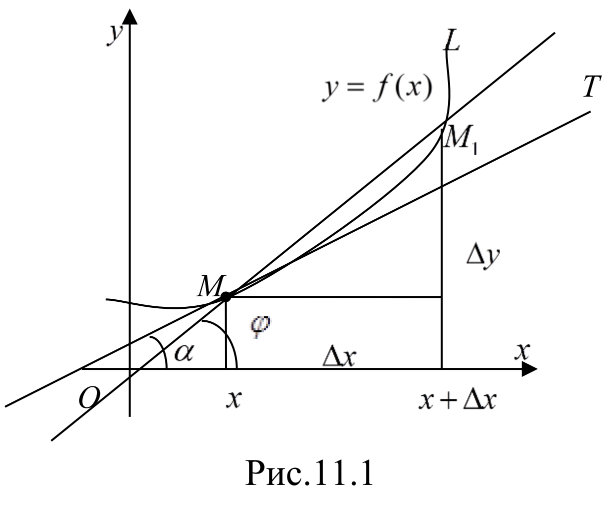



Рис.11.1

Нехай точка $M_1$ наближається до точки $M$, рухаючись уздовж кривої $L$. Тоді кожному положенню точки $M_1$ відповідатиме своя січна, яка прямує до деякого граничного положення $MT$.

**Дотичною до кривої в даній точці *M*** називають граничне положення $MT$ січної $MM_1$, якщо точка $M_1$ прямує до точки $M$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графіком якої є лінія $L$.

Знайдемо її кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$ у точці $M$, де $\alpha$ – кут дотичної до додатного напряму осі $Ox$. Позначимо через $\varphi$ – кут між січною $MM_1$ і додатним напрямом осі $Ox$. З рис. 11.1 видно, що кутовий коефіцієнт січної дорівнює $\quad k_{січ} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ в силу неперервності функції приріст функції $\Delta y$ також прямує до нуля; тому точка $M_1$ прямує до точки $M$, кут $\varphi$ – до кута $\alpha$, а січна $MM_1$ переходить до дотичної. Тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

Отже, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Границі, які отримані при розв'язанні задач, мають однаковий вигляд, до якого призводять рішення і багатьох інших задач. Цю границю називають похідною.

**Означення. Похідною функції** $y = f(x)$ у точці $x_0$ називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля (якщо границя існує).

Похідну функції $f(x)$ позначають одним із символів: $f'(x)$, $y'$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Отже, за означенням

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Функція $y = f(x)$, яка має похідну в кожній точці інтервалу $(a;b)$, називається **диференційованою в цьому інтервалі**; операція визначення похідної називається **диференціюванням**.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці $x=x_0$ позначається $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$.

Таким чином, похідна функції $S = S(t)$ у точці $t$ дорівнює миттєвій швидкості руху матеріальної точки в момент часу $t$ (**механічний зміст похідної);** значення похідної в точці $x$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, яка проведена до кривої в точці $x$ (**геометричний зміст похідної**).

**Рівняння дотичної до графіка функції** $y = f(x)$ у точці $x=x_0$

Якщо точка дотику $M$ має координати ($x_0$; $y_0$) (рис.11.1), то кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_0)$. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі $y - y_0 = k(x - x_0)$, можна записати **рівняння дотичної**

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{11.1}$$

**Рівняння нормалі до графіку функції**

Пряма, яка перпендикулярна дотичній у точці дотику, називається **нормаллю до кривої.**

Оскільки нормаль перпендикулярна дотичній, то її кутовий коефіцієнт

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{дот}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ (якщо } f'(x_0) \neq 0\text{)}.$$

Тому **рівняння нормалі** має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{11.2}$$

### Зв’язок між неперервністю і диференційованістю

**Теорема.** Якщо функція диференційована в деякій точці, то вона неперервна в ній.

**Доведення.** Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці *x*, тобто існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Звідси за теоремою про зв’язок функції, її границі і нескінченно малої , маємо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, тобто $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Якщо перейти до границі при $\Delta x \to 0$, то отримаємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А це і означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці *x*.

Зауваження. Обернене твердження у загальному випадку невірне: неперервна функція може не мати похідної.

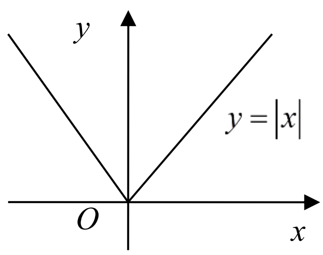


Рис.11.2

Прикладом такої функції є функція

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{якщо } & x \ge 0, \\ -x, \text{якщо } & x < 0. \end{cases}$$

На рисунку 11.2 зображена функція, яка неперервна в точці $x = 0$, але не є диференційованою в цій точці.

Якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $y' = f'(x)$ у деякому інтервалі $(a;b)$, то функція називається **гладкою на цьому інтервалі**.

## 6.2 Правила диференціювання функції

Знаходження похідної функції за означенням часто призводить до різних труднощів. На практиці функції диференціюють за допомогою низки правил та формул. Сформулюємо ці правила і доведемо деякі з них.

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі $(a;b)$ функції.

- **Похідна суми (різниці).** Похідна суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:
$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \qquad (11.3)$$
- **Похідна добутку.** Похідна добутку двох функцій дорівнює добутку похідної першої функції на другу функцію плюс добуток першої функції на похідну другої функції:
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad (11.4)$$

**Доведення.** Нехай $y = u \cdot v$. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u) \cdot (v(x)+\Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot \Delta v + v(x)\cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to o} \left( v(x)\cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$v(x)\cdot \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$u'\cdot v + u\cdot v' + 0\cdot u' = u'\cdot v + u\cdot v',$$

тобто

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$, що треба було довести.

- **Похідна частки.** Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, чисельник якого є різницею між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник, а знаменник дробу є квадратом знаменника функції:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}. \tag{11.5}$$

Наслідки. *а*) $(c\cdot u)' = c\cdot u$;

*б*) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}\cdot u'$.

- **Похідна складної функції.** Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді функція $y = f(\varphi(x))$ – складна функція з проміжним аргументом $u$ і незалежним аргументом $x$.

Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну $u'_x$ в точці $x$, а функція $y = f(u)$ має похідну $y'_u$ у відповідній точці $u = \varphi(x)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну $y'_x$ в точці $x$, яка визначається за формулою

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{11.6}$$

**Доведення.** За умовою $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$, звідки , за теоремою про зв'язок функції, її границі і нескінченно малої , маємо $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ або $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці $x$: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, тому

$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x$, де $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отже,

$$\Delta y = y'_u \cdot (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha \cdot (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

тобто

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Поділимо отриману рівність на $\Delta x$ і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, що треба було довести.

Зауваження. Це правило залишається справедливим, якщо проміжних аргументів декілька.

- **Похідна оберненої функції.**

Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умові існування оберненої функції і в точці $x \in (a;b)$ має скінченну і відмінну від нуля похідну, тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ також має похідну у відповідній точці $y = f(x)$. Похідні взаємно обернених функцій зв'язані рівністю

$$(f^{-1}(y))'_y = \frac{1}{f'_x} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{11.7}$$

- **Похідна функції, заданої у параметричній формі.**

Нехай функцію задано у параметричному вигляді: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t \in (\alpha;\beta)$. Нехай функція $x = x(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0 \in (\alpha;\beta)$ похідна $x'_t \neq 0$), тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{11.8}$$

- **Похідна неявно заданої функції.** Якщо функція задана рівнянням $F(x;y) = 0$, то для визначення похідної від $y$ по $x$ необхідно: про диференціювати рівняння $F(x;y) = 0$ по $x$, вважаючи, що $y$ є функцією від $x$; отримане рівняння слід розв'язати відносно $y'$.

**Похідні основних елементарних функцій**. Подамо формули похідних елементарних функцій і вибірково доведемо деякі з них.

- **Похідна степеневої функції:** $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
- **Похідна показникової функції:** $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;

**Доведення**. Спочатку доведемо формулу похідної функції $y = e^x$. Дамо аргументу $x$ приріст $\Delta x$, тоді приріст функції $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$.

Тобто, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$, звідки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \left| e^{\Delta x} - 1 \underset{\Delta x \to 0}{\sim} \Delta x \right| = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Таким чином, $(e^x)' = e^x$.

Тепер розглянемо функцію $y = a^x$. Оскільки $a^x = e^{x \ln a}$, то за правилом диференціювання складної функції, отримаємо:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln x} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Таким чином, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

- **Похідна логарифмічної функції:** $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;

**Доведення.** Функції $y = \log_a x$ і $x = a^y$ взаємно обернені , тоді за правилом диференціювання складної функції

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \left| \; a^y \neq 0 \; \right| = \frac{1}{(a^y)'} = \left| \; (a^y)' = a^y \cdot \ln a \; \right| =$$

$$= \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \left| a^y = a^{\log_a x} = x \right| = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Отже, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

- **Похідні тригонометричних функцій:**

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = \sin x;$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \; (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

- **Похідні обернених тригонометричних функцій:**

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Формули похідних основних елементарних функцій запишемо в таблицю. На практиці частіше за все визначають похідні складних функцій, тому в наведеній нижче таблиці замінимо аргумент "$x$" на проміжний аргумент $u = u(x)$, де $u(x)$ – диференційована функція.

### 11.3 Таблиця похідних

1. $(c)' = o$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$; зокрема, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; зокрема, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;зокрема, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;
8. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;
9. $(arc\sin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;
12. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

**Приклад.** Знайти похідні від функцій:

$$a) \; y = (3x^2 - 7) \cdot \ln\sin 3x; \qquad б) \; y = \frac{7x^5 - 3}{e^{2x}}.$$

**Розв'язання.**

$$a) \; y' = ((3x^2 - 7) \cdot \ln\sin 2x)' = (3x^2 - 7)' \cdot \ln\sin 2x + (3x^2 - 7) \cdot (\ln\sin 2x)' =$$

$$= 3 \cdot 2x \cdot \ln\sin 2x + (3x^2 - 7) \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6x \cdot \ln\sin 2x + \frac{2(3x^2 7) \cdot \cos 2x}{\sin 2x}.$$

*б)* $y' = \left(\dfrac{7x^5 - 3}{e^{2x}}\right)' = \dfrac{7\cdot 5x^4 \cdot e^{2x} - (7x^5 - 3)\cdot e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x})^2} = \dfrac{e^{2x}\cdot(35x^4 - 14x^5 + 6)}{e^{4x}}$.

## 11.4 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має в точці $x$ похідну $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді, за теоремою про зв'язок функції, її границі і нескінченно малої, маємо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, або $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

Таким чином, приріст функції $\Delta y$ являє собою суму двох доданків $f'(x)\cdot\Delta x$ і $\alpha\cdot\Delta x$, які є нескінченно малими при $\Delta x \to 0$, причому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$. Тому перший доданок $f'(x)\cdot\Delta x$ називають **головною частиною приросту функції** $\Delta y$.

**Означення. Диференціалом функції** $y = f(x)$ у точці $x$ **називається** головна частина її приросту (лінійна відносно $\Delta x$) , яка дорівнює добутку похідної функції на приріст її аргументу і позначається $dy$ ( або $df(x)$):

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x. \tag{11.9}$$

Диференціал $dy$ називають **диференціалом першого порядку**.

Якщо $y = x$, то $dy = dx = \Delta x$. Тому

$$dy = f'(x)\cdot dx.$$

**Приклад.** Знайти диференціал функції $y = x^2\cdot 5^{7x}$.

**Розв'язання.** $dy = (x^2\cdot 5^{7x})'\cdot dx = (2x\cdot 5^{7x} + x^2\cdot 7\cdot 5^{7x}\ln 5)\cdot dx$.

### Зв'язок між диференційованістю функції та існуванням її похідної

Для того, щоб функція була диференційована в точці, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці скінченну похідну.

### Правила обчислення диференціалів

Правила обчислення диференціалів легко отримати, використовуючи зв'язок між диференціалом і похідної функції ( $dy = y'\cdot dx$ ) та відповідні правила обчислення похідних.

Диференціал суми, різниці, добутку і частки двох диференційованих функцій визначається за формулами:

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(u\cdot v) = du\cdot v + u\cdot dv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du\cdot v - u\cdot dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

**Доведення.** Доведемо, наприклад, другу формулу. За означенням диференціала маємо:

$$d(u\cdot v) = (u\cdot v)'\cdot dx = (u'\cdot v + u\cdot v')\cdot dx = u'dx\cdot v + u\cdot v'dx = du\cdot v + u\cdot dv.$$

### Інваріантність диференціала

Нехай $y = f(u)$ і $u = u(x)$ – диференційовані функції аргументів $u$ і $x$, які утворюють складну функцію $y = f(u(x))$. За теоремою про похідну складної функції виконується рівність

$$y' = y'_u \cdot u'_x .$$

Помножимо обидві частини рівності на $dx$, отримаємо $y'dx = y'_u \cdot u'_x dx$. Оскільки $y'dx = dy$ і $u'_x dx = du$ в припущенні, що $x$ – незалежна змінна, останню рівність можна записати так:

$$dy = y'_u \cdot du .$$

Порівнюючи формули $dy = y'_x \cdot dx$ і $dy = y'_u \cdot du$, робимо висновок, що перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається однією і тою самою формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною або є функцією іншої змінної.

Ця властивість диференціала називається **інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала.**

### Питання для самоперевірки

1 Що називається похідною функції?
2 У чому полягає фізичний та геометричний зміст похідної?
3 Сформулюйте правила диференціювання.
4 Запишіть таблицю похідних.
5 Дайте означення диференціалу функції.
6 У чому полягає зв’язок між диференційованістю функції та існуванням її похідної.
7 Запишіть правила обчислення диференціалів.

## ЛЕКЦІЯ 12

12.1 Похідні та диференціали вищих порядків.
12.2 Основні теореми диференціального числення

### 12.1.1 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу $x$. Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідна називається **похідною другого порядку** і позначається $f''(x)$ ( або $y''$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ ). Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається **похідною третього порядку** і позначається $f'''(x)$ ( або $y'''$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ ). Таким чином, $y''' = (y'')'$.

**Означення. Похідною *n* – го порядку** (або *n*- ою похідною) називається похідна від похідної ($n$ – 1) – го порядку (якщо вона існує).

Таким чином, $$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \qquad (12.1)$$

Похідні порядку, який вище першого, називають **похідними вищих порядків.**

**Приклад.** Знайти $y'''$, якщо $y = 2e^{3x}$.

**Розв'язання.** $y' = (2e^{3x})' = 2\cdot 3\cdot e^{3x} = 6\cdot e^{3x}$, $y'' = (6\cdot e^{3x})' = 6\cdot 3\cdot e^{3x} = 18\cdot e^{3x}$;

$$y''' = (18\cdot e^{3x})' = 18\cdot 3\cdot e^{3x} = 54\cdot e^{3x}.$$

### 12.1.2 Диференціали вищих порядків

Нехай маємо функцію $y = f(x)$. Диференціал цієї функції $dy = y'(x)\cdot dx$ є функцією від аргументу $x$ (множник $dx$ не залежить від $x$). Тоді маємо право говорити про диференціал від $dy$.

Диференціал від диференціала функції називають **диференціалом другого порядку або другим диференціалом** і позначають через $d^2y$:

$$d^2y = d(dy) = d(y'(x)dx) = (y'(x)dx)'dx = y''(x)(dx)^2.$$

Прийнято замість степені диференціала $(dx)^2$ писати $dx^2$. Таким чином,

$$d^2y = y''(x)dx^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали $n$ – го порядку.

## 12.2 Основні теореми диференціального числення

В основі доказів ряду важливих для застосувань теорем покладені основні теореми диференціального числення – теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Зокрема, безпосередньо з теореми Коші випливає правило Лопіталя.

**Теорема (Ролля).** Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам:

1. $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2. $f(x)$ диференційована в інтервалі $(a;b)$;
3. $f(a) = f(b)$,

тоді знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій $f'(c) = 0$.

**Доведення.** Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого значення $M$ та найменшого значення $m$.

Якщо $M = m$, то функція стала на $[a;b]$, а похідна сталої функції дорівнює нулю у будь – якій точці відрізка і теорема доведена.

Якщо $M \neq m$, то функція досягає хоча б одне із значень $M$ або $m$ у внутрішній точці $c$ інтервалу $(a;b)$, оскільки $f(a) = f(b)$.

Нехай $f(c) = M$ ( коли $f(c) = m$ теорема доводиться аналогічно), тоді для усіх $x \in (a;b)$ виконується нерівність $f(c) \geq f(x)$, тобто $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$.

Знайдемо похідну $f'(c)$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x > 0$ (тобто $\Delta x \to 0$ справа від точки $x = c$ ), то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0 \text{ і тому } f'(c) \le 0.$$

Якщо $\Delta x < 0$, то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0 \text{ і тому } f'(c) \ge 0.$$

Таким чином, $f'(c) = 0$, тобто існує точка $c \in (a;b)$, в якій похідна дорівнює нулю.

Геометрично це означає, що існує точка, в якій дотична до графіка функції, яка задовольняє умовам теореми, паралельна осі абсцис.

**Теорема (Коші).** Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умовам:

1. $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$;
2. $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані в інтервалі $(a;b)$;
3. $\varphi'(x) \ne 0$ для $x \in (a;b)$,

тоді знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, така, що виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

**Доведення.** Зазначимо, що $\varphi(b) - \varphi(a) \ne 0$, оскільки у противному випадку за теоремою Роллю знайшлась би точка *c*, така, що $\varphi'(c) = 0$, що неможливо за умовою теореми.

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Ця функція неперервна на $[a;b]$, диференційована в $(a;b)$ і $F(a) = F(b)$, тобто вона задовольняє умовам теореми Ролля (оскільки є лінійною комбінацією функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$). Тому знайдеться точка $c \in (a;b)$, така, що $F'(c) = 0$. Але $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x)$,

звідки $\quad F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0.$

Отже, $\quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) \quad$ і $\quad \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$

**Теорема (Лагранжа).** Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам:

1. $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2. $f(x)$ диференційована в інтервалі $(a;b)$,

тоді знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, така, що

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Доведення.** Теорему Лагранжа можна розглядати як частинний випадок теореми Коші. Дійсно, покладаючи $\varphi(x) = x$, отримаємо

$$\varphi(b) - \varphi(a) = b - a, \ \varphi'(x) = 1, \ \varphi'(c) = 0 .$$

За теоремою Коші $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, звідки $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, тобто

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) .$$

Отриману формулу називають **формулою Лагранжа або формулою про скінченні прирости.**

**Геометричний зміст теореми Лагранжа**

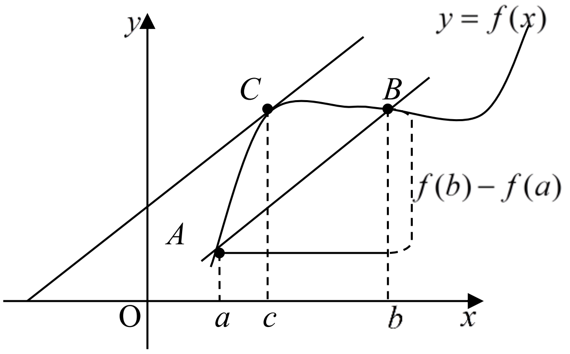



Рис.12.1

На дузі графіка функції, яка задовольняє умовам теореми, знайдеться точка *C* між точками *A* і *B*, в якій дотична до графіка функції паралельна хорді, яка з'єднує точки *A* і *B* (рис.12.1 ).

**Теорема (Правило Лопіталя).** Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умовам теореми Коші на деякому відрізку $[a;b]$ і дорівнюють нулю у точці $x = a$, тобто $f(a) = \varphi(a) = 0$, тоді, якщо існує границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то існує границя

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

Цю теорему приймемо без доведення.

Зауваження.

1.Теорема має місце і у випадку, коли функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ не визначені при $x = a$, але $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$;

2.Теорема справедлива і у випадку, коли $x \to \infty$ ;

3. Правило Лопіталя може бути застосоване і у випадку, коли $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ і $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ ( а також при $x \to \infty$).

Правило Лопіталя застосовують для розкриття невизначеностей вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ і $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Якщо при обчисленні границь виконати відповідні перетворення функцій, то можна розкривати невизначеності виду:

$$(0 \cdot \infty); \ (\infty - \infty); \ \left(0^0\right); \ \left(\infty^0\right); \ \left(1^\infty\right).$$

**Приклад.** Знайти границі функцій

$$а)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(5+3x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3/(5+3x)}{2}=\frac{3}{10};$$

$$б)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5e^{5x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25e^{5x}}{2}=\infty;$$

$$в)\ \lim_{x\to 0}x^2\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0.$$

### Питання для самоперевірки

1 Що називається похідною другого порядку?

2 Що називається Похідною $n$ – го порядку?

3 Що називається диференціалом другого порядку?

4 Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеностей вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

## ЛЕКЦІЯ 13

13.1 Дослідження функції за допомогою похідної. Знаходження екстремуму функції .

13.2 Опуклість, угнутість кривої, точки перегину.

### 13.1 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

#### 13.1.1 Зростання і спадання функції

**Означення.** Функція $y=f(x)$ називається **зростаючою** (**спадною**) на інтервалі $(a;b)\subset D(y)$, якщо для двох будь-яких значень аргументу $x_1, x_2\in(a;b)$ із умови $x_1<x_2$ випливає, що $f(x_1)<f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$.

Щоб знайти інтервали зростання та спадання функції, треба дослідити знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$ за умови, що $x_1<x_2$. Якщо ця різниця на певному інтервалі додатна, то функція $y=f(x)$ на такому інтервалі зростає, якщо ж різниця $f(x_2)-f(x_1)$ від'ємна, то функція спадає.

Інтервали, на яких функція лише зростає або лише спадає, називають **інтервалами монотонності функції.**

Встановити безпосередньо знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$ не завжди легко, а тому при дослідженні функції на монотонність найчастіше використовують похідну функції. Функції, з якими ми матимемо справу, мають ту властивість, що їхню область визначення можна поділити на проміжки, в кожному з яких функція диференційована. Для таких функцій відшукання проміжків монотонності зводиться до дослідження на знак їхніх похідних.

Зауважимо, що відрізок $[a;b]$, інтервал $(a;b)$, півінтервали або піввідрізки $[a;b)$ і $(a;b]$ називають проміжками і позначають $\langle a;b\rangle$.

**Теорема (необхідна і достатня умова зростання і спадання функції).**
1. Якщо диференційована на проміжку $(a;b)$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на цьому проміжку, то $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) при будь – якому $x\in(a;b)$.
2. Якщо функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$ і $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то ця функція зростає (спадає) на проміжку $(a;b)$.

**Доведення.** 1) Нехай функція $f(x)$ зростає на проміжку $(a;b)$. Доведемо, що $f'(x)\geq o$ для всіх $x\in(a;b)$. Додамо аргументу $x$ приріст $\Delta x$ і розглянемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Функція $f(x)$ зростає, тому якщо $\Delta x>0$, то $f(x+\Delta x)>f(x)$; якщо $\Delta x<0$, то $f(x+\Delta x)<f(x)$. В обох випадках $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$, тобто $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$. Аналогічно розглядається випадок, коли $f(x)$ спадає.
2) Нехай $f'(x)>0$. Візьмемо точки $x_1$ і $x_2$ із проміжку $(a;b)$ такі, що $x_1<x_2$. За теоремою Лагранжа маємо:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),\text{ де } c\in(x_1;x_2).$$

За умовою $f'(c)>0$, отже, $f(x_2)-f(x_1)>0$ або $f(x_2)>f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ є зростаючою на проміжку $(a;b)$, що і треба було довести.

Зауваження: похідна зростаючої (спадної) функції може обертатись в нуль в деяких точках. Наприклад, функція $f(x)=x^3$ зростає на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, однак її похідна $f'(x)=3x^2$ дорівнює нулю в точці $x=0$. Якщо ж $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ для всіх $x\in(a;b)$, то в інтервалі $(a;b)$ функція $y=f(x)$ зростає (спадає) .

**Приклад 1** Знайти інтервали монотонності функції $y=x^2e^{-x}$.

**Розв'язання.** Функція визначена на всій числовій осі.
Її похідна $y'(x)=2xe^{-x}+x^2e^{-x}\cdot(-1)=x(2-x)e^{-x}$. Знаходимо критичні точки: $y'(x)=0$, якщо $x=0$ і $x=2$; $y'(x)\neq\infty$. Точки $x=0$ і $x=2$ ділять числову вісь на три інтервали: $(-\infty;0)$, $(0;2)$ і $(2;+\infty)$.

Оскільки похідна $y'(x)=x(2-x)e^{-x}$ є неперервною в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то вона зберігає знак в інтервалах $(-\infty;0)$, $(0;2)$ і $(2;+\infty)$. Значення похідної в точці $x=-1$ від'ємне, в точці $x=1$ додатне, в точці $x=3$ від'ємне. При визначені знаку похідної слід враховувати, що $e^{-x}>0$ для будь-яких $x$. Тому $y'(x)<0$ для всіх $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ і $y'(x)>0$ для всіх $x\in(0;2)$.

Отже, функція $y=x^2e^{-x}$ монотонно спадає в інтервалах $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$ та монотонно зростає в інтервалі $(0;2)$.

**Приклад 2** Знайти інтервали монотонності функції $y = 2x^2 - \ln x$.

**Розв'язання.** Задана функція визначена для $x > 0$. Її похідна $y'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$. Знайдемо точки, в яких ця похідна дорівнює нулю або не існує: $y'(x) = 0$, якщо $4x^2 - 1 = 0$, звідки $x = \pm\frac{1}{2}$; $y'(x) = \infty$, якщо $x = 0$.

Оскільки задана функція визначена для $x > 0$, то знак її похідної треба визначати лише в інтервалах $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Значення $y'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, тому $y'(x) < 0$ для всіх $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, а це означає, що на цьому інтервалі функція $y = 2x^2 - \ln x$ монотонно спадає.

Оскільки $y'(1) > 0$, тому $y'(x) > 0$ для всіх $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, а це означає, що на цьому інтервалі функція $y = 2x^2 - \ln x$ монотонно зростає.

**Приклад 3** Показати, що функція $y = arctgx - x$ всюди спадає.

**Розв'язання.** Задана функція визначена для всіх $x \in R$. Оскільки її похідна $y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1 - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} \le 0$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, то ця функція спадає в усій області визначення.

### 13.1.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці $x_0$ і її околі.

**Означення**. Точка $x_0$ називається **точкою максимуму (мінімуму) функції** $f(x)$, якщо значення функції у точці $x_0$ більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки $x_0$: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $(f(x_0 + \Delta x) > f(x_0))$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають **екстремумами** або **екстремальними значеннями функції.**

**Теорема (необхідна умова існування екстремуму).**
Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці $x_0$ максимум або мінімум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю ( $f'(x_0) = 0$ ) або не існує.

Доведення цієї теореми спирається на теорему Ролля.

Геометрично рівність $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі $Ox$.

Неперервна функція $y = |x|$ у точці $x = 0$ похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму (рис.11.2).

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними.**

**Означення.** Точка $x_0$ називається **критичною точкою** першого роду, якщо має місце одна із умов: 1 $f'(x_0)=0$;

2 $f'(x_0)=\infty$;

3 функція $f(x)$ в точці $x_0$ визначена, але $f'(x_0)$ не існує.

Геометрично ці умови означають, що в критичній точці дотична або паралельна осі $Ox$, якщо виконується умова 1, або паралельна осі $Oy$, якщо виконується умова 2, або дотичної зовсім не існує (рис. 13.1), якщо має місце умова 3.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають **стаціонарними**.

Зауважимо, що умова $f'(x_0)=0$ є необхідною, але не є достатньою умовою існування екстремуму, тобто не кожна критична точка функції є точкою екстремуму цієї функції.

Так, з рисунка 13.1 видно, що точки $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_6$, $x_7$ і $x_9$ є екстремальними, причому в точках $x_1$, $x_3$, $x_6$ і $x_9$ функція має максимум, а в точках $x_2$, $x_4$ і $x_7$ – мінімум. Що стосується точок $x_0$, $x_5$ і $x_8$, то жодна з цих точок не є точкою екстремуму.

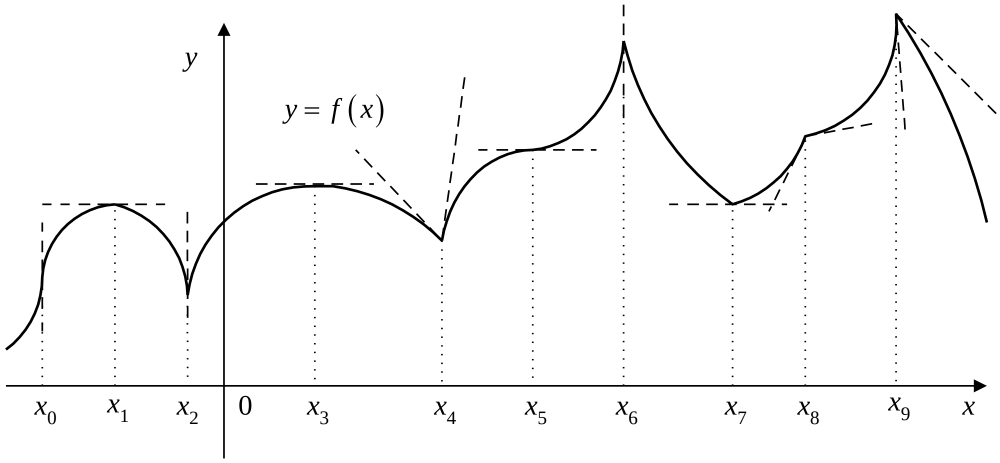



Рис. 13.1

Зокрема, для функції $y=x^3$ її похідна $y'=3x^2$ дорівнює нулю при $x$ = 0, але $x$ = 0 не є точкою екстремуму (рис.9.2).

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної.

**Теорема (достатня умова існування екстремуму).**
Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку $x_0$ диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак із плюса на мінус, то $x_0$ – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то $x_0$ – є точкою мінімуму.

**Доведення.** Нехай $f'(x)$ змінює знак із плюса на мінус, тобто виконується умова $f'(x)>0$, коли $x\in(x_0-\delta;x_0)$ ( $\delta$ - окіл точки $x_0$ ) і $f'(x)<0$, коли $x\in(x_0;x_0+\delta)$. Тоді функція $f(x)$ зростає на проміжку $(x_0-\delta;x_0)$ і спадає на проміжку $(x_0;x_0+\delta)$. Звідки випливає, що $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, тобто $x_0$ – точка максимуму функції.

При знаходженні інтервалів монотонності і екстремумів функції доцільно керуватися правилом, яке випливає із сказаного вище:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо $f'(x)$;
3) знаходимо корені рівняння $f'(x)=0$ і точки, де $f'(x)$ не існує (критичні точки);
4) розставляємо одержані точки на числовій осі в порядку зростання;
5) визначаємо знак $f'(x)$ в кожному із одержаних інтервалів (для цього слід похідну розкласти на множники, якщо це можливо) і тим самим знаходимо інтервали зростання і спадання функції;
6) визначаємо, які із критичних точок є точками екстремуму (рис.13.2).

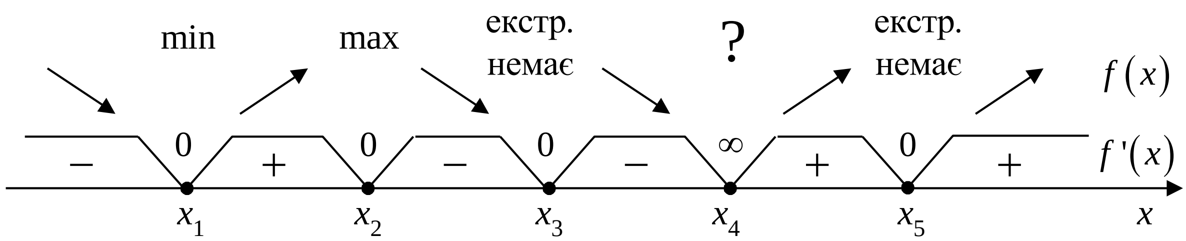



Рис. 13.2

Зауважимо, що в точці $x_4$ функція має мінімум, якщо функція $y=f(x)$ в цій точці визначена, або в точці $x_4$ екстремуму немає, якщо функція в цій точці не визначена;

7) обчислюємо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми.

**Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної**

При класифікації екстремальних точок функції $y=f(x)$ можна використовувати також її другу похідну.

Розв'язки системи $\begin{cases} f'(x)=0, \\ f''(x)<0 \end{cases}$ є точками локального максимуму, а розв'язки системи $\begin{cases} f'(x)=0, \\ f''(x)>0 \end{cases}$ є точками локального мінімуму функції $y=f(x)$.

Таким чином, для знаходження екстремумів функції за допомогою другої похідної треба

1) знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких перша похідна дорівнює нулю;
2) обчислити значення другої похідної в одержаних точках;
3) якщо $f''(x_0)>0$, то в точці $x_0$ маємо мінімум, якщо $f''(x_0)<0$, то в точці $x_0$ маємо максимум, якщо функція якщо ж $f''(x_0)=0$, то відповіді немає і тому слід скористатися першим правилом, тобто знайти екстремум в цій точці за першою похідною.

### 13.1.3 Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Відомо, що така функція досягає свого найбільшого та найменшого значення на цьому відрізку.

Таким чином, для визначення найбільшого та найменшого значення функції на відрізку $[a;b]$ необхідно:

1) знайти критичні точки функції на інтервалі $(a;b)$;
2) обчислити значення функції у критичних точках;
3) обчислити значення функції у точках $a$ і $b$;
4) серед визначених значень вибрати найбільше та найменше.

**Приклад.** Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=3x^4+4x^3-1$ на $[-2;1]$.

**Розв'язання.** Знайдемо критичні точки функції: $f'(x)=12x^3+12x^2$; $f'(x)=0$ при $x_1=0\in[-2;1]$ і при $x_2=-1\in[-2;1]$.

Знайдемо $f(0)=-1$, $f(-1)=3-4-1=-2$, $f(-2)=48-32-1=15$, $f(1)=6$.

Отже, $\max\limits_{[-2;1]} f = f(-2)=15$, $\min\limits_{[-2;1]} f = f(-1)=-2$.

Визначення найбільшого та найменшого значення функції на відрізку застосовують при розв'язанні багатьох практичних задач, які пов'язані з відшуканням оптимальних розв'язків.

### 13.2 Опуклість графіка функції. Точки перегину

**Означення.** Крива називається **опуклою (вгнутою)** на інтервалі $(a;b)$, якщо вона розташована нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому інтервалі ( рис. 13.3а), 13.3б)).

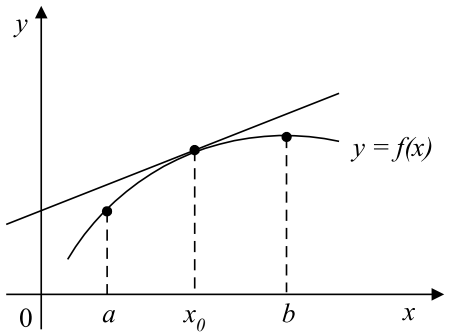



Рис. 13.3 а)

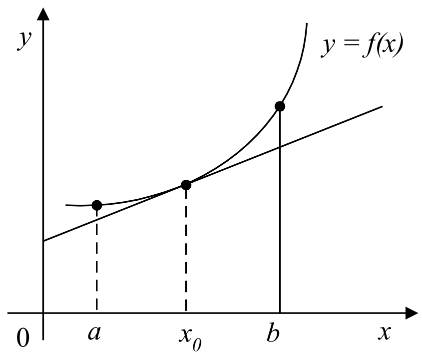



Рис. 13.3 б)

**Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції.**

Якщо $f''(x)<0$ $\left(f''(x)>0\right)$ в інтервалі $(a;b)$, то графік функції опуклий (вгнутий) в цьому інтервалі.

**Означення.** Точка $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ графіка неперервної функції, яка розділяє інтервали опуклості та вгнутості, називається **точкою перегину** (рис. 13.4 а), 13.4 б)).

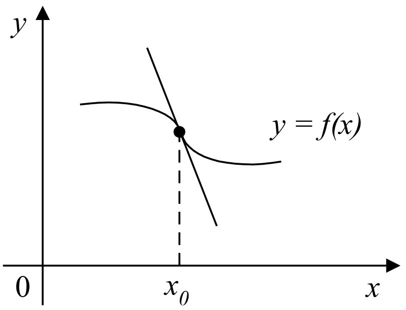



Рис. 13.4 а)

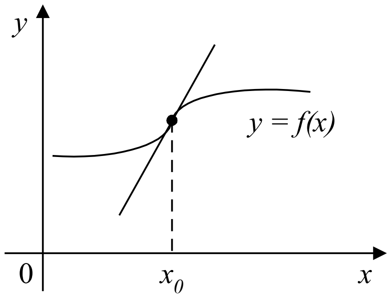



Рис. 13.4 б)

**Необхідна умова існування точки перегину**

Якщо $M\left(x_0; y_0\right)$ – точка перегину графіка функції $y = f\left(x\right)$, то друга похідна $f''\left(x_0\right) = 0$ або $f''\left(x_0\right)$ не існує.

Точки, в яких $f''\left(x_0\right) = 0$ або $f''\left(x_0\right)$ не існує, називаються **критичним точками другого роду.**

**Достатня умова існування точки перегину.** Якщо при переході через критичну точку $x_0$ друга похідна змінює знак, то точка $M\left(x_0; y_0\right)$ є точкою перегину кривої.

Доказ цієї теореми є аналогічним доказу теореми про достатню умову існування екстремуму функції.

Виходячи з цих умов, одержимо правило для знаходження інтервалів опуклості і вгнутості та точок перегину графіка функції:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо $f'\left(x\right)$;
3) знаходимо $f''\left(x\right)$;
4) знаходимо корені рівняння $f''\left(x\right) = 0$ і точки, де $f''\left(x\right)$ не існує (критичні точки другого роду);
5) визначаємо знак другої похідної $f''\left(x\right)$ в кожному інтервалі, на які знайдені критичні точки розбивають область визначення даної функції, і тим самим знаходимо інтервали опуклості і вгнутості кривої;
6) визначаємо, які з критичних точок є абсцисами точок перегину (рис. 13.5).

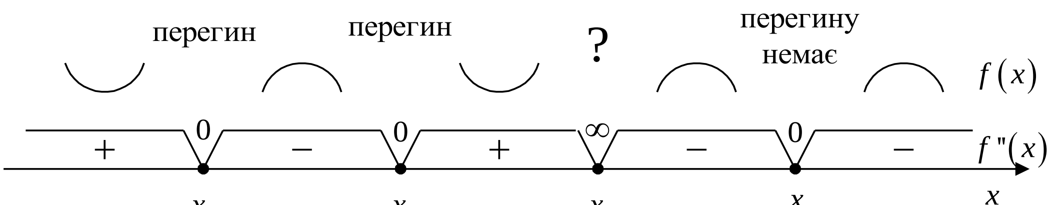



Рис. 13.5

Зауважимо, що в точці з абсцисою $x_3$ графік функції $y = f\left(x\right)$ має перегин, якщо в цій точці функція $f\left(x\right)$ визначена, або не має перегину, якщо функція $f\left(x\right)$ в цій точці не визначена;

7) обчислюємо значення функції $f\left(x\right)$ в знайдених точках, тобто знаходимо точки перегину графіка цієї функції.

**Приклад.** Дослідити графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

**Розв'язання.** Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо похідні $y' = 5x^4 - 2$, $y'' = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y'' = 0$ при $x = 0$. Тому $y'' > 0$ при $x > 0$ ; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим угору на проміжку $(-\infty; 0)$ і опуклим униз на проміжку $(0; \infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

## Питання для самоперевірки

1 Яка функція називається зростаючою (спадаючою) на проміжку?

2 Сформулюйте необхідну і достатню умови зростання (спадання) функції на проміжку.

3 Що називають максимумом (мінімумом) функції в точці?

4 Які точки називають критичними точками першого роду, стаціонарними точками?

5 Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.

6 Як знайти екстремум функції за допомогою другої похідної?

7 Як знайти Найбільше та найменше значення функції на відрізку?

8 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування інтервалів опуклості (вгнутості) кривої.

9 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину кривої.

# ЛЕКЦІЯ 14

14.1 Асимптоти графіка функції.

14.2 Загальна схема дослідження функцій

## 14.1 Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про вигляд графіка функції при віддалені його точок на нескінченність.

**Асимптотою графіка функції** $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує до нуля, якщо ця точка рухається вздовж гілки кривої до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою графіка функції** $y = f(x)$**,** якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty .$$

Рівняння **похилої асимптоти** будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b .$$

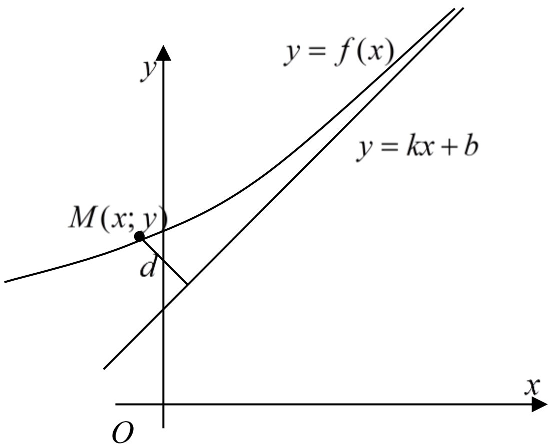



Рис.14.1

Знайдемо $k$ і $b$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка, яка належить кривій $y=f(x)$ (рис.14.1 ).

За формулою відстані від точки до прямої $\left(d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\right)$ знаходимо відстань від точки $M$ до прямої $y=kx+b$: $\quad d=\left|\dfrac{kx-y+b}{\sqrt{k^2+1}}\right|$.

Умова $d\to 0$ буде виконуватися лише тоді, коли чисельник дробу прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}(kx-y+b)=0$.

Звідси випливає, що $kx-y+b=\alpha$, де $\alpha=\alpha(x)$ – нескінченно мала, тобто $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$. Поділимо обидві частини рівності $y=kx+b-\alpha$ на $x$, перейдемо до границі при $x\to\infty$, отримаємо: $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{b}{x}+k-\dfrac{\alpha}{x}\right)$.

Звідси
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)\,. \tag{14.1}$$

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y=kx+b$, то $k$ і $b$ визначають за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для $k$ і $b$, то пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо $k$ = 0, то $b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. Тому $y=b$ – рівняння **горизонтальної асимптоти**.

Зауваження. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при визначенні $k$ і $b$ не існує або дорівнює $\infty$, то похилих асимптот немає.

**Приклад** Знайти асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+5x+3}{x-2}$.

**Розв'язання.** Задана функція не існує при $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+3}{x-2}=\infty$, отже, пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою.

Для знаходження похилих асимптот обчислимо коефіцієнти $k$ і $b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x+3}{x(x-2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x-2}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x+3-x^2+2x}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x+3}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=7\,.$$

Таким чином, пряма $y=x+7$ – похила асимптота кривої.

## 14.2 Загальна схема дослідження функції

Повне дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:

1 Знайти область визначення функції

2 Встановити точки розриву та інтервали неперервності функції

3 Дослідити функцію на парність і непарність.

4 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5 Знайти інтервали знакосталості функції.

6 Знайти асимптоти. Дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.

7 Знайти інтервали спадання і зростання функції та екстремуми.

8 Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину.

9 Побудувати графік функції за результатами дослідження.

Зробимо декілька зауважень щодо цієї схеми.

1 Якщо функції виявиться парною або непарною, то дослідження досить провести лише для невід‘ємних значень аргументу, а потім скористатися властивістю симетрії.

2 Якщо в результаті дослідження виявиться, що функція періодична, то наступне дослідження цієї функції досить провести на відрізку довжиною в період. З‘ясувавши всі особливості функції на цьому відрізку, встановимо (внаслідок періодичності) її особливості в усій області існування.

3 Доцільно наносити на рисунок характерні точки, асимптоти і т.п. паралельно з дослідженням. Це спростить роботу з накресленням графіка.

4 Щоб якомога точніше накреслити графік функції в тих інтервалах області її існування, в яких немає особливостей цієї функції і які великі за розмірами, треба взяти кілька точок і обчислити значення функції в цих точках.

**Приклад 2** Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ і побудувати її графік за результатами дослідження.

**Розв'язання.** Слідуючи запропонованій схемі, маємо:

1 $3-x^2\neq 0,\quad x\neq\pm\sqrt{3}$; $D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

2 $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ – точки розриву;

$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-y(x)$. Отже, задана функція є непарною.

Її графік розташований симетрично відносно початку координат, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x\geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ - початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm\sqrt{3}$;

$y>0$ в інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ і $y<0$ в інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ (рис. 14.2).

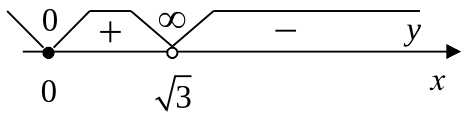



Рис. 14.2

6 $x=\sqrt{3}$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+0\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{+0}=+\infty.$$

Отже, $x=\sqrt{3}$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(3-x^2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0,$$

оскільки степінь многочлена чисельника менша степеня многочлена знаменника.

Отже, пряма $y=-x$ – похила асимптота.

7 $$y'=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3\left(-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2};$$

$y'(x)=0$, якщо $x^2\left(9-x^2\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\pm3$;

$y'(x)=\infty$, якщо $3-x^2=0$, звідки $x=\pm\sqrt{3}$,

$y_{\max}=y(3)=\frac{27}{3-9}=-\frac{9}{2}$ (рис. 14.3).

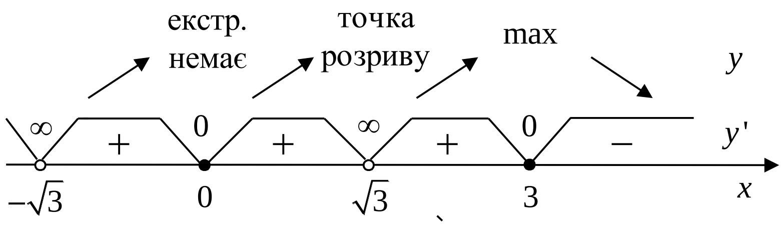



Рис. 14.3

8 $$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)\left(-2x\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$y''(x)=0$, якщо $x=0$; $y''(x)=\infty$ якщо $x=\pm\sqrt{3}$.

$y_{перегину}=y(0)=0$ (рис. 14.4).

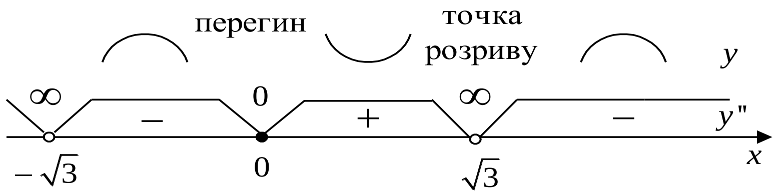



Рис. 14.4

Зауважимо, що у зв‘язку з тим, що точка $x=0$ знаходиться на межі півінтервалу $[0;+\infty)$, в якому досліджується функція, виникла необхідність дослідити знак $y'(x)$ і $y''(x)$ на півінтервалі $(-\sqrt{3};0]$.

9 Будуємо графік функції за результатами дослідження (рис. 14.5).

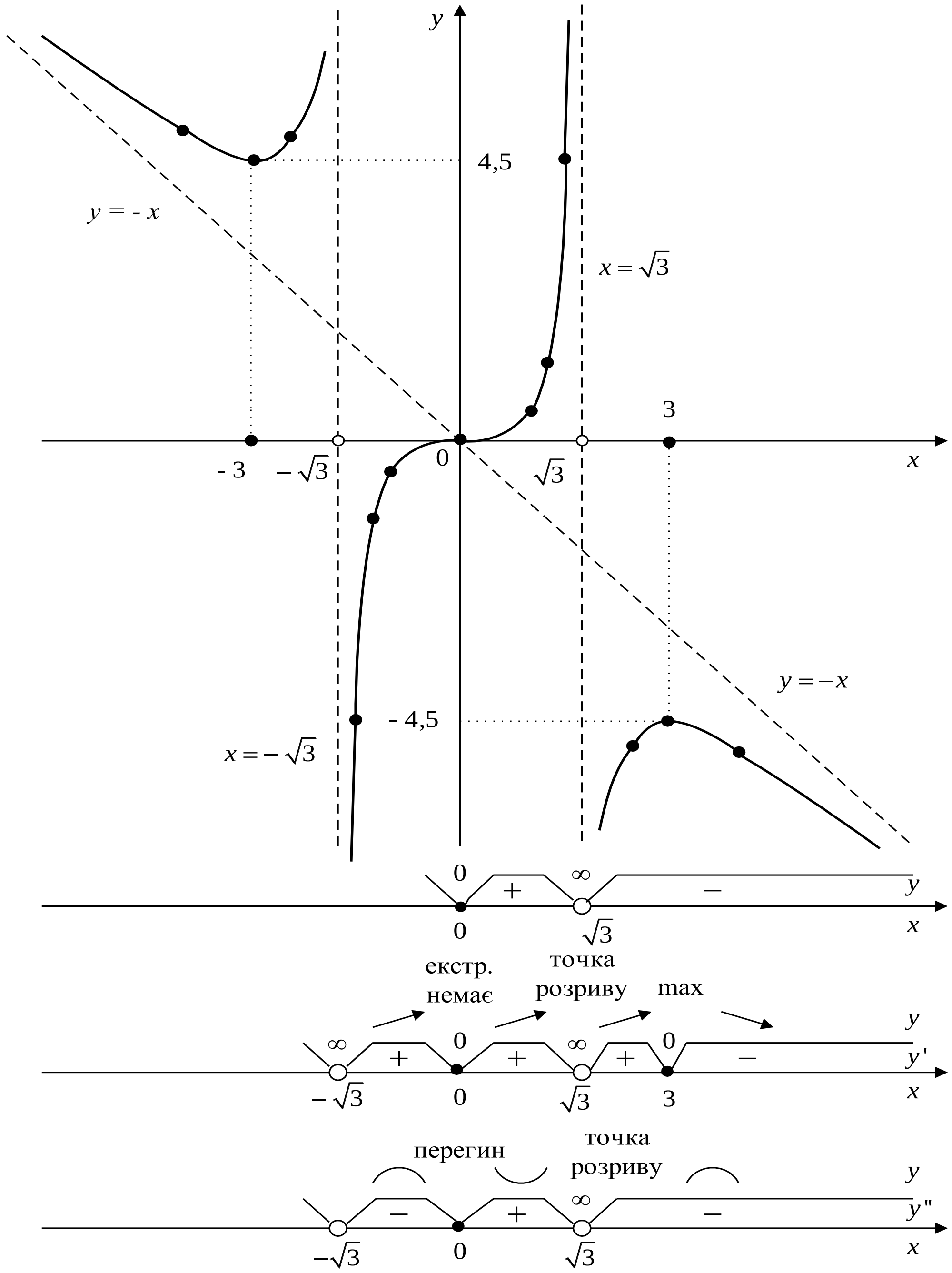



Рис. 14.5

**Питання для самоперевірки**

1 Що називають асимптотою кривої?

2 Яку пряму називають вертикальною асимптотою?

3 За яких умов існують похилі і горизонтальні асимптоти і як їх визначають?

4 Перелічить основні етапи дослідження функції.

## ЛЕКЦІЯ 15

15.1 Функції багатьох змінних. Область визначення.

15.2 Границя функції 2-х змінних. Неперервність у точці та області.

### 15.1 Означення функції багатьох змінних. Область визначення

При дослідженні явищ при роди дуже часто виявляється, що одна змінна величина залежить від багатьох інших змінних. Наприклад, площа $S$ прямокутника залежить від двох величин – його сторін $x$ і $y$: $S = xy$.

Об‘єм $V$ прямокутного паралелепіпеда з ребрами, довжини яких $x$, $y$ і $z$, виражається формулою $V = xyz$. Тут $V$ є функцією трьох змінних $x$, $y$ і $z$.

Сила струму $I$ за законом Ома залежить від двох величин – напруги $U$ і опору $R$: $I = \dfrac{U}{R}$.

Робота електричного струму $A$ залежить від різниці потенціалів $U$ на кінцях дільниці, сили струму $I$ і часу $t$: $A = I\,U\,t$.

Потенціальна енергія деформації пружного стержня $U = \dfrac{p^2 l}{2ES}$, де $p$ – сила, $l$ – довжина стержня, $S$ – площа поперечного перетину, $E$ – модуль пружності (стала величина, яка залежить від матеріалу) є функцією трьох змінних $p$, $l$, $S$.

Визначаючи фізичний стан будь-якого тіла, часто доводиться спостерігати зміну його властивостей від точки до точки: густина, температура, електричний потенціал тощо. Ці величини суть «функції точки» або функції від координат $x$, $y$, $z$ точки. Якщо фізичний стан тіла змінюється з часом, то до цих незалежних змінних приєднується ще й час $t$. В цьому випадку ми маємо справу з функціями від чотирьох незалежних змінних.

Число подібних прикладів можна самостійно довільно збільшити. Для вивчення таких величин служить поняття функції кількох змінних.

Уточнення поняття функції у випадку кількох незалежних змінних почнемо з найпростішого випадку, коли цих змінних дві.

Говорячи про зміну двох незалежних змінних $x$ і $y$, ми повинні всякий раз визначати, яких пар значень $x, y$ вони можуть набувати разом; множина $D$ цих пар і буде областю зміни змінних $x, y$.

**Означення.** Змінна $z$ називається функцією незалежних змінних $x$ і $y$ на множині $D$, якщо кожній парі $(x, y)$ їх значень із $D$ за деяким правилом або законом ставиться у відповідність одне цілком певне дійсне значення $z$. Незалежні змінні $x$ і $y$ у цьому випадку називають аргументами функції.

Функціональну залежність між $z$ і $x, y$ прийнято позначати так:

$$z = f(x, y).$$

Тут символ $f$ визначає сукупність дій або правило для обчислення значення $z$, яке відповідає даним значенням $x$ і $y$.

Для визначення окремих (частинних) значень такої функції треба задати значення незалежних змінних: $x = x_0$, $y = y_0$. Кожній такій парі значень $x$ і $y$ відповідає певна точка $M_0$ на координатній площині з координатами $(x_0; y_0)$ і, замість того, щоб говорити про значення функції при $x = x_0$, $y = y_0$, можна говорити про значення функції в точці $M_0(x_0; y_0)$ площини. При знаходженні частинного значення $z_0$ функції $z = f(x, y)$, якого вона набуває при заданих числових значеннях аргументів $x = x_0$ і $y = y_0$, пишуть $z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ або $z_0 = f(x_0; y_0)$.

Наприклад, якщо $z = f(x, y) = x + y^2$, то $z = z\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}} = f(1;2) = 1 + 4 = 5$.

Кожна пара значень аргументів $x, y$ геометрично визначає точку $M_1$ на площині $xOy$, а значення функції в цій точці є аплікатою $z$ просторової точки $M(x; y; z)$. Геометричне місце всіх просторових точок $M$ є поверхнею, яка взаємно однозначно проектується в область $D$ на площині $xOy$. Ця поверхня є геометричним зображенням функції $z = f(x, y)$ в просторовій прямокутній системі координат. Її називають графіком функції $z = f(x, y)$.

Як і у випадку функції однієї змінної, функцію двох змінних можна задати таблицею, графіком або аналітично. Частіше її задають аналітично, тобто формулою.

Множина (сукупність) точок $(x, y)$ площини $xOy$, в яких задана функція $z = f(x, y)$ визначена, тобто набуває дійсних значень, називається **областю визначення (існування) функції**. Область визначення функції $z = f(x, y)$ являє собою або частину площини, обмежену замкнутою лінією, причому точки цієї лінії ( межі області) можуть належати або не належати області визначення, або всю площину, або, нарешті, сукупність декількох частин площини $xOy$.

Точки області, які не лежать на межі, називають внутрішніми точками області. Область, яка складається із одних внутрішніх точок, називається відкритою або незамкненою. Якщо ж до області відносяться і точки межі, то область називається замкненою.

На рисунку межу, яка належить області визначення функції, будемо зображати суцільною лінією, в противному випадку – пунктирною.

**Прилад .** Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$.

**Розв'язання.** Функція визначена за умови $x \neq 0$ і $-1 \le \dfrac{y-1}{x} \le 1$, що рівносильно розв‘язанню двох систем: $\begin{cases} x > 0, \\ 1-x \le y \le 1+x \end{cases}$ і $\begin{cases} x < 0, \\ 1-x \ge y \ge 1+x. \end{cases}$

Зобразимо розв‘язки кожної із систем графічно (рис. 15.1). Першій системі задовольняють точки, які розташовані всередині правого вертикального кута, утвореного прямими $y = 1+x$ і $y = 1-x$, але без точки $(0;1)$, другій - точки, які розташовані всередині лівого вертикального кута, утвореного цими самими прямими і також без точки $(0;1)$.

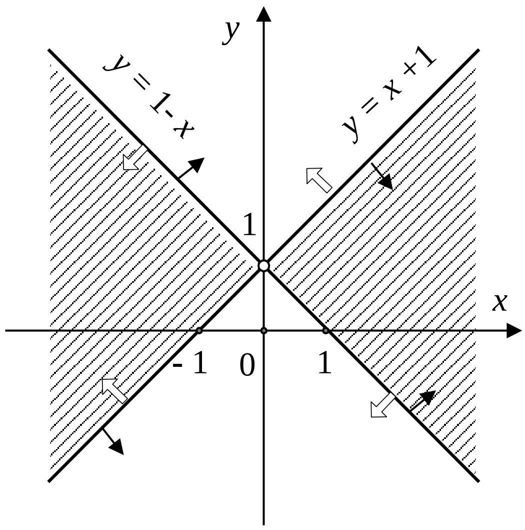



Рис. 15.1

Отже, областю визначення даної функції є внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = 1+x$ і $y = 1-x$, включаючи ці прямі, але без точки їх перетину $(0;1)$, бо при $x = 0$ задана функція не визначена.

Множина (сукупність) всіх значень, яких набуває сама функція, називається **областю зміни функції**. Зауважимо, що наперед вказати область зміни функції не завжди просто.

Аналогічно визначається функція $n$ змінних $x, y, z, \ldots, t$ :

$$u = f(x, y, z, \ldots, t).$$

Сукупність значень $x, y, z, \ldots, t$ називають точкою $M(x, y, z, \ldots, t)$ $n$-мірного простору, а функцію $n$ змінних - функцією точки, тобто $u = f(M)$.

Відзначимо, що зобразити геометрично функцію трьох, чотирьох і більшого числа змінних неможливо.

Усі основні поняття теорії функцій однієї змінної узагальнюються на випадок функції кількох змінних. Далі наведемо поняття границі, неперервності та диференційованості функції двох змінних.

### 15.2.1 Границя функції двох змінних

Перед тим, як ввести поняття границі функції двох змінних $z = f(x;y) = f(M)$, введемо поняття околу точки $M_0(x_0;y_0)$ в площині $xOy$.

Околом точки $M_0(x_0;y_0)$ називають внутрішню частину круга з центром в цій точці. Якщо радіус цього круга дорівнює $\delta$, то говорять про $\delta$ - окіл точки $M_0$ (рис. 15.2).

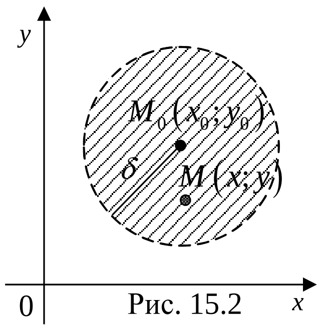


Рис. 15.2

Очевидно, що будь-яка точка $M(x;y)$, яка належить околу точки $M_0(x_0;y_0)$, знаходиться від цієї точки на відстані, меншій $\delta$.

Якщо $M_0(x_0;y_0)$ – деяка фіксована точка площини і $x \to x_0$, $y \to y_0$, тоді точка $M(x;y)$ прямує до точки $M_0(x_0;y_0)$, тобто $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$, що рівносильно прямуванні до нуля відстані $MM_0 = \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

**Означення.** Число $A$ називається **границею функції двох змінних** $z = f(x;y) = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий $\delta$ - окіл точки $M_0(x_0;y_0)$, що для будь-якої точки $M(x;y)$ цього околу (за винятком можливо самої точки $M_0$) має місце нерівність

$$\left| f(M) - A \right| < \varepsilon, \text{ або } \left| f(x;y) - A \right| < \varepsilon.$$

Іншими словами, як тільки відстань змінної точки $M(x;y)$ від фіксованої точки $M_0(x_0;y_0)$ стане досить малою, значення функції в точці $M$ буде відрізнятися від числа $A$ менше ніж на $\varepsilon$, де $\varepsilon$ може бути обрано як завгодно малим.

При цьому пишуть $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(M) = A$, бо при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$, очевидно, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Означення границі функції можна інакше сформулювати так: Число $A$ називається границею функції двох змінних $z = f(x;y) = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо нескінченно малій відстані $MM_0 = \rho$ відповідає нескінченно мала різниця $f(M) - A$.

Важливо підкреслити, що за означенням границя функції не залежить від напряму руху точки $M(x;y)$ до точки $M_0(x_0;y_0)$. Тому, якщо виявиться, що при $M \to M_0$ з різних сторін $f(M)$ прямує до різних граничних значень, то функція $z = f(M)$ границі в точці $M_0(x_0;y_0)$ не має.

Зазначимо, що функцію двох змінних, границя якої дорівнює нулю, називають **нескінченно малою**. Зауважимо також, що для функцій двох змінних справедливі теореми про границю суми, різниці, добутку і частки, які формулюються і доводяться аналогічно відповідним теоремам для функцій, які залежать від одного аргументу.

### 15.2.2 Неперервність у точці та області.

**Означення.** Функція $z = f(M)$ називається **неперервною в точці $M_0$**, якщо: 1 $f(M)$ визначена як в самій точці $M_0$, так і в деякому її околі;

2 існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3 ця границя дорівнює значенню функції в граничній точці, тобто

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Інакше, функція $z = f(x;y)$ називається **неперервною в точці** $M_0(x_0;y_0)$, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0), \tag{15.1}$$

причому точка $M(x;y)$ прямує до точки $M_0(x_0;y_0)$ довільним способом, залишаючись в області визначення функції.

Якщо позначити $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то рівність (15.1) можна записати так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0;y_0)$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[ f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0) \right] = 0.$$

Беручи до уваги формулу (15.1), останній рівності можна надати вигляду $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0$, де $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ - відстань між точками $M_0(x_0;y_0)$ і $M(x;y)$.

Таким чином, функція $z = f(M)$ буде неперервною в точці $M_0$, якщо нескінченно малій відстані $\rho = MM_0$ відповідатиме нескінченно малий приріст функції $\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0)$.

Звернемо увагу на один висновок, що випливає з означень неперервності функції. Якщо $f(x;y)$ неперервна у точці $(x_0;y_0)$ і якщо покласти $y = y_0$, то функція $f(x;y_0)$ однієї змінної $x$ неперервна при $x = x_0$. Аналогічно $f(x_0;y)$ неперервна при $y = y_0$.

Функція, неперервна в кожній точці деякої області, називається неперервною в цій області.

Точка $M_0$ називається **точкою розриву** функції $z = f(M)$, якщо для неї не виконується принаймні одна з трьох умов неперервності. Точки розриву даної функції можуть розміщуватися як окремо (ізольовані точки розриву), так і заповнювати цілі лінії (**лінії розриву**).

Слід визначити, що як і для функцій однієї змінної, сума, різниця і добуток неперервних функцій двох змінних в точці $M_0$ будуть неперервними в тій самій точці; частка неперервних функцій в точці $M$ буде також неперервною в точці

$M_0$ функцією за умови, що знаменник не обертається в нуль в цій точці. Справедлива також теорема про неперервність складної функції.

Зауважимо, що аналогічно визначається границі я неперервність функції трьох і більшого числа змінних.

**Приклад.** Функція $z = x^2 + y^2$ є неперервною у будь - якій області площини $Oxy$, а функція $z = \dfrac{5}{x-y}$ має лінію розриву $y = x$.

### Питання для самоперевірки

1 Дайте означення функції двох (кількох) незалежних змінних.

2 Що називають областю визначення функції двох (кількох) змінних?

3 Що називається графіком функції двох змінних?

4 Дайте означення границі функції $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

5 Дайте означення неперервності функції двох незалежних змінних в точці і в області. Наведіть приклади розривних функцій.

## ЛЕКЦІЯ 16

16.1 Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних.

16.2 Екстремуми функцій багатьох змінних.

### 16.1 Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x;y)$. Оскільки $x$ і $y$ – незалежні змінні, то одна з них може змінюватися, а інша зберігати своє значення. Якщо надати незалежній змінній $x$ приріст $\Delta x$, зберігаючи $y$ незмінним, тоді $z$ здобуде приріст, який називають **частинним приростом** $z$ **по** $\boldsymbol{x}$ і позначають $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y).$$

Аналогічно, якщо $x$ має стале значення, а $y$ одержує приріст $\Delta y$, то $z$ матиме приріст $\Delta_y z$, який зветься **частинним приростом** $z$ **по** $\boldsymbol{y}$:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Якщо одночасно змінним $x$ і $y$ дати прирости $\Delta x$ і $\Delta y$ відповідно, то матиме **повний приріст функції** $\Delta z$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

**Означення.** Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x},$$

то ця границя називається **частинною похідною функції** $z = f(x;y)$ **по** $\boldsymbol{x}$ **у точці** $M(x;y)$ і позначається одним із символів: $z'_x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Частинні похідні у точці $M_0(x_0;y_0)$ зазвичай позначають символами

$$f'_x(x_0;y_0), \quad f'_x\big|_{M_0}.$$

Аналогічно визначається **частинна похідна** $z = f(x;y)$ **по $y$ :**

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Частинні похідні функції кількох змінних знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функції однієї змінної ( при цьому відповідно $x$ і $y$ вважаються сталими).

**Геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних**

Абсолютна величина частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x;y)$ або $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x;y)$ дає величину швидкості, з якою відбувається зміна функції $z = f(x;y)$ при зміні лише $x$ або лише $y$, а знак частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ або $\frac{\partial z}{\partial y}$ показує характер цієї зміни (зростання, спадання).

Геометричний зміст частинних похідних від функції $z = f(x;y)$ полягає в тому, що $f_x'(x_0;y_0)$ є кутовий коефіцієнт відносно осі О$x$ дотичної в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до перерізу поверхні $z = f(x;y)$ площиною $y = y_0$, тобто $f_x'(x_0;y_0) = tg\alpha$ (рис 16.1). Звернемо увагу, що на рис 16.1 $f_x'(x_0;y_0) < 0$.

Частинна похідна $f_y'(x_0;y_0)$ є кутовим коефіцієнтом відносно осі О$y$ дотичної в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до перерізу поверхні $z = f(x;y)$ площиною $x = x_0$, тобто $f_y'(x_0;y_0) = tg\beta$ (рис 16.2). На цьому рисунку видно, що $f_y'(x_0;y_0) > 0$.

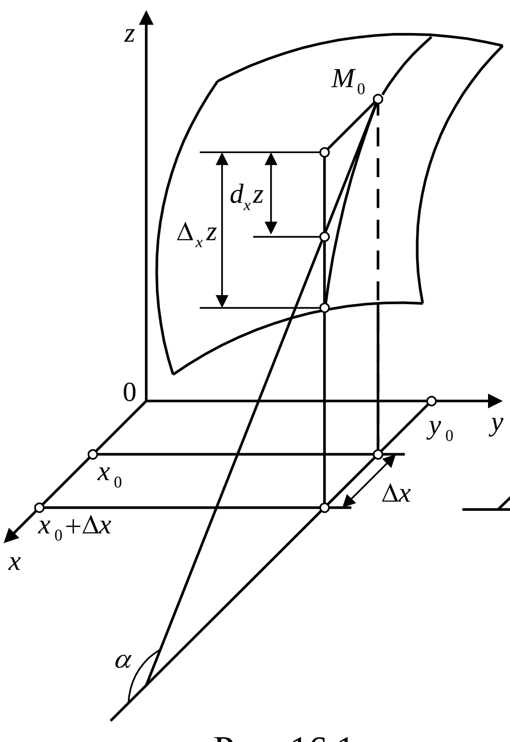



Рис. 16.1

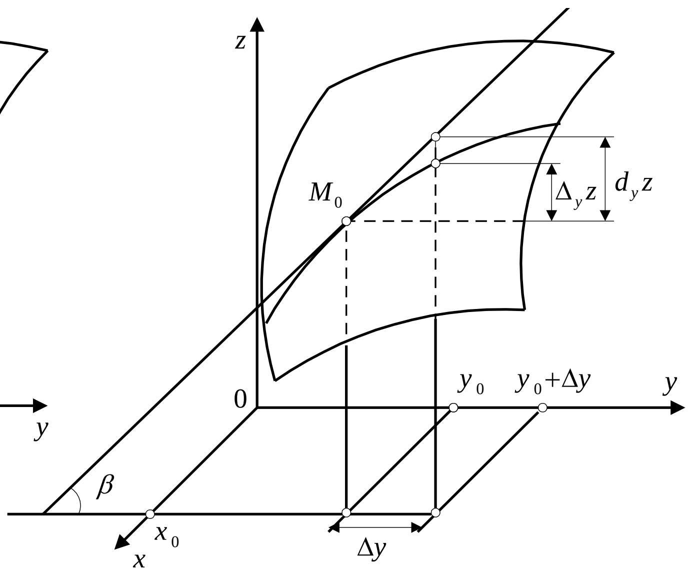



Рис. 16.2

Частинні похідні $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ і $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ називають **частинними похідними першого порядку.** Їх можна розглядати як функції від $(x;y) \in D$. Ці функції також можуть мати частинні похідні, які називають **частинними похідними другого порядку.** Для функції $z = f(x;y)$ ці похідні визначаються і позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;y).$$

Похідні $f''_{xy}$ і $f''_{yx}$ називають **мішаними частинними похідними.**

**Диференційованість та повний диференціал першого порядку**

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена у деякому околі точки $M(x;y)$.

**Означення.** Функція $z = f(x;y)$ називається **диференційованою у точці** $M(x;y)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$ Сума перших двох доданків останньої рівності являє собою головну частину приросту функції.

**Означення.** Головна частина приросту функції $z = f(x;y)$, лінійна відносно $\Delta x$ і $\Delta y,$ називається **повним диференціалом функції** і позначається символом $dz$:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Вирази $A \cdot \Delta x$ і $B \cdot \Delta y$ називають **частинними диференціалами.**

Якщо функція $z = f(x;y)$ має в точці $M(x;y)$ неперервні частинні похідні, то повний диференціал можна подати у вигляді

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad \text{або} \qquad dz = d_x z + d_y z,$$

де $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx,\ d_y z = \frac{\partial z}{dy}dy$ – **частинні диференціали функції** $z = f(x;y)$.

## 16.2 Екстремуми функцій багатьох змінних

**Означення.** Функція $z = f(x;y)$ має у точці $M_0(x_0;y_0)$ області $D$ **максимум (мінімум)**, якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x;y)$ цього околу, відмінних від $M_0$, виконується нерівність $f(M_0) > f(M)$ ($f(M_0) < f(M)$).

Точка, в якій функція $f(M)$ має максимум (мінімум), називається **точкою максимуму (мінімуму)**. Максимум і мінімум функції називають її **екстремумом**.

Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

**Необхідні умови існування екстремуму.** Якщо диференційована функція $z = f(x;y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0;y_0)$, то її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю у цій точці, тобто

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = 0.$$

Зауважимо, що функція може мати екстремум також в тих точках, де принаймні одна із частинних похідних першого порядку не існує.

Точки, в яких перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються **стаціонарними**.

Точки, в яких перші частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ функції $z = f(x;y)$ обертаються в нуль, або не існують, називаються **критичними точками** цієї функції.

Відзначимо, що не кожна критична точка є точкою екстремуму функції.

**Достатні умови екстремуму.** Нехай $f_x'(x_0;y_0) = f_y'(x_0;y_0) = 0$ і $A = f_{xx}''(x_0;y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0;y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0;y_0)$.

Складемо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $M_0$, а саме максимум, якщо $A < 0$ (або $C < 0$), і мінімум, якщо $A > 0$ (або $C > 0$);

2) якщо $\Delta < 0$, то у точці $M_0$ екстремуму немає (1, 2 - достатні умови наявності або відсутності екстремуму);

3) якщо $\Delta = 0$, то питання про наявність екстремуму функції у точці $M_0(x_0;y_0)$ залишається відкритим (потрібні подальші дослідження, наприклад, за знаком приросту $\Delta f$ поблизу цієї точки). В цьому разі ще говорять, що випадок сумнівний (екстремум може бути, а може і не бути).

Розглянуті вище екстремуми функції за самим своїм означенням мали локальний характер: в точці екстремуму $M_0$ функція набуває максимальне або мінімальне значення серед всіх її значень в деякому (як завгодно малому) околі точки $M_0$. Однак, у деяких задачах ставиться вимога знайти глобальний екстремум, тобто найбільше і найменше значення функції $z = f(x;y)$ в деякій замкненій області $D$. Для цього треба знайти всі локальні мінімуми і максимуми цієї функції всередині області $D$, а також найбільше і найменше її значення на межі області, і потім обрати серед всіх цих значень найбільше і найменше.

Зауважимо, що при знаходженні локальних екстремумів треба розглядати лише ті стаціонарні точки, які розташовані всередині області $D$. Важливо також зазначити, що немає потреби обчислювати другі похідні і використовувати достатні умови екстремуму. Оскільки всі екстремуми функції $z = f(x;y)$ знаходяться серед її значень в стаціонарних точках, досить обчислити значення функції $z$ в усіх стаціонарних точках і серед них обрати найбільше. Як правило, межа області $D$ розбивається на ряд ділянок, кожна із яких визначається рівнянням виду $y=\varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, або $x=\psi(y)$ $(c \le y \le d)$. Тому вздовж такої ділянки межі функція $z = f(x;y)$ перетворюється в функцію однієї змінної $z = f(x;\varphi(x))$, або $z = f(\psi(y);y)$. В загальному випадку межа області $D$ може бути задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$.

У цьому випадку функція $z$ перетворюється вздовж межі в функцію параметра $t$

$$z = f(\varphi(t);\psi(t)) \quad (\alpha \le t \le \beta).$$

Тому задача знаходження найбільшого і найменшого значення функції $z = f(x;y)$ на межі області $D$ зводиться до відшукання найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної.

Виходячи зі сказаного, а також із того, що функція, диференційована в обмеженій замкненій області, досягає свого найбільшого (найменшого) значення, або у стаціонарних точках, або у точках межі області, приходимо до наступного **правила знаходження найбільшого і найменшого значень функції** двох змінних:

1) знайти стаціонарні точки, які належать даній області, і обчислити значення функції у цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області;

3) з усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

**Приклад.** Знайти екстремуми функції $f(x;y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

**Розв'язання.** Знаходимо частинні похідні першого порядку даної функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 3(x^2 + y^2 - 10)\,;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 18 = 6(xy - 3).$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо після елементарних перетворень систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ 2xy = 6 \end{cases}.$$

Додаючи і віднімаючи рівняння цієї системі, матимемо

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=16 \\ x^2-2xy+y^2=4 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{cases}.$$

Розв'язуючи останню систему, рівносильну даній, знаходимо стаціонарні точки: $M_1(3;1)$, $M_2(1;3)$, $M_3(-1;-3)$, $M_4(-3;-1)$.

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x$$

і складемо визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6x \cdot 6y \\ 6y \cdot 6x \end{vmatrix}=36x^2-36y^2=36(x^2-y^2).$$

Переконуємося, що

1) $\Delta(M_1)=36(9-1)=288>0$, $A_1=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_1}=6\cdot 3=18>0$, отже $M_1(3;1)$ - точка мінімуму;

2) $\Delta(M_2)=36(1-9)=-288<0$, отже у точці $M_2$ екстремуму немає;

3) $\Delta(M_3)=36(1-9)=-288<0$, отже у точці $M_3$ екстремуму немає;

4) $\Delta(M_4)=36(9-1)=288>0$, $A_4=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_4}=6(-3)=-18<0$, отже $M_4$ - точка максимуму.

Таким чином, задана функція має два екстремуми: у точці $M_1(3;1)$ - мінімум, $z_{\min}=f(3;1)=-72$; у точці $M_4(-3;-1)$ максимум; $z_{\max}=f(-3;-1)=72$.

**Приклад.** Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x+y$ у колі $x^2+y^2\le 1$.

**Розв'язання.** Стаціонарних точок функція $z$ не має, оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=1\ne 0,$$

тому найбільше і найменше значення вона може набувати лише на межі області, тобто на колі $x^2+y^2=1$, параметричними рівняннями якого є:

$$x=\cos t, \quad y=\sin t \quad (0\le t\le 2\pi).$$

Отже, на колі $z$ стає функцією однієї змінної $t$:

$$z=z(t)=\cos t+\sin t.$$

Шукаємо стаціонарні точки цієї функції: $z'(t) = -\sin t + \cos t = 0$, тобто $\sin t = \cos t$, звідки $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5\pi}{4}$. У цих точках:

$$z_1 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2 = z\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}, \quad x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На кінцях відрізка $\left[0; 2\pi\right]$: $z(0) = z(2\pi) = 1$.

Таким чином, найбільшого $z = \sqrt{2}$ і найменшого $z = -\sqrt{2}$ значення задана функція набуває у межових точках $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

## Питання для самоперевірки

1 Дайте означення частинної похідної функції двох незалежних змінних по одній із них. Поширити це означення на функції багатьох змінних.

2 У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції $z = f\left(x; y\right)$ в системі декартових координат?

3 Що називають частинним приростом і частинним диференціалом по $x$ функції $z = f\left(x; y\right)$? Як виражається частинний диференціал функції через її частинну похідну?

4 У чому полягає геометричний зміст частинних диференціалів функції $z = f\left(x; y\right)$ в системі декартових координат?

5 Що називається повним приростом і повним диференціалом функції $z = f\left(x; y\right)$? Як виражається повний диференціал функції через її частинні похідні?

6 Яка функція кількох змінних називається диференційованою?

7 Сформулюйте достатню умову диференційованості функції в точці.

8 Дайте означення точки екстремуму (максимуму і мінімуму) функції двох змінних.

9 У чому полягає необхідна умова екстремуму функції двох незалежних змінних? Який її геометричний зміст?

10 Сформулюйте достатні умови екстремуму функції двох змінних. Чи може функція $z = f(x; y)$ у критичних точках не мати екстремуму?

11 Сформулюйте правило знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних у заданій замкненій області.

12 Чи завжди функція $z = f(x; y)$ має найменше і найбільше значення у замкненій області $D$?

## ЛЕКЦІЯ 17

17.1 Первісна функції. Невизначений інтеграл.

17.2 Таблиця невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування.

### 17.1 Первісна функції. Невизначений інтеграл.

Відомо, що однією з основних задач диференціального числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною задачею інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції за заданою її похідною або диференціалом. Ця операція (дія) називається інтегруванням.

Слід відзначити, що як і усяка обернена задача, ця задача складніша, ніж задача диференціювання, і розв`язок її не є однозначним.

Шукану функцію називають первісною функцією по відношенню до даної функції.

**Означення.** Функція $F(x)$ називається **первісною для функції** $f(x)$**,** визначеної на проміжку $(a;b)$, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x)=f(x)$ (або $dF(x)=f(x)dx$).

Наприклад, первісною функцією для функції $f(x)=4x^3$ буде $F(x)=x^4$, оскільки $(x^4)'=4x^3$. Однак похідна від функції $(x^4+5)$ також дорівнює $4x^3$, а це означає, що функція $(x^4+5)$ буде також первісною для функції $4x^3$. І взагалі, $F(x)=x^4+C,$ де $C$ –- стала, також будуть первісними для $f(x)=4x^3,$ оскільки $(x^4+C)'=4x^3.$

**Теорема.** Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то множина всіх первісних для функції $f(x)$ на цьому проміжку $(a;b)$ міститься у виразі $F(x)+C,$ де $C$ – довільна стала.

**Доведення.** Дійсно, $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша первісна функції $f(x)$, відмінна від $F(x)$, тобто $\Phi'(x)=f(x)$. Тоді для будь – якого $x\in(a;b)$ маємо

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

А це означає, що $\Phi(x)-F(x)=C$, де С – стала величина.

Отже, $\Phi(x)=F(x)+C$.

**Означення.** Сукупність усіх первісних $F(x)$+С для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називається **невизначеним інтегралом від функції** $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)dx,$ де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз, $x$ – змінна інтегрування.

Таким чином, якщо $F'(x)=f(x),$ то $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Справедливе й обернене твердження.

Операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається **інтегруванням цієї функції**.

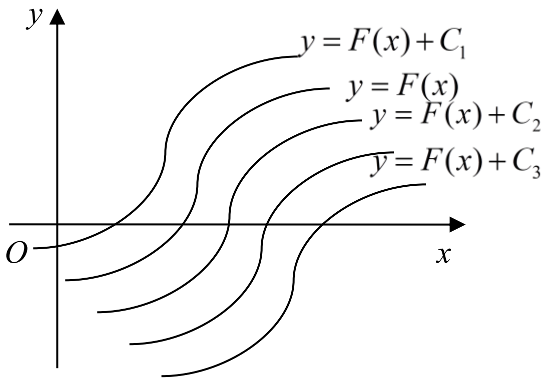



Рис.17.1

Геометрично невизначений інтеграл являє собою сукупність кривих $y = F(x) + C$ (кожному числовому значенню С відповідає крива сукупності) (рис.17.1 ).

Графік кожної первісної називається **інтегральною кривою.**

Доведено, що будь-яка функція, неперервна на проміжку, має в цьому проміжку первісну, а значить, і невизначений інтеграл.

## Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

Подамо властивості, які випливають з означення невизначеного інтеграла і вибірково доведемо деякі з них (усі рівності можна довести диференціюванням їх лівої та правої частин):

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

**Доведення.** Дійсно, $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3) $\int dF(x) = F(x) + C$.

4) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, де $c = \text{const} \neq 0$.

5) $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)dx\right) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

6) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.

7) (Інваріантність формул інтегрування).

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C,$ де $u = \varphi(x)$ – неперервно диференційована функція аргументу *x*.

**Доведення.** Розглянемо складну функцію $F(u) = F(\varphi(x))$, де $u = \varphi(x)$ – неперервно диференційована функція. Тоді за інваріантністю форми першого диференціала функції $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$.

Звідки $\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C$.

### 17.2.1 Таблиця невизначених інтегралів

З таблиці похідних і означення невизначеного інтеграла можна скласти таблицю невизначених інтегралів.

$$\int O du = \int O u'_x dx = C. \qquad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx == u + C. \qquad (2)$$

$$\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \qquad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad . \qquad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \qquad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C. \qquad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C. \qquad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C. \qquad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C. \qquad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C. \qquad (10)$$

$$\int tgu du = \int tgu \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C. \qquad (11)$$

$$\int ctgu du = \int ctgu \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C. \qquad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tgu + C. \qquad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C. \qquad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C. \qquad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \qquad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C. \qquad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \qquad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C. \qquad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C. \qquad (20)$$

$$\int\sqrt{u^2+A}du=\int\sqrt{u^2+A}\cdot u'_x dx=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right|+C. \qquad (21)$$

$$\int\sqrt{a^2-u^2}du=\int\sqrt{a^2-u^2}\cdot u'_x dx=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C,\ (a>0). \qquad (22)$$

Зауважимо, що символ $u$ може позначати як незалежну змінну, так і неперервну диференційовану функцію від незалежної змінної.

Кожна із формул цієї таблиці справедлива в будь-якому проміжку, який міститься в області визначення відповідної підінтегральної функції, її вірність можна перевірити диференціюванням.

Невизначені інтеграли (1-22) називають основними або табличними інтегралами і їх необхідно запам`ятати.

Корисно також запам`ятати, що коли $u = ax + b$ і

$$\int F(u)du = F(u)+C,$$

то

$$\int F(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C. \qquad (23)$$

У справедливості цієї формули можна переконатися диференціюванням. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Є три основні методи інтегрування функцій: метод розкладу, метод заміни змінної і метод інтегрування частинами. Розглянемо кожний з цих методів.

### 17.2.2 Безпосереднє інтегрування і метод розкладу

Під безпосереднім інтегруванням розуміють пряме використання таблиці інтегралів.

Метод розкладу ґрунтується на застосуванні властивостей 4 і 5 невизначеного інтеграла. Тут слід також мати на увазі, що даний інтеграл може бути зведений до одного або кількох табличних інтегралів після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією.

**Приклад 1**. Знайти $\int(5x^7-7x^2+2)dx.$

**Розв`язання**. Скориставшись властивостями невизначеного інтеграла, матимемо $\int(5x^7-7x^2+2)=\int 5x^7dx-\int 7x^2dx+\int 2dx=5\int x^7dx-7\int x^2dx+2\int dx$ .

Звідки застосувавши степеневий інтеграл (1)

$$\int(5x^7-7x^2+2)dx= \,=5\frac{x^8}{8}+C_1-7\frac{x^3}{3}+C_2+2x+C_3=\frac{5x^8}{8}-7x^3+2x+C,$$

де

$$C=C_1+C_2+C_3.$$

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла, як це зроблено в даному прикладі, не слід. Досить усі довільні сталі підсумувати і результат, позначений однією буквою *C*, записати вкінці, тобто після того, як усі інтеграли будуть визначені.

**Приклад 2.** Знайти $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$

**Розв`язання.** Маємо

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx = \int \left( \frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{x^3 e^x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} \right) dx =$$

$$= \int x^{-\frac{5}{2}} dx - \int e^x dx + \int \frac{dx}{x} = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C = C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|.$$

## Питання для самоперевірки

1 Що називається первісною для функції $f(x)$?
2 Що називається невизначеним інтегралом?
3 Сформулюйте правила інтегрування.
4 В чому полягають методи безпосереднього інтегрування і метод розкладу?

# ЛЕКЦІЯ 18

18.1 Основні методи інтегрування. Інтегрування підстановкою.
18.2 Інтегрування частинами.

## 18.1 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Якщо безпосередньо (за допомогою таблиці) не вдається знайти первісну, то застосовують метод заміни змінної. Суть цього методу полягає у застосуванні такої нової змінної інтегрування, що заданий інтеграл зводиться до нового інтеграла, який є табличним або таким, що зводиться до нього.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Заміна змінної здійснюється за допомогою підстановок двох видів:

1) покладають $x = \varphi(t),$ де $\varphi(t)-$ неперервно диференційована функція нової змінної $t$, яка має обернену функцію. Тоді $dx = \varphi'(t)dt$ і, застосувавши властивість інваріантності форми першого диференціала, отримаємо формулу заміни змінної

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \; ;$$

2) покладають $u = \psi(x),$ де $u$ – нова змінна, тоді формула заміни змінної має вигляд

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f(u)du.$$

**Приклад.** Знайти $\int \sin^3 x \cos x dx$.

**Розв`язання.** $\int \sin^3 x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{vmatrix} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

**Приклад.** Знайти $\int \frac{x^2dx}{x^6+9}$.

**Розв`язання.** Покладемо, що $x^3 = t$. Тоді $3x^2\,dx=dt$ і

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+9} = \left| \begin{matrix} x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{x^6+9} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}arctg\,\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{9}arctg\,\frac{x^3}{3} + C\,.$$

## 18.2 Метод інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – дві функції, які мають неперервні похідні. Тоді $d(uv) = u\cdot dv + v\cdot du$. Інтегруючи цю рівність, отримаємо

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv, \text{ але } \int d(uv) = uv + C\,,$$

звідки

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \qquad (18.1)$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами**, а метод інтегрування, що грунтується на застосуванні цієї формули, – **методом інтегрування частинами.**

Метод інтегрування частинами є ефективним, якщо інтеграл у правій частині рівності виявиться простішим, ніж вихідний.

Укажемо деякі види інтегралів, для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами (Табл. 1).

Таблиця 1

| № з/п | Вид інтеграла | Позначення підінтегрального виразу | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int P(x)e^{ax}dx$, де P(x) – многочлен | $u=P(x);$ | $dv=e^{ax}dx$ |
| 2 | $\int P(x)\cos bxdx$ | $u=P(x);$ | $dv=cosbxdx$ |
| 3 | $\int P(x)\sin bxdx$ | $u=P(x);$ | $dv=sinbxdx$ |
| 4 | $\int P(x)\ln xdx$ | $u=lnx;$ | $dv=P(x)dx$ |
| 5 | $\int P(x)\log_a xdx$ | $u=\log_a x;$ | $dv=P(x)dx$ |
| 6 | $\int P(x)arctgbxdx$ | $u=arctgbx;$ | $dv=P(x)dx$ |
| 7 | $\int P(x)arcctgbxdx$ | $u=arcctgbx;$ | $dv=P(x)dx$ |
| 8 | $\int P(x)\arcsin bxdx$ | $u=arcsinbx;$ | $dv=P(x)dx$ |
| 9 | $\int P(x)\arccos bxdx$ | $u=arccosbx;$ | $dv=P(x)dx$ |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | $\int e^{ax}\cos bxdx$ | Обидва рази за $u$ вибирають або показникову функцію, або тригонометричну |
| 11 | $\int e^{ax}\sin bxdx$ | Обидва рази за $u$ вибирають або показникову функцію, або тригонометричну |

Відзначимо також, що за допомогою методу інтегрування частинами можна вивести так звані рекурентні формули, які дають змогу звести деякі інтеграли до інтегралів того ж виду, але більш простих за своєю структурою.

**Приклад.** Знайти $\int x^2 \ln xdx.$

**Розв`язання.** Вважаючи, що $u(x)=\ln x,\quad dv(x)=x^2dx$ і застосувавши формулу (9.1), одержимо

$$\int x^2\ln xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x; & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^2dx; & v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right|=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C\,.$$

Розв`язання цього прикладу можна записати ще й так:

$$\int x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\int\ln xdx^3=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^3d\ln x\right)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^2dx\right)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\frac{1}{3}x^3\right)+C=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C\,.$$

**Приклад.** Знайти $\int x^2\sin 3xdx.$

**Розв`язання.** Вважатимемо, що $u=x^2$, $dv=\sin 3xdx$. Тоді

$$du=2xdx,\quad v=\int\sin 3xdx=\frac{1}{3}\int\sin 3xd(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою (9.1) визначаємо

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього вважатимемо, що $u=x,\ dv=\cos 3xdx,$ тоді

$$du=dx, v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right) + C.$$

$$= \frac{1}{27}\left(-9x^2 \cos 3x + 6x \sin 3x + 2\cos 3x\right) + C\ .$$

На практиці при обчисленні невизначених інтегралів використовують різні довідники, які містять таблиці інтегралів, що часто зустрічаються.

Треба зазначити, що існують випадки, коли невизначений інтеграл не може виражатися через елементарні функції, тоді говорять, що інтеграл «не береться». До цих інтегралів відносять такі: $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (інтегральний синус), $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (інтегральний косинус), $\int e^{-x^2} dx$ (інтеграл Пуассона) та інші.

## Питання для самоперевірки

1 Які види підстановок використовуються при обчисленні невизначених інтегралів методом заміни змінної?
2 В чому полягає метод інтегрування частинами?
3 Для знаходження яких видів інтегралів застосовують метод інтегрування частинами?

# ЛЕКЦІЯ 19

19 Інтеграли, що містять квадратний тричлен. Раціональні дроби і їх розкладання.

## Інтеграли, що містять квадратний тричлен.

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція вигляду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \qquad (19.1)$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами, причому $Q_m(x) \neq 0$. Якщо $Q_m(x) \equiv C \neq 0$, то раціональна функція (19.1) буде цілою раціональною функцією (многочленом). Таку функцію інтегрують безпосередньо:

$$a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C\ .$$

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менша, за степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто коли $n < m$ і є неправильним раціональним дробом у противному випадку, тобто коли $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n \geq m$) можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де *T(x)* – ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ ( $k < m$) – правильний раціональний дріб.

Як інтегрується ціла раціональна функція ми вже знаємо. Тепер розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$).

Насамперед покажемо, як інтегруються елементарні раціональні дроби, тобто дроби типу:

I $\frac{A}{x-a}$;

II $\frac{A}{(x-a)^k}$, де $\kappa$ – ціле число, $\kappa>1$;

III $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де $D=b^2-4ac<0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

IV $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, де $\kappa$ – ціле число, $\kappa>1$ і $D=b^2-4ac<0$.

У всіх чотирьох випадках вважаємо, що *A, B, a, в, c* – дійсні числа.

Перераховані елементарні дроби називають також найпростішими дробами I, II, III і IV типів.

Розглянемо інтеграли від найпростіших дробів.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A \cdot \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$, де $\kappa \neq 1$.

III. $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \left|(ax^2+bx+c)' = 2ax+b\right| = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| +$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\,arctg\,\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac<0 \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x+\frac{b}{2a}}\right)+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac=0 \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right|+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac>0 \end{cases}$$

IV. $$\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}=$$

$$=\frac{A}{2a}\cdot\frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1}+\frac{1}{a^k}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}.$$

Останній інтеграл, як інтеграл виду $\int\frac{du}{(u^2+p^2)^k}$, можна знайти за рекурентною формулою, згідно з якою $I_k=\frac{1}{p^2}\left(\frac{u}{2(k-1)(u^2+p^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}\right).$

## Раціональні дроби і їх розкладання.

Якщо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб, де $P(x)$ і $Q(x)$ – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами і

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_\nu x+q_\nu)^{\beta_\nu},$$

де $x_1,\ldots,x_k$ - дійсні попарно різні нулі многочлена $Q(x)$, а кожен тричлен $x^2+p_ix+q_i=(x-z_i)(x-\overline{z_i})$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ із дійсними коефіцієнтами відповідає парі уявних спряжених нулів $z_i$ і $\overline{z_i}$ кратності $\beta_i$ многочлена $Q(x)$, причому $z_i\neq z_j$ для $i\neq j$, так що

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_k+2(\beta_1+\ldots+\beta_\nu)=n,$$

$$\frac{p_i^2}{4}-q_i<0,\quad (i=1,\ldots,\nu),$$

то існують дійсні числа

$A_i^{(\alpha)}(i=1,2,\ldots,k,\alpha=1,2,\ldots,\alpha_i)$, $M_j^{(\beta)}$ і $N_j^{(\beta)}$ $(j=1,2,\ldots,\nu,\beta=1,2,\ldots,\beta j)$ такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_k^{(1)}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}+\ldots+\frac{A_k^{(\alpha_k)}}{x-x_K}+$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{M_1^{(\beta_1)}x+N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_\nu^{(1)}x+N_\nu^{(1)}}{(x^2+p_\nu x+q_\nu)^{\beta_\nu}}+\ldots+\frac{M_\nu^{(\beta_\nu)}x+N_\nu^{(\beta_\nu)}}{x^2+p_\nu x+q_\nu}.$$

**Приклад.** Знайти $\int\frac{dx}{3x+2}$.

**Розв'язання.** Маємо інтеграл від елементарного дробу I типу. Покладемо *3x+2=t*, тоді *3dx=dt* і тому

$$\int\frac{dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C.$$

Розв`язання цього ж прикладу можна записати ще й так:

$$\int\frac{dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+2)}{3x+2}=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int\frac{dx}{(1-2x)^7}$.

**Розв'язання.** Маємо інтеграл від елементарного дробу II типу. Оскільки $d(1-2x)=(1-2x)'dx=-2dx$ і $\frac{1}{(1-2x)^7}=(1-2x)^{-7}$, то

$$\int\frac{dx}{(1-2x)^7}=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^{-7}(-2)dx=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^{-7}d(1-2x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^{-6}}{-6}+C=\frac{1}{12(1-2x)^6}+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

**Розв'язання.** Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де *A=0*, *B=1*, $b^2-4ac=-64<0$. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2+4x+5$, одержимо табличний інтеграл (12). Дійсно

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\begin{vmatrix}u=2x+1\\du=2dx\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{(2x+1)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}arctg\frac{2x+1}{2}+C=\frac{1}{4}arctg\frac{2x+1}{2}+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int\frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx.$

**Розв'язання.** Як і в попередньому прикладі маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де *A=-8, B=7,* $D=b^2-4ac=-20<0$. Спочатку виділимо похідну знаменника в чисельнику дробу. Для цього чисельник *7-8x* подамо у вигляді

$$7-8x=-2(4x-2)+3.$$

Тоді

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx=\int\frac{-2(4x-2)+3}{2x^2-2x+3}dx=-2\int\frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx+3\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(\ x-\frac{1}{2}\ )^2+(\ \frac{3}{2}-\frac{1}{4}\ )}=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C\,.$$

Тут $\int\frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx$ знайдений за формулою (2) таблиці інтегралів, вважаючи $u=2x^2-2x+3$ і враховуючи, що $2x^2-2x+3>0$ для будь-якого $x$, а $\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$ - за формулою (12), вважаючи $u=x-\frac{1}{2}$ і враховуючи, що $a^2=\frac{5}{4}$.

## Питання для самоперевірки

1 Який дріб називають раціональним?

2 Який раціональний дріб називають правильним ? Неправильним ?

3 Який вигляд мають елементарні (найпростіші) дроби?

4 Як здійснюється розклад правильного раціонального дробу на елементарні?

## ЛЕКЦІЯ 20

20 Інтегрування раціональних дробів

1 Якщо раціональний дріб неправильний, то виділяємо з нього цілу частину шляхом ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника, тобто подаємо у вигляді $\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$,

де $T(x)$ – многочлен, а $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб.

2 Розкладаємо знаменник дробу на лінійні та квадратичні множники:

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots,\ \text{де}\ \frac{p_i^2}{4}-q_i<0,(i=1,2,\ldots,\nu).$$

3 Розкладаємо правильний раціональний дріб на елементарні (найпростіші) дроби.

Зауважимо, що таких дробів буде стільки, скільки коренів має многочлен *Q(x),* включаючи їх кратність, причому кожній парі комплексних спряжених коренів буде відповідати один дріб III типу або $\nu$ дробів IV типу, якщо $\nu$ - кратність пари комплексних спряжених коренів.

4 Звільняємося від дробових членів, помноживши обидві частини рівності на $Q(x)$.

5.Обчислюємо невизначені коефіцієнти

$$A_1^{(1)},\ldots,A_1^{(\alpha_1)},\ldots,M_\nu^{(1)},N_\nu^{(1)},\ldots,M_\nu^{(\beta_\nu)},N_\nu^{(\beta_\nu)},$$

для чого прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях $x$ у лівій і правій частинах одержаної тотожності і розв`язуємо систему лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. (Число таких рівнянь повинно дорівнювати числу невідомих).

Зауважимо, що можна визначити коефіцієнти й іншим способом, надаючи в одержаній тотожності змінній $x$ довільні числові значення, причому якщо змінній $x$ надати значень простих коренів функції $Q(x)$, то обчислення будуть найпростішими. Часто буває корисно комбінувати обидва способи обчислення коефіцієнтів.

6 Підставляємо знайдені значення коефіцієнтів до схеми розкладу.

Таким чином, інтегрування раціонального дробу зводиться до знаходження інтегралів від многочлена й від елементарних (найпростіших) раціональних дробів.

Слід пам`ятати, що інтеграл від будь-якої раціональної функції завжди виражається в скінченному вигляді.

**Приклад.** Знайти $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

**Розв'язання.** Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більша, за степінь многочлена знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^5+x^4-8 & x^3-4x \\
 & x^5-4x^3 & x^2+x+4 \text{ (ціла частина)} \\ \hline
- & x^4+4x^3-8 & \\
 & x^4-4x^2 & \\ \hline
- & 4x^3+4x^2-8 & \\
 & 4x^3-16x & \\ \hline
 & 4x^2+16x-8 \text{ (остача).} &
\end{array}$$

Тепер подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тоді

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби.

Оскільки знаменник дробу $x^3$-$4x$=$x(x^2$-$4)$=$x(x$-$2)(x+2)$ має три прості корені $x=0$, $x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів I типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звільнюючись від дробових членів, одержимо

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

або

$$x^2+4x-2=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$ в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $A$, $B$, $C$:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+C=1, \\ x & 2B-2C=4, \\ x^0 & -4A=-2. \end{array}$$

Розв`язавши цю систему, знаходимо $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}.$

Слід відзначити, що тут коефіцієнти $A$, $B$ і $C$ простіше було б знайти способом підстановки до тотожності частинних значень $x$, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)\,,$$

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

звідки $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}.$

Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

## Питання для самоперевірки

Пригадайте правило інтегрування раціонального дробу.

## ЛЕКЦІЯ 21

21 Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли від тригонометричних функцій, як і від функцій ірраціональних, не завжди можна знайти. Однак, можна вказати на підклас таких функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді. До цього підкласу тригонометричних функцій входять тригонометричні функції, що є раціональними функціями від *sinx, cosx, tgx, ctgx, secx, cosecx*. Оскільки *tgx, ctgx, secx, cosecx* самі виражаються раціонально через *sinx* і *cosx*, то цей підклас можна охарактеризувати як підклас тригонометричних функцій, які є раціональними функціями від *sinx* і *cosx*.

1 Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx,$

де *R* –раціональна функція від *sinx* і *cosx* за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки

$$tg\frac{x}{2} = t\,, \quad (-\pi < x < \pi)$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції. При цьому

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ вигідніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t(0 < x < 2\pi).$

Слід також відзначити, що завдяки своїй універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто призводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл.

Нижче вкажемо випадки, коли мета буде досягнута за допомогою простіших підстановок.

2 Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx,$

де *R* – раціональна функція від *sinx* і *cosx*.

а) Якщо виконується рівність

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то вигідно застосувати підстановку *cosx=t*.

б) Якщо виконується рівність

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то доцільно застосувати підстановку *sinx=t*.

в) Якщо виконується рівність

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку $tgx=t$ або $ctgx=t$, при цьому, якщо $tgx=t$, то

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Зокрема,

$\int R(\sin x)\cos x dx$ підстановкою $\sin x=t$ зводиться до $\int R(t)dt.$

$\int R(\cos x)\sin x dx$ підстановкою $\cos x=t$ зводиться до $\int R(t)dt.$

$\int R(tgx)dx$ підстановкою $tgx=t$ зводиться до $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$

3 Інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

а) Якщо $m$ і $n$ – цілі числа і принаймні одне з цих чисел – непарне додатне число, наприклад $m=2k+1$, тоді

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^n x \cdot \sin^{2k} x \cdot \sin x dx =$$

$$\int \cos^n x (\sin^2 x)^k dx = -\int \cos^n x (1-\cos^2 x)^k d\cos x =$$

$$= |\cos x = t| = -\int t^n (1-t^2)^k dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n=2p+1>0$, то треба застосувати підстановку $t=\sin x$. Тоді

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^p \cos x dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p d\sin x = \int t^m (1-t^2)^p dt.$$

б) Якщо обидва показники $m$ і $n$ – парні невід`ємні числа(зокрема, один із них може дорівнювати нулю), то доцільно застосувати формули

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

в) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них – від`ємний, то треба зробити заміну $tgx=t$ або $ctgx=t$.

Зауважимо, що інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ дуже зручно знаходити за допомогою рекурентних формул.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \begin{cases} -\dfrac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x dx, m \neq -n, \\ \dfrac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx, m \neq -n. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m-1} \cdot \dfrac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \dfrac{m+n-2}{m-1}\int \dfrac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}, m \neq 1, \\ \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \dfrac{m+n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}, n \neq 1. \end{cases}$$

4 Інтеграл вигляду $\int tg^m xdx$ або $\left(\int ctg^m xdx\right)$,

де $m$ - ціле додатне число. Для знаходження такого інтеграла застосовують формулу

$$tg^2 x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad (\text{або} \quad ctg^2 x = \operatorname{cos}ec^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1),$$

за допомогою якої послідовно знижується степінь тангенса або котангенса.

5 Інтеграли вигляду

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx.$$

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right),$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right).$$

6 Інтеграли вигляду $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx.$

Такі інтеграли знаходять за допомогою універсальної підстановки $t = tg\frac{x}{2}$.

7 Інтеграли вигляду $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin^2 x + b_2 \sin x \cos x + c_2 \cos^2 x} dx.$

Для знаходження цих інтегралів доцільно застосувати підстановку $t=tgx$.

**Приклад .** Знайти $\int \cos^4 x \sin^5 x dx.$

**Розв'язання.** Маємо інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ де $m=5,\ n=4.$ Враховуючи, що $m=5>0$ і непарне, одержимо

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \cos^4 x(1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int t^4 (1-t^2)^2 dt = -\int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt =$$

$$= -\int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9}\right) + C = -\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9}\right) + C .$$

**Приклад.** Знайти $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

**Розв'язання.** Враховуючи, що $m=2$, $n=4$, тобто обидва показники додатні і парні, будемо мати

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d \sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C .$$

**Приклад.** Знайти $\int tg^5 xdx.$

**Розв'язання.** I спосіб. Враховуючи, що $tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1,$ будемо мати

$$\int tg^5 xdx = \int tg^3 x \cdot tg^2 xdx = \int tg^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int tg^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int tg^3 xdx = \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int tgxdx = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C\ .$$

**Приклад.** Знайти $\int \dfrac{2tgx + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx.$

**Розв'язання.** Оскільки при зміні знаків у *sinx* і *cosx* підінтегральна функція не змінює знака, то застосовуємо підстановку *tgx=t*. Отже, маємо

$$\int \frac{2tgx + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx = \int \frac{2tgx + 3}{(tg^2 x + 2)\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} tgx = t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2t + 3}{t^2 + 2}dt = \int \frac{2tdt}{t^2 + 2} + 3\int \frac{dt}{t^2 + 2} = \ln(t^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \ln(tg^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}} + C.$$

**Приклад.** Знайти $\int \dfrac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}dx.$

**Розв'язання.** Підінтегральна функція є раціональною функцією від *sinx* і *cosx*. Тому, зробивши підстановку $tg\dfrac{x}{2} = t,$ одержимо

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}dx = \left| \begin{matrix} tg\dfrac{x}{2} = t \\ dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}; \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1 + \dfrac{2t}{1 + t^2}\right)\dfrac{2dt}{1 + t^2}}{\dfrac{2t}{1 + t^2}\left(1 + \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)} = \int \frac{1 + t^2 + 2t}{t(1 + t^2 + 1 - t^2)}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} + t + 2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|t| + \frac{t^2}{2} + 2t\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2} + C\ .$$

**Приклад.** Знайти $\int \cos x \sin 3xdx.$

**Розв'язання.** Маємо інтеграл 5 типу. Застосовуючи формулу $\sin ax\cos bx = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a + b)x + \sin(a - b)x\right),$ одержимо

$$\int \cos x\sin 3xdx = \frac{1}{2}\int(\sin 4x + \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 4xdx + \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

## Питання для самоперевірки

1 Укажіть загальний метод знаходження інтеграла від функції, раціональної відносно тригонометричних функцій.

2 Опишіть методи знаходження інтегралів вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ де $m$ і $n$ –цілі числа.

3 Для знаходження яких інтегралів застосовують тригонометричні підстановки і які?

## ЛЕКЦІЯ 22

### 22 Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від будь-якої раціональної функції, як було викладено вище, завжди виражається в скінченному вигляді, чого не можна сказати про інтеграл від функції ірраціональної. Однак, можна вказати на деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

Загальний спосіб, за допомогою якого вдається знайти інтеграл від ірраціональної функції, полягає в тому, що внаслідок тієї чи іншої підстановки інтеграл від ірраціональної функції зводиться до інтеграла від функції раціональної. Тому цей спосіб називають раціоналізацією заданого інтеграла.

Розглянемо підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

1 Інтеграл вигляду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx,$

де $R$- раціональна функція, $m_i$ і $n_i > 1$- натуральні числа $(i=1, 2,\ldots,p)$.

Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x=t^k$, де $к$ – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i=1, 2, \ldots,p)$.

2 Інтеграл вигляду $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx,$

де $R$- раціональна функція, $m_i$ і $n_i > 1$- натуральні числа $(i=1, 2,\ldots,p)$ і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ($a, b, c, d$- сталі дійсні числа).

Такий інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де $к$- найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i=1, 2,\ldots,p)$.

3 Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Цей інтеграл зводиться до табличного шляхом виділення повного квадрата із квадратного тричлена.

4 Інтеграл вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Для знаходження цього інтеграла спочатку виділяємо в чисельнику похідну квадратного тричлена $ax^2+вx+c,$ після чого розкладаємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (1), а другий – розглянутий у п. 3.

5 Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

Підстановкою $x-\alpha=\frac{1}{t}$ зводять цей інтеграл до розглянутого в п. 3.

6 Інтеграл вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$ де $R$- раціональна функція.

Шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена $ax^2+bx+c$ цей інтеграл зводиться до одного з трьох інтегралів:

а) $\int R\left(z,\sqrt{m^2-z^2}\right)dz;$

б) $\int R\left(z,\sqrt{m^2+z^2}\right)dz;$

в) $\int R\left(z,\sqrt{z^2-m^2}\right)dz.$

Ці інтеграли знаходять відповідно за допомогою підстановок

а) $z=m\sin t$;

б) $z=m\,\mathrm{tg}\,t$;

в) $z=\frac{m}{\cos t}.$

**Приклад.** Знайти $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}.$

**Розв’язання.** Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів $x$. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=2,$ $n_2=3,$ $n_3=4,$ тому $к=12$ (найменше спільне кратне чисел $2, 3$ і $4$). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \left|\begin{array}{l} x=t^{12} \\ dx=12t^{11}dt \end{array}\right| = \int \frac{t^6}{t^8-t^3}12t^{11}dt = 12\int \frac{t^{17}dt}{t^3(t^5-1)} = 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{rl} \begin{array}{r} -\;\; t^{14} \qquad\quad \\ t^{14}-t^9 \qquad\quad \\ \hline t^9 \qquad\quad \\ -\;\; t^9-t^4 \\ \hline t^4 \end{array} & \begin{array}{|l} t^5-1 \\ \hline t^9+t^4 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$=12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=12\left(\int t^9dt+\int t^4dt+\frac{1}{5}\int\frac{5t^4dt}{t^5-1}\right)=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=\frac{6}{5}\left(t^{10}+2t^5+2\ln\left|t^5-1\right|\right)+C.$$

Повертаючись до змінної $x$, остаточно будемо мати

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

**Розв'язання.** Маємо інтеграл другого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=3$, $n_2=2$, тому $\kappa=6$. Використовуючи підстановку $2x+1=t^6$, звідки $x=\frac{1}{2}(t^6-1)\cdot dx=3t^5dt$, одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln\left|t-1\right|\right)+C.$$

Оскільки $t=\sqrt[6]{2x+1}$, то повертаючись до змінної $x$, будемо мати

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=3\left(\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2}+\sqrt[6]{2x+1}+\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|\right)+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

**Розв'язання.** Виділимо з квадратного тричлена повний квадрат:

$$9x^2-6x+2=9x^2-6x+1+1=(3x-1)^2+1.$$

Тоді, враховуючи також, що $d(3x-1)=3dx$, одержимо табличний інтеграл (15):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=\frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right|+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx.$

**Розв'язання.** Спочатку в чисельнику виділимо похідну підкореневого виразу, після чого розкладемо інтеграл на суму двох інтегралів. Тоді

$$-4\int\frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$$

Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (1), а другий зведеться до табличного інтеграла (14) шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена $5+2x-x^2$.

Виділяючи повний квадрат, будемо мати

$$5+2x-x^2=-(x^2-2x-5)=-(x^2-2x+1-6)=6-(x-1)^2.$$

Отже,

$$\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx=-4\int\frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.

**Розв'язання.** Покладемо $x-1=\frac{1}{t}$, тоді $x=\frac{1}{t}+1$ і $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Отже,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{3+2\left(\frac{1}{t}+1\right)-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{3+\frac{2}{t}+2-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{t\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x-1}+\sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{x-1}\right|+C.$$

**Приклад.** Знайти $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx.$

**Розв'язання.** Маємо інтеграл першого типу. Покладемо $x=3sint$. Тоді $dx=3costdt$, $\sqrt{(9-x^2)^3}=\sqrt{(9-9\sin^2 t)^3}=\sqrt{9^3(1-\sin^2 t)}=27\sqrt{(\cos^2 t)^3}=27\cos^3 t$ і шуканий інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\int \frac{27\cos^3 t}{3^6\sin^6 t}\cdot 3\cos t dt=\frac{1}{9}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\frac{1}{9}\int ctg^4 t\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{9}\cdot\frac{ctg^5 t}{5}+C=-\frac{1}{45}ctg^5 t+C.$$

Враховуючи, що $ctg^5 t=\frac{\cos^5 t}{\sin^5 t}=\frac{\sqrt{(1-\sin^2 t)^5}}{\sin^5 t}=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^5}}{\left(\frac{x}{3}\right)^5}=\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{x^5}$ ,

остаточно будемо мати

$$\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx=-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}+C.$$

## Питання для самоперевірки

1 Як виконується інтегрування найпростіших ірраціональних функцій?

2 Для знаходження яких інтегралів застосовують тригонометричні підстановки і які?

# ЛЕКЦІЯ 23

23.1 Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця.
23.2 Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі.

## 23.1 Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця

Поняття визначеного інтеграла відіграє важливу роль у математичному аналізі та у різноманітних його застосуваннях.

Розглянемо задачу, яка призводить до поняття визначеного інтеграла.

**Задача обчислення площі криволінійної трапеції**

Нехай на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$ задана неперервна функція $f(x)$.

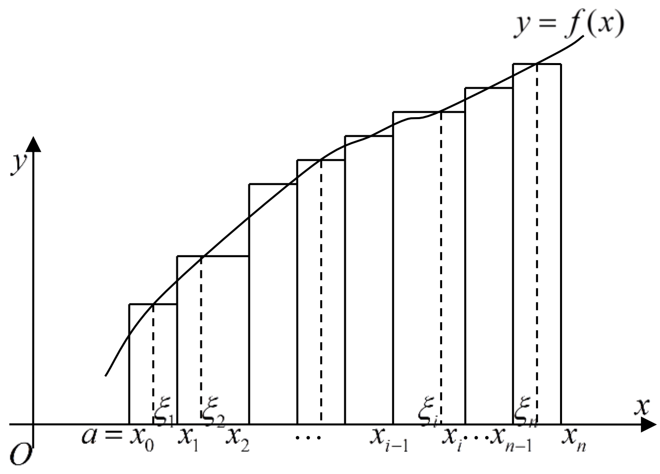



Рис.23.1

**Криволінійною трапецією** називають плоску фігуру, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі $Ox$. Розглянемо випадок, коли $f(x) \geq 0$ (рис.23.1).

Розіб`ємо відрізок $[a;b]$ на $n$ довільних частин точками $a = x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1}, x_n = b$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b)$.

Кожний такий відрізок будемо називати **частковим**.

Через $\Delta x_k$ позначимо довжину часткового відрізка $[x_{k-1}; x_k]$ ($к$=1,2,…,$n$):

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

На кожному частковому відрізку оберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через $\xi_k$ ($к$=1,2,…,$n$), обчислимо $f(\xi_k)$ – значення заданої функції $f(x)$ у цій точці. Визначимо добуток числа $f(\xi_k)$ на довжину $\Delta x_k$ відрізка, на якому взято точку $\xi_k$. Цей добуток $f(\xi_k)\Delta x_k$ дорівнює площі прямокутника з основою $\Delta x_k$ і висотою $f(\xi_k)$. Сума всіх таких добутків

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

дорівнює площі ступінчастої фігури, яка складається з окремих прямокутників і приблизно дорівнює площі криволінійної трапеції.

Така сума називається **інтегральною сумою для функції *f*(*x*)** на відрізку $[a;b]$.

За точне значення площі криволінійної трапеції можна вважати границю $S$, до якої прямує площа ступінчастої фігури, якщо $n \to \infty$ (кількість часткових відрізків нескінченно зростає) і $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

**Означення**. Границя інтегральної суми , тобто

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові, ні від вибору на них точок $\xi_k$, називається **визначеним інтегралом функції *f*(*x*) на відрізку** $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Отже,

$$\int f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ . \qquad (23.1)$$

Таким чином, визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (**геометричній зміст визначеного інтеграла**) (рис.23.1).

Числа $a$ і $b$ називаються відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, $x$ – змінною інтегрування, відрізок $[a;b]$ – відрізком інтегрування.

**Означення.** Функція $f(x)$, для якої на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx.$, називається **інтегрованою на відрізку** $\int\limits_a^b f(x)dx.$.

Зауваження. Величина визначеного інтеграла залежить лише від вигляду підінтегральної функції і від меж інтегрування $a$ і $b$, але не від змінної інтегрування, яку можна позначити будь – якою буквою, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(u)du = ... = \int\limits_a^b f(z)dz.$$

Сформулюємо без доведення **теорему існування визначеного інтеграла**.

**Теорема (Коші).** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$**,** то існує границя її інтегральної суми (визначений інтеграл). Ця границя не залежить ні від розбиття відрізка $[a;b]$**,** ні від вибору точок $\xi_k$ на часткових відрізках.

Обчислення визначеного інтеграла за означенням (як границі інтегральної суми) пов'язане з великими труднощами. Полегшити цю задачу можна за допомогою формули Ньютона – Лейбніця (яку буде подано далі), що встановлює зв`язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

Сформулюємо **основні властивості визначеного інтеграла,** які безпосередньо випливають із його означення і доведемо деякі з них. Вважатимемо, що функція $f(x)$ є інтегрованою функцією на відрізку $[a;b]$.

1) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

**Доведення.** $\int cf(x)dx = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int\limits_a^b f(x)dx$.

2) Визначений інтеграл від суми (різниці) декількох інтегрованих функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

Доведення цієї властивості спирається на відповідну властивість границі суми (різниці) функцій.

3) Якщо $f(x) \equiv 1$ для $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b dx = b - a$.

4) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

6) Якщо $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b 0dx = 0.$$

7) Якщо $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8) Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – інтегровані функції на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

9) Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і $a<c<b$, то ця функція інтегрована і на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, причому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доведення цієї властивості спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини.

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають **адитивною властивістю визначеного інтеграла**.

10) Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, і $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Тут $m$ – найменше, а $M$ – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Ці нерівності дають змогу оцінити значення визначеного інтеграла.

11) Теорема (про середнє значення визначеного інтеграла). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

При цьому значення функції *f(x)* у точці *c* називають **середнім значенням цієї функції на відрізку** $[a;b]$**.**

12) Для **інтеграла із змінною верхньою границею** $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ (який є функцією від верхньої границі $x$) виконується рівність: $\Phi'(x) = f(x)$.

**Формула Ньютона – Лейбніця**

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – будь- яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (23.2)$$

Ця формула має назву **формули Ньютона – Лейбніца** і є основною формулою інтегрального числення.

**Доведення.** Нехай $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$. За властивістю (12) функція $\int_a^x f(t)dt$ також є первісною від $f(x)$. Оскільки дві первісні від однієї функції відрізняються на сталу величину $C^*$, то маємо

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C^*.$$

Визначимо сталу $C^*$, поклавши $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C^* \quad \text{або} \quad 0 = F(a) + C^*, \text{ звідки } C^* = -F(a).$$

Отже, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Покладемо $x = b$ і отримаємо формулу Ньютона – Лейбніця:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Для зручності користування формулу (12.2) записують у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (23.3)$$

**Приклад.** Обчислити $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

**Розв`язання.** За формулою Ньютона – Лейбніця

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Отже, скориставшись цією формулою і властивістю 5 визначеного інтеграла, одержимо

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\frac{1}{5}\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}\cdot 5dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(11-5)^2}-\frac{1}{(11-10)^2}\right)=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36}-1\right)=\frac{7}{72}.$$

**Приклад.** Обчислити $\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt.$

**Розв`язання.** Враховуючи формулу Ньютона – Лейбниця

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt=-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=-\frac{T}{2\pi}\big(\cos(\pi-\varphi_0)-\cos(-\varphi_0)\big)=$$

$$=-\frac{T}{2\pi}(-\cos\varphi_0-\cos\varphi_0)=\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0.$$

**Приклад.** Обчислити $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

**Розв`язання.**

$$\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^3}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^3}=2\left(\sqrt{1+\ln e^3}-\sqrt{1+\ln 1}\right)==2(\sqrt{4}-\sqrt{1})=2(2-1)=2.$$

## 23.2 Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі.

### 23.2.1 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай для інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$ зроблена підстановка $x=\varphi(t)$.

**Теорема.** Якщо:

1) функція $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні при $t\in[\alpha;\beta]$;
2) множиною значень функції $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ є відрізок $[a;b]$;
3) $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$,

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt. \tag{23.4}$$

Цю формулу називають **формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.**

**Доведення.** Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніця $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Оскільки $(F(\varphi(t))'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, то $(F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, де $t\in[\alpha;\beta]$. Тому за формулою Ньютона – Лейбніця маємо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x).$$

Відзначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності переходити до початкової змінної, як це робиться при знаходженні невизначеного інтеграла, а досить лише перерахувати межі інтегрування для нової змінної.

**Приклад.** Обчислити $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$

**Розв`язання.** Функція $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$ неперервна на відрізку $[1;4]$. Вважатимемо, що $x = t^2$. Тоді нові межі інтегрування визначаємо з рівнянь $1 = t^2$, звідки $t_н=1$ і $4=t^2$, звідки $t_в=2$. Функція $x=t^2$ неперервна разом зі своєю похідною $x' = 2t$ на відрізку $[1;2]$, причому її значення не виходять із відрізка $[1;4]$. Тому

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_1^2 \frac{t^2dt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 2\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1)\right)\Big|_1^2 = 2\left(2-2+\ln 3 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) = 1 + 2\ln\frac{3}{2}.$$

### 23.2.2 Інтегрування частинами визначеного інтеграла

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a;b]$, тоді $(uv)' = u'v + uv'$. Інтегруючи обидві частини рівності від $a$ до $b$, отримаємо

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx.$$

Оскільки $\int (uv)'dx = uv + C$, то $\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b$, звідки

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (23.5)$$

Формулу (12.5) називають формулою **інтегрування частинами для визначеного інтеграла.**

**Приклад.** Обчислити $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

**Розв`язання.** Функції $u = x$ і $v = -e^{-x}$ неперервні разом із своїми похідними $u' = 1$ і $v' = e^{-x}$ на відрізку $[0;1]$, отже за формулою інтегрування частинами $\int_0^1 xe^{-x}dx = \left|\begin{matrix} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^{-x}dx;\ v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\end{matrix}\right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx =$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

## Питання для самоперевірки

1 Що називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$?
2 В чому полягає геометричній зміст визначеного інтеграла?
3 Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
4 Запишіть формулу Ньютона – Лейбніца.

## ЛЕКЦІЯ 24

24.1 Геометричне застосування визначених інтегралів. Обчислення площі плоскої фігури.
24.2 Обчислення об'єму тіла обертання.
24.3 Обчислення довжини дуги плоскої кривої. Обчислення площі поверхні тіла обертання.

### 24.1 Обчислення площі плоскої фігури. Випадок прямокутних координат

Як було встановлено (див. геометричний зміст визначеного інтеграла) площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі $Ox$ (рис.24.1), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (24.1)$$

Якщо криволінійна трапеція розташована нижче за вісь $Ox$ ( $f(x) < 0$), то її площа визначається за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

У загальному випадку $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

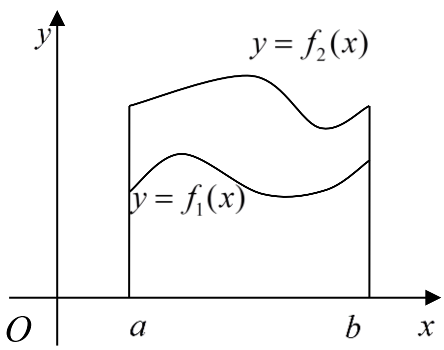



Рис.24.1

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, причому на відрізку $[a;b]$ $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис.13.1), то її площу визначають за формулою

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

тобто

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (24.2)$$

### Випадок параметричного задання функції

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha;\beta],$$

(де $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$) і ці параметричні рівняння визначають деяку функцію $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою $S=\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

Зробимо заміну змінної у цьому інтегралі, покладаючи $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$. Оскільки $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$, то формула площі криволінійної трапеції, коли крива задана у параметричній формі має вигляд

$$S=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (24.3)$$

### Випадок полярної системи координат

Визначимо площу криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $r=r(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ (рис.24.2).

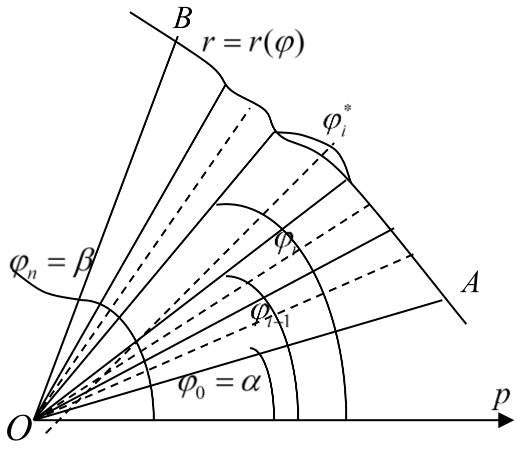



Рис.24.2

Розіб'ємо криволінійній сектор *OAB* радіус – векторами $\varphi=\alpha=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1,...,\varphi=\varphi_n$ на $n$ частин довільним чином. Площу сектора $\Delta S_i$ ($i=1,2,...,n$), що відповідає проміжку кутів $[\varphi_{i-1};\varphi_i]$, визначимо як площу сектора круга з радіусом $r(\varphi_i^*)$, де $\varphi_i^*\in[\varphi_{i-1};\varphi_i]$, тобто

$$\Delta S_i=\frac{1}{2}r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i \quad (\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}).$$

Складемо інтегральну суму $\sum\limits_{i=1}^n \Delta S_i=\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{2}r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i$. Її границя при $\max\Delta\varphi_i\to 0$ ($n\to\infty$) є визначеним інтегралом і дає площу сектора *OAB*.

Отже, формула площі криволінійного сектора має вигляд

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (24.4)$$

**Приклад.** Переріз даху цеху має форму арки циклоїди (радіус похідного кола дорівнює $a$). Визначити площу поперечного перерізу (рис.13.3) , якщо висота колон цеху дорівнює $h$.

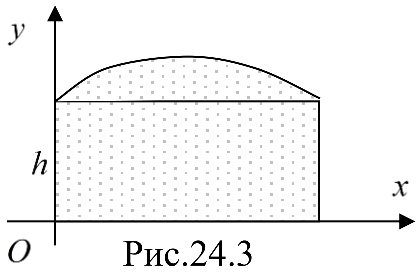


Рис.24.3

**Розв'язання.** Шукана площа є сумою площі арки циклоїди і прямокутника, сторони якого дорівнюють $h$ і $2\pi a$, тобто

$$S = S_{ар.цікл} + 2\pi ah.$$

Циклоїда визначається рівняннями $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$. Якщо вісь $Ox$ направити вздовж лінії, яка з'єднує вершини колон, тоді за формулою $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$ маємо:

$$S_{ар.цікл} = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)(1 - \cos t)dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Остаточно загальна площа $S = 3\pi a + 2\pi ah = \pi a(3a + 2h)$.

**Приклад.** Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

**Розв'язання.** Якщо полярний кут змінюється від 0 до $\pi/4$, то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2 \text{ (кв.од.)}.$$

## 24.2 Об'єм тіла обертання

### Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів

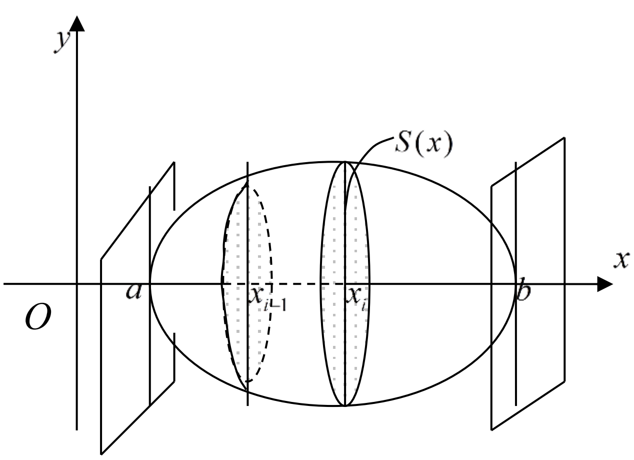


Рис.24.4

Визначимо об'єм $V$ тіла, якщо відома площа перерізу цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі $Ox$: $S = S(x),\ a \le x \le b$ (рис.24.4).

Припустимо, що функція $S = S(x)$ неперервна на $[a;b]$.

Знов застосуємо схему побудови інтегральних сум, яка базується на означенні визначеного інтеграла.

Для цього розіб'ємо тіло площинами $x = x_0 = a_0,\ x = x_1, ..., x = x_n = b$ на $n$ частин.

Виберемо точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ і побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі $Ox$, а напрямна є контуром перерізу тіла площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого циліндру дорівнює $S(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Шуканий об'єм $V$ дорівнює границі інтегральної суми функції $S(x)$ на відрізку $[a; b]$:

$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i ,$$

тобто

$$V = \int_a^b S(x)dx . \qquad (24.5)$$

**Об'єм тіла обертання**

Нехай навколо осі $Ox$ обертається криволінійна трапеція, яка обмежена неперервною лінією $y = f(x)$, $f(x) \ge 0$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі $Ox$. При цьому утворюється тіло, яке називають **тілом обертання** (рис.24.5). Переріз цього тіла площиною, перпендикулярною осі $Ox$, яка проведена через довільну точку $x$ осі $Ox$, являє собою коло радіуса $y = f(x)$, тобто його площа $S(x) = \pi y^2$.

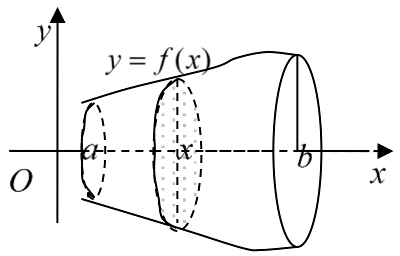



Рис.24.5

Застосовуючи формулу об'єму тіла за площиною паралельних перерізів, отримаємо

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx . \qquad (24.6)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \ge 0$ і прямими $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі $Oy$, дорівнює

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy . \qquad (24.7)$$

**Приклад.** Знайти об'єм тіла, яке утворюється обертанням фігури , обмеженої лініями $x = \sqrt{2y}$, $y = 2\sqrt{2}$ навколо осі $Oy$ (рис.13.6).

**Розв'язання.**

Скористаємось формулою $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$,

Тобто $V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi \, y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi$ .

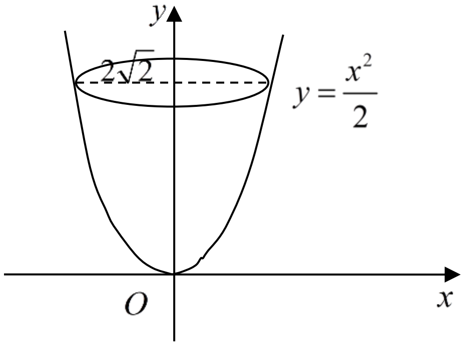



Рис.24.6

## 24.3 Довжина дуги кривої та площа поверхні обертання
### 24.3.1 Обчислення довжини дуги плоскої кривої
### Випадок прямокутних координат

Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива *AB*, рівняння якої $y = f(x)$, де $a \le x \le b$ (рис.24.7)

Під довжиною дуги кривої *AB* розуміють границю, до якої прямує довжина ламаної, що вписана в цю дугу, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай функція $y = f(x)$ та її похідна неперервні на відрізку $[a;b]$. Тоді довжина дуги кривої $y = f(x)$ дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \qquad (24.8)$$

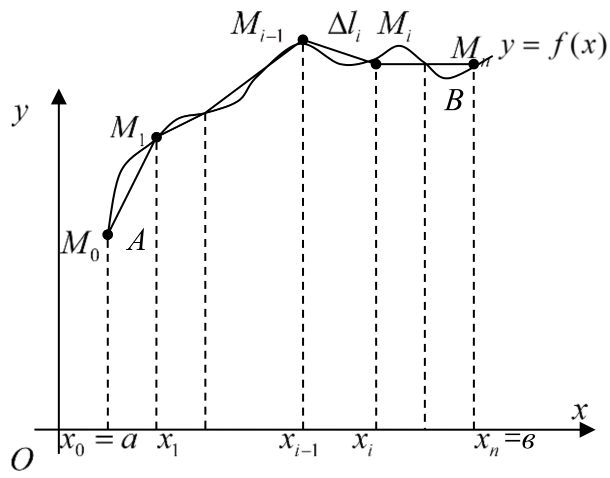



Рис.24.7

**Доведення.** Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1}, x_n = b$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$) на $n$ довільних частин. Нехай цим точкам відповідають точки $M_0,\ M_1, ..., M_n$ на кривій *AB*, причому точки $M_0$ і $M_n$ співпадають з точками *A* і *B* відповідно. Проведемо хорди $M_0M_1,\ M_1M_2, ..., M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо через $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$.

Довжину $\Delta l_i$ $(i = 1, 2, ... n)$ хорди $M_{i-1}M_i$ визначимо за теоремою Піфагора :

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \ \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

За теоремою Лагранжа про скінченні прирости функції $\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i$, де $\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Тому $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$,

А довжина вписаної ламаної $M_0M_1...M_n$ дорівнює

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

За умовою $f'(x)$ неперервна, тому функція $\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$ теж неперервна. Отже, існує границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$, коли $\max \Delta x_i \to 0$, тобто існує визначений інтеграл:

$$l = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to o \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\substack{\max \infty x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + ((f'(x))^2}\,dx.$$

Таким чином, маємо формулу довжини дуги кривої

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ або у скороченому вигляді $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx$.

## Випадок параметричного задання кривої

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді довжина $l$ кривої $AB$ визначається за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \qquad (24.9)$$

Цю формулу можна здобути із формули довжини дуги кривої, яка задана в прямокутних координатах, за допомогою підстановки

$$x = x(t),\ dx = x'(t)dt,\ f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}\,.$$

## Випадок полярної системи координат

Нехай крива $AB$ задана рівнянням $r = r(\varphi)$ у полярних координатах, де функції $r(\varphi)$ і $r'(\varphi)$ неперервні при $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Якщо в формулах переходу від полярної до прямокутної системи координат $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ параметром вважати полярний кут $\varphi$, то криву можна визначити параметричними рівняннями $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Тоді

$$\begin{cases} x'_\varphi == r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

Тому

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + y'_\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\,.$$

Отже, формула довжини дуги кривої має вигляд

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi\,. \qquad (24.10)$$

**Приклад.** Знайти довжину дуги кардіоїди $r = a(\cos\varphi + 1)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

**Розв'язання.** За формулою довжини дуги кривої у полярній системі координат (6.13) маємо

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2 + (a(-\sin\varphi))^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a\,.$$

### 24.3.2 Площа поверхні обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* дуги гладкої кривої *y=f(x),* між точками *x=a* і *x=в* обчислюється за формулою:

$$S_{п.о.} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx\,. \tag{24.11}$$

Якщо спрямлювана крива задана рівнянням *x=x(t),* *y=y(t),* де *x(t)* і *y(t)* – функції неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[t_1;t_2]$, то площа поверхні обертання визначається за формулою:

$$S_{п.о.} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt\,.$$

Якщо ж спрямлювана крива задана рівнянням $r=r(\varphi)$, де $r(\varphi)$ – функція неперервна разом із своєю похідною першого порядку для $\alpha \le \varphi \le \beta$, то площу поверхні, утвореної обертанням цієї кривої навколо полярної осі, обчислюємо за формулою:

$$S_{п.о.} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2+\left(r_\varphi'\right)^2}\,d\varphi.$$

**Приклад.** Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2=4ax$ навколо осі абсцис від вершини до точки з абсцисою $x=3a$.

**Розв'язання.** Поверхня обертання показана на рис. 24.8. Із рівняння параболи $y=2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$. Тоді $y'(x)=\dfrac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, а $1+\left(y'(x)\right)^2=1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x+a}{x}$.

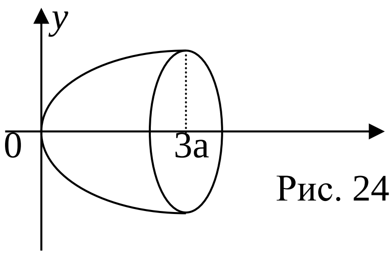



Рис. 24.8

Площу поверхні обертання обчислимо за формулою (24.11), враховуючи, що $0 \le x \le 3a$:

$$S_{п.о.} = 2\pi\int_0^{3a} 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\sqrt{a}\int_0^{3a}\sqrt{x+a}\,dx = 4\pi\sqrt{a}\cdot\left.\frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{3a} = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left(8a\sqrt{a}-a\sqrt{a}\right)=\frac{56}{3}\pi a^2.$$

### Питання для самоперевірки

1 Як обчислюється площа фігури, обмеженої кривою, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

2 Як обчислюється об'єм тіла обертання?

3 Як обчислюється довжина кривої, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

## ЛЕКЦІЯ 25

25.1 Механічні застосування визначеного інтеграла. Розв'язання задач фізики.

25.2 Невласні інтеграли по нескінченному проміжку та від розривних функцій, ознаки збіжності.

### 25.1 Механічні застосування визначеного інтеграла.

#### 25.1.1 Центр ваги плоскої кривої

Статичним моментом відносно осі $l$ матеріальної точки з масою $m$ і віддаленої від осі $l$ на відстані $d$, називається величина $M_l=md$.

**Статичним моментом відносно осі *l*** системи $n$ матеріальних точок з масами $m_1, m_2,..., m_n$, які лежать в одній площині з віссю і віддалених від неї на відстанях $d_1, d_2, ..., d_n$, називається величина $M_l=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i$,

причому відстані точок, які лежать по одну сторону осі $l$, беруть зі знаком (+), а по другу – зі знаком (–). Аналогічно визначаються статичні моменти системи точок відносно площини.

Якщо маси неперервно заповнюють лінію або фігуру площини $xOy$, то статичні моменти $M_x$ і $M_y$ відносно координатних осей $Ox$ і $Oy$ виражаються відповідними інтегралами.

Відзначимо, що для однорідних геометричних фігур густину вважають рівною одиниці.

Зокрема, якщо крива задана в декартових прямокутних координатах рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – функція, неперервна разом із своєю похідною першого порядку на відрізку $[a;b]$, то статичні моменти цієї кривої відносно осей координат матимуть вигляд

$$M_x=\int_a^b \gamma(x)y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx \qquad (25.1)$$

$$M_y=\int_a^b \gamma(x)x\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx \qquad (25.2)$$

Координати центра ваги плоскої кривої обчислюються за формулами

$$x_c=\frac{M_y}{m}, \qquad (25.3)$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}, \qquad (25.4)$$

де $M_x$ і $M_y$ – статичні моменти кривої відносно осей координат, а $m$– маса кривої, причому

$$m=\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx\,. \qquad (25.5)$$

Якщо крива однорідна, то її маса чисельно дорівнює довжині відповідної дуги.

Відзначимо, що центр ваги маси, розподіленої вздовж спрямлюваної кривої зі сталою лінійною густиною, за означенням, береться за центр ваги самої спрямлюваної кривої.

Відзначимо також, що центр ваги однорідної матеріальної лінії або фігури, яка має вісь симетрії, лежить на цій осі.

### 25.1.2 Центр ваги плоскої фігури

Координати центра ваги плоскої фігури обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}, \tag{25.6}$$

де $m$ – маса фігури, $M_x$ і $M_y$ – статичні моменти фігури відносно координатних осей, причому

$$m = \int_a^b \gamma(x)\big(y_в(x) - y_н(x)\big)dx, \tag{25.7}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left(y_в{}^2(x) - y_в{}^2(x)\right)dx, \tag{25.8}$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x)x\big(y_в(x) - y_н(x)\big)dx. \tag{25.9}$$

Якщо фігура однорідна, то $\gamma(x) = const$, яку прийнято вважати рівною одиниці. Очевидно, що в цьому випадку маса фігури чисельно дорівнює її площі.

### 25.1.3 Розв'язання задач фізики.

Визначений інтеграл широко використовується при обчисленнях різних фізичних величин. Для обчислення деякої величини $u$ за допомогою визначеного інтеграла необхідно керуватися однією із наступних схем.

Схема I.

1 Розбиваємо величину $u$ на велике число $n$ малих елементів $\Delta u_i$ :

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i.$$

2 Знаходимо наближене значення кожного елемента $\Delta u_i$ у вигляді добутку: $\Delta u_i \approx f(x_i)\Delta x$.

3 Зображаємо наближене значення $u$ інтегральною сумою: $u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$,

де $x$ – один із параметрів величини $u$ , який за умовою задачі змінюється на відомому відрізку $a \le x \le b$; $f(x)$ –задана або визначена із умови задачі функція від $x$; $a=x_0$, $x_1$, $x_2$,…, $x_n=b$ –точки відрізка $[a;b]$, які при розбитті $u$ на $n$ елементів розбивають цей відрізок на $n$ рівних частин $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Якщо із умови задачі випливає, що похибка цієї наближеної рівності наближається до нуля при $n \to \infty$, то шукана величина $u$ буде чисельно рівна визначеному інтегралу: $u = \int_a^b f(x)dx.$

**Зауваження.** При знаходженні наближеного значення малого елемента $\Delta u_i$ використовуються різні припущення. Наприклад, тут припустимо малі криволінійні відрізки замінювати стяжними їх хордами; змінну силу (або швидкість) на малих ділянках шляху тут можна замінювати сталою силою (або швидкістю), припускаючи, що вона незмінно зберігає на всій малій ділянці шляху ту величину і той напрямок, який вона мала в початковій або кінцевій точці цієї малої ділянки; змінну температуру тіла, яке неперервно нагрівається або охолоджується за малий проміжок часу тут можна вважати сталою, припускаючи, що за цей час вона незмінно зберігає те значення, яке мала на початку або в кінці цього проміжку.

Схема II.

1 Нехай величина $u$ одержує приріст $\Delta u \approx f(x)\Delta x$, який відповідає зміні $x$ на малу величину $\Delta x$; $f(x)$ розглядається як задана або визначена із умови задачі функція від $x$, де $x$ змінюється на відомому із умови задачі відрізку $a \le x \le b$.

2 Замінюючи приріст $\Delta u$ диференціалом $du$ (головна частина приросту $\Delta u$) і $\Delta x$ диференціалом $dx$ ($\Delta x = dx$), одержимо: $du=f(x)dx$.

3 Інтегруючи цю рівність в межах від $x=a$ до $x=b$, одержимо:

$$u = \int_a^b f(x)dx.$$

**Зауваження.** Тут також використовуються різні припущення, які взагалі зводяться до того, що при зміні аргументу $x$ на малу величину $dx$ зміна функції u(x) вважається пропорціональною $dx$. Необхідно також переконатися, що при $dx \to 0$ нескінченно малі $\Delta u$ і $du$ будуть еквівалентні.

**Зауваження.** Більш зручною для практичного застосування є схема II.

### Обчислення шляху, пройденого тілом

Відомо, що шлях, пройдений тілом при рівномірному русі за час $t$, обчислюється за формулою $S=\upsilon t$, де швидкість $\upsilon$ – стала величина. При нерівномірному русі швидкість $\upsilon$ – величина змінна, залежна від часу $t$, тобто $\upsilon=\upsilon(t)$. Шлях, пройдений тілом при нерівномірному русі за час $t_2 - t_1$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt. \tag{25.10}$$

### Обчислення роботи сили

Відомо, що коли на тіло діє стала сила $F$ і воно переміщується в напрямку цієї сили, то робота $A$ сили $F$ на відрізку шляху $l$ буде: $A=Fl$,
де $F$ виражається в ньютонах (*Н*), $l$ –в метрах (*м*), $A$ – в джоулях (*Дж*).

Якщо сила $F$ –змінна величина, яка залежить від $x$, то робота $A$ сили $F$ обчислюється за формулою:

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (25.11)$$

**Обчислення роботи, здійснюваної при розтягу (стиску) пружини**

Для розв'язання цієї задачі необхідно скористатись законом Гука, згідно з яким для пружини маємо: $F=kx$, тобто осад пружини прямо пропорціональний діючій на неї силі.

Якщо $F$ виражається в ньютонах, $x$ – в метрах, то $\kappa$ (твердість або жорсткість пружини) виражається в *Н/м*.

**Обчислення кінетичної енергії**

Відомо, що кінетична енергія матеріальної точки з масою $m$ і швидкістю $\upsilon$, визначається за формулою $K = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

Кінетична енергія системи $n$ матеріальних точок з масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, які мають відповідно швидкості $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$, визначається формулою

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^{\,2}}{2}.$$

Для обчислення кінетичної енергії тіла його належним чином розбивають на елементарні частинки (матеріальні точки). Потім, підсумовуючи кінетичні енергії цих частинок і переходячи до границі, одержують інтеграл:

$$K = \frac{1}{2}\int_a^b \upsilon^2 dm. \qquad (25.12)$$

## 25.2 Невласні інтеграли

Невласними інтегралами називають інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування (інтеграли з нескінченними межами інтегрування) і інтеграли від необмежених функцій (інтеграли від функцій, які мають нескінченний розрив).

### 25.2.1 Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $b>a$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує при будь-якому $b \ge a$ і, отже, він є деякою функцією від $b$, визначеною на проміжку $[\ a;+\infty)$, тобто $I(b) = \int_a^b f(x)dx.$

Якщо функція $I(b)$ при $b \to +\infty$ має скінчену границю $A$, то цю границю називають невласним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$ і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx.$

Таким чином, за означенням $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (25.13)$$

При цьому вважають, що невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається (до числа $A$).

Якщо ж функція $I(b)=\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b\to+\infty$ не має скінченої границі, то у цьому разі вважають, що невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Аналогічно визначається невласний інтеграл вигляду $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx.$ Коли функція *f(x)* визначена в проміжку $(-\infty;b]$ та інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $a<b,$ то за означенням

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (25.14)$$

Невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ називають збіжним, якщо існує скінчена границя, що стоїть у правій частині попередньої рівності, і розбіжним, якщо такої скінченної границі не існує.

Нарешті, якщо функція *f(x)* визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$, то за означенням,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (25.15)$$

де $c$ – довільне стале число, причому невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають збіжним, якщо збігаються обидва невласних інтеграли, які стоять у правій частині вищезазначеної рівності. Якщо ж принаймні один із цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають розбіжним.

**Ознаки збіжності невласних інтегралів із нескінченними границями інтегрування**

1 Якщо *f(x)* і $\varphi(x)$ – дві невід'ємні функції на проміжку $[a;+\infty)$, інтегровані на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $b>a,$ і якщо $f(x)\le\varphi(x)$ для $a\le a_1\le x<+\infty,$ то із збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx,$ випливає збіжність невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ а з розбіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(xdx)$ випливає розбіжність невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx.$

2 Якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = c,$ причому $c > 0,$ $c \neq \infty$ і $f(x) \neq 0$ для всіх достатньо великих $x,$ то невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

3 Якщо збігається $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ то збігається і $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx,$ де $c$ – величина стала.

4 Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $b > a$, то із збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ випливає збіжність і невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ причому

$$\left| \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Зауважимо, що невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Якщо ж невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають умовно збіжним.

5 Нехай функція $f(x)$ невід’ємна на проміжку $[a;+\infty)$ $(a > 0)$ і інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $b > a$.

Якщо $f(x) \leq \frac{c}{x^{\alpha}}$ для $a \leq a_1 \leq x < +\infty,$ де $c$ – константа, а число $\alpha > 1,$ то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Якщо ж $f(x) \geq \frac{c}{x^{\alpha}}$ для $a \leq a_1 \leq x < +\infty,$ де $c$ –константа, а число $\alpha \leq 1,$ то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

**Заміна змінної у невласному інтегралі**

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $x \geq a.$ Якщо функція $x = \varphi(t),$ яка визначена на проміжку $\alpha < t < \beta$ ($\alpha$ і $\beta$ можуть бути і нескінченними), має неперервну похідну $\varphi'(t) \neq 0$ і $\lim\limits_{t \to \alpha+0} \varphi(t) = a,$ $\lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t) = +\infty,$ то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (25.16)$$

### 25.2.2 Невласні інтеграли від необмежених функцій

Якщо функція *f(x)* не обмежена в будь-якому околі точки *с* відрізка $[a;b]$ і неперервна при $a \le x < c$ і $c < x \le b,$ то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \qquad (25.17)$$

де $\varepsilon_1$ і $\varepsilon_2$ змінюються незалежно одне від одного. У випадку *с=в* або *с=а*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad \text{або} \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Якщо границі, які стоять у правих частинах попередніх рівностей, існують і скінчені, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають збіжним.

Якщо ж ці границі не існують або дорівнюють нескінченності, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Підкреслимо, що невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають збіжним лише в тому випадку, коли обидві границі правої частини існують і скінчені.

Якщо ж принаймні одна з цих границь не існує або дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Зауважимо, що позначення невласного інтеграла від необмеженої функції за формою не відрізняється нічим від позначення визначеного інтеграла. Тому, щоб розрізнити, буде інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ визначеним чи невласним, треба перевірити, буде чи ні функція *f(x)* інтегрованою на відрізку $[a;b]$.

Якщо функція *f(x)* необмежена на проміжку $[a;d)$ або на проміжку $(a;b]$, або в будь-якому околі точки *с* відрізка $[a;b]$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде невласним.

Відзначимо також, що коли функція *f(x)* необмежена в будь-якому околі точки *с* відрізка $[a;b]$ й існує неперервна на $[a;b]$ функція *F(x)* така, що $F'(x) = f(x)$ при $x \ne c,$ то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій**

1 Якщо *f(x)* і $\varphi(x)$ – дві невід’ємні необмежені функції на інтервалі $[a;b)$, інтегровані на кожному відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < b-a,$ і якщо $f(x) \le c\varphi(x)$ для $a \le a_1 \le x < b,$ де *с* – константа, то із збіжності невласного інтеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$

випливає збіжність невласного $\int_a^b f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність невласного інтеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$.

2 Нехай *f(x)* невід'ємна і необмежена на інтервалі $[a;b)$ та інтегрована на кожному відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$.

Якщо існують такі числа $a_1 \in (a;b)$, *M>0* і $0<\alpha<1$, що $0 \le f(x) < \dfrac{M}{(b-x)^\alpha}$ для $a_1 \le x < b$, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається.

Якщо існують такі числа $a_1 \in (a;b)$, *M>0* і $\alpha \ge 1$, що $f(x) > \dfrac{M}{(b-x)^\alpha}$ для $a_1 \le x < b$, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбігається.

3 Нехай *f(x)* визначена на проміжку $[a;b)$, необмежена на цьому проміжку й інтегрована на кожному відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$.

Якщо збігається невласний інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то збігається і невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Відзначимо, що в цьому випадку невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають абсолютно збіжним. Якщо ж невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається, а невласний інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають умовно збіжним.

Як бачимо, ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій багато в чому аналогічні до відповідних ознак збіжності невласних інтегралів із нескінченними проміжками інтегрування.

## Питання для самоперевірки

1 Що називається статичним моментом матеріальної точки відносно осі *l*?

2 Як обчислюються статичні моменти однорідної кривої відносно осей координат?

3 Як обчислюються координати центра ваги плоскої кривої та плоскої фігури?

4 Як широко використовується визначений інтеграл при обчисленнях різних фізичних величин?

5 Записати формулу для обчислення шляху, пройденого тілом.

6 Як обчислюється робота змінної сили?

7 Що називають невласним інтегралом від заданої функції з нескінченними проміжками інтегрування? Дати геометричне тлумачення та навести приклади збіжних і розбіжних інтегралів.

8 Сформулювати ознаки збіжності невласних інтегралів із нескінченними проміжками інтегрування.

9 Який невласний інтеграл називають абсолютно збіжним і який умовно збіжним?

10 Що називають невласним інтегралом від розривної функції на даному скінченому проміжку інтегрування? Надати геометричне тлумачення і навести приклади збіжних і розбіжних інтегралів.

11 Сформулювати ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій.

12 Як виконується заміна змінної у невласному інтегралі?

13 У якому випадку невласний інтеграл від необмеженої функції можна обчислити безпосередньо за формулою Ньютона –Лейбниця?

## ЛЕКЦІЯ 26

26.1 Основні поняття теорії диференціальних рівнянь.

26.2 Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв’язання диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальні рівняння складають унаслідок математичного аналізу задачі. Вони відображають основну інформацію про найзагальніші закономірності фізичних процесів або явищ, які є головним змістом дослідження. Наприклад, у задачах механіки твердого деформованого тіла диференціальні рівняння теорії пружності відображають лінійну залежність між напруженнями й деформаціями, у задачах теплопровідності диференціальні рівняння теплопровідності грунтуються на залежності теплового потоку від градієнта температури тощо.

Математична модель таких процесів – це рівняння, які містять не тільки невідомі функції та аргументи, а й похідні від цих функцій.

**Приклад.** З курсу опору матеріалів відоме диференціальне рівняння пружної лінії консолі зі сталим поперечним перерізом і зосередженою на вільному кінці силою $P$, яке має вигляд

$$\omega'' = -\frac{Px}{EI},$$

де $\omega$ – угин консолі в перерізі з абсцисою х, $EI$ – жорсткість на угин перерізу балки. Тут $\omega = \omega(x)$ – невідома функція, яка перебуває під знаком другої похідної.

## 26.1 Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

**Означення.** **Диференціальним рівнянням** називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну х, невідому функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$ (або диференціали).

Символічно диференціальне рівняння можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (26.1)$$

Якщо невідома функція залежить від одного аргументу, то диференціальне рівняння називають **звичайним.**

**Означення.** Найбільший порядок похідної, яка входить в диференціальне рівняння (26.1) називається **порядком диференціального рівняння.** Наприклад, $y'' + 3xy' + 2y = x^2$ – диференціальне рівняння другого порядку.

**Означення.** Функція $y(x)$ називається **розв'язком** (або **інтегралом**) диференціального рівняння (26.1), якщо вона *n*-раз неперервно диференційовна на деякому інтервалі $(a,b) = I$ і задовольняє диференціальному рівнянню (26.1) $\forall\ x \in I$.

Процес визначення таких функцій називають **інтегруванням диференціального рівняння.**

**Приклад.** Перевірити, чи є $f(x, y) = e^{2x} + 2e^{-y} = c$ інтегралом диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x+y}$.

**Розв'язання**. Дійсно, $df(x, y) = d(e^{2x} + 2e^{-y}) =$

$$= 2e^{2x}dx - 2e^{-y}dy = 2e^{2x}dx + 2e^{-y}(e^{2x+y})dx = 2e^{2x}dx - 2e^{2x}dx \equiv 0.$$

## 26.2 Диференціальні рівняння першого порядку.

При $n = 1$ диференціальне рівняння (26.1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і записується таким чином

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (26.2)$$

Диференціальне рівняння (26.2) називається розв'язаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$y' = f(x, y) \text{ або } \frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (26.3)$$

Припускаємо, що $f(x, y)$ однозначна і неперервна в деякій області D змінних *x*,*y*. Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (26.3).

Якщо в деякій області функція $f(x, y)$ перетворюється в $\infty$, то в цій області розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Множину таких точок, а також тих, в яких $f(x, y)$ не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (26.3).

Поряд з (26.3) будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

$$dy - f(x,y)dx = 0, \tag{26.4}$$

або в більш загальному виді

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\ . \tag{26.5}$$

**Означення . Розв'язком диференціального рівняння** (26.3) на інтервалі *I* назвемо функцію $y=\varphi(x)$, визначену і неперервно диференційовану на *I*, яка не виходить з області означення функції $f(x,y)$ і яка перетворює диференціальне рівняння (26.3) в тотожність $\forall\ x \in I$, тобто

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)),\quad x \in I\ .$$

В цьому випадку $y=\varphi(x)$ називається розв'язком, записаним в явній формі (вигляді).

**Початковою умовою** називають умову $y = y_0$ при $x = x_0$, яку записують так:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{або} \quad y\Big|_{x=x_0} = y_0. \tag{26.6}$$

**Означення. Загальним розв'язком** диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y=\varphi(x,C)$ (яка залежить від x і довільної сталої C) і задовольняє умовам:

1) функція $y=\varphi(x,C)$ є розв'язком диференціального рівняння при будь-якому відомому значенню C;

2) за будь-якої початкової умови $y(x_0)=y_0$ можна відшукати таке значення $C=C_0$, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє цю умову.

Іноді загальний розв'язок подають у неявній формі $\Phi(x,y,C)=0$ .

**Означення. Частинним розв'язком** диференціального рівняння першого порядку називають будь-яку функцію $y=\varphi(x,C_0)$, яка отримується із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$ при конкретному значенні сталої $C = C_0$.

Частинний розв'язок утворюється із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$, якщо в останньому довільній сталій величині C надається значення $C_0$, яке відповідає початковій умові.

**Геометричний зміст загального і частинного розв'язків**

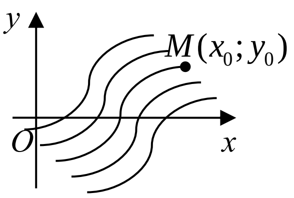


Рис.26.1

Геометрично загальний розв'язок зображується сімейством кривих (інтегральних кривих), які в кожній точці M(x; y) мають дотичну з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює значенню функції $f(x,y)$ у цій точці (рис.26.1).

Частинний розв'язок , який відповідає початковій умові $y(x_0) = y_0$, зображується однією з цих кривих, яка проходить через точку M($x_0$; $y_0$).

Задача визначення частинного розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y\big|_{x=x_0} = y_0$, називається **задачею Коші**.

**Теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння**

**Теорема.** Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f_y(x, y)$ неперервні у деякій області на площині, яка містить точку $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Цю теорему приймемо без доведення.

Якщо задача Коші (26.3), (26.6) має не один розв'язок або ж зовсім його не має, то говорять, що в точці $(x_0, y_0)$ порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

**Означення.** Розв'язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, будемо називати **особливим**.

Геометрично особливому розв'язку відповідають інтегральні криві, які не містяться в загальному розв'язку. Тому особливий розв'язок не може існувати всередині області *D* існування загального розв'язку. Його не можна отримати з формули загального розв'язку ні при яких числових значеннях $c$, включаючи $\pm\infty$. Його можна отримати з загального розв'язку лише при $c = c(x)$.

**Приклад 1** Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

**Розв’язання**. При $y > 0$ маємо $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $y=(x+c)^2$, $x+c \geq 0$ .

Отримали загальний розв'язок в області $-\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty$. Але розв'язком буде і $y = 0$, який ми отримуємо при $c = -x$. Він не міститься в загальному розв'язку при жодному фіксованому $c$. Отже, згідно означення $y(x) \equiv 0$ – особливий розв'язок .

Якщо $f(x, y)$ неперервна на *D*, то умови підозрілості на особливий розв'язок – необмеженість похідної $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Знайшовши таку криву в подальшому треба переконатися, що:

1) вона є інтегральною кривою;
2) перевірити, що в кожній її точці порушується єдиність розв'язку.

В попередньому прикладі. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \equiv \infty$ при $y \equiv 0$. Оскільки $y = 0$ – розв'язок і через нього проходять інтегральні криві з загального розв'язку, то $y \equiv 0$ – особливий розв'язок.

**Приклад 2** Розглянемо диференціальне рівняння $y' = 2\sqrt{y} + 1$.

**Розв'язання.** Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Очевидно, що $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$ при $y \equiv 0$. Але $y \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння, тому і не є особливим розв'язком.

Якщо права частина диференціального рівняння (26.3) в точці $(x_0, y_0)$ приймає нескінченне значення, необхідно розглянути диференціальне рівняння (26.3) і знайти розв'язок $x = x(y)$.

Якщо ж в точці $(x_0, y_0)$ права частина диференціального рівняння (26.3) має невизначеність, наприклад, типу $\frac{0}{0}$, тоді звичайна постановка задачі Коші не має змісту, Оскільки через точку $(x_0, y_0)$ не проходить жодна інтегральна крива. В цьому випадку задача Коші ставиться так: знайти розв'язок $y = y(x)$ (або $x = x(y)$), який примикає до точки $(x_0, y_0)$.

В деяких випадках треба шукати розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умовам $y \to y_0 \neq \infty$ при $x \to \infty$; у $\to \infty$ при $x \to x_0 \neq \infty$ і т.д.

### Питання для самоперевірки

1 Що називається диференціальним рівнянням?
2 Що називається порядком диференціального рівняння?
3 Що називається загальним і частинним розв'язками диференціального рівняння?
4 Яка задача називається задачею Коші? За яких умов існує єдиний розв'язок задачі Коші?
5 Що називається особливим розв'язками диференціального рівняння?

## ЛЕКЦІЯ 27

27.1 Інтегровані типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними
27.2 Однорідні відносно змінних диференціальні рівняння

### 27.1 Інтегровані типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної.

#### 27.1.1 Неповні рівняння.

**Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції**

має вигляд $$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad x \in (a,b). \qquad (27.1)$$

Припустимо, що *f(x)* являється неперервною функцією на $(a,b)$.

Тоді функція $$y = \int f(x)dx + c \qquad (27.2)$$
є загальним розв`язком диференціального рівняння (27.1) в області
$$a < x < b,\ -\infty < y < +\infty. \qquad (27.3)$$
Особливих розв'язків диференціальне рівняння (27.1) не має.
Разом з диференціальним рівнянням (27.1) розглянемо початкові умови
$$y(x_0) = y_0\ . \qquad (27.4)$$
Проінтегруємо диференціальне рівняння (27.2) від $x_0 \in (a,b)$ до $x$:
$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + c\ .$$
Знаходимо $c$ з умови (27.4)
$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + y_0 \qquad (27.5)$$
– частинний розв'язок диференціального рівняння (27.1) , що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$ .

**Рівняння, яке не містить незалежної змінної** має вигляд
$$\frac{dy}{dx} = f(y)\,. \qquad (27.6)$$
Припускаємо, що функція $f(y)$ визначена і неперервна на інтервалі $(c,d)$. Замість (27.6) розглянемо диференціальне рівняння
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}\,. \qquad (27.7)$$
Диференціальне рівняння (27.7) не містить шуканої функції і воно розв′язується аналогічно диференціальному рівнянню (27.1).

Якщо $f(y) \neq 0$, *y є* (c;*d*), то $x = \int \frac{1}{f(y)} dy + c \qquad (27.8)$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (27.7) в області
$$c < y < d, \quad -\infty < x < +\infty.$$
Аналогічно $$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(\tau)} d\tau + x_0 \qquad (27.9)$$
– частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$..

Якщо $f(y)$ неперервна на *(c;d)* і приймає нульове значення при $y = \eta \in (c,d)$, то ми повинні розглядати диференціальне рівняння (27.6). розв'язок $y = \eta$ буде частинним, якщо в кожній його точці зберігається єдиність і особливим, якщо в кожній його точці порушується єдиність. Якщо $y = \eta$ частинний розв'язок, то ми його отримуємо при нескінченних значеннях $c$ (±∞), якщо особливий, то при $c = c(x)$.

**Приклад.** Розв'язати диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$.

**Розв'язання.** Область визначення $x\in(-\infty,+\infty),\ y\in(-\infty,+\infty),\ y\neq 0$. Оскільки в точці $y=0$ дотичні паралельні осі *OY*, то розв'язок в площині $(x,y)$ єдиний $2ydy=dx,\ y^2=x+c$.

### 27.1.2 Рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння вигляду $y'=f(x)\cdot g(y)$ називають **рівнянням із відокремлюваними змінними (** $f(x)\cdot g(y)\neq 0$).

Розглянемо рівняння в диференціалах виду

$$X(x)dx+Y(y)dy=0, \tag{27.10}$$

де $X(x), Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Диференціальне рівняння (27.10) є рівнянням з відокремленими змінними. Його можна переписати таким чином: $d(\int X(x)dx+\int Y(y)dy)=0$. Звідки маємо загальний розв'язок в квадратурах

$$\int X(x)dx+\int Y(y)dy=c. \tag{27.11}$$

Якщо треба записати розв'язок задачі Коші, то записують так

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau+\int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau=c.$$

З умови (27.4) визначають $c=0$. Отже

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau+\int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau=0 \tag{27.12}$$

– розв'язок задачі Коші (27.4), (27.10). При даних припущеннях особливих розв'язків диференціальне рівняння (27.10) не має.

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx+m_1(x)n_1(y)dy=0 \tag{27.13}$$

також є **рівнянням з відокремлюваними змінними.**

Припустимо, що $m_1(x)n(y)\neq 0$, тоді розділимо обидві частини рівняння (27.13) на $m_1(x)n(y)$, отримаємо

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx+\frac{n_1(y)}{n(y)}dy=0. \tag{27.14}$$

Аналогічно записуємо

$$\int\frac{m(x)}{m_1(x)}dx+\int\frac{n_1(y)}{n(y)}dy=c \tag{27.15}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (27.13) і

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(\tau)}{m_1(\tau)} d\tau + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(\tau)}{n(\tau)} d\tau = 0 \qquad (27.16)$$

– розв'язок задачі Коші (27.4), (27.13).

При діленні на $n(y)m_1(x)$ ми можемо загубити розв'язки, які визначаються рівняннями $n(y) = 0$, $m_1(x) = 0$.

Дійсно, нехай $n(b) = 0$. тоді $m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)dy = 0$. Отже, $y = b$ – розв'язок диференціального рівняння (27.13). Аналогічно $x = a$ $(m_1(a) = 0)$ – розв'язок диференціального рівняння (27.13). Якщо ці розв'язки не входять в (27.15) при деяких $c$, то вони представляють собою особливі розв'язки диференціального рівняння (27.13).

На практиці інтегрування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $y' = f(x) \cdot g(y)$ доцільно проводити за наступною схемою:

1) похідну $y'$ записують як $y' = \frac{dy}{dx}$;
2) розділяють змінні так, щоб одна частина рівняння містила тільки змінну *x*, а інша – змінну *y*:

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, тобто отримують рівняння **з відокремленими змінними;**

3) інтегрують обидві частини здобутої рівності:

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ і визначають шуканий загальний розв'язок рівняння.

**Приклад.** Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = \sqrt{1 - y^2}$.

**Розв'язання.** Це рівняння з відокремлюваними змінними. Виконуємо перетворення за вказаною вище схемою:

1) $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$;
2) $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{dx}{x}$;
3) $\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int \frac{dx}{x}$, $\arcsin y = \ln x + C$. Ця рівність, яка встановлює зв'язок

між змінними *x*, *y* і сталою *C*, і є загальним розв'язком рівняння.

**Приклад** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy(1 + x^2)dy - (1 + y^2)dx = 0.$$

**Розв'язання.** Розділяючи змінні отримаємо $\frac{y}{1 + y^2}dy - \frac{1}{x(1 + x^2)}dx = 0$.

Оскільки $\dfrac{1}{x(1+x^2)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння перепишемо в такому вигляді: $\dfrac{y}{1+y^2}dy-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)dx=0$.

Отже, $\int\dfrac{y}{1+y^2}dy-\int\dfrac{dx}{x}+\int\dfrac{xdx}{1+x^2}=c$, $\dfrac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]-\ln x=c$,

$$(1+x^2)(1+y^2)=c_1x^2.$$

Очевидно, що $x=0$ є особливим розв'язком нашого рівняння і його треба додати до отриманого загального розв'язку.

## 27.2 Однорідні відносно змінних диференціальні рівняння

Розглянемо рівняння в диференціалах $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, в якому функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями однієї і тієї ж степені однорідності $m$.

**Означення.** Функція $f(x,y)$ називається **однорідною функцією виміру** $m$, якщо

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y). \tag{27.17}$$

Якщо (27.17) виконуються при $t\ge 0$, то функція $f(x,y)$ називається додатною однорідною.

Однорідне рівняння завжди можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{27.18}$$

в якому функція $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ – однорідна функція нульового виміру.

Однорідні рівняння завжди інтегруються в квадратурах заміною

$$y=zx. \tag{27.19}$$

При цьому рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно,

$$M(x,zx)dx+N(x,zx)(zdx+xdz)=0,$$

$$x^m M(1,z)dx+x^m N(1,z)(zdx+xdz)=0,$$

$$\left(M(1,z)+zN(1,z)\right)dx+xN(1,z)dz=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz=0,$$

$$\ln x+\int\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz=\ln c,\quad x=ce^{\phi(z)},$$

$$x=ce^{\phi(\frac{y}{x})}, \tag{27.20}$$

де $\phi(z)=\int\dfrac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz$.

При відокремленні змінних ми могли загубити розв'язки $z = z_i$, де $z_i$ - корені рівняння

$$M(1, z) + N(1, z)z = 0. \qquad (27.21)$$

Отже, півпрямі $y = z_i x,\ (x \neq 0)$ примикають до початку координат. Ці розв'язки можуть міститися в формулі загального розв'язку, але можуть бути і особливими. Особливими можуть бути також півосі осі $OY: x = 0\ (y \neq 0)$. Других особливих розв'язків диференціальне рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ не має.

На практиці однорідне диференціальне рівняння рівняння зручно зводити до рівняння з відокремлюваними змінними відносно нової змінної $u = u(x)$ за допомогою заміни $y = u \cdot x$

**Приклад.** Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x} + 1$.

**Розв'язання.** Це рівняння вигляду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто є однорідним рівнянням відносно $x$ і $y$. Виконуємо заміну $y = u \cdot x$, тоді $y' = u' \cdot x + u$. Підставляємо ці вирази до рівняння і отримаємо $u'x + u = \dfrac{ux}{x} + 1$ або $x\dfrac{du}{dx} = 1$. Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними відносно нової змінної и. Його розв'язок знайдемо за розглянутою вище схемою:
$du = \dfrac{dx}{x}$; $\int du = \int \dfrac{dx}{x}$; $u = \ln|x| + \ln|C|$; $u = \ln|Cx|$, звідки $\dfrac{y}{x} = \ln|Cx|$ – загальний розв'язок рівняння.

**Питання для самоперевірки**

1 Які диференціальні рівняння першого порядку називають рівняннями з відокремлюваними змінними?
2 За якою схемою проводиться інтегрування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $y' = f(x) \cdot g(y)$?
3 Які диференціальні рівняння першого порядку називають однорідними?
4 За допомогою якої заміни однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними?

# ЛЕКЦІЯ 28

28.1 Лінійні диференціальні рівняння.
28.2 Рівняння Бернуллі.

## 28.1 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

**Означення.** Диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (28.1)$$

називається **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.

При $g(x)=0$ воно називається однорідним

$$y'+p(x)y=0, \tag{28.2}$$

оскільки його ліва частина лінійна і однорідна відносно $y$ і $\frac{dy}{dx}$. Рівняння (28.1) при $g(x)\neq 0$ називається неоднорідним. Диференціальне рівняння (28.2) інтегрується в квадратурах, Оскільки воно являється диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними $\frac{dy}{y}+p(x)dx=0$. Звідки

$$y=ce^{-\int p(x)dx}. \tag{28.3}$$

Якщо $y(x_0)=y_0$, то

$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}. \tag{28.4}$$

**Загальні властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь:**

– Якщо $p(x)$ та $q(x)$ неперервні, то розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння (28.2) існує і є єдиним;

– Лінійне диференціальне рівняння (28.2) не має особливих розв'язків;

– Розв'язки задачі Коші однорідного диференціальне рівняння (28.2) не можуть перетинати вісь $OX$, Оскільки в противному випадку порушувалися б умови єдиності розв'язку задачі Коші;

– Диференціальне рівняння (28.2) є інваріантним відносно перетворення $x=\varphi(t),(\varphi'(t)\neq 0)$;

Дійсно, скориставшись формулою $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)}$, отримаємо лінійне рівняння в змінних $y, t$ $\frac{dy}{dt}+P(\varphi(t))\varphi'(t)y=g(\varphi(t))\varphi'(t)$.

– Диференціальне рівняння (28.2) є інваріантним відносно заміни

$$y=\alpha(x)z+\beta(x), \tag{28.5}$$

де $z$ – нова змінна, $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – неперервні функції, $\alpha(x)\neq 0$ на $(a,b)$. Тоді нове рівняння в змінних $z, x$ є лінійним

$$z'+\frac{\alpha'(x)+p(x)\alpha(x)}{\alpha(x)}z=\frac{g(x)-\beta'(x)-p(x)\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Якщо $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (28.2), то

$$y(x)=Cy_1(x), \tag{28.6}$$

де $C$ – константа, є загальним його розв'язком.

**Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння**).

Якщо $y_1(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (28.1), а (28.3) – загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (28.2), то сума

$$y = y_1(x) + ce^{-\int p(x)dx} \tag{28.7}$$

є загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (28.1).

Теорема доводиться безпосередньо підстановкою (28.7) в рівняння (28.1).

Якщо відомо два частинних розв'язки диференціального рівняння (28.1), то загальний його розв'язок записується без квадратур

$$y = y_1(x) + c(y_2(x) - y_1(x)). \tag{28.8}$$

Розглянемо два методи інтегрування неоднорідного диференціального рівняння (28.1).

**Метод Лагранжа** (варіації довільної сталої).
Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{28.9}$$

Підставивши (28.9) в (28.1), отримаємо

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідки $c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$, $c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. Остаточно маємо

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right) \tag{28.10}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (28.1), який записаний через дві квадратури. Довільна стала входить завжди в загальний розв'язок лінійно.

**Метод Ейлера** полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій від *x*: $y = u(x)v(x)$. Одну з цих функцій вибирають довільно, а іншу визначають із даного рівняння з урахуванням умови вибору першої функції.

Диференціюємо *y*: $y' = u'v + uv'$. Підставимо цей вираз до рівняння і отримаємо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \text{ або } u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Виберемо функцію $v$ так, щоб $v' + p(x)v = 0$. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знаходимо його розв'язок за загальною схемою: $\frac{dv}{dx} = -p(x)v$; $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$; $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$, тобто $v = e^{-C_1\int p(x)dx}$ (інтеграл $\int p(x)dx$ існує, оскільки функція $p(x)$ є неперервною від *x*). Нехай $C_1 = 1$.

Підставимо визначену функцію $v = e^{-\int p(x)dx}$ до рівняння $u'v = q(x)$, яке отримали із попереднього з урахуванням умови $v' + p(x)v = 0$, одержимо рівняння

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними. Його розв'язком буде функція

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx .$$

Оскільки $y = u \cdot v$, то остаточно маємо формулу (28.10)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right).$$

Загальний розв'язок при умові $y(x_0) = y_0$ можна записати в Формі Коші

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[\int\limits_{x_0}^{x} q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + y_0\right]. \qquad (28.11)$$

**Приклад.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + xy = 0.$$

**Розв'язання.** Це лінійне однорідне диференціальне рівняння.

Згідно формули (28.3) $y = ce^{-\int xdx} = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

**Приклад.** Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = x$.

**Розв'язання.** За формулою (28.10)

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx + c\right] = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**Приклад.** Знайти частинний розв'язок рівняння $y' - \dfrac{y}{x} = 1 + x^3$, який задовольняє початковій умові $y\big|_{x=1} = 2$.

**Розв’язання.** Дане рівняння є лінійним.

Покладемо $y = u \cdot v$, звідки $y' = u'v + uv'$.

Тоді рівняння перепишеться у вигляді

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = 1 + x^3$$

або $u'v + u(v' - \dfrac{v}{x}) = 1 + x^3$.

Складаємо таку систему рівнянь: 1. $v' - \dfrac{v}{x} = 0$;

2. $uv' = 1 + x^3$.

Спочатку розв’яжемо перше рівняння.

1. $v' - \frac{v}{x} = 0$ – рівняння з відокремлюваними змінними відносно змінної $v$,

яке розв’яжемо за загальною схемою: $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$ або $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$,

звідки $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$; $\ln|v| = \ln|x|$; $v = x$.

2. Підставимо вираз $v = x$ до рівняння $uv' = 1 + x^3$, отримаємо $u'x = 1 + x^3$ – це рівняння з відокремлюваними змінними відносно змінної и. Знайдемо його загальний розв'язок $\frac{du}{dx} = \frac{1+x^3}{x}$ або $du = \frac{1+x^3}{x}dx$,

звідки $du = (\frac{1}{x} + x^2)dx$; $\int du = \int \frac{1}{x}dx + \int x^2 dx$; $u = \ln|x| + \frac{x^3}{3} + C$.

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$y = x(\ln|x| + \frac{x^3}{3} + C).$$

Згідно з початковою умовою $y|_{x=1} = 2$ матимемо $2 = 1 \cdot (\ln 1 + \frac{1}{3} + C)$, $C = \frac{5}{3}$.

Отже, маємо шуканий частинний розв'язок:

$$y = x(\ln|x| + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}).$$

## 28.2 Рівняння Бернуллі.

Це рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \qquad (28.12)$$

Рівняння (28.12) завжди інтегрується в квадратурах шляхом підстановки

$$y^{1-n} = z. \qquad (28.13)$$

Оскільки $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, то, помноживши (28.12) на $(1-n)y^{-n}$:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = q(x),$$

отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x), \qquad (28.14)$$

яке вже є лінійним.

При $0 < n < 1$ рівняння Бернуллі має особливий розв'язок $y(x) \equiv 0$. При $n > 1$ розв'язок $y(x) \equiv 0$ міститься в загальному розв'язку при $c = \infty$.
При $n < 0$ $y(x) \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння (28.12)

**Приклад.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' - y = (1+x)y^2.$$

**Розв'язання.** Це є рівняння Бернуллі при $n = 2$. Згідно алгоритму

$$-y^{-2}y' + \frac{1}{y} = -(1+x), \quad \frac{1}{y} = z, \quad \frac{dz}{dx} + z = -(1+x).$$

Отже,

$$\frac{1}{y} = z = e^{-x}\left[\int(-1-x)e^x dx + c\right] = ce^{-x} - x$$

– загальний розв'язок нашого рівняння.

### Питання для самоперевірки

1 Яке диференціальні рівняння першого порядку називають лінійними?

2 В чому полягає Метод Лагранжа інтегрування неоднорідного диференціального рівняння?

3 В чому полягає Метод Ейлера інтегрування неоднорідного диференціального рівняння?

4 Яке диференціальні рівняння першого порядку називають рівнянням Бернуллі?

## ЛЕКЦІЯ 29

29.1 Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференціальні рівняння другого порядку.

29.2 Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними.

### 29.1 Диференціальні рівняння вищих порядків

Диференціальне рівняння $n$-го порядку не розв'язане відносно старшої похідної має вигляд

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{29.1}$$

а розв’язане відносно $y^{(n)}$ має форму

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{29.2}$$

Частинний випадок цих рівнянь – це лінійне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x).$$

**Означення.** Функція $y=y(x)$ визначена і $n$ раз неперервно–диференційовна на $(a,b)$, називається розв'язком диференціального рівняння (29.1), якщо вона на $(a,b)$ перетворює це рівняння в тотожність

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in (a,b). \tag{29.3}$$

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (29.1) відповідає на площині $(x,y)$ деяка крива, яку будемо називати інтегральною.

Серед диференціальних рівнянь вищого порядку найширше застосування при розв’язанні інженерних задач мають рівняння другого порядку.

У загальному вигляді диференціальне рівняння другого порядку записується так:

$$F(x,y,y',y'')=0 \text{ або } y''=f(x,y,y'). \qquad (29.4)$$

Розглянемо нелінійне диференційне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,\frac{dx}{dt}) \qquad (29.5)$$

і представимо рівняння (29.5) як рівняння руху частинки з одиничною масою при дії сили $f(x,\frac{dx}{dt})$. Значення $x$ і $\frac{dx}{dt}$ в момент $t$ характеризують стан системи на площині ($x$, $\frac{dx}{dt}$ ). Ця площина називається площиною стану або фазовою площиною. Кожному новому стану відповідає нова точка на площині. Траєкторія точки називається фазовою траєкторією, швидкість – фазовою швидкістю.

Від диференціального рівняння (29.5) можна перейти до системи

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dx}{dt}=f(x,y). \qquad (29.6)$$

Можна показати, що система (29.5), як і більш загальна

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y),\frac{dy}{dt}=Y(x,y), \qquad (29.7)$$

де $X(x,y)$, $Y(x,y)$– неперервні функції разом з своїми частинними похідними в деякій області *D*, мають ту властивість, що якщо *x(t), y(t)* – розв'язки системи, то і $x=x(t+c)$, $y=y(t+c)$, де *c* – довільна константа, теж розв'язок.

Система (29.7) називається автономною або стаціонарною.

Якщо система (29.7) задана на всій площині, то фазові траєкторії покриють всю площину і не будуть перетинатися одна з одною. Якщо в деякій точці $(x_0,y_0)$ $X(x_0,y_0)=Y(x_0,y_0)=0$, то така точка називається особливою. В подальшому ми будемо розглядати тільки ізольовані особливі точки, тобто такі, в деякому малому околі яких немає інших особливих точок.

В реальних динамічних системах енергія розсіюється. Розсіювання (дисипація) енергії проходять в зв'язку з наявністю тертя. В деяких системах проходить повільне розсіювання енергії і ним можна знехтувати. Для таких систем має місце закон збереження енергії: сума кінетичної і потенціальної енергій постійна. Такі системи називають **консервативними.**

Розглянемо консервативну систему

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0. \qquad (29.8)$$

Від (29.8) перейдемо до наступної системи

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{f(x)}{m}. \qquad (29.9)$$

Виключаємо з (29.9) $t$: $$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x)}{my},\; mydy=-f(x)dx. \qquad (29.10)$$

Припустимо, що при $t=t_0$: $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ і проінтегруємо (29.10) від $t_0$ до $t$ :

$$\frac{1}{2}my^2-\frac{1}{2}my_0^2=-\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau. \qquad (29.11)$$

Звідки $$\frac{1}{2}my^2+\int_0^x f(\tau)d\tau=\frac{1}{2}my_0^2+\int_0^{x_0} f(\tau)d\tau. \qquad (29.12)$$

Оскільки $\frac{1}{2}my^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ є кінетична енергія, а $V(x)=\int_0^x f(\tau)d\tau$ –потенціальна, $E=\frac{1}{2}my_0^2+V(x_0)$ – повна енергія, то (29.12) виражає закон збереження енергії.

$$\frac{1}{2}my^2+V(x)=E. \qquad (29.13)$$

Співвідношення (29.13) задають інтегральні криві на площині. Вони будуть різні і залежать від $E$.

Ми дали механічну інтерпретацію диференціального рівняння другого порядку. Зупиняємося на геометричній інтерпретації.

Розглянемо $$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (29.14)$$
і перепишемо його у вигляді

$$F\left(x,y,y',(1+y'^2)^{3/2}\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right)=F_1\left(x,y,y',\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right). \qquad (29.15)$$

Оскільки $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ – кривизна кривої, то диференціальне рівняння другого порядку являє собою зв'язок між координатами, кутом нахилу дотичної та кривизною в кожній точці інтегральної кривої.

**Задача Коші.**

Розглянемо диференціальне рівняння (29.2) і поставимо задачу Коші: серед всіх розв'язків диференціального рівняння (29.2) знайти такий $y=y(x)$, який задовольняє умовам

$$y(x_0)=y_0,\; y'(x_0)=y_0',\; ...,\; y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}, \qquad (29.16)$$

де $x_0$, $y_0$, $y_0', ..., y_0^{n-1}$–задані числа, $x_0$ – початкове значення незалежної змінної, $y_0, y_0^1, \dots y_0^{n-1}$ –початкові данні.

Для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(x)=f(x,y,y') \qquad (29.17)$$

задача Коші полягає в тому, щоб знайти такий розв'язок диференціального рівняння (29.17), який би задовольняв умовам

$$y(x_0)=y_0,\; y'(x_0)=y_0'. \qquad (29.18)$$

Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти таку криву $y=y(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (29.17), проходить через точку $M(x_0,y_0)$ і має заданий напрямок дотичної $tg\alpha = y_0'$ (рис. 29.1)

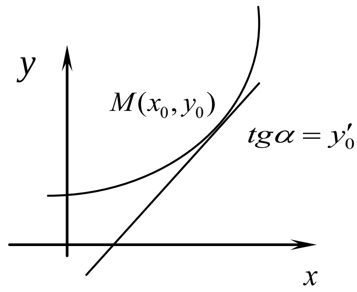



Рис. 29.1

**Механічний зміст задачі Коші**

$$x'' = f(x,t,x'),\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = V_0 \qquad (29.19)$$

полягає в тому, щоб знайти ту траєкторію механічної системи, яка є розв'язком диференціального рівняння (29.19) і має в в точці $t_0$ фіксовані положення $x_0$ і швидкість $V_0$.

Розглянемо питання єдиності та існування розв'язку задачі Коші (29.2), (29.16). Єдиність для диференціального рівняння (29.2) не означає, що через точку $M(x_0,y_0)$ проходить тільки одна інтегральна крива. Наприклад, для диференціального рівняння (29.17) єдиність розуміється в тому сенсі, що через точку $M(x_0,y_0)$ проходить єдина інтегральна крива (рис. 29.1) з заданим нахилом дотичної, а через точку $M(x_0,y_0)$ можуть проходити і інші інтегральні криві, які мають інші нахили дотичних.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (29.2) називається сімейство розв'язків, яке залежить від $n$ довільних констант $c_1,\ldots,c_n$

$$y = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n). \qquad (29.19)$$

Геометрично воно представляє сімейство інтегральних кривих на площині $(x,y)$, залежне від $n$ параметрів $c_1,\ldots,c_n$ , причому рівняння цього сімейства розв'язано відносно $y$.

**Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку** $y'' = f(x,y,y')$ називають функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (що залежить від x і двох довільних сталих $C_1$ і $C_2$ ), яка задовольняє таким умовам:

1) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ задовольняє рівнянню $y'' = f(x,y,y')$ при будь – яких значеннях сталих $C_1$ і $C_2$;
2) при заданих початкових умовах $y\big|_{x=x_0} = y_0$; $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ можна визначити такі значення сталих $C_1 = C_1^0$ і $C_2 = C_2^0$, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ буде задовольняти цим умовам.

Задачу визначення розв'язку диференціального рівняння другого порядку $y'' = f(x,y,y')$, який задовольняє початковим умовам $y\big|_{x=x_0} = y_0$; $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, називають **задачею Коші.**

Розв'язати задачу Коші означає знайти частинний розв'язок рівняння.

Сформульована задача Коші має єдиний розв'язок , якщо функція $f(x, y, y')$ та її похідні $f_y(x, y, y')$, $f_{y'}(x, y, y')$ неперервні в деякій області, яка містить точку $(x_0; y_0, y_0')$ ( теорема існування та єдиності).

## 29.2 Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними

### 29.2.1 Диференціальні рівняння, які містять *n*-у похідну від шуканої функції і незалежну змінну

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \tag{29.20}$$

Оскільки $\left(y^{(n-1)}\right)' = f(x)$, то $y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1$.

Аналогічно $y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dxdx + c_1(x - x_0) + c_2$ , …..,

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} \dots \int\limits_{x_0}^{x}}_{n\,раз} f(x)dx..dx + c_1\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + c_2\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \dots + c_n. \tag{29.21}$$

Остання формула дає загальний розв'язок в області

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, -\infty < y'' < \infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Формулу (29.21) легко використати для знаходження розв'язків задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots. y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{29.22}$$

Цей розв'язок представляється у вигляді

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \dots \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx..dx + y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \dots + y_0. \tag{29.23}$$

**Приклад.** Розв'язати рівняння $y'' = 6x$.

**Розв'язання.** Послідовно знаходимо $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + xc_1 + c_2$.

### 29.2.2 Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції і $(k-1)$-ї похідної

Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{29.24}$$

в якому є $y^{(k)}$.

Введемо нову змінну $$y^{(k)} = z, \tag{29.25}$$

отримаємо $$F\left(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0, \tag{29.26}$$

тобто ми понизили порядок диференціального рівняння (29.24) на $k$ одиниць.

Припустимо, що ми розв'язали диференціальне рівняння (29.26) і визначили

$$z = \omega(x, c_1, ..., c_{n-k}). \qquad (29.27)$$

Тоді рівняння

$$y^{(k)} = \omega(x, c_1, ..., c_{n-k}) \qquad (29.28)$$

інтегруємо і отримаємо загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, c_1, ..., c_n). \qquad (29.29)$$

Зокрема, диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить в явному вигляді шуканої функції,

$$y'' = f(x, y'), \qquad (29.30)$$

зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки

$$y' = p(x) \qquad (29.31)$$

При цьому $y'' = p'(x)$.

### 29.2.3 Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної

Ці диференціальні рівняння мають вигляд

$$F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (29.32)$$

і їх порядок можна понизити на одиницю заміною $y' = z$.

При цьому $y$ стає незалежною зміною, а $z$ – шуканою функцією. Обчислюємо

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z,$$

.....

$$y^{(n)} = \omega_n\left(z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)$$

і остаточно прийдемо до диференціального рівняння $(n-1)$ порядку

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z, ..., \omega_n\left(z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\right) = 0. \qquad (29.33)$$

Якщо $z = \varphi(y, c_1, ..., c_{n-1})$ – розв'язок диференціального рівняння (29.33), то

$$y' = \varphi(y, c_1, ..., c_{n-1}). \qquad (29.34)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (29.34) і знайдемо загальний інтеграл.

Зокрема, диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить в явному вигляді незалежної змінної,

$$y'' = f(y, y'), \qquad (29.35)$$

зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки

$$y' = p(y) \qquad (29.36)$$

При цьому $y'' = p'(y) \cdot p(y)$.

**Приклад.** Розв'язати рівняння $4y''\sqrt{y}=1$ .

**Розв'язання.** Вводимо змінну $y'=p(y),\ y''=p'(y)\cdot p(y),$ тоді

$$4p'(y)\cdot p(y)\cdot\sqrt{y}=1,\quad p^2=\sqrt{y}+c_1.$$

Звідки $p=\pm\sqrt{\sqrt{y}+c_1}$. Отже, $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\sqrt{y}+c_1}$,

$x=\pm\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+c_1}}+c_2$ – загальний інтеграл рівняння.

## Питання для самоперевірки

1 Яке рівняння називають диференціальним рівнянням другого порядку?

2 Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння другого порядку.

3 Який вигляд має задача Коші для диференціального рівняння другого порядку?

4 Назвіть три типи диференціальним рівнянням другого порядку, що припускають зниження порядку.

# ЛЕКЦІЯ 30

30.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку. Властивості частинних розв’язків.

30.2 Визначник Вронського, його властивості. Теорема про загальний розв’язок.

## 30.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь *n*-го порядку

**Означення. Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння вигляду**

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=f(x), \tag{30.1}$$

де $p_i(x)$, $i=$ 1,2,…, $n$ , *f(x)* – задані функції, неперервні на (*a*,*b*).

При цих умовах диференціальне рівняння (30.1) має єдиний розв’язок *y*=*y(x)*, який задовольняє початковим умовам

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad ...\quad ,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}.$$

Цей розв’язок визначений і *n* раз неперервно диференційований на (*a*,*b*).

Особливих розв’язків диференціальне рівняння (30.1) не має. Будь-який розв’язок при конкретних початкових умовах є частинним. Якщо при $y^{(n)}$ стоїть $p_0(x)$, то точки, в яких $p_0(x)$=0, називаються особливими.

Якщо *f*(*x*)=0, то диференціальне рівняння (30.1) називають однорідним

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=0. \tag{30.2}$$

Для скорочення запису введемо лінійний диференціальний оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x). \qquad (30.3)$$

Властивості оператора $L$ :

a) $L\,(ky)=k\,L\,(y), \quad k = const$;

b) $L\,(y_1 + y_2) = L\,(y_1) + L\,(y_2)$;

c) $L\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i)$, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – деякі числа.

Використовуючи оператор $L$ диференціальні рівняння (30.1) і (30.2) перепишемо у вигляді

$$L\,(y) = f\,(x), \qquad (30.1')$$

$$L\,(y) = 0\,. \qquad (30.2')$$

**Означення.** Функція $y=y(x)$ називається **розв'язком диференціального рівняння** $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$, якщо $L(y) \equiv f(x)$ (для диференціального рівняння (30.2) $L(y(x)) \equiv 0$).

Лінійне диференціальне рівняння (30.1) залишається бути лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t) \quad (\varphi'(t) \neq 0)$.

Лінійне диференціальне рівняння (30.1) залишається бути лінійним при будь-якій лінійній заміні шуканої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x) \qquad (30.4)$$

при певних обмеженнях на функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

## Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння *n*–го порядку

Наша задача полягає в тому, щоб знайти всі дійсні розв'язки диференціального рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0\,. \qquad (30.5)$$

Для розв'язування такої задачі доцільно знайти деякі комплексні розв'язки.

**Означення.** Функцію $z(x) = w(x) + iv(x)$, де $w(x)$, $v(x)$ дійсні функції, $i = \sqrt{-1}$, будемо називати комплексною функцією від дійсної змінної $x$ ($w(x)$ – дійсна частина, $v(x)$ – уявна частина).

Похідна $n$-го порядку від $z(x)$ дорівнює

$$z^{(n)}(x) = w^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x). \qquad (30.7)$$

Приведемо формули для обчислення похідних:

а) $\left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x} \qquad (\alpha = a + ib)$. (30.8)

Дійсно,

$$\left[e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx)\right]' = \alpha e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx) + e^{\alpha x}[-b\sin bx + ib\cos bx] =$$
$$= e^{\alpha x}(a+ib)\cos bx + e^{\alpha x}(ai - b)\sin bx = (a+ib)e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx);$$

б) для дійсного $k$ і будь-якого $\alpha$ справедлива формула

$$\left(x^k e^{\alpha x}\right)' = \left(kx^{k-1} + \alpha x^k\right)e^{\alpha x}; \tag{30.9}$$

в) використовуючи (30.9) можна показати

$$\left(P_n(x)e^{\alpha x}\right)' = \overline{P}_n(x)e^{\alpha x}, \tag{30.10}$$

де $P_n(x), \overline{P}_n(x)$ – поліноми степеня *n*;

г) при будь-якому $\alpha$ (дійсному або комплексному) справедлива формула

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{30.11}$$

Формула (30.11) доводиться шляхом представлення $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ і використання формули (30.8).

**Означення.** Комплексна функція

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \tag{30.12}$$

називається **розв'язком однорідного диференціального рівняння**

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0,$$

якщо $L(y(x)) \equiv 0,\ a < x < b$.

Комплексний розв'язок (30.12) утворює два дійсних розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$. Дійсно, $L(y(x)) = L(y_1(x) + iy_2(x)) = L(y_1(x)) + iL(y_2(x)) = 0$.

Звідки $L(y_1(x)) = 0, L(y_2(x)) = 0$.

**Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння**

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0:$$

а) Якщо $y_1(x)$ – розв'язок , тобто $L(y_1)=0$, то $y=cy_1(x)$, де $c$ – довільна константа , теж розв'язок диференціального рівняння (30.5)

$$L(cy_1) = cL(y_1) = 0;$$

б) якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (30.5) , то $y= y_1(x)+ y_2(x)$ теж розв'язок . Дійсно $L(y_1 + y_2) = L(y_1)+L(y_2) = 0;$

в) якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_m(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (30.5), то їх лінійна комбінація також є розв'язком

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i(x)) = 0.$$

**Приклад.** Записати двопараметричне сімейство розв'язків диференціального рівняння

$$y'' + y = 0.$$

**Розв'язання.** Очевидно, що $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ – розв'язки, тоді $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ – розв'язок.

## 30.2 Необхідні і достатні умови лінійної незалежності *n* розв'язків лінійного однорідного рівняння *n* – го порядку

**Означення.** Функції $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ називаються лінійно незалежними на $(a, b)$ , якщо між ними не існує співвідношення виду

$$\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0,\ \ a < x < b, \qquad (30.13)$$

де $\alpha_1, ..., \alpha_n$ – постійні числа не рівні нулю одночасно . В противному випадку функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називають лінійно залежними на $(a, b)$.

Для двох функцій поняття лінійної незалежності на $(a,b)$ зводиться до того, щоб відношення функцій $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ , ( $y_2(x) \neq 0$ ) не було постійним на $(a,b)$.

**Зауваження.** Якщо одна із функцій на $(a,b)$ тотожно дорівнює нулю, то ці функції лінійно залежні.

**Приклад.** Функції $y_1=1,\ y_2=x, ...,\ y_n = x^{n-1}$ - лінійно незалежні на будь-якому інтервалі $(a,b) \subset (-\infty,+\infty)$.

Дійсно, співвідношення $\alpha_1 1+\alpha_2 x + ... + \alpha_n x^{(n-1)}=0$ , в якому не всі $\alpha_i$ дорівнюють нулю, не може виконуватися для будь-яких $x$ , Оскільки рівняння $(n\text{-}1)$ – го степеня має не більше $(n\text{-}1)$ – го кореня.

**Приклад.** Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ – лінійно незалежні, Оскільки співвідношення $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0$, де $\alpha_1, \alpha_2$ не рівні одночасно нулю, виконуються не більше ніж в одній точці. Це випливає з $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{2x} \neq const$.

**Приклад.** Функції $y_1=sin^2 x$ , $y_2=cos^2 x$ , $y_3=1$ – лінійно залежні на $(-\infty,+\infty)$ , Оскільки для будь-якого $x$ справджується співвідношення

$$sin^2 x + cos^2 x - 1 = 0 .$$

Розглянемо необхідні умови лінійної залежності $n$ функцій .

**Теорема.** Якщо функції $y_1(x),\ y_2(x), ...,\ y_n(x)$ – лінійно залежні на $(a,b)$, то їх вронскіан $W(x)$ тотожно дорівнює нулю на $(a,b)$ . Тут

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (30.14)$$

**Доведення.** Згідно умови теореми
$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ , $a < x < b$, де не всі $\alpha_i$ одночасно рівні нулю . Нехай $\alpha_n \neq 0$ , тоді

$$y_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}. \qquad (30.15)$$

Диференціюємо (30.15) $(n\text{-}1)$ раз і підставляємо в (30.14)

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-...-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1} \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1'-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2'-...-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1^{(n-1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2^{(n-1)}-...-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (30.16)$$

Розкладаючи визначник (30.16) на суму визначників, будемо мати в кожному з них два однакові стовпці, тому всі визначники будуть рівні нулю і отже

$$W(x)\equiv 0\,,\; a<x<b.$$

Теорема доведена.

Нехай кожна з функцій $y_1(x),\; y_2(x),\; ...\;,\; y_n(x)$ – розв’язок диференціального рівняння (30.5). Тоді необхідні і достатні умови лінійної незалежності цих розв’язків даються наступною теоремою.

**Теорема.** Якщо функції $y_1(x),\; y_2(x),\; ...\;,\; y_n(x)$ – суть лінійно незалежні розв’язки диференціального рівняння (30.5), всі коефіцієнти якого неперервні на $(a,b)$ , то вронскіан цих розв’язків $W$ не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу $(a,b)$.

**Доведення.** Припустимо протилежне , що в точці $x_0\in(a,b)$ $W(x_0)=0$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+\; ... \;+c_ny_n(x_0)=0 \\ c_1y_1'(x_0)+\; ... \;+c_ny_n'(x_0)=0 \\ ...\quad ...\quad ...\quad ... \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\; ... \;+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}. \qquad (30.17)$$

Оскільки визначник системи (30.17) $W(x_0)=0$, то вона має ненульовий розв’язок $c_1^{(0)},...,c_n^{(0)}$. Розглянемо функцію

$$y=c_1^{(0)}y_1(x)+...+c_n^{(0)}y_n(x), \qquad (30.18)$$

яка є розв’язком диференціального рівняння (30.5).

Система (30.17) показує , що в точці $x_0$ розв’язок (30.18) перетворюється в нуль разом із своїми похідними до *(n-1)* –го порядку . В силу теореми існування і єдиності це значить , що має місце тотожність

$$y(x)=c_1^{(0)}y_1(x)+...+c_n^{(0)}y_n(x)\equiv 0\,,\; a<x<b,$$

де не всі $c_i^{(0)}$ дорівнюють нулю . Останнє означає , що розв’язки $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ – лінійно залежні на $(a,b)$. Це протиріччя і доводить теорему.

З теорем наведених теорем випливає: для того, щоб $n$ розв’язків диференціального рівняння (30.5) були лінійно незалежними на $(a,b)$ необхідно і достатньо , щоб їх вронскіан не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу.

Виявляється, для вияснення лінійної незалежності $n$ розв’язків диференціального рівняння (30.5) достатньо переконатися , що $W(x)$ не дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу $(a,b)$ . Це випливає з наступних властивостей вронскіана від *n* розв'язків диференціального рівняння (30.5):

а) якщо вронскіан дорівнює нулю в одній точці $x_0 \in (a,b)$ і всі коефіцієнти диференціального рівняння (30.5) є неперервними, то $W(x_0) \equiv 0$ на $(a,b)$.

Дійсно, якщо $W(x_0) = 0$, то функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ - лінійно залежні на $(a,b)$. Тоді $W(x) \equiv 0$ на (a,b);

б) якщо вронскіан *n* розв'язків диференціального рівняння (30.5) відмінний від нуля в одній точці $x_0 \in (a,b)$ , то $W(x) \neq 0$ на $(a,b)$.

Дійсно , якби *W(x)* дорівнював в одній точці з $(a,b)$ нулю, то згідно а) $W(x) \equiv 0$ на $(a,b)$, в тому числі і в точці $x_0 \in (a,b)$, що суперечить умові.

Звідси випливає, якщо *n* розв'язків диференціального рівняння (30.5) лінійно незалежні на $(a,b)$, то вони будуть лінійно незалежні на будь-якому $(a_1,b_1) \subset (a,b)$.

## Фундаментальна система розв'язків та її існування

**Означення** Сукупність *n* розв'язків диференціального рівняння (30.5) визначених і лінійно незалежних на $(a,b)$ називається **фундаментальною системою розв'язків**.

З попереднього випливає, для того, щоб система *n* розв'язків диференціального рівняння (30.5) була фундаментальною системою розв'язків необхідно і достатньо, щоб вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (30.5). Всі ці розв'язки повинні бути ненульовими.

**Теорема** (про існування фундаментальної системи розв'язків). Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (30.5) є неперервними на $(a,b)$ , то існує фундаментальна система розв'язків на цьому інтервалі.

**Доведення.** Візьмемо точку $x_0 \in (a,b)$ і побудуємо розв'язки :

$y_1(x)$ з початковими умовами $y_1(x_0) = 1, y_1{}'(x_0) = 0,..., y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$;

$y_2(x)$ з початковими умовами $y_2(x_0) = 0, y_2{}'(x_0) = 1,..., y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$;

……………………………………………

$y_n(x)$ з початковими умовами $y_n(x_0) = 0, y_n{}'(x_0) = 0,..., y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$.

Очевидно , що $W(x_0) = 1 \neq 0$, отже побудовані розв'язки лінійно незалежні.

Теорема доведена.

З методу побудови лінійно незалежних функцій випливає, що таких функцій можна побудувати безліч.

Побудована система розв'язків називається нормованою в точці $x = x_0$.

Для будь-якого диференціального рівняння (30.5) існує тільки одна фундаментальна система розв'язків, нормована по моменту $x_0$.

### Загальний розв'язок. Число лінійно незалежних розв'язків

**Теорема** Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (30.5) , то формула

$$y = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) \qquad (30.20)$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - довільні константи, дає загальний розв'язок диференціального рівняння (30.5) в області

$$a < x < b,\ |y| < \infty, |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty, \qquad (30.21)$$

тобто в області визначення диференціального рівняння (30.5).

**Доведення.** Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (30.5) , то лінійна комбінація (30.20) теж розв'язок. Систему

$$\begin{cases} y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \\ y' = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i{}'(x) \\ \ldots \\ y^{(n-1)} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x) \end{cases} \qquad (30.22)$$

можна розв'язати відносно $c_1,\ c_2,\ \ldots\ ,\ c_n$ в області (30.21), Оскільки $W(x) \neq 0$. Згідно визначення (30.20) – загальний розв'язок і він містить в собі всі розв'язки диференціального рівняння (30.5).
Теорема доведена.

Для знаходження частинного розв'язку такого, що

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0{}', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (30.23)$$

необхідно все підставити в (30.22) і визначити $c_i^{(0)}$ , *i=1,2,…,n*. Тоді $y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{(0)} y_i(x)$ – частинний розв'язок. Якщо фундаментальна система розв'язків – нормована в точці $x = x_0$ , то $c_i^{(0)} = y_0$ , тобто

$$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x) \qquad (30.24)$$

загальний розв'язок в формі Коші.

Зауважимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння (30.5) є однорідна лінійна функція від довільних констант.

**Твердження.** Диференціальне рівняння (30.5) не може мати більше ніж *n* лінійно незалежних частинних розв'язків.

Дійсно, нехай ми маємо *(n+1)* частинний розв'язок. Розглянемо *n* перших. Якщо вони лінійно залежні, то і всі будуть лінійно залежні, Оскільки

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) + 0 y_{n+1}(x) = 0, \quad a < x < b,$$

де всі $\alpha_i$ не дорівнюють нулю . Якщо ж вони лінійно залежні, то будь-який розв'язок, в тому числі і $y_{n+1}$ виражається через $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, тобто $y_{n+1}$ $= c_1^{(0)} y_1(x) + \ldots + c_n^{(0)} y_n(x)$. Отримали, що *(n+1)*-ий розв'язок знову виявився лінійно залежним.

Для побудови диференціального рівняння типу (30.5) по системі лінійно незалежних функцій $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$, які $n$ раз неперервно диференційовані на $(a,b)$ , вронскіан яких $W(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ необхідно розглянути вронскіан порядку $(n+1)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

і розкрити цей визначник по останньому стовпчику.

Якщо відомо один частинний ненульовий розв'язок диференціального рівняння (30.5), то можна понизати порядок його на одиницю заміною

$$y = y_1 \int u dx \text{ , або } u = \left( \frac{y}{y_1} \right)' . \tag{30.25}$$

Тоді

$$\begin{cases} y' = y_1' \int u du + y_1 u \\ y'' = y_1'' \int u du + 2 y_1' u + y_1 u' \\ \cdots \\ y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u du + n y_1^{(n-1)} u + \dfrac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u' + ... + y_1 u^{(n-1)} \end{cases}$$

і диференціальне рівняння (30.5) запишемо у вигляді

$$L(y_1) \int u dx + b_{n-1}(x) u + b_{n-2}(x) u' + ... + y_1 u^{(n-1)} = 0 .$$

Ми отримали диференціальне рівняння порядку *(n-1)*

$$y_1(x) u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-2}(x) u' + b_{n-1}(x) u = 0 .$$

Якщо маємо $\kappa$ лінійно незалежних частинних розв'язків, то диференціальне рівняння (30.5) можна понизити на $\kappa$ одиниць.

## Питання для самоперевірки

1 Що називається лінійним диференціальним рівнянням $n$-го порядку?

2 Перелікуйте властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння $n$-го порядку.

3 Які функції називаються лінійно незалежними на інтервілі $(a, b)$?

4 Сформулюйте необхідні і достатні умови лінійної незалежності $n$ розв'язків лінійного однорідного рівняння $n$ – го порядку.

5 Що називається фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння $n$ – го порядку.

6 Сформулюйте теорему про загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $n$-го порядку.

## ЛЕКЦІЯ 31

31.1 Лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

31.2 Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Теорема про загальний розв’язок.

### 31.1 Лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

У загальному вигляді лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами записують так:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (31.1)$$

де $a_1$ і $a_2$ – дійсні числа.

Якщо $f(x) = 0$, то лінійне рівняння називають **однорідним,** у противному випадку **– неоднорідним.**

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку (ЛОДР) зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (31.2)$$

Два розв'язки диференціального рівняння називають **лінійно незалежними на проміжку** $[a;b]$**,** якщо їх відношення $\dfrac{y_1}{y_2}$ не є сталою величиною, тобто $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const$.

**Теорема (про структуру загального розв'язку ЛОДР).**

Якщо $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ два лінійно незалежних розв'язки диференціального рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то функція $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ є загальним розв'язком цього рівняння, де $c_1, c_2$ – довільні сталі .

**Доведення.** За означенням загального розв'язку:

1) функція $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ матиме задовольняти рівнянню $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$; дійсно, визначимо $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$, $y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$, підставимо до рівняння і отримаємо:

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1 c_1 y_1' + a_1 c_2 y_2' + a_2 c_1 y_1 + a_2 c_2 y_2 = 0.$$

Згрупуємо доданки з $y_1$ і $y_2$, з урахуванням того, що $y_1$ і $y_2$ є розв’язками рівняння, дістанемо тотожність

$$\left(c_1 y_1'' + c_1 a_1 y_1' + c_1 a_2 y_1\right) + \left(c_2 y_2'' + c_2 a_1 y_2' + c_2 a_2 y_2\right) =$$

$$= \underbrace{c_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y\right)}_{0} + \underbrace{c_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right)}_{0} = 0.$$

2) при заданих початкових умовах $y\big|_{x=x_0}=y_0$; $y'\big|_{x=x_0}=y'_0$ можна визначити такі значення сталих $c_1=c_1^0$ і $c_2=c_2^0$, що функція $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ буде задовольняти цим умовам. Застосуємо позначення:

$$y_1\big|_{x=x_0}=y_1(x_0);\; y_1'\big|_{x=x_0}=y_1'(x_0);$$

$$y_2\big|_{x=x_0}=y_2(x_0);\; y_2'\big|_{x=x_0}=y_2'(x_0).$$

Підставимо початкові умови до рівняння $y=c_1y_1+c_2y_2$, отримаємо

$$y_0=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0).$$

Продиференціюємо цю рівність:

$$y_0'=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)$$

і складемо систему $\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0, \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y_0'. \end{cases}$

Отримали систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими $c_1$ і $c_2$. Ця система має єдиний розв'язок $c_1=c_1^0$ і $c_2=c_2^0$, оскільки її визначник

$\Delta=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}\neq 0$ в силу лінійній незалежності розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ (пропонуємо переконатися в цьому самостійно).

Таким чином, теорема доведена.

Лінійно незалежні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ЛОДР шукатимемо у вигляді $y=e^{kx}$. Такий вибір ґрунтується на тому, що функція $y=e^{kx}$ та її похідні $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ відрізняються одна від одної лише сталими множниками $k$ і $k^2$, а ця умова є властивістю лінійного диференціального однорідного рівняння.

Підставимо $y=e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ до рівняння, отримаємо

$$k^2e^{kx}+a_1ke^{kx}+a_2e^{kx}=0 \text{ або } e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0.$$

Оскільки $e^{kx}\neq 0$, то отримаємо рівняння

$$k^2+a_1k+a_2=0, \tag{31.3}$$

яке називають **характеристичним рівнянням.**

Розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ визначають у залежності від коренів характеристичного рівняння:

1) Якщо характеристичне рівняння має два різних корені $k_1$ і $k_2$, $k_1\neq k_2$ ( $D>0$ ), то $y_1=e^{k_1x}$; $y_2=e^{k_2x}$ і загальний розв'язок має вигляд

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}. \tag{31.4}$$

Вище було показано, що функції $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ є розв'язками рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, переконаємося, що вони є лінійно незалежними. Дійсно, складемо відношення $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$, оскільки $k_1 \neq k_2$.

2) Якщо характеристичне рівняння має два однакових корені $k_1$ і $k_2$, $k_1 = k_2$ ($D = 0$), то можна показати, що загальний розв'язокмає вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}. \tag{31.5}$$

3) Якщо характеристичне рівняння має два комплексно – спряжених корені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \tag{31.6}$$

тут $\alpha$ і $\beta$ – дійсні числа, які є дійсною і уявною частинами комплексних чисел $\alpha \pm \beta i$.

**Приклад.** Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

**Розв'язання.** Маємо ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якого визначається за формулою $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ два лінійно незалежних розв'язки цього рівняння.

Для знаходження $y_1(x)$ і $y_2(x)$ складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$, корені якого $k_1 = 2$ і $k_2 = 3$. Характеристичне рівняння має дійсні та різні корені ($k_1 \neq k_2$, випадок 1), тому загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

**Приклад.** Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$, який задовольняє початковим умовам $y|_{x=0} = 1$; $y'|_{x=0} = 0$.

**Розв'язання.** Спочатку визначимо загальний розв'язок рівняння. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні $k_1 = k_2 = 2$ (випадок 2), тому загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

Для знаходження частинного розв'язку попередньо продиференціюємо y і отримаємо $y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2x c_2 e^{2x}$.

Враховуючи початкові умови: $y|_{x=0} = 1$; $y'|_{x=0} = 0$, складаємо систему рівнянь $\begin{cases} 1 = c_1 e^0 + 0 \cdot c_2 e^0, \\ 0 = 2c_1 e^0 + c_2 e^0 + 2c_2 \cdot 0 \cdot e^0, \end{cases}$ або $\begin{cases} 1 = c_1, \\ 0 = 2c_1 + c_2, \end{cases}$

звідки $c_1 = 1$, $c_2 = -2$. Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$y = e^{2x} - 2x e^{2x}.$$

**Приклад.** Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 5y = 0$.

**Розв'язання.** Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 5 = 0$.

Корені характеристичного рівняння комплексно – спряжені та дорівнюють $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$ (випадок 3), тобто $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x .$$

## 31.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = f(x), \qquad (31.7)$$

де $f(x),\ p_1(x), ...,\ p_n(x)$ – неперервні на $(a,b)$ функції.

Припустимо, що для диференціального рівняння (31.7) ми знайшли частинний розв'язок так, що

$$L(y_1) = f(x). \qquad (31.8)$$

Введемо нову змінну $z$: $\quad y = y_1 + z$. (31.9)

Тоді $\quad L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = f(x)$,

Звідки $\quad L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x) z^{(n-1)} + ... + p_n(x) z = 0$. (31.10)

Диференціальне рівняння (31.10) називається однорідним диференціальним рівнянням, яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (31.7).

Загальний розв'язок диференціального рівняння (31.10) записується у формі

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_n z_n, \qquad (31.11)$$

де $z_1, z_2, ..., z_n$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (31.10), $c_1, c_2, ..., c_n$ – довільні сталі. Тоді

$$y = y_1(x) + c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_n z_n \qquad (31.12)$$

буде загальним розв'язком диференціального рівняння (31.7) в області

$$a < x < b, |y| < \infty,\ |y'| < \infty, ... , \left|y^{(n-1)}\right| < \infty. \qquad (31.13)$$

Таким чином, для знаходження загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (31.7) необхідно знайти один частинний розв'язок диференціального рівняння (31.7) і прибавити до нього загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

**Зауваження.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \qquad (31.14)$$

Припустимо, що $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння $L(y_1) = f_1(x)$, а $y_2(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння $L(y_2) = f_2(x)$. Тоді, очевидно, $y_1(x) + y_2(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння.

**Приклад.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x.$$

Розв'язання. Розглянемо диференціальні рівняння:

a) $y'' + 2y = 2$ для якого $y_1 = 1$;

b) $y'' + 2y = 3e^x$ для якого $y_2 = e^x$.

Тоді $y_1 + y_2 = e^x + 1$ – частинний розв'язок даного диференціального рівняння.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Процес розв'язання цього рівняння ґрунтується на такій теоремі.

**Теорема ( про структуру загального розв'язку ЛНДР).**

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ дорівнює сумі будь - якого частинного розв'язку $Y$ цього рівняння і загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Пропонуємо цю терему довести самостійно (див. доведення тереми про структуру ЛОДР).

Отже, функція $y = У + \bar{y}$ є загальним розв'язком ЛНДР.

## Питання для самоперевірки

1 Викласти метод розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Яке рівняння називають характеристичним?

2 Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені його характеристичного рівняння: 1) дійсні й різні, 2) дійсні й рівні, 3) комплексно-спряжені.

# ЛЕКЦІЯ 32

32 Метод варіації довільних сталих.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{32.1}$$

можна знайти в квадратурах, якщо відомо загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння. Будемо шукати загальний розв'язок диференціального рівняння (32.1) у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i\,, \tag{32.2}$$

де $z_1(x), z_2(x), ..., z_n(x)$– деяка фундаментальна система розв′язків диференціального рівняння (5.52).

Виберемо функції $c_i(x),\ i=1,2,\dots,n$ так, щоб функція (32.2) була загальним розв'язком диференціального рівняння (32.1). Оскільки шукані функції задовольняють тільки одній умові, то для їх визначення можна підпорядкувати їх будь яким (*n-1*) умовам.

Таким чином, знайдемо *n* похідних функції (32.2):

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i\ ;$$

$$y'=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i'+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i=0;$$

$$y''=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i''+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i' \text{ й покладемо; } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i'=0\,;$$

…………………..

$$y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i^{(n-1)}+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-2)} \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-2)}=0\,;$$

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)} \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=0\,.$$

Підставляючи в диференціальне рівняння (32.1) отримаємо *n* –е рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}c_i(x)L(z_i)+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=f(x).$$

Таким чином, для визначення невідомих функцій отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i'=0,\ \dots,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-2)}=0,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=f(x)\ . \quad (32.3)$$

Відносно $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$ – це система лінійних рівнянь з визначником $W(x)\neq 0$. Для знаходження $c_i'(x)$ запишемо формулу

$$c_i'(x)=\frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)},\quad i=1,2,\dots,n\ , \quad (32.4)$$

де $W_{ni}(x)$ – алгебраїчне доповнення до елементу *n*-го рядка і $i$ –го стовпчика визначника $W(x)$. Всі функції, які входять в праву частину диференціального рівняння (32.4) є неперервними на $(a,b)$. З (32.4) отримаємо

$$c_i(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)}dx+c_i,\quad i=1,2,\dots,n\ , \quad (32.5)$$

де $c_i,\ i=1,2,\dots,n$ – довільні сталі, $x_0\in(a,b)$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (32.1) запишеться у вигляді

$$y=\sum_{i=1}^{n}z_i\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(t)f(t)}{W(t)}dt+\sum_{i=1}^{n}c_iz_i\ . \quad (32.6)$$

Тут $y_1=\sum_{i=1}^{n} z_i \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(t)\, f(t)}{W(t)} dt$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (32.1).

Неважко перевірити, що частинний розв'язок задовольняє нульовим початковим умовам $y_1(x_0)=0,\ y_1'(x_0)=0,\dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0,\ x_0\in(a,b)$.

**Приклад.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''+k^2y=f(x),\ k\neq 0.$$

**Розв'язання.** Фундаментальна система розв'язків для диференціального рівняння $z''+k^2z=0$ буде $z_1=\cos kx,\ z_2=\sin kx$. Отже

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos kx & \sin kx\\ -k\sin kx & k\cos kx\end{vmatrix}=k.$$

Тому загальний розв'язок запишемо у вигляді ( $w_{21}=-\sin kx,\ w_{22}=\cos kx$ )

$$y=-\frac{\cos kx}{k}\int\limits_{x_0}^{x}\sin kt\, f(t)dt+\frac{\sin kx}{k}\int\limits_{x_0}^{x}\cos kt\, f(t)dt++c_1\cos kx+c_2\sin kx,$$

$$y=\frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x}\sin k(x-t)\, f(t)dt+c_1\cos kx+c_2\sin kx.$$

Зокрема, для диференціального рівняння другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{32.7}$$

загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y=-z_1\int\limits_{x_0}^{x}\frac{z_2 f(t)}{W(t)}dt+z_2\int\limits_{x_0}^{x}\frac{z_1 f(t)}{W(t)}dt+c_1z_1+c_2z_2. \tag{32.8}$$

При цьому $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (5.64), який задовольняє цьому рівнянню з початковими умовами $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$.

Для диференціального рівняння виду

$$y''+q(x)y=f(x) \quad (p(x)\equiv 0), \tag{32.9}$$

Оскільки $W(x)=const$, загальний розв'язок запишемо у формі

$$y=-\frac{z_1}{W(x_0)}\int\limits_{x_0}^{x}z_2 f(t)dt+\frac{z_2}{W(x_0)}\int\limits_{x_0}^{x}z_1 f(t)dt. \tag{32.10}$$

Таким чином, для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння (32.1) необхідно знайти фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння $L(z)\equiv z^{(n)}+p_1(x)z^{(n-1)}+\dots+p_n(x)z=0$, після чого загальний розв'язок запишеться в квадратурах.

## Питання для самоперевірки

1 В чому полягає метод варіації довільних сталих при розв'язанні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь $n$-го порядку?

## ЛЕКЦІЯ 33

### 33 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Розглянемо неоднорідні рівняння, праві частини яких є функціями спеціального вигляду:

1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$;

2) $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$ (загальний випадок).

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно п - го і т – го степеня.

Розглянемо перший випадок. У припущенні, що $\alpha$ не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок $Y$ шукатимемо у вигляді $Y=e^{\alpha x}Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ – багаточлен п - го степеня.

Зауважимо, що $Q_n'(x)$ і $Q_n''(x)$ є багаточленами відповідно ($n$ – 1) – го і ($n$ – 2) – го степеня.

Отже,
$$Y'=e^{\alpha x}(\alpha\cdot Q_n(x)+Q_n'(x)),$$
$$Y''=e^{\alpha x}(\alpha^2\cdot Q_n(x)+2\alpha\cdot e^{\alpha x}Q_n'(x))+Q_n''(x)).$$

Підставимо ці рівності до рівняння $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$, отримаємо
$$Q_n(x)(\alpha^2+a_1\cdot\alpha+a_2)+Q_n'(x)(2\alpha+a_1)+Q_n''(x)=P_n(x). \qquad (33.1)$$

У лівій частині здобутої рівності має бути багаточлен п - го степеня. Ця умова буде виконуватися, якщо $\alpha^2+\alpha\cdot a_1+a_2\neq 0$, тобто $\alpha$ не є коренем характеристичного рівняння $k^2+a_1k+a_2=0$.

Якщо $\alpha$ є однократним коренем характеристичного рівняння, тобто $\alpha^2+\alpha\cdot a_1+a_2=0$, а $2\alpha+a_1\neq 0$, то для того, щоб багаточлен у лівій частині рівності (7.9) був багаточленом п – го степеня, частинний розв'язок $Y$ має бути поданий у вигляді $Y=x\cdot e^{\alpha x}Q_n(x)$.

У випадку, коли $\alpha$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тобто $\alpha^2+\alpha\cdot a_1+a_2=0$ і $2\alpha+a_1=0$, частинний розв'язок $Y$ має бути поданий у вигляді $Y=x^2\cdot e^{\alpha x}Q_n(x)$.

У загальному випадку, коли
$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right],$$
частинний розв'язок $Y$ лінійного неоднорідного рівняння шукають у вигляді
$$Y=x^s\cdot e^{\alpha x}\left[T_k(x)\cos\beta x+R_k(x)\sin\beta x\right], \qquad (33.2)$$
де

$$k=\max(n;m)\,;\quad s=\begin{cases}0, & якщо\ \alpha\pm\beta i\neq k_{1,2},\\ 1, & якщо\ \alpha\pm\beta i=k_1\neq k_2,\\ 2, & якщо\ \alpha\pm\beta i=k_1=k_2.\end{cases}\qquad(33.3)$$

**Приклад.** Розв'язати рівняння $y''-4y'+3y=5e^{2x}$.

**Розв'язання.** Дане рівняння є ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y=Y+\bar{y}$.

1) Спочатку визначимо загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y''-4y'+3y=0$. Для цього застосуємо теорему $Y=c_1y_1+c_2y_2$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ два лінійно незалежних розв'язки . Складаємо характеристичне рівняння $k^2-4k+3=0$, яке має корені $k_1=1$, $k_2=3$.

Отже, $\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{3x}$.

2) Оскільки права частина рівняння $f(x)=5e^{2x}$ є функцією вигляду $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, то частинний розв'язок $Y$ шукатимемо у вигляді $Y=x^sP_n(x)e^{\alpha x}$, де $\alpha=2$, $\beta=0$, $k=n=0$, $s=0$, оскільки $\alpha\pm\beta i\neq k_{1,2}$. Таким чином, $Y=Ae^{2x}$, де $A=P_0(x)$.

Для визначення сталої A знайдемо $Y'$ і $Y''$:

$$Y'=2Ae^{2x},\ Y''=4Ae^{2x}.$$

Підставимо вирази $Y$, $Y'$, $Y''$ до даного рівняння і отримаємо

$$4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=5e^{2x},$$

$$-Ae^{2x}=5e^{2x}, \text{ тобто } A=-5.$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд $Y=-5e^{2x}$.

Остаточно запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y=c_1e^x+c_2e^{3x}-5e^{2x}.$$

## Питання для самоперевірки

1 Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

2 Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною у випадках: 1) $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$;

2) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$;

3) $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$?

## ЛЕКЦІЯ 34

34 Системи диференціальних рівнянь, основні визначення і методи розв'язання.

**Означення.** Сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \\ \quad ... \\ F_n(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \end{cases}, \tag{34.1}$$

де $y_1, ..., y_n$ – шукані функції від незалежної змінної $x$, називається **системою диференціальних рівнянь першого порядку**.

**Означення.** Будемо говорити, що систему звичайних диференціальних рівнянь (6.1) записано в **нормальній формі**, якщо її можна розв'язати відносно похідних і представити в такому вигляді

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = 1,2,...,n. \tag{34.2}$$

Число рівнянь системи диференціальних рівнянь (34.2) називається її **порядком.**

**Означення.** Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (34.2) лінійні по $y_1, ..., y_n$

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j + f_i(x),\ i = 1,..,n, \tag{34.3}$$

то система називається **лінійною**.

**Означення.** Сукупність $n$ функцій

$$y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x) \tag{34.4}$$

визначених і неперервно диференційовних на $(a,b)$ називається **розв'язком системи** (34.2), якщо вона перетворює всі рівняння системи (34.2) в тотожності на $(a,b)$.

Процес знаходження розв'язків системи називається **інтегруванням**.

**Задача Коші**: для системи диференціальних рівнянь (34.2) серед всіх розв'язків знайти такий $\quad y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x),$ (34.5)

який задовольняє умовам $\quad y_1(x_0) = y_1^{(0)}, ..., y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$ (34.6)

Тут $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ – початкові значення шуканих функцій, $x_0$ – початкове значення незалежної змінної $x$. Числа $x_0, y^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ називаються початковими даними розв'язку (34.5), умови (34.6) – початковими умовами.

**Геометричний зміст задачі Коші** – серед всіх інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (34.2) знайти ту, яка проходить через точку (34.6).

**Механічний зміст задачі Коші** – знайти такий рух, визначений системою диференціальних рівнянь (34.2), який задовольняє початковим умовам (34.6).

**Загальний, частинний і особливий розв'язки**

Нехай $D-$ область, в кожній точці якої виконуються умови теореми існування і єдиності.

**Означення.** Сукупність $n$ функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, ..., c_n) \\ \quad ... \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, ..., c_n) \end{cases} \tag{34.7}$$

визначених в деякій області зміни змінних $x, c_1, ..., c_n$ і які мають неперервні частинні похідні за $x$, будемо називати **загальним розв'язком** системи (34.2) в області $D$, якщо систему (34.7) можна розв'язати відносно $c_1, ..., c_n$

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \quad ... \\ c_n = \psi_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}, \tag{34.8}$$

а сукупність функцій (34.7) є розв'язком диференціального рівняння (34.2) для всіх сталих, визначених співвідношеннями (34.8), коли $(x, y_1, ..., y_n) \in D$.

Якщо в (34.7) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \\ \quad ... \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \end{cases}, \tag{34.9}$$

то (34.9) називається **загальним розв'язком в формі Коші**.

**Означення.** Розв'язок системи диференціальних рівнянь (34.2) називається **частинним** якщо він складається з точок єдиності розв'язку задачі Коші. Його можна отримати при конкретних сталих, включаючи $\pm\infty$.

**Означення.** Розв'язок системи диференціальних рівнянь (34.2) називається **особливим**, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

**Перший та загальний інтеграли. Число незалежних інтегралів**

Розглянемо одну з рівностей (34.8) $\quad \psi_i(x, y_1, ..., y_n) = c_i$. (34.10)

Функція $\psi_i(x, y_1, ..., y_n)$ на будь-якому частинному розв'язку приймає постійні значення, тобто $\quad \psi_i(x, \varphi_1(x, c_1, ..., c_n), ..., \varphi_n(x, c_1, ..., c_n)) = c_i$.

Ця функція називається **інтегралом.**

**Означення.** (перше означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1, ..., y_n)$, визначена на $D$ і яка не приводиться до сталої, називається **інтегралом системи диференціальних рівнянь** (34.2) в області $D$, якщо при заміні $y_1, ..., y_n$ будь-яким частинним розв'язком цієї системи, вона приймає постійне значення.

На частинних розв'язках системи (34.2) $d\psi \equiv 0$, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n \equiv 0.$$

Це записується таким чином

$$d\psi_{(34.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1,..., y_n)dx + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1,..., y_n)dx \equiv 0. \qquad (34.11)$$

**Означення.** (друге означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1,..., y_n)$ неперервно диференційована в області $D$ і така, що $\frac{\partial \psi}{\partial y_1},...,\frac{\partial \psi}{\partial y_n}$ не дорівнюють одночасно нулю в цій області, називається **інтегралом системи диференціальних рівнянь** (34.2) в області $D$, якщо $d\psi_{(6.2)} \equiv 0$.

Співвідношення (34.11) еквівалентне наступному

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(34.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1,..., y_n) + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1,..., y_n) \equiv 0.$$

Якщо функція є інтегралом в смислі другого означення, то вона буде інтегралом і в смислі першого. Обернене не вірно – $\psi(x, y_1,..., y_n)$ може не мати частинних похідних.

Рівність $\varphi(x, y_1,..., y_n) = c$ називається першим інтегралом системи диференціальних рівнянь (34.2).

**Означення.** Сукупність $n$ перших інтегралів вигляду (34.8). яку можна розв'язати відносно $y_1,..., y_n$, в результаті чого в області $D$ отримаємо загальний розв'язок в формі (34.7) будемо називати **загальним інтегралом** системи диференціальних рівнянь (34.2) в області $D$.

Перші інтеграли (34.8), які утворюють загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь (34.2), є незалежними, якщо між функціями $\psi_1,...,\psi_n$ не існує співвідношення виду $\Phi(\psi_1,...,\psi_n) = 0$ ні при якому виборі функції $\Phi(\psi_1,...,\psi_n)$.

**Теорема.** Якщо інтеграли $\psi_1,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні, то для незалежності їх необхідно і достатньо, щоб якобіан від функцій $\psi_1,...,\psi_n$ за $y_1,..., y_n$ не перетворювався тотожно в нуль

$$\frac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(y_1,..., y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (34.12)$$

Доведення витікає з відповідного розділу математичного аналізу: необхідною і достатньою умовою незалежності $m$ функцій $u_1,...,u_m$ від $n$ змінних $x_1,.., x_n$ $(m \leq n)$ полягає в тому, щоб хоча б один з функціональних визначників який можна утворити з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Якщо ми маємо $k$ інтегралів $1 \le k \le n$, то вони будуть незалежними тоді і тільки тоді, коли хоча б один з функціональних визначників $k$–го порядку, складений з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \psi_k}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_k}{\partial y_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Припустимо, що інтеграли $\psi_1,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні за $x, y_1,..., y_n$.

**Теорема.** Нормальна система $n$ рівнянь не може мати більш ніж $n$ незалежних інтегралів.

**Доведення.** Твердження теореми рівносильно тому, що якщо відомо $n+1$ інтеграл системи диференціальних рівнянь (34.2) $\psi_1,...,\psi_n$, $\psi$, то вони не можуть бути незалежними. Розглянемо два випадки.

а) $\psi_1,...,\psi_n$ – залежні, то і $\psi_1,...,\psi_n$, $\psi$ – теж залежні.

б) $\psi_1,...,\psi_n$ – не залежні. Тоді $\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(y_1,..., y_n)} \ne 0$. Оскільки $\psi_1, ..\psi_n$, $\psi$ – інтеграли системи диференціальних рівнянь (34.2), то

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n = 0.$$

Ця система однорідних рівнянь показує, що вона має не нульовий розв'язок $f_1,..., f_n$. Тому $\dfrac{D(\psi,\psi_1,...,\psi_n)}{D(x, y_1,..., y_n)} = 0$.

З математичного аналізу відомо, що в цьому разі $\psi = \Phi(\psi_1,...,\psi_n)$, тобто функції $\psi_1,...,\psi_n,\psi$ – залежні.

**Теорема.** Якщо $\psi_1,...,\psi_k$, $1 \le k \le n$ – незалежні інтеграли системи диференціальних рівнянь (34.2) в області $D$, а $\Phi(z_1,..., z_k)$ – довільна функція, визначена в деякій області змінних $z_1,..., z_k$, яка є областю значень функцій $\psi_1,...,\psi_k$, коли $(x, y_1,..., y_n) \in D$, і яка має в цій області неперервні частинні похідні по $z_1,..., z_k$ не рівні нулю одночасно, то функція

$$\psi = \Phi(\psi_1,...,\psi_n) \tag{34.13}$$

також буде інтегралом системи диференціальних рівнянь (34.2).

Дійсно,

$$d\psi_{(34.2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} d\psi_{i_{(34.2)}} \equiv 0$$

в силу умови теореми, що $d\psi_{i_{(34.2)}} \equiv 0$, $i = 1,2,...,k$.

**Пониження порядку системи з допомогою перших інтегралів**

Знаючи один перший інтеграл системи диференціальних рівнянь (34.2) можна понизити її порядок на одиницю.

Дійсно, нехай

$$\psi_1(x, y_1,..., y_n) = c_1 \tag{34.14}$$

– перший інтеграл.

Визначимо з (34.14)

$$y_1 = \overline{\varphi_1}(x, y_2,..., y_n, c_1). \tag{34.15}$$

Підставивши(34.15) в $(n-1)$ рівняння будемо мати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, \overline{\varphi}_1, y_2,..., y_n) \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, \overline{\varphi}_1, y_2,..., y_n) \end{cases} \tag{34.16}$$

порядку $(n-1)$.

Якщо відомо $k$ перших інтегралів, то порядок системи диференціальних рівнянь (34.2) можна понизити на $k$ одиниць.

**Питання для самоперевірки**

1 Що називається системою диференціальних рівнянь першого порядку? Що означає, що систему звичайних диференціальних рівнянь записано в нормальній формі? Що називається порядком системи диференціальних рівнянь?

2 В чому полягає механічний та геометричний зміст задачі Коші?

3 Що називається загальним розв'язком, частинним розв'язком, особливим розв'язком системи диференціальних рівнянь?

4 Що називається інтегралом, загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь?

5. Скільки незалежних інтегралів може мати нормальна система $n$ рівнянь?

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ


1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М., 1975.
2. Ю.В.Боднарчук Б.В.Олійник. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – К., 2010.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 10-е изд., испр. — М., 2005.
4. Ильин В.А. Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М., Изд. МГУ, 1998.
5. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К., 2004.
6. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. – К., 2003.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х томах Т.1 – М., 1978.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х томах Т.2 – М., 1978.
9. Кудрявцев Л.Д. Кратний курс математического анализа М, 1989.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики т.1. М., 1974.
11. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкиса, О. А. Олейиик. — М., 1984.
12. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник для студентів вузів. – К., 2003.
13. Каплан И.А., Пустынников В. И. / Под ред. Пустынникова В. И. Практикум по высшей математике. В 2-х т. Т. 1, 2. 6-е изд., М., 2006.
14. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Изд. 14, М.,1998.

ЗМІСТ

**Навчальне видання**

ГАЄВСЬКА Вікторія Олексіївна
ЛИСЯНСЬКА Ганна Володимирівна

# ВИЩА МАТЕМАТИКА. МОДУЛЬ 1

## Тексти лекцій

Формат 60х84 1/16.
Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. –10,2

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, ул. Алчевських, 44