МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА В АРХІТЕКТУРІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського рівня)
спеціальностей 191 «Архітектура та мастобудування»

Харків – 2023

Укладачі: Д.І. Масленніков, канд. фіз.-мат. наук, доцент, В.В. Масленнікова, канд. ек. наук, доцент.

Рецензенти: Д.В. Чібісов – д-р фіз.-мат. наук наук, професор кафедри вищої математики ХНУ ім. В.Н. Каразіна;

Гопцій О.Б. – доцент кафедри надійності та міцності машин і споруд ім. В.Я. Аніловича ДБТУ, канд.. ек. наук, доцент

Вища математика в архітектурі: навчальний посібник/ Д.І. Масленніков, В.В. Масленнікова. – Х.: ДБТУ, 2023. – 203 с.

В посібнику викладено основні розділи вищої математики відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 191 «Архітектура та містобудування». Надано основні теоретичні положення і формули таких розділів математики як лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз. Посібник містить велику кількість прикладів розв’язання типових задач та контрольні роботи для самостійного виконання.

© Масленніков Д.І., Масленнікова В.В. 2023
© ДБТУ, 2023

Передмова

Навчальний посібник «Вища математика в архітектурі» для здобувачів вищої освіти бакалаврського рівня спеціальності 191 «Архітектура та містобудування» складаються з необхідної теоретичної частини та прикладів розв’язання практичних завдань.

Мета методичних рекомендацій полягає в допомозі студентам у виконанні тематичних контрольних робіт, у засвоєнні матеріалу, що за програмою пропонується для самостійної роботи та у придбанні навичків розв’язання типових задач, що сприяють усвідомленню основних понять курсу та їх взаємозв’язку.

Успіх у розв’язанні задач контрольних робіт залежить головним чином від того, наскільки свідомо студент вивчив відповідний теоретичний матеріал. Тому перш за все перед тим, як виконувати контрольну роботу, необхідно уважно розглянути відповідний розділ дисципліни, його теоретичну частину.

Рекомендації містять 9 контрольних робіт по 26 варіантів завдань у кожній із них. Виконання їх забезпечить успішне володіння програмним матеріалом при різних формах навчання.

I. Елементи лінійної алгебри

1.Визначники та їх властивості

Визначник – це число (або буквений вираз), котре знаходять із заданої квадратної таблиці чисел (або букв), згідно з установленими правилами. У такій таблиці ряди чисел по горизонталі називаються рядками, а по вертикалі – стовпцями. Визначник позначається прямими дужками.

Визначники другого порядку

Запис у загальному вигляді:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, де a_{ij} - символічне позначення елемента визначника, який розташований на перетині $i-$ го рядка та $j-$го стовпця ($i=1,2;\ j=1,2$).

Інколи для скорочення запису визначник позначають символами D або Δ (грецька буква "дельта").

Правило обчислення визначника:

1) перемножити елементи, які стоять на головній діагоналі: $a_{11}\cdot a_{22}$,
2) перемножити елементи на другій (побічній) діагоналі: $a_{12}\cdot a_{21}$,
3) відняти другий добуток від першого: $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Схематично обчислення визначника (розшукання його величини) записують так:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2/3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. Тут $a_{11}=\dfrac{2}{3},\ a_{12}=-1,\ \ a_{21}=1,\ \ a_{22}=3$. З формули (1) отримаємо:

$\Delta=\dfrac{2}{3}\cdot 3-(-1)\cdot 1=2+1=3$.

Відповідь. $\Delta=3$.

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Розв'язок. Тут $a_{11}=\cos\alpha,\ \ a_{12}=-\sin\alpha,\ \ a_{21}=\sin\alpha,\ \ a_{22}=\cos\alpha$.

З формули (1):

$\Delta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - (-\sin\alpha)\sin\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Відповідь. $\Delta = 1.$

Приклад 3. Знайти корені рівняння $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 4 & x+2 \end{vmatrix} = 0.$

Розв'язок. Тут $a_{11} = x,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = x+2.$

З формули (1): $\Delta = \mathrm{x}(\mathrm{x}+2) - 2\cdot 4 = \mathrm{x}^2 + 2x - 8 = 0;\ x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9}.$

Відповідь. $x_1 = 2,\ x_2 = -4.$

Методичні вказівки. Схему обчислень визначників 2-го порядку завчити напам'ять. Навчитися уявно зв'язувати кожний елемент даного визначника з його символічним образом a_{ij}.

Визначники третього порядку

Запис у загальному вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

де a_{ij} - елемент визначника, розміщений на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця $(i = 1,\ 2,\ 3;\ \ l = 1,\ 2,\ 3)$.

Мінором M_{ij} називається визначник 2-го порядку, отриманий з початкового визначника 3-го порядку шляхом викреслення *i*-го рядка та *j* -го стовпця:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{31},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{32},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{31},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{31},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} називається мінор M_{ij} взятий зі знаком "плюс", якщо число $i+j$ – парне, та знаком "мінус", якщо $i+j$ – непарне.
Скорочений запис: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Приклад. Знайти мінори й алгебраїчні доповнення визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язок.
$a_{11}=1$; $a_{12}=2$; $a_{13}=-1$; $a_{21}=3$; $a_{22}=-1$; $a_{23}=2$; $a_{31}=1$; $a_{32}=0$; $a_{33}=4$.

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 0 \cdot 2 = -4$; $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -4$,

$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -10$,

$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$; $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -1$,

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 = 8$; $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -8$,

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 5$; $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 5$,

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$; $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 2$,

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 3$,

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 5$; $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -5$,

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7$; $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -7$.

Правила обчислення визначників

1. Обчислення за допомогою розкладання по будь-якому рядку або будь-якому стовпцю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \text{(Розкладання: по 1-му рядку)}$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \text{(по 2-му рядку)}$$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \text{(по 3-му рядку)}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \text{(по 1-му стовпцю)}$$
$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \text{(по 2-му стовпцю)}$$
$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.\ \text{(по 3-му стовпцю)} \qquad (2)$$

За будь-якою з цих формул отримуємо:

$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{33}a_{21}$.

Часто у формулах (2) замість алгебраїчних доповнень використовують мінори. Наприклад, розкладання по 1-му і 2-му рядках записують так:

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$\Delta = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2**.** Обчислення за правилом Саррюса

Необхідно запам'ятати схему:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}. \qquad (3)$$

Перший з доданків у правій частині (3) означає, що добутки усіх трьох елементів, що стоять на кожній лінії, додають зі знаком "плюс", а у другому доданку – із знаком "мінус".

Приклад. Обчислити визначник різними способами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Алгебраїчні доповнення цього визначника вже були знайдені раніше:

$$A_{11} = -4, A_{12} = -10, A_{13} = 1, A_{21} = -8, A_{22} = 5, A_{23} = 2, A_{31} = 3,$$
$$A_{32} = -5, A_{33} = -7.$$

Формули розкладання по рядках:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1\cdot(-4) + 2\cdot(-10) - 1\cdot 1 = -25,$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 3\cdot(-8) - 1\cdot 5 + 2\cdot 2 = -25,$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 1\cdot 3 + 0\cdot(-5) + 4\cdot(-7) = -25.$$

Розкладання по стовпцях за допомогою мінорів:

$$\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = -4-24+3=-25,$$

$$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} = -20-5=-25,$$

$$\Delta = -1\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix} = -1+4-28=-25.$$

За правилом Саррюса:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0\end{array}\right. - \left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0\end{array}\right. =$$

$=1\cdot(-1)\cdot4+2\cdot2\cdot1+(-1)\cdot3\cdot0 - (-1)\cdot(-1)\cdot1 - 1\cdot2\cdot0 - 2\cdot3\cdot4=-25$

Відповідь. $\Delta = -25$.

Методичні вказівки. Техніку обчислення визначників 3-го порядку різними способами треба довести до *автоматизму.* Навчитися швидко виписувати мінори у вигляді визначників 2-го порядку і *уявно* знаходити знак $(-1)^{i+j}$ відповідно до суми індексів $i+j$ мінора M_{ij}. Навчитися швидко записувати алгебраїчні доповнення у вигляді визначників (мінорів), взятих з відповідними знаками.

Майте на увазі, що легше за все розкласти визначник по тому рядку або стовпцю, де є найбільша кількість нулів, оскільки присутня найменша кількість доданків.

Зручніше розкривати визначник з використанням мінорів, оскільки розрахунки в цьому випадку йдуть послідовно (неперервно) і не потребують окремого обчислення алгебраїчних доповнень. При цьому досить *встановити,* який знак має бути перед першим мінором, а в усіх наступних доданках знаки послідовно *міняти.*

Вправи

Обчислити визначник за допомогою розкладань по всіх рядках та стовпцях:

1) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}$, відп. 4. 2) $\begin{vmatrix}1/2 & 1 & 3/2\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}$, відп. 7.

Обчислити визначник, розкладаючи по тому рядку або стовпцю, де найбільша кількість нулів:

3) $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}$, відп. $-3a^2$. 4) $\begin{vmatrix} 0,5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1,5 & -2 \end{vmatrix}$, відп. 1.

5) $\begin{vmatrix} a & 3 & b \\ b & 1 & a \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, відп. $24a$-$18b$. 6) $\begin{vmatrix} 2,5 & -1 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 2 \\ 6,5 & 1 & 3,5 \end{vmatrix}$, відп. -16.

Знайти корені рівняння:

7) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ відп. $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{22}.$

8) $\begin{vmatrix} lgx & 2 & 3 \\ \lg(x-0,99) & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ відп. $x = 1$.

9) $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 0 & 2^{-x} & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ відп. $x = -\dfrac{1}{2}.$

10) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 1 \\ 1 & \sin\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$ відп. $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + n\cdot\pi,$ $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + n\pi,$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$

Контрольна робота № 1

Обчислити визначники, використовуючи їх основні властивості:

1) $\begin{vmatrix} -8 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 2 \\ 8 & 11 & 1 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 21 & -9 & 6 \\ 20 & -8 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 16 & 5 \\ -4 & 9 & 3 \\ 8 & 6 & -1 \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 11 & 28 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} -2 & 10 & 14 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

$$7)\begin{vmatrix}5 & 16 & -2\\ 3 & 7 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix},\quad 8)\begin{vmatrix}4 & 5 & -1\\ 5 & 13 & 2\\ 4 & 15 & 9\end{vmatrix},\quad 9)\begin{vmatrix}17 & 2 & 1\\ 6 & 18 & -4\\ 13 & -7 & 5\end{vmatrix},$$

$$10)\begin{vmatrix}1 & 17 & 6\\ -2 & 7 & 1\\ 4 & 10 & 3\end{vmatrix},\quad 11)\begin{vmatrix}5 & 3 & 5\\ 19 & 11 & 28\\ 21 & 15 & 30\end{vmatrix},\quad 12)\begin{vmatrix}4 & 5 & 12\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 11\end{vmatrix},$$

$$13)\begin{vmatrix}17 & -5 & 5\\ 3 & 1 & 1\\ 11 & -7 & 3\end{vmatrix},\quad 14)\begin{vmatrix}21 & 16 & -2\\ 31 & 23 & 1\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix},\quad 15)\begin{vmatrix}18 & 25 & 61\\ 9 & 9 & 27\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix},$$

$$16)\begin{vmatrix}12 & 13 & 7\\ 5 & 8 & -2\\ 4 & 11 & 9\end{vmatrix},\quad 17)\begin{vmatrix}8 & 13 & 5\\ 3 & 9 & 5\\ 4 & 5 & 2\end{vmatrix},\quad 18)\begin{vmatrix}25 & 9 & 10\\ 13 & 5 & 4\\ 10 & 3 & 3\end{vmatrix},$$

$$19)\begin{vmatrix}13 & 5 & 2\\ 6 & 3 & 5\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix},\quad 20)\begin{vmatrix}14 & -9 & -2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 6\end{vmatrix},\quad 21)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 15\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix},$$

$$22)\begin{vmatrix}29 & 23 & 23\\ 4 & 3 & 3\\ 15 & 15 & -5\end{vmatrix},\quad 23)\begin{vmatrix}11 & -10 & 16\\ 7 & 2 & 3\\ 6 & 2 & 2\end{vmatrix},\quad 24)\begin{vmatrix}5 & 27 & 9\\ 2 & 17 & 4\\ 4 & 10 & 3\end{vmatrix},$$

$$25)\begin{vmatrix}5 & 8 & 15\\ 2 & 6 & 6\\ -1 & 4 & 7\end{vmatrix},\quad 26)\begin{vmatrix}41 & -6 & 11\\ 27 & 1 & 6\\ 7 & 4 & 1\end{vmatrix}.$$

2. Системи лінійних рівнянь. Формули Крамера

До систем лінійних рівнянь зводяться такі задачі математичного моделювання економіки: балансового аналізу багатогалузевої економіки, оптимального виробничого планування, оптимізації плану перевозок тощо.

Розглянемо спочатку системи лінійних рівнянь, в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь (назва рівнянь „Лінійні” пов’язана з тим, що невідомі входять в рівняння в першому степені). Найпростішою з них є *система двох лінійних рівнянь з двома невідомими*, яка має такий загальний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{4}$$

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими записується у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{5}$$

Аналогічний вигляд мають системи чотирьох, п'яти і більшої кількості рівнянь.

У загальному випадку записують також *систему n лінійних рівнянь (n=2, 3, 4, ...) з n невідомими:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{6}$$

У системах (4) – (6) введені позначення: $x_1, x_3, x_3, \dots x_n$ – невідомі (змінні), a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... a_{nn}, b_1, b_2, b_3, ... b_n – деякі числа, які називаються відповідно *коефіцієнтами при невідомих* (a_{ij}) *та вільними членами* (b_i). В позначенні індексів коефіцієнтів при невідомих a_{ij} перший індекс i вказує номер рівняння, в якому знаходиться цей коефіцієнт, другий індекс j вказує номер невідомої, при якій він є множником. Наприклад, коефіцієнт a_{23} знаходиться в другому рівнянні при третій змінній – система рівнянь (5).

Якщо хоча б один вільний член не дорівнює нулю, система називається *неоднорідною.* Якщо ж усі вільні члени рівні нулю ($b_1=b_2=\dots b_n=0$) – *неоднорідною.* Прикладом однорідної системи лінійних рівнянь є система:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи *n* рівнянь з *n* невідомими (6) називається така сукупність *n* чисел $x_1 = x_{01}$, $x_2 = x_{02}$, ... $x_n = x_{0n}$, при підстановці яких кожне з рівнянь системи (6) перетворюється у тотожність.

Наприклад, розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases} \tag{7}$$

є двоє чисел $x_1=1$, $x_2 = -1$, оскільки при підстановці їх у рівняння отримаємо тотожності:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + (-1) = 1, \\ 1 - 2 \cdot (-1) = 3. \end{cases}$$

Системи лінійних рівнянь можуть мати розв'язки, а можуть і не мати їх. Якщо система має хоча б один розв'язок, вона називається *сумісною* , а якщо розв'язків немає – *несумісною.* У випадку, коли система рівнянь сумісна, вона може мати один, або безліч розв'язків. Причому, якщо система має один розв'язок, вона називається *визначеною*, а якщо має безліч розв'язків – *невизначеною.* Прикладом сумісної і визначеної системи рівнянь є система (7).

Система ж лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases} \tag{8}$$

є сумісною і невизначеною, тобто має безліч розв'язків. Дійсно, поділивши на 2 друге рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases} \tag{9}$$

Тобто у систему рівнянь одне й те саме рівняння входить два рази. Звідси випливає, що одна зі змінних, наприклад x_2, може бути довільним числом. Тоді для визначення x_1 маємо рівність: $x_1=3-2x_2$.

Система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases} \tag{10}$$

є прикладом несумісної системи, тобто вона розв'язків немає. Дійсно, поділивши друге рівняння на 2, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases} \tag{11}$$

У лівих частинах обох рівнянь стоїть один і той же вираз, а праві частини різні. Оскільки один і той самий вираз не може одночасно дорівнювати різним значенням, система рівнянь не має розв'язків, тобто несумісна.

Розглянемо поняття рівносильності (еквівалентності) систем рівнянь. Дві системи рівнянь називаються *рівносильними,* якщо вони мають одні й ті самі розв'язки. Рівносильні системи позначаються знаком $\Leftrightarrow$. Наприклад,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = -2, \end{cases} \tag{12}$$

тобто ці системи рівносильні, оскільки мають один і той самий розв'язок: $x_1=1$, $x_2=1$. Без доведення сформулюємо правила перетворення систем рівнянь, за якими отримують рівносильні системи.

1. Кожне рівняння можна множити або ділити на число не рівне нулю. Цим правилом ми користувалися при перетворенні системи (8) у систему (9) і системи (10) у систему (11).
2. Рівняння системи можна додавати або віднімати одне від одного. Дане правило використане в (12) при отриманні другої системи з першої. Практично це робиться так:

$$\begin{array}{r} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ +\quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ \hline 3x_1 + x_2 = 4 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 2x_1 - \ \ x_2 = 1 \\ -\quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ \hline x_1 - 3x_2 = -2. \end{array}$$

3. Рівняння системи можна додавати, або віднімати одне від іншого попередньо помноживши їх на деякі числа. Це правило об'єднує перше і друге правила. Його використовують при розв'язанні систем лінійних рівнянь. Наприклад, зробимо перетворення першої системи і розв'яжемо її.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

На першому етапі перше рівняння помножили на 2 для того, щоб коефіцієнти при x_2 в обох рівняннях були рівними за модулем. На другому етапі до першого рівняння додали друге, що привело до виключення другої невідомого з першого рівняння. У результаті знайшли, що x_1=1. Підставивши це значення x_1 в друге рівняння, знаходимо, що x_2=1. Даний метод розв'язання системи лінійних рівнянь називається методом Гауса, або методом виключень.

Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Формули Крамера

Знайдемо розв‘язок системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{13}$$

При розв'язанні системи використаємо правила отримання еквівалентних систем. Виключимо з рівнянь невідому x_2. Для цього помножимо перше рівняння на a_{22}, а друге – на ($-a_{12}$) так, щоб коефіцієнти при x_2 в обох рівняннях були рівними за модулем і мали протилежні знаки:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ -a_{21}a_{12}x_2 - a_{22}a_{12}x_2 = -b_2a_{12}. \end{cases}$$

Додавши ці два рівняння, отримаємо рівняння, в якому присутня тільки невідома x_1:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{14}$$

Далі виключимо з початкової системи (13)змінну x_1. Для цього помножимо перше рівняння на ($-a_{21}$) , а друге – на a_{11}:

$$\begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 - a_{12}a_{21}x_2 = -b_1a_{21}, \\ a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11}. \end{cases}$$

Додавши ці рівняння, отримаємо рівняння, в якому присутня тільки невідома x_2

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \qquad (15)$$

У результаті цих перетворень замість системи рівнянь (1) отримаємо рівносильну їй систему, яка складається з рівнянь (5) і (6):

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \qquad (16)$$

Вираз в дужках називається головним визначником системи.

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

У правих частинах рівнянь системи (16) знаходяться вирази, які також є визначниками. Їх ми позначимо відповідно Δ_1 і Δ_2:

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad (18)$$

$$\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

У результаті система приймає вигляд:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases} \qquad (20)$$

Звернемо увагу на те, що визначник Δ_1 системи (18) отримується з визначника Δ системи (17) в результаті заміни першого стовпця на стовпець вільних членів (елементи b_1 і b_2), а визначник Δ_2 системи (19) – другого стовпця Δ на вільні члени.

Необхідною і достатньою умовою визначеності системи рівнянь є відмінність визначника системи від 0, $\Delta \neq 0$. З системи (20), знаходимо її розв’язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{21}$$

Формули (21) називаються *формулами Крамера.*

Система рівнянь є невизначеною, якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Із формули (20) випливає, що в цьому випадку значення x_1 та x_2 можуть бути довільними, оскільки $0 \cdot x_1 = 0$, $0 \cdot x_2 = 0$. Така невизначеність у виборі розв'язку виникає тоді, коли одне з рівнянь системи (13) є „зайвим”.

кщо $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, або $\Delta_2 \neq 0$, то з формули (20) не можна знайти ніякого числа $x_1 = x_{01}$ або $x_2 = x_{02}$, оскільки числа Δ_1 і Δ_2 не можна ділити на нуль.

Розглянемо приклади розв'язання систем за формулами Крамера.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8, \\ x_1 + 2x_2 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначники Δ ,Δ_1, Δ_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, система сумісна і має єдиний розв'язок. За формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{14}{7} = -2.$$

Робимо перевірку

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 8, \\ \quad 1 + 2 \cdot (-2) = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \quad 8 = 8, \\ -3 = -3. \end{cases}$$

Тобто розв'язок знайдено правильно.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Приклад 2. Знайти розв'язки системи

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4, \\ 6x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначники Δ, Δ_1, Δ_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -21.$$

Оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, система рівнянь несумісна і не має розв'язків .

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 3. Розв’язати систему

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо визначники $\Delta\ ,\Delta_1,\Delta_2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, система рівнянь сумісна, але невизначена.

Відповідь. Система має безліч розв’язків.

Системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (22)$$

Як і система двох лінійних рівнянь з двома невідомими, ця система може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \\ .... \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_n. \end{cases} \qquad (23)$$

де Δ - визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ...... & ...... & ...... & ...... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

Додаткові визначники Δ_1, Δ_2, ... Δ_n отримують з визначника системи (24) шляхом заміни стовпців з відповідними номерами на стовпець з вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ...... & ...... & ...... & ...... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ...... & ...... & ...... & ...... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \ ... \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ...... & ...... & ...... & ...... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}.$$

Система рівнянь (22), (23) сумісна і визначена (має єдиний розв'язок) тільки при виконанні умови $\Delta \neq 0$. При цьому невідомі знаходять за *формулами Крамера:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ \ldots \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Якщо Δ=0, а крім того, всі додаткові визначники дорівнюють нулю ($\Delta_1 = \Delta_2 ... = \Delta_n = 0$), то система рівнянь є сумісною і невизначеною (має безліч розв'язків). Якщо Δ=0, але принаймні один з додаткових визначників відмінний від нуля ($\Delta_k \neq 0$), то система рівнянь несумісна і не має розв'язків.

Розглянемо приклади розв'язання систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 1. Розв'язати систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Знаходимо додаткові визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 33 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -36, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -18.$$

За формулами Крамера $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{-18} = -1$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-36}{-18} = 2$;

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{18} = 1.$$

Робимо перевірку:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 2 + 1 = -3, \\ -1 + 3 \cdot 2 + 1 = 6, \\ 3 \cdot (-1) - 2 - 1 = -6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \equiv -3, \\ 6 \equiv 6, \\ -6 \equiv -6. \end{cases}$$

тобто розв'язок знайдено вірно.

Відповідь. $x_1 = -1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 1.$

Приклад 2. Розв'язати систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} 4x_1 + \quad\ 6x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, дана система рівнянь невизначена і має безліч розв'язків.

Відповідь. Система має безліч розв'язків.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 \qquad\ = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ немає необхідності рахувати визначники Δ_2 і Δ_3, оскільки система несумісна.

Відповідь. Система розв'язків не має.

Для більшої кількості рівнянь в системі $(n \geq 4)$ знаходження визначників вручну являє собою, як правило, громіздку задачу. У цих випадках краще використовувати комп'ютери.

Методичні вказівки. Самостійно повторіть виведення формул Крамера для записаної в загальному вигляді системи двох рівнянь з двома невідомими.

Зверніть увагу на те, що формули Крамера, а також критерії визначення виду системи рівнянь (сумісна, несумісна, визначена, невизначена) однакові при будь-якій кількості рівнянь з відповідною кількістю невідомих в системі.

Пам'ятайте, що кожного разу треба перевіряти себе, чи правильно знайдений розв'язок. Для цього числа x_{01}, x_{02}, ...x_{0n}, які знайдені в процесі розв’язання, підставте в кожне з рівнянь системи і переконайтеся, що вони перетворюються в тотожності.

Ураховуйте, що для кількості рівнянь і невідомих в системі більше 4-х знаходження визначників вручну досить громіздка задача. У цих випадках використовують комп’ютери.

Контрольна робота № 2

Розв’язати системи рівнянь за формулами Крамера.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_2 - 4x_3 = -14. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 26. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 10, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 30, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

II. Аналітична геометрія
1. Системи координат.
Координати точки на прямій

Числовою віссю називається пряма, на котрій обрані початкова точка, (початок), позитивний напрямок та відрізок, довжина якого вважається рівною одиниці (одиниця масштабу) (рис.1). Напрямок протилежний до додатного напрямку числової осі, називається від'ємним.

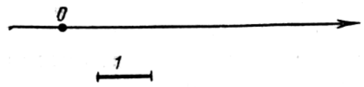


Рис. 1

Якщо дійсне число $x > 0$, то воно відображується точкою числової осі, що міститься у додатному напрямку від початку на відстані x; якщо $x < 0$, то точка вісі, що відображує x, лежить у від'ємному напрямку від початку на відстані $(-x)$. Число нуль відображується початковою точкою осі. Дійсне число x називається координатою точки M числової осі, яка його відображує. Координати точки пишуть у дужках услід за буквою, що її позначає; якщо x є координата точки M, то використовується запис $M(x)$.

Спосіб визначення положення точок за допомогою чисел називається *методом координат*. Наука, що вивчає геометричні фігури методами алгебри, називається *аналітичною геометрією.*

Абсолютна величина дійсного числа

Абсолютною величиною (модулем) дійсного числа x є саме це число, якщо $x \geq 0$, або число $-x$, якщо $x < 0$. Абсолютна величина дійсного числа x позначається символом $|x|$:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{якщо } x \geq 0 \\ -x, \text{якщо } x < 0 \end{cases} \tag{25}$$

Наприклад: $|2| = 2$, $|\pi| = \pi$, $|-3| = -(-3) = 3$.

Модуль будь-якого дійсного числа або додатний (якщо число не дорівнює нулю), або дорівнює нулю (якщо саме число дорівнює нулю). Звідси випливає, що будь-яке дійсне число не більше свого модуля, тобто $x \leq |x|$.

Рівність має місце при $x \geq 0$, а нерівність – при $x < 0$ (тому що в останньому випадку число x від'ємне, а його модуль додатний).

Виходячи з визначення абсолютної величини дійсного числа, легко з'ясувати її геометричний смисл: абсолютна величина дійсного числа x дорівнює відстані точки $M(x)$ від початку.

Рис.2

Наприклад, точка $M_1(1)$ (рис. 2) міститься від початку на відстані, рівному $|1| = 1$, точка $M_2(-2)$ — на відстані, рівному $|-2| = 2$, і т.д.

Відстань між двома точками на прямій

За допомогою методу координат можна вирішувати деякі геометричні задачі. Знайдемо, наприклад, відстань між двома точками $M_1(x_1)$ й $M_2(x_2)$ на прямій.

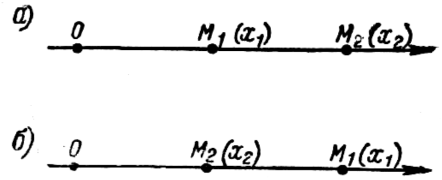


Рис. 3

Припустимо спочатку, що обидві координати додатні, причому $x_2 > x_1$ (рис. 3,а). Тоді $OM_1 = x_1$; $OM_2 = x_2$ й, отже, шукана відстань d=OM$_2$ – OM$_1$=x$_2$ – x$_1$. Якщо, як і раніше, x_1 й x_2 додатні, але $x_2 < x_1$, (рис. 3,б), то $d = x_1 - x_2$. Очевидно в обох випадках можна записати

$$d = |x_2 - x_1| \tag{26}$$

Неважко переконатися, що у випадках, коли обидві координати x_1 й x_2 від'ємні або x_1 й x_2 мають різні знаки, формула (26) зберігає свою силу.

Приклад. Знайти відстань між точками $M_1(-0{,}8)$ і $M_2(3{,}2)$. Рішення. За формулою (26) отримаємо

$$d = |3{,}2 - (-0{,}8)| = 3{,}2 + 0{,}8 = 4.$$

Координати на площині

Нехай на площині задані дві взаємно перпендикулярні числові осі Ox і Oy, які мають спільний початок O (що співпадає з точкою перетину осей) і спільну одиницю масштабу (рис. 4).

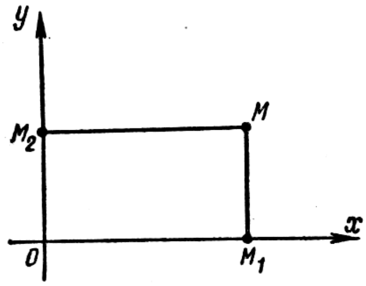


Рис. 4. Ox – вісь абцис, Oy–вісь ординат

Площина, в котрій знаходяться осі Ox і Oy, називається координатною площиною та позначається як Oxy. Розглянемо довільну точку M координатної площини Oxy, позначимо M_1 і M_2 проекції точки M на осі Ox і Oy відповідно.

Координата x точки M_1 на осі Ox називається *абсцисою* точки M, а координата y точки M_1 на осі Oy називається *ординатою* точки M.

Вісь Ox називається *віссю абсцис,* Oy – віссю ординат, а обидві разом – осями координат. Спільний початок осей абсцис і ординат називається *початком координат*. Координати точки пишуть у дужках услід за буквою, що позначає точку $M(x; y)$.

Декартові координати у просторі

Декартові координати в просторі вводяться за повною аналогією з декартовими координатами на площині. Три взаємно перпендикулярні осі в просторі (координатні осі) із спільним початком O й однаковою масштабною одиницею (рис. 5) утворюють декартову прямокутну систему координат у просторі. Одну із позначених осей називають віссю Ox, або віссю абсцис, другу — віссю Oy, або віссю ординат, третю – віссю Oz, або віссю аплікат. Нехай M_1, M_2 і M_3 — проекції довільної точки M простору на осі Ox, Oy і Oz відповідно.

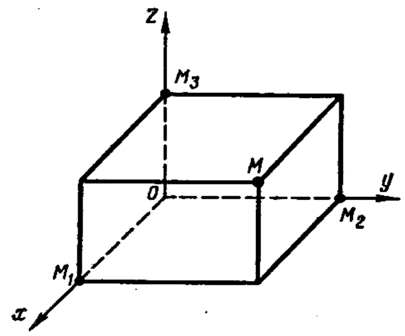


Рис. 5

Декартовими прямокутними координатами x, y і z точки M називають, відповідно, величини відрізків OM_1, OM_2, OM_3.

Декартові координати x, y і z точки M називають відповідно її абсцисою, ординатою й аплікатою. Точка M має координати x, y і z, символічно позначається так: $M(x, y, z)$.

Відстань між двома точками в просторі

Нехай потрібно знайти відстань між точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ у просторі. Припустимо, що відрізок M_1M_2 не паралельний ні одній з координатних площин. Проведемо через кожну із точок M_1 і M_2 по три площини, відповідно паралельні координатним площинам (рис. 6). Ці шість площин, перетинаючись, утворюють прямокутний паралелепіпед, діагоналлю якого є відрізок M_1M_2. Зі стереометрії відомо, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його ребер, що виходять з однієї вершини. Тому $M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_1P^2 + MQ^2$.

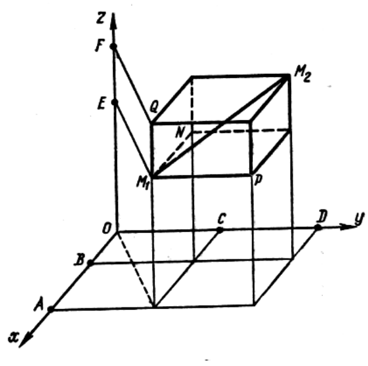


Рис. 6

Спроектувавши кінці ребер M_1N, M_1P і M_1Q паралелепіпеда відповідно на осі Ox, Oy і Oz, одержимо на цих осях відрізки AB, CD і EF, причому $M_1N = AB = |x_2 - x_1|$, $M_1P = CD = |y_2 - y_1|$, $M_1Q = EF = |z_2 - z_1|$.

Отже, квадрат шуканої відстані d дорівнює

$$d^2 = M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

або

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Звідси остаточно одержимо

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (27)$$

Формула (26) залишається справедливою, якщо відрізок M_1M_2 паралельний одній або двом координатним площинам.

Зокрема, відстань d точки $M(x, y, z)$ від початку координат знаходяться за формулою

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (28)$$

Якщо точки $M_1(x_1; y_1)$ й $M_2(x_2; y_2)$ лежать у площині Oxy, то формула для відстані між ними прийме вигляд:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (29)$$

Зокрема, формула

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (30)$$

виражає відстань від точки $M(x; y)$ до початку координат.

Приклад. Знайти відстань d між точками $M_1(-1; 2; 3)$ й $M_2(1; 1; -5)$. Рішення. За формулою (27) одержимо

$$d = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-2)^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3.$$

Полярні координати

Декартова система координат – не єдиний спосіб визначення за допомогою чисел місця розміщення точки на площині. Найважливішою після декартової системи є *полярна система координат*.

Полярні координати на площині вводяться в такий спосіб. Виберемо на площині деяку точку O (полюс) і деякий промінь Ox, що з неї виходить (рис. 7). Крім того, укажемо одиницю масштабу. *Полярними координатами точки* M *називаються два числа* ρ *й* φ, перше з яких *(полярний радіус* ρ) дорівнює відстані точки M від полюса O, а друга *(полярний кут* φ)— кут, на який потрібно повернути проти руху годинникової стрілки промінь Ox до суміщення із променем OM.

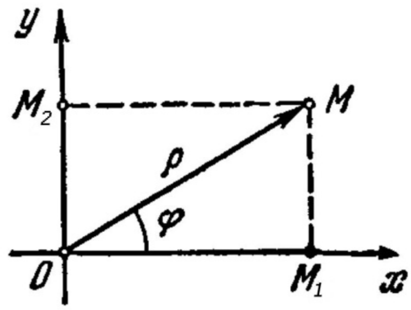


Рис. 7

Точку M з полярними координатами ρ й φ позначають символом $M(\rho;\varphi)$. Для того щоб відповідність між відмінними від полюса крапками площини й парами полярних координат $(\rho;\varphi)$ була взаємно однозначною, звичайно вважають, що значення ρ й φ змінюється в таких межах:

$$0\le\rho<+\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi \tag{31}$$

Зв'язок між полярними та декартовими координатами

У деяких задачах буває необхідно користуватись одночасно полярними та декартовими координатами, отже, виникають дві задачі.

1. Знаючи полярні координати ρ, φ точки M на площині, визначити її декартові координати x і y.

2. За декартовими координатами x і y визначити полярні координати ρ і φ.

Розглянемо окремий випадок, коли полярна вісь збігається з віссю абсцис декартової системи, при цьому полюс збігається з початком координат декартової системи. Розглянемо рис. 7. Користуючись тригонометричними співвідношеннями для трикутника ΔOMM_1 та ΔOMM_2, можна записати:

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases} \tag{32}$$

Отримані формули виражають залежність декартових координат (x, y) точки M від полярних координат (ρ,φ). Для отримання полярних координат точки в залежності від декартових необхідно розв'язати систему (32) відносно ρ і φ. Для цього розділимо перше рівняння на друге і отримаємо

$$\begin{cases} \varphi = arcctg\dfrac{x}{y} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{33}$$

Циліндрична система координат

Для визначення місця розміщення точки у просторі за допомогою чисел, крім декартової системи координат, використовують також циліндричну та сферичну системи координат.

Циліндричні координати в просторі вводять в такий спосіб. Виберемо на фіксованій площині P деяку точку O й промінь Ox, що з неї виходить (рис.8). Крім того, розглянемо вісь Oz, що проходить через O перпендикулярно площині P. Нехай M – будь-яка точка простору, N – проекція цієї точки на площину P, а $\mathrm{M_z}$ – проекція M на вісь Oz. Циліндричними координатами точки M називаються три числа (ρ, φ і z), перші два з яких (ρ і φ) є полярними координатами точки N на площині P щодо полюса O й полярної осі Ox, а число z є величина відрізка $\mathrm{OM_z}$. Точку M із циліндричними координатами ρ, φ і z позначають $\mathrm{M}(\rho;\varphi;\mathrm{z})$.

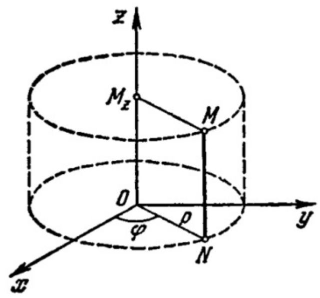


Рис. 8

Назва «циліндричні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = const$ (тобто поверхня, всі точки якої мають ту саму координату ρ) є циліндром. Якщо вибрати осі декартової прямокутної системи координат Oxyz, як зазначено на рис. 8, то декартові координати $(x; y; z)$ точки M будуть пов'язані з її циліндричними координатами $(\rho;\varphi;z)$ співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z. \qquad (34)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}, \ z = z.$$

Сферична система координат

Для введення сферичних координат у просторі розглянемо три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy і Oz із спільним початком O (рис. 9). Нехай M – будь-яка, відмінна від O точка простору, N – її проекція на площину Oxy, ρ – відстань M від O, θ – кут, що утворить відрізок OM з віссю z, а φ – кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки вісь Ox до суміщення з променем ON. θ і φ, називають широтою й довготою відповідно.

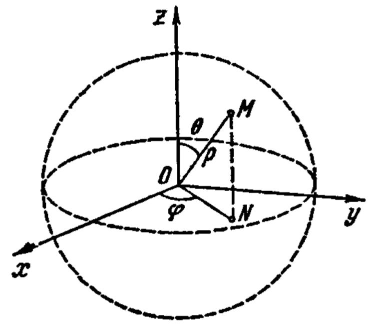


Рис. 9

Сферичними координатами точки M називають три числа $(\rho;\varphi;\theta)$.

Назва «сферичні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = \text{const}$, усі точки якої мають ту саму координату ρ, є сферою (на рис 9 така сфера зображена штрихованою лінією).

Для того, щоб відповідність між точками простору й трійками сферичних координат $(\rho;\varphi;\theta)$ була взаємно однозначною, вважають, що ρ, φ змінюються в таких границях:

$$0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Якщо вибрати осі декартовоі прямокутної системи координат так, як зазначено на рис. 9, то декартові координати $(x;y;z)$ точки M пов'язані з її сферичними координатами $(\rho;\varphi;\theta)$ співвідношеннями: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \ \ \varphi = arctg\frac{y}{x}. \qquad (35)$$

2.Вектори
Скалярні та векторні величини

Величина як характеристика об’єкту чи явища матеріального світу може бути скалярною або векторною.

Величини називаються скалярними (від латинського *scala* – шкала), якщо вони після вибору одиниці виміру повністю характеризуються одним числом. Прикладом скалярних величин є площа, об’єм, маса, густина, температура і т. ін.

Величини називаються векторними, якщо вони, крім числового значення, мають і напрямок. Наприклад, сила F, швидкість $\vec{V}$, прискорення $\vec{a}$ і т. ін. Зображається векторна величина у вигляді напрямленого відрізка – геометричного вектора (від латинського *vehere* – напрямити).

Вектор – одне з основних геометричних понять і з'явилося вперше в роботах німецького математика XIX ст. Г. Грассмана й ірландського математика У. Гамильтона; потім воно було охоче сприйнято багатьма математиками та фізиками. У сучасній математиці і її додатках це поняття відіграє важливу роль.

Вектор відповідно до конкретного змісту величини, яку він позначає, визначається довжиною і положенням в просторі: напрямком і точкою прикладення.

Для вивчення теорії векторного числення в нашому курсі розглядаються так звані вільні вектори, що позначають векторні величини, кожну з яких, не порушуючи її фізичного чи іншого змісту і числового значення, можна віднести до будь-якої точки простору. Такі вектори можна переносити в яку завгодно точку простору паралельно цим векторам.

Символіка позначення та визначення деяких векторів

Вектори позначаються двома великими літерами латинського алфавіту, які визначають початок і кінець вектора ($\vec{AB}$, $\vec{BC}$...), або однією латинською літерою ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$...) із стрілочкою зверху, або однією маленькою літерою жирним шрифтом (**а, в, с**…). Модуль (абсолютна величина) вектора, тобто його довжина, позначається так $\left|\vec{AB}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$ або **а**.

Нульовий вектор. Нульовим називають такий вектор, у якого початок і кінець збігаються. Цей вектор позначають $\vec{0}$ або **0**. Модуль нульового вектора дорівнює нулю. Напрямок цього вектора прийнято вважати невизначеним.

Одиничний вектор. Вектор, який співпадає за напрямком з заданим вектором $\vec{a}$ і який має модуль рівний 1, називають одиничним вектором або ортом вектора $\vec{a}$ і позначають $\overrightarrow{a^0}$ $(\left|\overrightarrow{a^0}\right| = 1)$.

Колінеарні вектори. Вектори, які розміщені на одній чи паралельних прямих називаються колінеарними. Прийнято вважати, що нуль – вектор колінеарний будь-якому іншому вектору. Колінеарність позначають символом паралельності ||. Наприклад, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Компланарні вектори – три і більше векторів, які належать одній чи паралельним площинам, називають компланарними.

Рівні вектори – колінеарні вектори, які мають однаковий напрямок і однакові модулі.

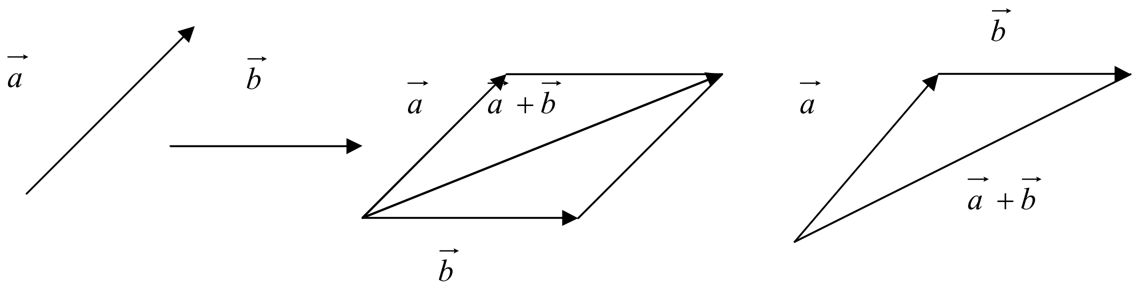
Протилежні вектори – колінеарні вектори, які мають протилежний напрямок і однакові модулі. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається ($-\vec{a}$).

Лінійні операції (дії) над векторами

1. Додавання векторів

Суму двох векторів можна знайти за правилом паралелограма або за правилом трикутника. За правилом паралелограма вектор суми двох векторів є діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, яка виходить з спільного початку доданків (рис. 10).

За правилом трикутника вектор суми двох векторів, один з яких проведений в кінець першого, є вектором, який з'єднує початок першого вектора і кінець другого (рис. 10).



а) б)

Рис. 10

Якщо додають три вектори і більше, то користуються правилом многокутника. За цим правилом в кінець попереднього вектора приводять початок наступного вектора-доданка. Суму m векторів отримуємо у вигляді вектора, який виходить з початку першого в кінець останнього, тобто замикає многокутник (рис. 11).

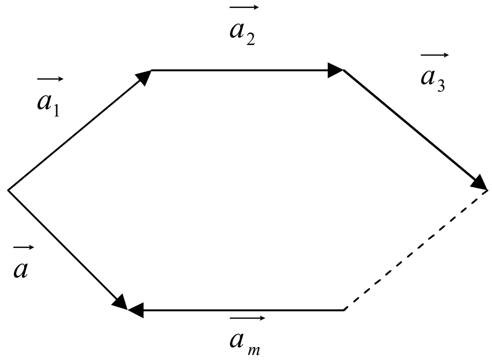


Рис. 11

$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_m}$

Сума векторів має такі властивості

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

2) $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $(-\vec{a})$:

3) $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$, де $\vec{0}$ – нуль-вектор;

4) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Довести ці властивості самостійно.

2. Добуток вектора на скаляр

Нехай є вектор $\vec{a}$ і число α.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор колінеарний вектору $\vec{a}$, який має довжину $|\alpha||\vec{a}|$ і той самий напрямок, що і $\vec{a}$ при $\alpha > 0$ і протилежний напрямок при $\alpha < 0$.

Наприклад, $3\vec{a}$ – вектор, який має той самий напрямок, що і вектор $\vec{a}$, а довжину втричі більшу за вектор $\vec{a}$.

Протилежний вектор $-\vec{a}$ можна розглядати як добуток вектора $\vec{a}$ на $\alpha = -1$: $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

Із визначення добутку вектора на число виходить: вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ колінеарні, якщо $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

І зворотне міркування: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то завжди можна знайти такий скаляр α, що $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, звідки $|\alpha| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ має орт $\overrightarrow{a^0}$, то його можна показати як добуток $\vec{a} = \overrightarrow{a^0}|\vec{a}|$, звідки $\overrightarrow{a^0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Добуток вектора на скаляр підлягає таким законам:

1) $\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$ - переставному (комутативному);

2) $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – розподільному;

3) $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$ – сполучному.

Різницею двох векторів $\vec{a}-\vec{b}$ називається вектор, який з вектором-від'ємником $\vec{b}$ складає вектор $\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ привести до спільного початку, то вектор різниці буде третій вектор, який виходить з вектора від'ємника $\vec{b}$ і входить в кінець вектора зменшуваного $\vec{a}$ (рис. 12).

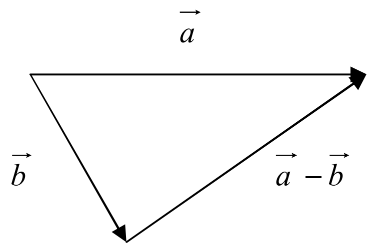


Рис. 12

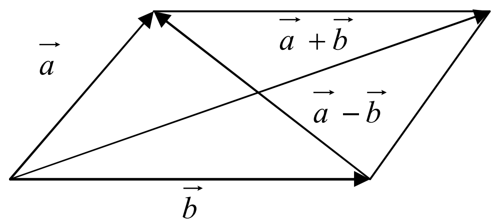


Рис. 13

Таким чином, у паралелограмі, побудованому на векторах як на сторонах, одна діагональ є сумою, а інша – різницею цих векторів (рис. 13).

Вектори в координатній формі та дії над ними
Проекція вектора на вісь

Пряма, напрямок якої визначає одиничний вектор (орт), називається *віссю.*

Проекцією точки М на задану вісь називається основа перпендикуляра, який проведений з цієї точки на вісь.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь називається величина A_1B_1, напрямленого відрізка $\overrightarrow{A_1B_1}$ обмеженого проекціями початку (т. А) і кінця (т. В) вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис. 14).

Позначається так:

$Пр_{ox}\overrightarrow{AB}=A_1B_1$ або $Пр_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=A_1B_1$ де $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$ є одиничний вектор $\left(\left|\vec{e}\right|=1\right)$.

Дамо визначення: кутом між вектором і віссю чи між двома векторами, чи між двома осями називається менший із кутів, на які треба повернути один вектор чи вісь, щоб він співпадав за напрямком з іншим вектором чи віссю.

$$\varphi=\angle(\vec{a}\ \vec{e}),\qquad 0\le\varphi\le\pi$$

Тоді обчислення проекції вектора на вісь проводиться за такою теоремою: проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на довільну координатну вісь ОХ дорівнює добутку модуля цього вектора на косинус кута між вектором $\overrightarrow{AB}$ і віссю ОХ.

$$Пр_{ox}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi .$$

Доведення. Маємо $Пр_{ox}\overrightarrow{AB} = .A_1B_1$, а $.A_1B_1 = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$

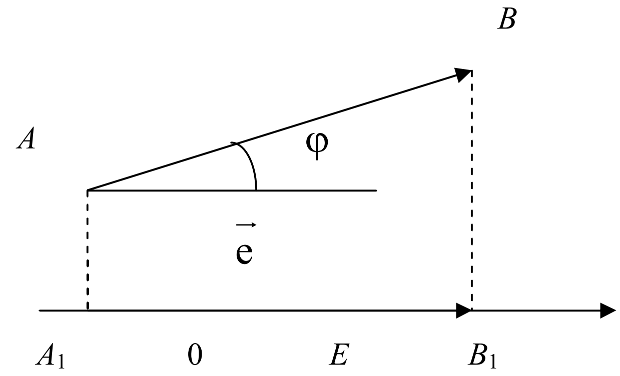


Рис. 14

Якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ рівні, то їх проекції на одну і ту ж вісь також рівні. Проекція суми (різниці) векторів дорівнює сумі (різниці) проекцій цих векторів $пр(\vec{a}+\vec{в}-\vec{c}) = пр\vec{a} + пр\vec{в} - пр\vec{c}$.

При множенні вектора $\vec{a}$ на будь-яке число α проекція множиться на це число $пр(\alpha\vec{a}) = \alpha пр\vec{a}$.

Розклад вектора по ортах прямокутної системи координат

Розглянемо прямокутну систему координат у просторі (рис. 15). Одиничні вектори (орти) осей ОХ, ОУ, OZ позначені, як це прийнято, літерами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. За визначенням $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, який приведений до т. О (0;0;0), називається радіусом – вектором точки М. Якщо позначити вектор $\overrightarrow{OM}$ через $\vec{a}$, координати точки $M: x = a_x;\ y = a_y;\ z = a_z$ то проекції вектора позначаються $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$.

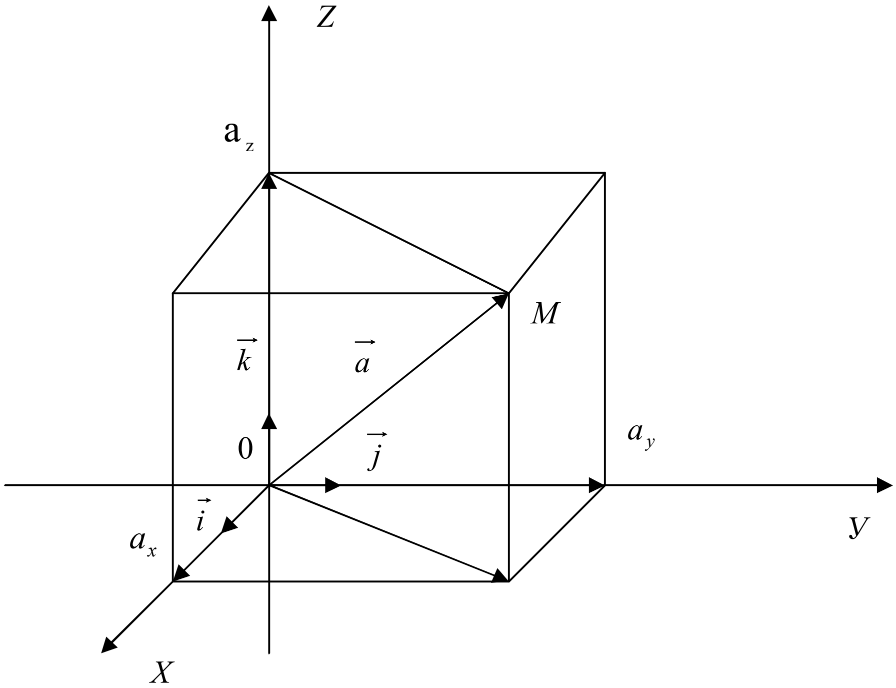


Рис. 15

На рисунку (рис. 15) вектор $\vec{a}$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $a_x\vec{i},\ a_y\vec{j},\ a_z\vec{k}.$ Отже його можна показати як суму векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Вектори $a_x\vec{i},\ a_y\vec{j},\ a_z\vec{k}.$ називаються складовими або компонентами вектора $\vec{a}$, а сума – розклад вектора по ортах прямокутної системи координат.

Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ заданий координатами початкової точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і кінцевої точки $B(x_{21};y_2;z_2)$, то його координати дорівнюють різниці відповідних координат кінцевої і початкової точок, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)\,. \tag{36}$$

Це виходить із співвідношення (рис. 16).

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

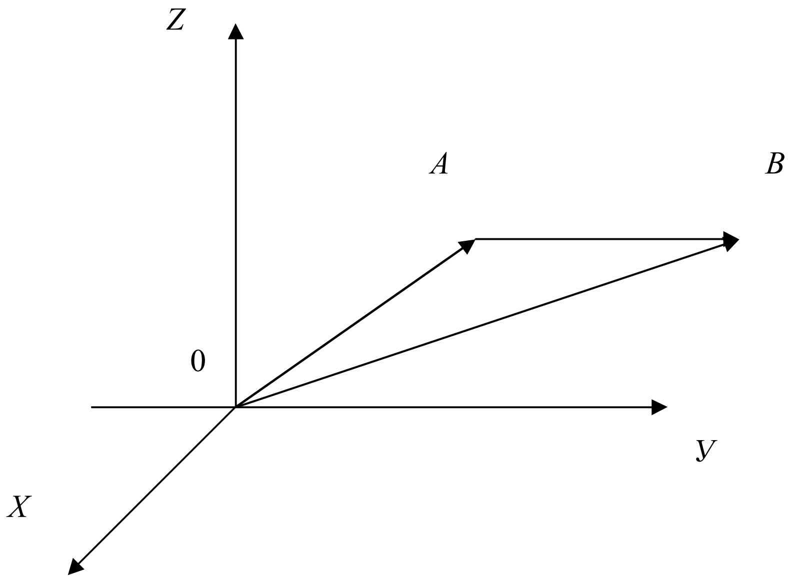


Рис. 16

Із властивостей проекцій векторів на вісь виходять властивості координат векторів і дій над векторами, заданими в координатній формі.

Якщо $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$.

Якщо $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і α - скаляр, то $\alpha \vec{a} = \{\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z\}$.

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком $\vec{a}\vec{b}$ *двох векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *називається число, яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними:*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi. \qquad (37)$$

Основні властивості скалярного добутку двох векторів

1. Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos\varphi = 0$ і $\vec{a}\vec{b} = 0$. Справедливе і зворотне твердження: якщо множаться два ненульових вектори, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тільки за умови, що $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Таким чином, ознакою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку.

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ при $\cos\varphi > 0$, тобто $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (φ – гострий кут).

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ при $\cos\varphi < 0$, тобто $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (φ – тупий кут).

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ при $\cos\varphi = 1$, тобто вони колінеарні і співпадають за напрямком.

Скалярному добутку прийнятні і такі алгебраїчні властивості.

2. Властивість переставності (комутативності):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

3. Властивість розподільності (дистрибутивності):

$$\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4. Властивість сполучності (асоціативності):

$$\left(\alpha\vec{a}\right)\vec{b} = \alpha\left(\vec{a}\,\vec{b}\right).$$

5. Скалярний квадрат вектора $\vec{a}$ дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}\,\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Звідси можна визначити модуль вектора як корінь із скалярного добутку вектора на себе $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}$. Відмітимо, що $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{a}^2 = 0$ при $\vec{a} = \vec{0}$.

Скалярний добуток векторів в координатній формі

Нехай задані два вектори: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, тобто $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тоді

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x\vec{i}^2 + a_xb_y\left(\vec{i}\,\vec{j}\right) + a_xb_z\left(\vec{i}\,\vec{k}\right) + a_yb_x\left(\vec{j}\vec{i}\right) + a_yb_y\vec{j}^2 +$$
$$+ a_yb_z\vec{j}\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\vec{j} + a_zb_z\vec{k}^2;$$

Врахуємо, що

$$\vec{i}^2 = 1, \quad \vec{i}\,\vec{j} = 0, \quad \vec{i}\,\vec{k} = 0$$
$$\vec{j}\,\vec{i} = 0, \quad \vec{j}^2 = 1, \quad \vec{j}\,\vec{k} = 0$$
$$\vec{k}\,\vec{i} = 0, \quad \vec{k}\,\vec{j} = 0, \quad \vec{k}^2 = 1 \quad .$$

і отримаємо $\vec{a}\,\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат.

Можна вважати як наслідок, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ тобто модуль (довжина) вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

Кут між двома векторами. Умова перпендикулярності

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ і $\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, то $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$,

а кут $\varphi = \arccos\dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, тобто $\varphi = 90^0$; $\cos 90^0 = 0$, то $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Із визначення колінеарності векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ можна завжди знайти таке число (скаляр) α, що $\vec{a} = \vec{b}\alpha$. А це через координати векторів є умовою колінеарності $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$, тобто для колінеарних векторів відповідні координати пропорційні.

Спрямовуючі (напрямні) косинуси вектора

Оскільки ми розглядаємо вільні вектори, то для спрощення міркувань перенесемо вектор $\vec{a}$ паралельно самому собі в початок координат (рис. 17), тобто сумістимо його початок з початком координат, що зручно при практичному розв'язуванні багатьох задач. Тоді координати вектора $\vec{a}$ дорівнюють координатам його кінця

$$a_x = x_2 - x_1 = x_2;\ a_y = y_2 - y_1 = y_2;\ a_z = z_2 - z_1 = z_2;$$

і його модуль $|\vec{a}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

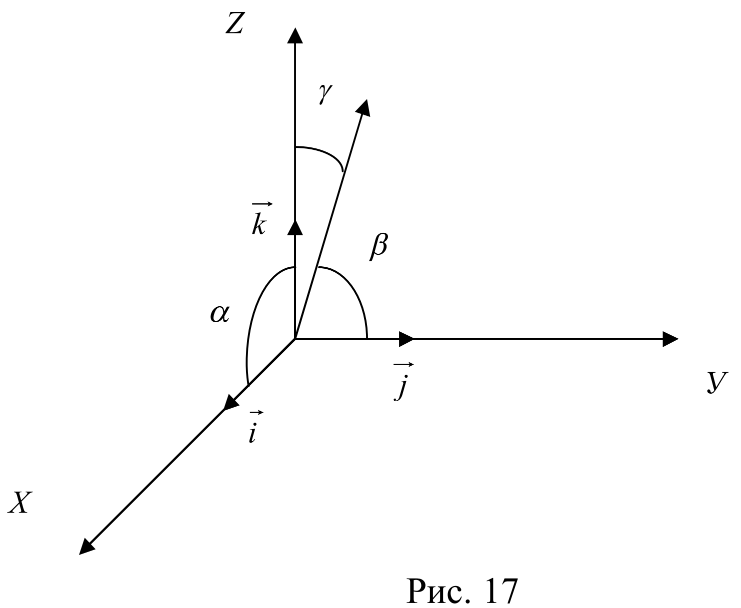


Рис. 17

Якщо вектор $\vec{a}$ не дорівнює нулю, то він утворює з координатними осями кути α, β, γ, які визначають його орієнтацію в просторі. Користуючись формулою косинуса кута між двома векторами і враховуючи, що $\vec{i}\,(1;0;0), \vec{j}\,(0;1;0), \vec{k}\,(0;0;1)$, отримаємо:

$$\cos\left(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{a}\right) = \cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}$$

$$\cos\left(\vec{j}\,\hat{}\,\vec{a}\right) = \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}$$

$$\cos\left(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{a}\right) = \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}$$

$Cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називають *спрямовуючими* (або напрямними) косинусами вектора $\vec{a}$. Вони задовольняють такій умові: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Якщо $\overrightarrow{a^0}$ - *орт* вектора $\vec{a}$, то його проекція на вісь OX така:

$$Пр_{ox}\overrightarrow{a^0} = \left|\overrightarrow{a^0}\right|\cos\alpha = \cos\alpha .$$

Звідси координати цього вектора можна записати так:

$$\overrightarrow{a^0} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}.$$

Векторний добуток векторів

При розв'язку багатьох практичних задач широко використовується векторний добуток векторів. На відміну від скалярного добутку, де результатом є скаляр (число), векторний добуток дорівнює вектору.

Визначення векторного добутку двох векторів

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \vec{c}$ називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, тобто $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, якій належать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2) модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha$, тобто площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

3) напрямок має такий, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротше обертання від вектора $|\vec{a}|$ до $|\vec{b}|$ повинно відбуватися проти руху годинникової стрілки (рис. 18), тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ повинні утворювати так звану праву трійку векторів.

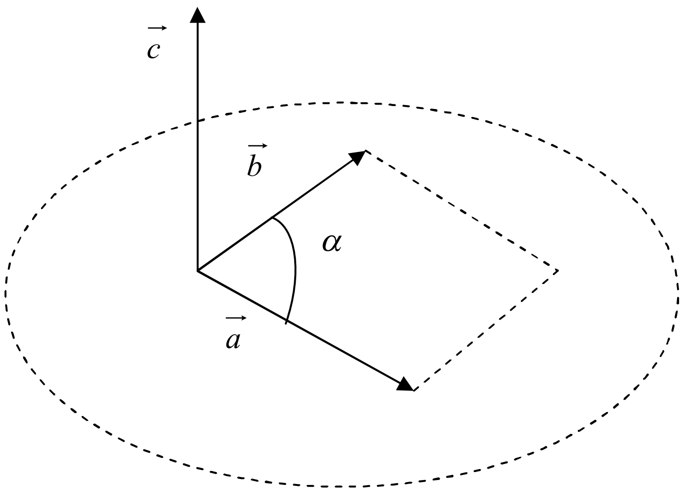


Рис. 18

Якщо вектор $\vec{c}$ буде направлений в протилежному напрямку, то це обертання буде відбуватися за рухом годинникової стрілки, тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будуть утворювати ліву трійку.

Властивості векторного добутку

Векторний добуток має такі властивості:

1. При переставленні множників векторний добуток змінює знак на протилежний $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

2. Розподільну властивість відносно суми:

$[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}]$=$[\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

3. Сполучну властивість відносно скалярного множника:

$[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$.

4. Векторний добуток дорівнює нулю (нуль-вектору) тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Наприклад, $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$ для будь-якого вектора.

Обчислення векторного добутку векторів, заданих в координатній формі

На основі розподільної властивості векторне множення векторів можна виконати за правилом множення многочленів. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_x b_x\left[\vec{i}\,\vec{i}\right] + a_x b_y\left[\vec{i}\,\vec{j}\right] + a_x b_z\left[\vec{i}\,\vec{k}\right] + a_y b_x\left[\vec{j}\,\vec{i}\right] + a_y b_y\left[\vec{j}\,\vec{j}\right] +$$
$$+ a_y b_z\left[\vec{j}\,\vec{k}\right] + a_z b_x\left[\vec{k}\,\vec{i}\right] + a_z b_y\left[\vec{k}\,\vec{j}\right] + a_z b_z\left[\vec{k}\,\vec{k}\right].$$

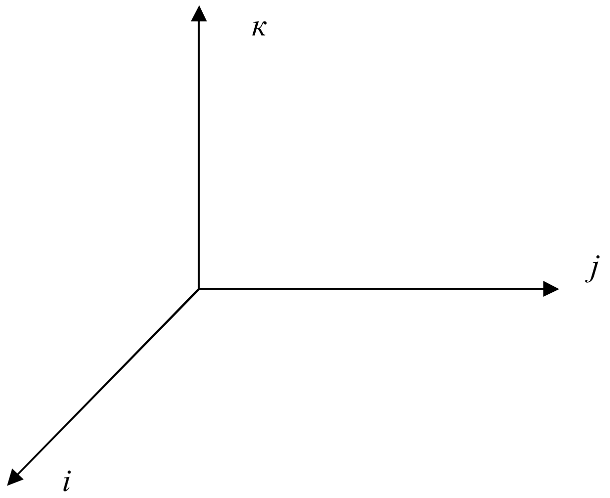


Рис. 19

Виходячи з визначення векторів $\vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}$ (рис. 19) покажемо добуток цих ортів.

$$\left[\vec{i}\,\vec{i}\right] = 0; \qquad \left[\vec{i}\,\vec{j}\right] = \vec{k}\,; \qquad \left[\vec{i}\,\vec{k}\right] = -\vec{j}\,;$$
$$\left[\vec{j}\,\vec{i}\right] = -\vec{k}\,; \qquad \left[\vec{j}\,\vec{j}\right] = 0; \qquad \left[\vec{j}\,\vec{k}\right] = \vec{i}\,;$$
$$\left[\vec{k}\,\vec{i}\right] = \vec{j}\,; \qquad \left[\vec{k}\,\vec{j}\right] = -\vec{i}\,; \qquad \left[\vec{k}\,\vec{k}\right] = 0;$$

Підставимо ці значення у вираз $\vec{a}\times\vec{b}$ і отримаємо:

$$\overrightarrow{a\times b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}\ .$$

Цей результат можна записати і по-іншому, за допомогою визначника третього порядку:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Для векторного добутку $\vec{c}$ маємо його координати:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right). \qquad (38)$$

Деякі застосування векторного добутку

1. Обчислення площі паралелограма

Нехай задані в прямокутній системі координат у просторі три вершини паралелограма $A(x_1 y_1 z_1),\ B(x_2 y_2 z_2),\ C(x_3 y_3 z_3)$. Цей паралелограм можна розглядати як такий, що побудований на векторах, наприклад, $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$. Площу паралелограма знайдемо за формулою: $S_\Diamond = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Координати векторів:

$\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)\quad i\ \ \overrightarrow{AC}(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1)$.

Враховуючи формулу попереднього пункту будемо мати площу паралелограма через вершини трьох вершин.

$$S_\Diamond = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right)}.$$

А площа трикутника АВС дорівнює 1/2 цієї величини.

Якщо три вершини паралелограма будуть задані на площині, тобто третя координата z дорівнює нулю, то можна визначити частинний випадок формули площі

$$S_\Diamond = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Практичне значення має формула, отримана як наслідок з попередньої

$$S_\Diamond = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Для площі трикутника це становить половину такої величини.

2. Момент сили відносно точки.

Нехай до деякої точки В прикладена сила $\vec{F}$. Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці В відносно точки А, називається вектором, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r_b} = \overrightarrow{AB}$ на вектор сили $\vec{F}$.

$$\overrightarrow{M_A}\left(\vec{F}\right) = \vec{r_B}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{40}$$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається скалярна величина як результат скалярного множення векторного добутку двох векторів, наприклад, $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ на третій вектор $\vec{c}$: $[\vec{a};\vec{b}]\vec{c}$. Цей добуток ще називається **векторно-скалярним**.

Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай задані приведені до спільного початку не колінеарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які утворюють праву трійку (рис. 20).

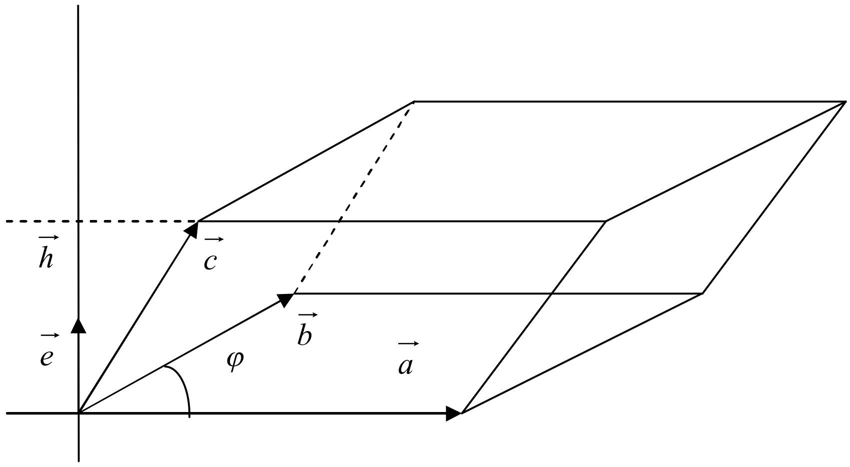


Рис. 20

Розглянемо модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi = S_{\lozenge},$$

де $S_{\lozenge}$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах.

Напрямок векторного добутку співпадає з напрямком $\vec{e}$.

Тому $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\vec{c} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|\cos\alpha$, де α кут між векторами $\vec{c}$ і $\vec{e}$.

Але $\left|\vec{c}\right|\cos\alpha = Пр_{\vec{e}}\vec{c} = h$, де h – висота паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на ребрах, які виходять із загальної вершини. Отже, $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c} = S_{\lozenge}h = V_{парал-да}$

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Отриманий результат можна використовувати для обчислення об'єму трикутної піраміди.

$$V = \frac{1}{3}S_{осн.}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{\lozenge}h = \frac{1}{6}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}.$$

Обчислення мішаного добутку векторів. Умова компланарності трьох векторів

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, заданих координатами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$; $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$; $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$:

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot\left(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y++\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z$$

Отриманий результат з іншого боку можна розглядати як розклад такого визначника по рядку координат вектора $\vec{c}$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Звідси можна зробити висновок: мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, складеному із координат цих векторів.

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right]\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{41}$$

Можна довести, що величина мішаного добутку не залежить від того, які з двох векторів упорядкованої трійки множаться векторно, тобто $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]=\left[\vec{c}\,\vec{a}\right]\vec{b}$. Це виходить із властивостей визначника:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\Delta.$$

А тому в більшості випадків мішаний добуток позначається як $\vec{a}\ \vec{b}\,\vec{c}$.

Як згадувалося вище, компланарні вектори – це ті, що після приведення їх належать одній площині. Компланарність векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ рівносильна тому, що висота паралелепіпеда, побудованого на них $h_{пар-да}=0$. Отже, $V_{пар-да}=0$.

Таким чином, рівняння

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

є необхідною і достатньою умовою компланарності векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Задача. Дані координати вершин піраміди
$A_1(3;5;4),\ A_2(8;7;4),\ A_3(5;10;4),\ A_4(4;7;8)$

Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) площу грані $A_1A_2A_3$;

4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання

1) Знаходимо довжину ребра A_1A_2. Координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}(5;2;0)$. Тоді його модуль $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$. Довжина ребра дорівнює $\sqrt{29} \approx 5{,}4$.

2) Кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 будемо шукати як кут між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$. Вектор $\overrightarrow{A_1A_4}(1;2;4)$

$$\cos\angle A_2A_1A_4 = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{5+4}{\sqrt{29}\sqrt{1+4+16}} = \frac{9}{\sqrt{29}\sqrt{21}} \approx 0{,}3647;$$

$\angle A_2A_1A_4 = \arccos 0{,}3647 \approx 68{,}4^0$.

3) Площу грані $A_1A_2A_3$ знайдемо як площу трикутника побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$.

Координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ відомі; координати вектора $\overrightarrow{A_1A_3}(2;5;0)$.

Тоді $S_{\Delta A_1A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$. Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$: $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (25-4)\vec{k} = 21\vec{k}$.

Модуль цього вектора дорівнює 21 од. Площа $\Delta A_1A_2A_3 = 0{,}5\cdot 21 = 10{,}5(од.^2)$.

4) Об'єм піраміди знайдемо через мішаний добуток векторів – ребер, на яких вона побудована.

Нагадаємо координати векторів: $\overrightarrow{A_1A_2}(5;2;0)$; $\overrightarrow{A_1A_3}(2;5;0)$ *і* $\overrightarrow{A_1A_4}(1;2;4)$;

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_2A_3}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 84$$

.

Об'єм піраміди $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\cdot 84 = 14$ (од^3).

На рис. 21 представлена побудова піраміди.

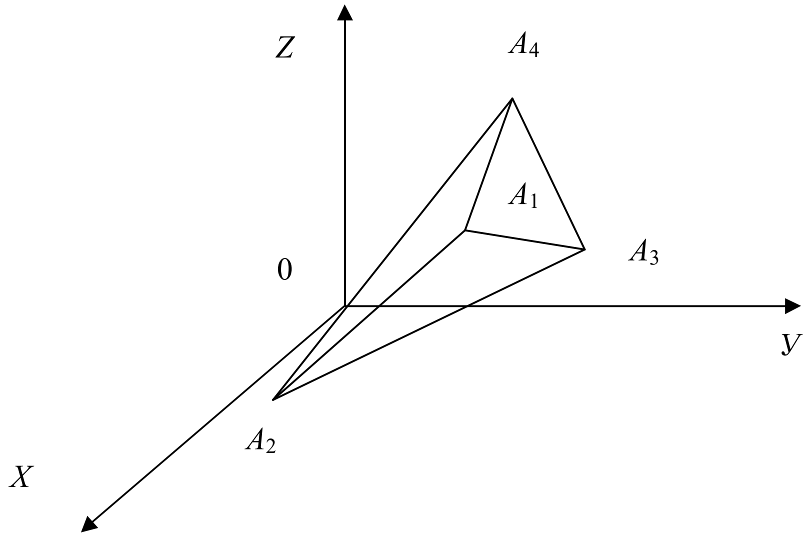


Рис. 21

Контрольна робота № 3

Задані координати вершин піраміди АВСД. Потрібно: 1) записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ в системі орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; 2) знайти довжину ребра АВ; 3) величину кута ВАС; 4) площу грані АВС; 5) об'єм піраміди АВСД; 6) висоту піраміди, яка проведена з вершини Д на основу АВС.

1. $A(2;-3;1)$ $B(6;1;-1)$ $C(4;8;-9)$ $D(2;-1;2)$

2. A(5;-1;-4), B(9;3;-6), C(7;10;-14), D(5;1;-3)

3. $A(1;-4;0)$ $B(5;0;-2)$ $C(;37;-10)$ $D(1;-2;1)$

4. $A(-3;-6;2)$ $B(1;-2;0)$ $C(-1;5;-8)$ $D(-3;-4;3)$

5. $A(-1;1;-5)$ $B(3;5;-7)$ $C(1;12;-15)$ $D(-1;3;-4)$

6. $A(-4;2;-1)$ $B(0;6;-3)$ $C(-2;13;-11)$ $D(-4;4;0)$

7. $A(0;4;3)$ $B(4;8;1)$ $C(2;15;-7)$ $D(0;6;4)$

8. $A(-2;0;-2)$ $B(2;4;-4)$ $C(0;11;-12)$ $D(-2;2;-1)$

9. $A(3;3;-3)$ $B(7;7;-5)$ $C(5;14;-13)$ $D(3;5;-2)$

10. $A(4;-2;5)$ $B(8;2;3)$ $C(6;9;-5)$ $D(4;0;6)$

11. $A(-5;0;1)$ $B(-4;-2;3)$ $C(6;2;11)$ $D(3;4;9)$

12. $A(1;-4;0)$ $B(2;-6;2)$ $C(12;-2;10)$ $D(9;0;8)$

13. $A(-1;-2;-8)$ $B(0;-4;-6)$ $C(10;0;2)$ $D(7;2;0)$

14. $A(0;2;-10)$ $B(1;0;-8)$ $C(11;4;0)$ $D(8;6;-2)$

15. $A(3;1;-2)$ $B(4;-1;0)$ $C(14;3;8)$ $D(11;5;6)$

16. $A(-8;3;-1)$ $B(-7;1;1)$ $C(3;5;9)$ $D(0;7;7)$

17. $A(2;-1;-4)$ $B(3;-3;-2)$ $C(13;1;6)$ $D(10;3;4)$

18. $A(-4;5;-5)$ $B(-3;3;-3)$ $C(7;7;5)$ $D(4;9;3)$

19. $A(-2;-3;2)$ $B(-1;-5;4)$ $C(9;-1;12)$ $D(6;1;10)$

20. $A(-3;4;-3)$ $B(-2;2;-1)$ $C(8;6;7)$ $D(5;8;5)$

21. $A(1;2;3)$ $B(-1;3;2)$ $C(7;-3;5)$ $D(6;10;17)$

22. $A(4;7;8)$ $B(9;1;3)$ $C(2;-4;1)$ $D(1;-13;-13)$

23. $A(8;2;3)$ $B(4;6;10)$ $C(3;-2;1)$ $D(7;4;11)$

24. $A(10;3;1)$ $B(1;4;2)$ $C(3;9;2)$ $D(19;30;7)$

25. $A(2;4;1)$ $B(1;3;6)$ $C(5;3;1)$ $D(24;20;6)$

26. $A(1;7;3)$ $B(3;4;2)$ $C(4;8;5)$ $D(7;32;14)$

27. $A(1;-2;3)$ $B(4;7;2)$ $C(6;4;2)$ $D(14;18;6)$

28. $A(1;4;3)$ $B(6;8;5)$ $C(3;1;4)$ $D(21;18;33)$

29. $A(2;7;3)$ $B(3;1;8)$ $C(2;-7;4)$ $D(16;14;27)$

30. $A(7;2;1)$ $B(4;3;5)$ $C(3;4;-2)$ $D(2;-5;-13)$

4. Пряма лінія на площині.
Рівняння лінії на площині

Лінія на площині звичайно задається як множина точок з деякими геометричними властивостями, які виключно їм притаманні.

Визначення. Рівнянням лінії (рівнянням кривої) на площині Oxy називається рівняння, котрому задовольняють координати x і y кожної точки даної лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії.

Таким чином, для того щоб встановити, що дане рівняння є рівнянням деякої лінії *K,* необхідно й досить: 1) довести, що координати будь-якої точки на лінії *K* задовольняють цьому рівнянню; 2) довести, навпаки, що якщо координати деякої точки задовольняють цьому рівнянню, то точка обов’язково лежить на лінії *K*.

Звідси виходить, що: 1) якщо координати якої-небудь точки не задовольняють даному рівнянню, то ця точка не лежить на лінії *K*, і 2) якщо точка не лежить на лінії *K*, то її координати не задовольняють даному рівнянню.

Якщо точка *M*(*x;y*) рухається по лінії *K*, то її координати *x* і *y*, змінюючись, весь час задовольняють рівнянню цієї кривої. Тому координати точки *M*(*x;y*) називаються *поточними координатами* точки лінії *K*.

На площині *Oxy* поточні координати точки *M* даної кривої *K* звичайно позначаються через *x* і *y*, причому перша з них є абсциса точки *M*, а друга – її ордината. Однак, якщо це доцільно, поточні координати точки *M* можна позначити будь-якими буквами, наприклад, *M*(*X;Y*) або *M*($\xi;\eta$).

Наприклад, рівняння $y = 2x$ *і* $Y = 2X$, де точки *M*(*x;y*) і *N*(*X;Y*) розташовані на площині *Oxy*, зображують собою рівняння однієї і тієї самої прямої на цій площині.

Основне поняття аналітичної геометрії – *рівняння лінії* – пояснимо на ряді прикладів.

Приклад 1. Скласти рівняння кола даного радіуса *R* із центром на початку координат.

Розв'язання. Візьмемо на колі (рис. 22) довільну точку *M*(*x;y*) і поєднаємо її з центром O. За визначенням кола маємо $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$, тобто $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, звідси $x^2 + y^2 = R^2$.

Це рівняння пов'язує між собою координати *x* і *y* кожної точки даного кола. Навпаки, якщо координати точки *M*(*x;y*) задовольняють цьому рівнянню, то *OM=R* , отже ця точка лежить на нашому колі. Таким чином, записане рівняння зображує собою рівняння кола радіуса *R* з центром на початку координат.

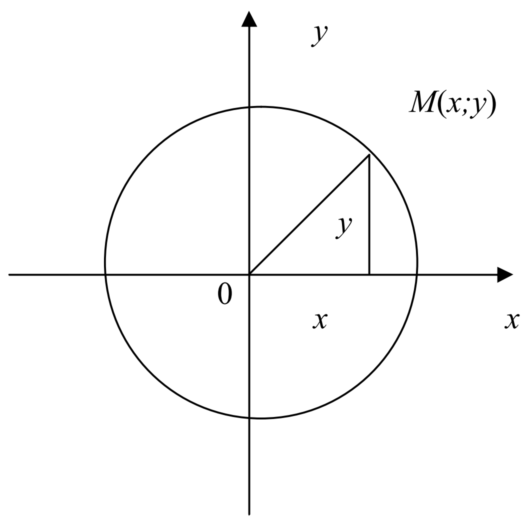


Рис. 22

Пряма лінія на площині.

Нормальний вектор прямої. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору

Виведемо рівняння прямої лінії в декартовій системі координат. Це означає, що ми знайдемо таке рівняння, пов'язуючи x і y, котрому задовольняють декартові координати будь-якої точки даної прямої і не задовольняють координати точок, що лежать поза цією прямою.

Розглянемо на площині Oxy довільну пряму l (рис. 23).

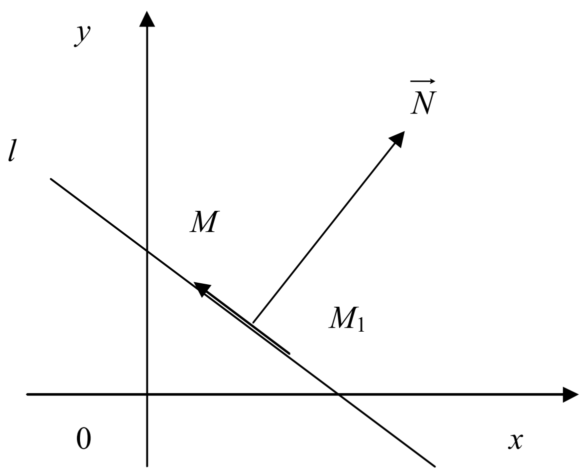


Рис. 23

Нехай є деяка її точка $M_1(x_1; y_1)$ і вектор $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$, перпендикулярний даній прямій. Цей вектор називається *нормальним вектором прямої*. Точка M_1 і нормальний вектор $\vec{N}$ сповна визначають положення прямої l на площині Oxy. Нехай $M(x; y)$ – будь-яка точка прямої l. Згідно з умовою вектор $\vec{N}$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$, який лежить на цій прямій. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю: $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$. Виражаючи скалярний добуток векторів $\vec{N}$ *і* $\overrightarrow{M_1M}$ через їх проекції, маємо:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (42)$$

Отриманому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки $M(x; y)$ прямої l. Якщо точка $M_2(x_2; y_2)$ площини Oxy не лежить на прямій l, то її координати не задовольняють рівнянню (42), оскільки в цьому випадку $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$. Таким чином, рівняння (42) є рівнянням прямої. Воно називається *рівнянням прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно заданому вектору.*

Приклад. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-1;3)$ і перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

Розв'язання. У даному випадку $A = 2,\ B = -5,\ x_1 = -1\ i\ y_1 = 3$. За формулою (1.29) отримаємо $2(x+1) - 5(y-3) = 0$, або $2x - 5y + 17 = 0$.

Загальне рівняння прямої

Вище було встановлено, що рівняння (в декартовій системі координат) *будь-якої прямої l*, що лежить в площині *Oxy*, має вигляд рівняння *першої степені відносно поточних координат x і y.*

Покажемо, що і, *будь-яке рівняння першої степені*

$$Ax + By + C = 0 \tag{43}$$

відносно координат x і y є рівнянням деякої прямої, що лежить в площині *Oxy.*

Справді, у рівнянні один з коефіцієнтів *A* або *B* не дорівнює нулю, у противному разі ми мали б не рівняння, а тотожність *C*=0. Нехай, наприклад, $\mathrm{B} \neq 0$. Тоді це рівняння рівносильне рівнянню

$$A(x-0) + B(y + \frac{C}{B}) = 0. \tag{44}$$

Але останнє є рівнянням прямої, що проходить через точку (0;-C/B) перпендикулярно вектору $\vec{N} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath}$. Отже, і рівняння (43) є рівнянням цієї прямої. Рівняння виду (43) називається *загальним рівнянням прямої.* Його коефіцієнти *A* і *B* відповідно дорівнюють проекціям на осі координат нормального вектора даної прямої.

Якщо вільний член *C* дорівнює нулю, то рівняння має вигляд *Ax*+*By*=0, і йому задовольняють координати початку координат $x = 0, y = 0$. У цьому випадку пряма проходить через початок координат.

Легко переконатися в тому, що $y = 0$ є рівняння осі *Ox*, тому що цьому рівнянню задовольняють координати початку, а нормальний вектор $\overrightarrow{N} = \vec{j}$. Аналогічно, рівняння осі *Oy* має вигляд $x = 0$.

Точка перетину прямих. Побудова прямої за її рівнянням

Нехай дані дві прямі $Ax + By + C = 0\ i\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і треба знайти їх точку перетину. Оскільки ця точка належить кожній з двох даних прямих, то її координати повинні задовольняти рівнянню і першої, і другої прямої.

Таким чином, для того щоб знайти координати точки перетину двох прямих, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{cases} \tag{45}$$

Приклад 1. Знайти точку перетину прямих $2x + y - 1 = 0$ і $x + 2y + 1 = 0$

Розв'язання. Координати шуканої точки перетину знайдемо, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Точка перетину *M* має координати $x = 1$ *і* $y = -1$.

Покажемо, як побудувати пряму за її рівнянням. Для побудови прямої достатньо знати дві її точки. Щоб побудувати кожну з цих точок, ми задаємося довільним значенням однієї з її координат, а потім з рівняння знаходимо відповідне значення іншої координати.

Якщо в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ обидва коефіцієнти при поточних координатах не дорівнюють нулю ($\text{A} \neq 0$ і $\text{B} \neq 0$), то для побудови цієї прямої краще за все знайти точки її перетину з осями координат.

Приклад 2. Побудувати пряму $2x + 3y - 6 = 0$.

Розв'язання. Знаходимо точку $M\,(x_1; y_1)$ перетину даної прямої з віссю абсцис. Для цього розв'язуємо сумісно їх рівняння:

$$2x + 3y - 6 = 0$$
$$y = 0$$

і отримаємо: $x_1 = 3,\ \ y_1 = 0$. Таким чином знайдемо точку $M(3;0)$ перетину даної прямої з віссю абсцис. Розв'язуючи потім сумісно рівняння даної прямої і рівняння вісі ординат

$$2x + 3y - 6 = 0,$$
$$x = 0,$$

отримаємо точку $N(0;2)$ перетину прямої з віссю ординат і побудуємо пряму по двох її точках *M* і *N* (рис. 24).

Приклад 3. Побудувати пряму $2y + 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки нормальний вектор прямої $\overrightarrow{N} = 2\vec{j}$, то пряма паралельна осі абсцис. Її рівняння можна записати у формі $y = -5/2$. Таким чином, ордината кожної точки прямої дорівнює –5/2. Абсциси двох точок, потрібних для побудови прямої, можна вибрати довільно. Наприклад, $x_1 = 0$ *і* $x_2 = 1$. Тоді ми отримаємо дві точки $M(0;-5/2)$ *і* $N(1;-5/2)$, по яким і побудуємо пряму.

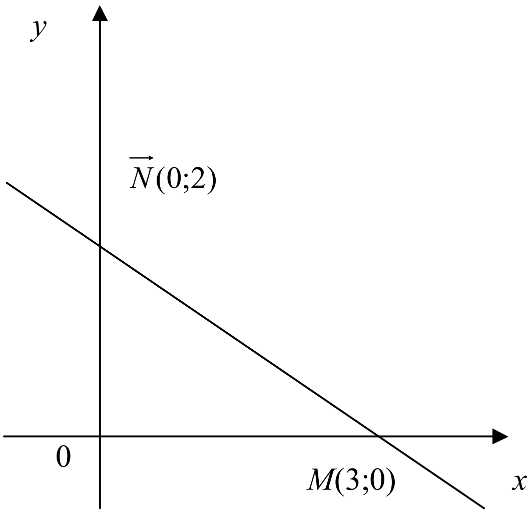


Рис. 24

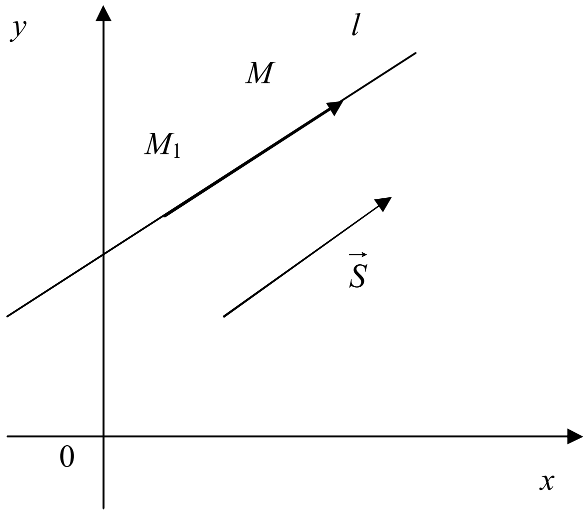


Рис. 25

Напрямний вектор прямої. Канонічне рівняння прямої

Розглянемо на площині Oxy довільну пряму l . Її положення цілком визначається завданням якоїсь її точки $M_1(x_1;y_1)$ і вектора $\vec{S}=m\vec{i}+n\vec{j}$, паралельного даній прямій або розташованого на ній. Цей вектор називається *напрямним вектором* прямої l (рис. 25). Нехай $M(x;y)$ – довільна точка прямої l. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}$ і $\vec{S}=m\vec{i}+n\vec{j}$ колінеарні, то їх проекції пропорційні:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n} \qquad (46)$$

Отриманому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки $M(x;y)$ прямої l. Воно називається *канонічним рівнянням прямої.*

Зауваження. Якщо пряма l, що проходить через точку $M_1(x_1;y_1)$ паралельно осі Oy, то її рівняння має вигляд $x=x_1$. Її напрямний вектор $\vec{S}$ теж паралельний цій осі, отже, його проекція m на вісь Ox дорівнює нулю. Але і в цьому випадку домовимося формально записувати рівняння прямої в канонічному вигляді: $\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{n}$. Аналогічно, канонічне рівняння прямої паралельної осі Ox записується у вигляді $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{0}$.

Параметричне рівняння прямої

Положення прямої на площині цілком визначається завданням якоїсь її фіксованої точки M_1 і вектора $\overrightarrow{S}$, паралельного цій прямій або що лежить на ній: $\overrightarrow{S} = m\vec{i} + n\vec{j}$. Прирівнюючи рівняння (46) якомусь параметру *t*,

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = t,$$

отримаємо:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt. \end{cases} \qquad (47)$$

Система рівнянь (47) називається *параметричними рівняннями прямої.* Параметр *t*– це число, яке може набувати будь-які значення: $t \in (-\infty; \infty)$.

Позначаючи тепер вектор $\overrightarrow{OM}$ як $\vec{r}$, а вектор $\overrightarrow{OM_1}$ як $\vec{r_1}$ (рис. 26), запишемо рівняння (48) у векторному вигляді

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{S}t. \qquad (48)$$

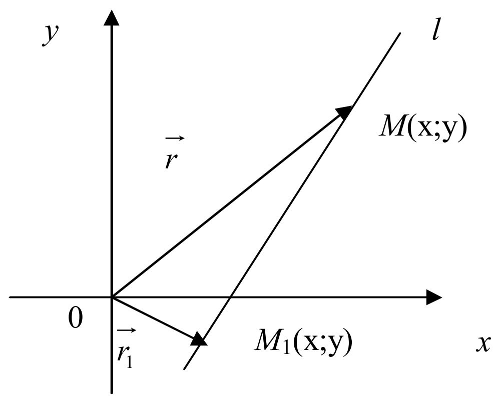


Рис. 26

Рівняння (48) називається *векторним рівнянням прямої.* Воно показує, що кожному значенню параметра *t* відповідає радіус-вектор деякої точки *M*, що лежить на прямій.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку. Пучок прямих

Нехай на площині *Oxy* дана пряма *l*, яка перетинає вісь *Ox* в точці *M* (рис.27). Кутом α між віссю *Ox* і прямою *l* називають найменший кут, на котрий треба повернути навколо точки *M* проти руху годинникової стрілки вісь *Ox* до її співпадання з прямою. Якщо пряма співпадає з віссю *Ox* або паралельна їй, то кут α вважається рівним нулю.

Розглянемо на площині *Oxy* пряму *l*, не паралельну вісі *Oy*. Її положення цілком визначається завданням кута α між віссю *Ox* і прямою *l* і точкою $M_1(x_1;y_1)$,

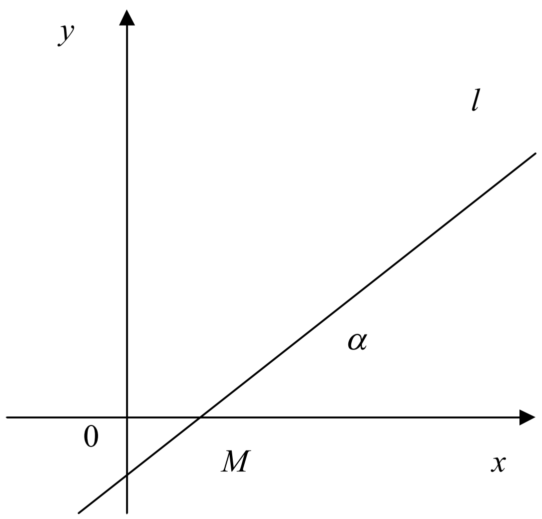


Рис. 27

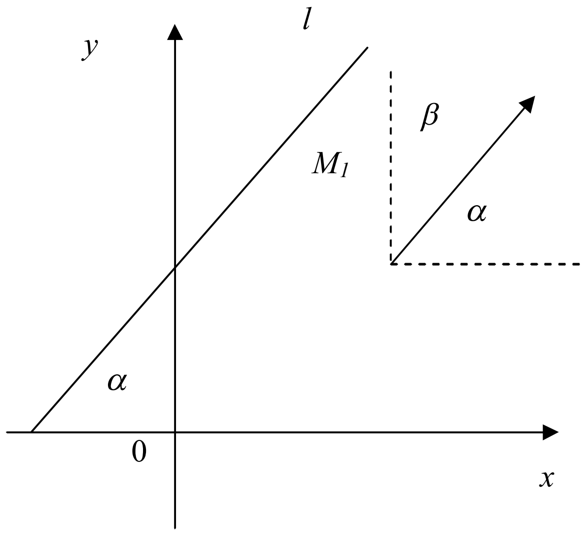


Рис. 28

що лежить на цій прямій. Напрямним є одиничний вектор $\overrightarrow{S^0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j}$, який складає з віссю *Ox* той же кут α, що і пряма *l*. Оскільки $\cos\beta = \sin\alpha$ (рис. 28), то $\overrightarrow{S^0} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$. Тому в рівнянні (46) треба прийняти $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$, тоді воно запишеться так:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha}. \qquad (49)$$

Розв’язуючи це рівняння відносно $y - y_1$, отримаємо

$$y - y_1 = tg\alpha(x - x_1).$$

Позначимо $tg\alpha = k$. Тоді останнє рівняння має вигляд

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (50)$$

Число $k = tg\alpha$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої, а рівняння* (50) – *рівнянням прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку.*

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2;-1)$ і складає з віссю *Ox* кут $\alpha = \pi/3$.

Розв’язання. Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої $k = tg\alpha = tg(\pi/3) = \sqrt{3}$. З формули (50) отримаємо шукане рівняння:

$$y + 1 = \sqrt{3}(x - 2), \text{ або } \sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Зауваження. Якщо пряма, що проходить через точку $M_1(x_1;y_1)$, паралельна осі *Oy* $(\alpha = \pi/2)$, то для неї кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$ не визначений і рівняння прямої не може бути записане. У цьому випадку воно має вигляд $x = x_1$.

Множина всіх прямих на площині, що проходить через деяку точку *M* цієї площини, називається *пучком прямих*, а точка *M* – центром пучка.

Припустимо, що в рівнянні (50) координати точки $M_1(x_1;y_1)$ залишаються сталими, а кутовий коефіцієнт *k* набуває різні (довільно вибрані) значення. Тоді кожному чисельному значенню *k* буде відповідати пряма, що проходить через точку M_1. Навпаки, будь-яка пряма, що проходить через точку M_1, за винятком прямої $x = x_1$, що перпендикулярна осі абсцис, має цілком визначений кутовий коефіцієнт *k*.

Таким чином, рівняння, в якому *k* набуває всілякі значення, визначає пучок прямих з центром в точці $M_1(x_1;y_1)$ за винятком прямої $x = x_1$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма, що утворює кут α з віссю *Ox* (рис. 29), перетинає вісь *Oy* в точці $B(0;b)$. Складемо рівняння цієї прямої, припускаючи, що у формулі (50) $x_1 = 0,\ y_1 = b$; отримаємо $y - b = k(x - 0)$ або

$$y = kx + b. \tag{51}$$

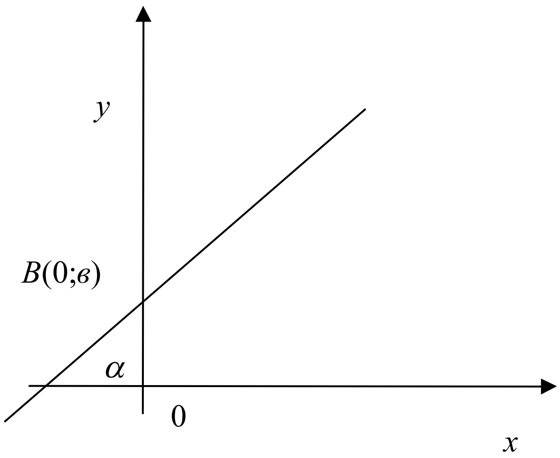


Рис. 29

Рівняння (51) називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом,* а ордината b – *відрізком, що відтинається прямою на осі Oy.*

Розглянемо окремі випадки. Якщо $b = 0$, то рівняння (51) набирає вигляду:

$$y = kx. \tag{52}$$

Пряма в цьому випадку проходить через початок координат.

Приклад 1. Знайти рівняння бісектриси I і III координатних кутів.

Розв'язання. Бісектриса I і III координатних кутів є прямою, що проходить через початок координат. Її рівняння має вигляд рівняння (52), тобто $y = kx$. При цьому кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha = tg(\pi/4) = 1$. Тому шукане рівняння запишеться так: $y = x$.

Другий частинний випадок рівняння отримаємо, якщо $k = tg\alpha = 0$ (отже, і $\alpha = 0$):

$$y = b. \tag{53}$$

Це рівняння прямої, паралельної осі *Ox*. Якщо $k = 0$ *і* $b = 0$, то отримаємо рівняння осі *Ox*: $y = 0$.

Якщо пряма, яка не перпендикулярна осі *Ox*, задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то, розв'язуючи це рівняння відносно *y*, отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \tag{54}$$

де $k = -A/B, b = -C/B$.

Приклад 2. Загальне рівняння прямої має вигляд: $2y - 2x + 3 = 0$. Знайти відрізок, який відтинає ця пряма на осі *Oy*, і кут між віссю *Ox* і даною прямою.

Розв'язання. Розв'язуючи дане рівняння відносно *y*, отримаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y = x - 1{,}5$; тут $k = tg\alpha = 1, \quad b = -1.5$. Таким чином, відрізок, який відтинає ця пряма на осі ординат, дорівнює -1,5, а кут α між віссю *Ox* і даною прямою – $\pi/4$.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Нехай дані дві точки $M_1(x_1; y_1)$ *і* $M_2(x_2; y_2)$ на площині. Складемо канонічне рівняння прямої, що проходить через ці точки. Напрямним вектором $\vec{S}$ приймаємо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тоді $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.

Використовуючи формулу при $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{55}$$

Рівняння (55) називається *рівнянням прямої, що проходить через дві дані точки.*

Приклад. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1;2)$ *і* $M_2(-2;3)$.

Розв'язання. Припускаючи у формулі (38) x_1=1, y_1=2, x_2=-2, y_2=3, отримаємо

$$\frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{-2-1},\text{ тобто } x+3y-7=0.$$

Рівняння прямої у «відрізках» на осях

Виведемо тепер рівняння прямої, розташування якої на площині задано ненульовими відрізками, які відтинають її на осях координат. Припустимо, що пряма *AB* відтинає на осі *Ox* відрізок $\mathrm{OA}=\mathrm{a}$, а на осі *Oy* – відрізок $\mathrm{OB}=\mathrm{b}$ (рис. 21), причому ясно, що тим самим положення прямої цілком визначене.

Для виведення рівняння прямої *AB* відмітимо, що ця пряма проходить через точки $A(a;0)$ *і* $B(0;b)$, тому її рівняння легко здобути з рівняння (55), якщо припустити, що $\mathrm{x}_1=\mathrm{a},\ \mathrm{y}_1=0$ і $\mathrm{x}_2=0,\ \mathrm{y}_2=\mathrm{b}$. Маємо

$$\frac{\mathrm{x}-\mathrm{a}}{0-\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{y}-0}{\mathrm{b}-0},$$

звідси

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}=-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}+1$$

і остаточно

$$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}+\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}=1. \tag{56}$$

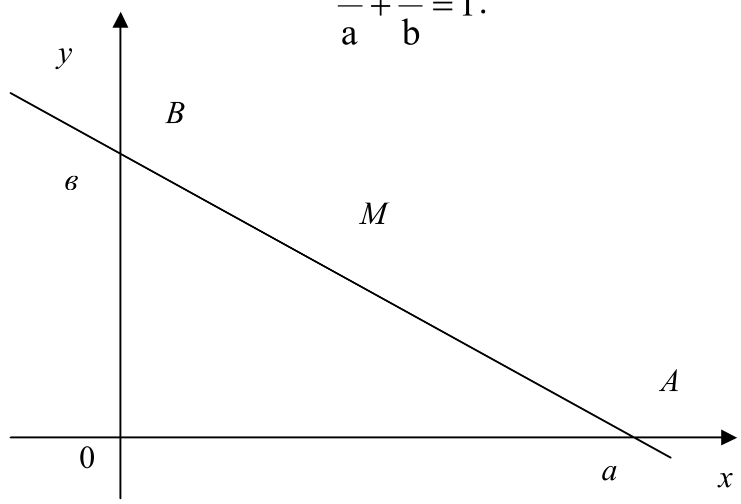


Рис. 30

Це і є *рівнянням прямої у «відрізках»,* де *x* і *y* – координати довільної точки $\mathrm{M}(\mathrm{x};\mathrm{y})$, що лежить на прямій *AB* (рис. 30).

Приклад. Написати рівняння прямої *AB*, що відтинає на осі *Ox* відрізок *OA*=5, а на осі *Oy* відрізок *OB*=- 4.

Розв'язання. Припускаючи в рівнянні (56) $a = 5,\ b = -4$, отримаємо

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1, \text{ або } \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1.$$

Примітка. Рівняння прямої, що проходить через початок координат або паралельно одній з осей координат, не може бути записаним як рівняння прямої у «відрізках».

Обчислення кута між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Нехай дві прямі лінії l_1 і l_2, що перетинаються в точці *M*, визначаються відповідно рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$. Знайдено тангенс кута φ між цими прямими (рис. 31).

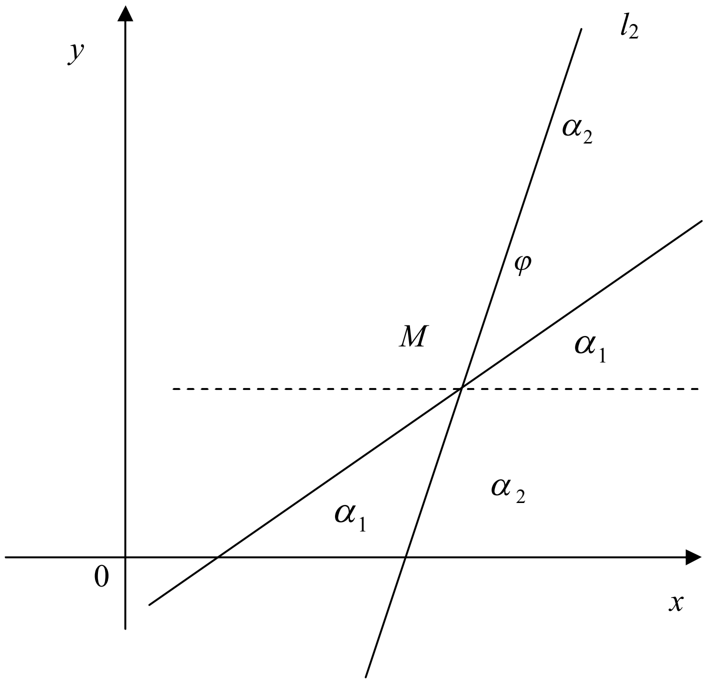


Рис. 31

Припускаємо, що дані прямі не перпендикулярні одне одному, оскільки тоді $\operatorname{tg}\varphi$ не існував би. Нехай пряма l_1 утворює з віссю абсцис кут α_1, а пряма l_2 – кут α_2. Якщо провести через точку *M*, в якій прямі l_1 і l_2 перетинаються, пряму, паралельну осі *Ox*, то побачимо, що $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, або $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Отже

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Але $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, а $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, тому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{57}$$

Таким чином, якщо дві прямі l_1 і l_2, які перетинаються не перпендикулярні, то тангенс кута φ між ними знаходиться з формули (57). При цьому кут φ відраховують у напрямку від прямої l_1 до прямої l_2.

Якщо прямі паралельні або збігаються, то $l_1 \parallel l_2$ і звідси $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$, тобто

$$k_2 = k_1. \tag{58}$$

Навпаки, якщо $k_2 = k_1$, то $l_1 \parallel l_2$ і звідси прямі l_1 і l_2 паралельні або збігаються. Домовившись збіжні прямі вважати паралельними, ми приходимо до такої ознаки паралельності прямих.

Необхідною і достатньою умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то формула (57) втрачає зміст. Але в цьому випадку можна розглядати котангенс кута між прямими:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

У випадку перпендикулярності прямих $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$. Отже, $\frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, звідси $1 + k_1 k_2 = 0$, або

$$k_1 k_2 = -1. \tag{59}$$

Можна показати, що і навпаки, якщо виконується рівність (59), то прямі l_1 і l_2 перпендикулярні.

Таким чином, формула (59) виражає *необхідну і достатню умову перпендикулярності двох прямих.*

Нехай тепер рівняння прямих задані у загальному вигляді:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Звідси, припускаючи, що $B_1 \neq 0,\ B_2 \neq 0$, отримаємо

$$y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1},$$

$$y = -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2}.$$

Отже, кутові коефіцієнти цих прямих є:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

Із цієї формули після нескладних обчислень знаходимо тангенс кута між прямими:

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Звідси отримаємо: 1) *умову паралельності прямих* $(\varphi = 0)$:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1},$$

2) *умову перпендикулярності прямих* $(\varphi = \pi/2)$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Приклад 1. Знайти кути, утворені з прямою $3x + y - 6 = 0$ прямими $x + 2y + 1 = 0, \quad 6x + 2y - 1 = 0 \quad i \quad x - 3y + 2 = 0$.

Розв'язання. Приведемо рівняння даних прямих до формули рівнянь з кутовим коефіцієнтом. Для цього розв'яжемо кожне з них відносно *y*:

$$y = -3x + 6; \; y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}; \; y = -3x + \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Ми бачимо, що кутові коефіцієнти цих прямих відповідно рівні $k_1 = -3; \; k_2 = -1/2; \; k_3 = -3 \quad i \quad k_4 = 1/3$. Із формули (40) знайдемо тангенс кута φ між першою і другою прямими:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{-1/2 + 3}{1 + (-3)(-1/2)} = 1.$$

Отже, $\varphi = \pi/4$.

Третя пряма паралельна першій, оскільки кутові коефіцієнти цих прямих рівні: $k_1 = k_3 = -3$. Кут між двома паралельними прямими дорівнює нулю.

Четверта пряма перпендикулярна першій (кут між ними дорівнює $\pi/2$), тому що кутові коефіцієнти цих прямих задовольняють умові перпендикулярності прямих (42): $k_1k_2 = (-3)1/3 = -1$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(3;1)$ перпендикулярно прямій $2x + y - 3 = 0$.

Розв'язання. Рівняння даної прямої можна записати у формі $y = -2x + 3$, звідси випливає, що її кутовий коефіцієнт $k_1 = -2$. Кутовий коефіцієнт k_2 шуканої прямої, перпендикулярної до даної, пов'язаний з k_1

умовою $k_1 k_2 = -1$. Отже, $k_2 = -1/k_1 = 1/2$. Тепер залишається використати умову (2.3.11) з $x_1 = -3$, $y_1 = -1$ і $k = 1/2$:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x + 3), \text{ або } x - 2y + 1 = 0.$$

Відстань від точки до прямої

Нехай на площині *Oxy* задана пряма $Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0; y_0)$. Знайти відстань d від точки M_0 до даної прямої. Позначимо через $M_1(x_1; y_1)$ основу перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на пряму (рис. 32).

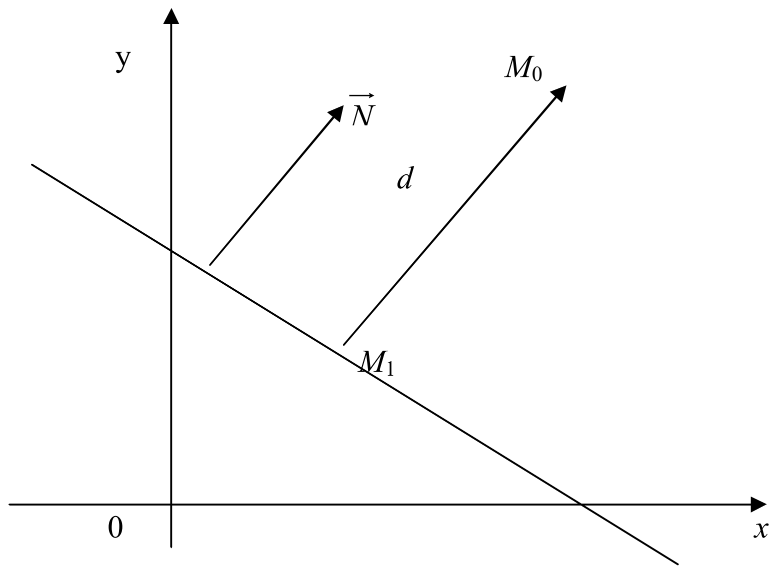


Рис. 32

Шукана відстань d дорівнює довжині цього перпендикуляра, тобто модулю вектора $\vec{d} = \overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\vec{i} + (y_0 - y_1)\vec{j}$. Розглянемо скалярний добуток цього вектора і нормального вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ даної прямої. З одного боку, за визначенням скалярного добутку маємо $\vec{N}\vec{d} = |\vec{N}||\vec{d}|\cos\varphi$, де φ – кут між перемноженими векторами. Оскільки ці вектори колінеарні, кут між ними дорівнює або нулю, або π; тому $\cos\varphi = \pm 1$. Таким чином,

$$\vec{N}\vec{d} = \pm|\vec{N}||\vec{d}| = \pm|\vec{N}|d \qquad (60)$$

З іншого боку, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі парних добутків їх однойменних проекцій:

$$\overrightarrow{N}\,\overrightarrow{d}\ = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1).$$

Але точка $M_1(x_1; y_1)$ лежить на даній прямій, тому її координати задовольняють рівнянню цієї прямої: $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Звідси $Ax_1 + By_1 = -C$.

Із урахуванням цього рівняння отримаємо

$$\overrightarrow{N}\,\overrightarrow{d} = Ax_0 + By_0 + C. \qquad (61)$$

Порівнюючи формули (60) і (61), маємо

$$\pm\left|\overrightarrow{N}\right| d = Ax_0 + By_0 + C,$$

звідси $d = \pm\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\left|\overrightarrow{N}\right|}$.

Оскільки $\left|\overrightarrow{N}\right| = \left|A\vec{i} + B\vec{j}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$,

то $d = \pm\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

або

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (62)$$

У *чисельнику правої частини формули* (62) *стоїть абсолютна величина виразу, яку отримаємо, якщо в ліву частину рівняння даної прямої* $Ax + By + C = 0$ *замість поточних координат підставити координати даної точки* $M_0(x_0; y_0)$.

Приклад 1. Трикутник заданий своїми вершинами $A(1;2), B(-2;1) i\ C(2;3)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини *A*.

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $B(-2;1)\ i\ \ C(2;3)$:

$$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-3}{1-3}, \text{ або } x - 2y + 4 = 0.$$

Шукану довжину висоти знайдемо з формули (45) як відстань від точки $A(1;2)$ до прямої *BC*:

$$d = \frac{|1 - 2\cdot 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.45.$$

Контрольна робота №4

В задачах 1-30 дані координати вершин трикутника *ABC*. Знайти: 1) довжину сторони *AB*; 2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти; 3) кут

B в радіанах; 4) рівняння висоти *СД* і її довжину; 5) рівняння медіани *AE*; 6) координати точки перетину медіани *AE* і висоти *СД*; 7) рівняння прямої, що проходить через точку *A*, паралельно прямій *BC*. Зробити малюнок.

1.	*A*(-8;-3)	*B*(4;-12)	*C*(8;10)
2.	*A*(-5;7)	*B*(7;-2)	*C*(11;20)
3.	*A*(-12;-1)	*B*(0;-10)	*C*(4;12)
4.	*A*(-10;9)	*B*(2;0)	*C*(6;22)
5.	*A*(0;2)	*B*(12;-7)	*C*(16;15)
6.	*A*(-9;6)	*B*(3;-3)	*C*(7;19)
7.	*A*(1;0)	*B*(13;-9)	*C*(17;13)
8.	*A*(-4;10)	*B*(8;1)	*C*(12;23)
9.	*A*(2;5)	*B*(14;-4)	*C*(18;18)
10.	*A*(-4;1)	*B*11;-5)	*C*(15;17)
11.	*A*(-2;7)	*B*(10;-2)	*C*(8;12)
12.	*A*(-6;8)	*B*(6;-1)	*C*(4;13)
13.	*A*(3;6)	*B*(15;-3)	*C*(13;11)
14.	*A*(-10;5)	*B*(2;-4)	*C*(0;10)
15.	*A*(-4;12)	*B*(8;3)	*C*(6;17)
16.	*A*(-3;10)	*B*(9;1)	*C*(7;15)
17.	*A*(4;1)	*B*(16;-8)	*C*(14;6)
18.	*A*(-7;4)	*B*(5;-5)	*C*(3;9)
19.	*A*(0;3)	*B*(12;-6)	*C*(10;8)
20.	*A*(-5;9)	*B*(7;0)	*C*(5;14)
21.	*A*(-3;-2)	*B*(0;10)	*C*(6;2)
22.	*A*(1;1)	*B*(4;13)	*C*(10;5)
23.	*A*(0;3)	*B*(3;15)	*C*(9;7)
24.	*A*(-2;0)	*B*(1;12)	*C*(7;4)
25.	*A*(2;-1)	*B*(5;11)	*C*(11;3)
26.	*A*(3;-3)	*B*(6;9)	*C*(12;1)
27.	*A*(-1;2)	*B*(2;14)	*C*(8;6)
28.	*A*(5;-4)	*B*(8;8)	*C*(14;0)
29.	*A*(-4;5)	*B*(-1;17)	*C*(5;9)
30.	*A*(4;4)	*B*(7;16)	*C*(13;8)

5. Лінії другого порядку

Лінією другого порядку називається множина точок площини, координати яких задовольняють рівнянням виду

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \qquad (63)$$

де коефіцієнти a, b, c, d, e, f – дійсні числа, причому хоч би одне з чисел a, b, c відмінне від нуля, тобто

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

До ліній другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола і парабола.

Рівняння (63) може визначити на площині *Oxy* не тільки лінії другого порядку, але і дві прямі, одну пряму, точку або не визначити жодної точки.

Щоб зрозуміти, яке геометричне місце точок визначається рівнянням (63), треба записати його в такій системі координат, в якій би це рівняння спростилося.

Для лінії другого порядку існує прямокутна система координат (так звана канонічна), в якій рівняння (63) має найпростіший або канонічний вид.

Наша мета – встановити і дослідити канонічні рівняння ліній другого порядку.

Лінії другого порядку називають також конічними перерізами, тому що їх можна отримати як лінії перетину кругового конуса з площиною (Рис 33).

Коло є лінією перетину конуса площиною перпендикулярною до осі конуса і такою, що не проходить через його вершину (*а*).

Еліпс – це лінія перетину конуса площиною, яка перетинає всі твірні конуса, не є перпендикулярною до осі конуса і не проходить через його вершину (*б*).

При перетині двопорожнинного конуса площиною, яка паралельна осі конуса, отримаємо гіперболу (*в*).

Якщо перетнути конус площиною, паралельною одній із твірних, то отримаємо параболу (*г*).

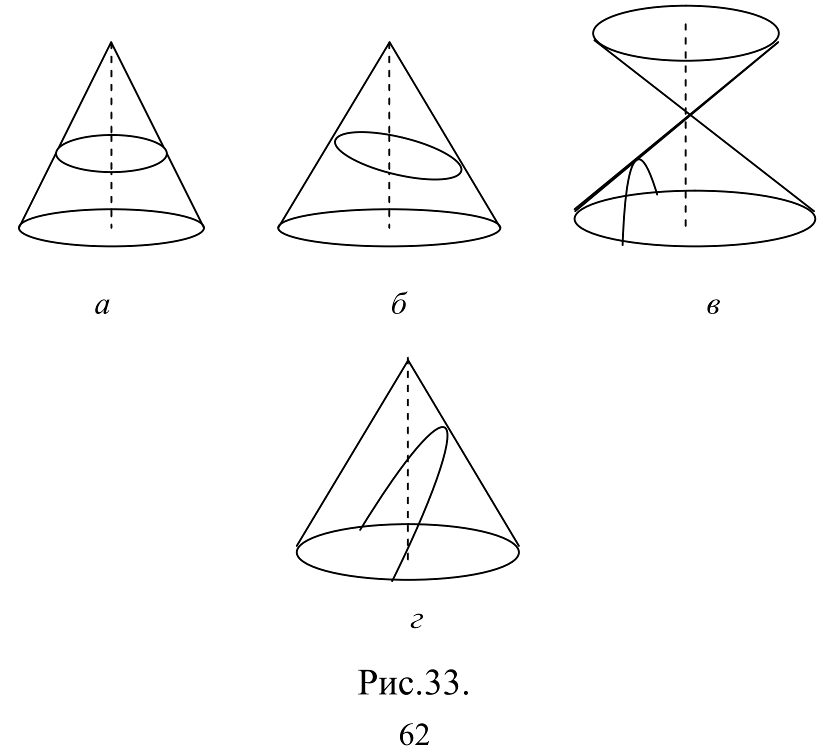


Рис.33.

Коло

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра кола). Відстань від точок кола до центра називають *радіусом*. Виведемо рівняння кола в прямокутній системі координат *Oxy*. Позначимо через $O_1(a, b)$ – центр кола, тоді $M(x, y)$ – довільна точка площини, а *R* – радіус кола. Точка *M* належить колу тоді і тільки тоді, коли $O_1M = R$, або

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R. \tag{64}$$

Це рівняння заданого кола. Для зручності в користуванні позбавимося від кореня квадратного, підносячи до квадрата обидві частини рівняння:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{65}$$

Отримане рівняння є рівнянням кола з центром в точці $O_1(a, b)$.

Якщо центр кола лежить на початку координат $(a = 0;\ b = 0)$, то рівняння набирає вигляду:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{66}$$

Рівняння (66) називають **канонічним** рівнянням кола. Якщо в рівнянні (65) провести перетворення, отримаємо **загальне рівняння кола:**

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \tag{67}$$

де $A = -2a; B = -2b;\ C = a^2 + b^2 - R^2$. Оскільки рівняння (67) є рівнянням другого порядку, то коло є лінією другого порядку.

Рівняння кола має такі властивості.

1. Коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою.
2. У рівнянні відсутній член з добутком xy.

Приклад 1. Скласти рівняння кола, якщо точки $A(-1;4)$ і $B(3;2)$ є кінцями його діаметра.

Розв'язання

1) $D = AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

2) $O_1(a, b)$ – центр кола лежить на *AB* і ділить *AB* навпіл, тому

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1; \quad b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

3) Підставимо отримані значення в рівняння кола (65):

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

Приклад 2. Знайти центр і радіус кола, заданого рівнянням:

$$x^2 + 6x + y^2 - 10y + 18 = 0.$$

Розв'язання.

1) Виділимо в заданому рівнянні повні квадрати:

$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 10y + 25 - 25 + 18 = (x+3)^2 + (y-5)^2 - 16 = 0$ або

$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 16$.

2) Координати центра O_1 дорівнюють: $x_{01} = -3$; $y_{01} = 5$; $R = \sqrt{16} = 4$.

Щоб побудувати коло, треба визначитися з координатами центра $O_1(a,b)$ і радіусом кола *R*. Спочатку будуємо точку $O_1(a,b)$, а потім циркулем проводимо коло радіуса *R*.

Еліпс

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 і F_2 – фокуси еліпса і розмістимо прямокутну систему координат так, що початок координат лежить в середній точці відрізка F_1F_2, ці точки належать вісі абсцис (рис. 34).

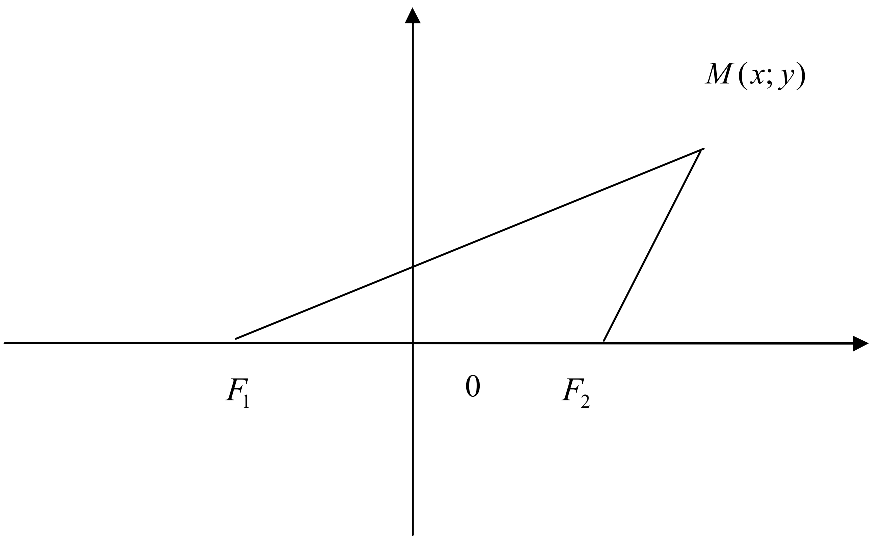


Рис. 34

Відстань між фокусами називається фокальною, позначимо її через 2*c*: $F_1F_2 = 2c$, тоді маємо такі фокуси: $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$.

Позначимо суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів через 2*a*, причому $2a > 2c$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка площини. Ця точка лежить на еліпсі за умови, що $F_1M + F_2M = 2a$.

Запишемо це рівняння через координати точок.

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a. \qquad (68)$$

Це і є рівняння еліпса. Щоб спростити його, перенесемо один корінь в праву частину і піднесемо обидві частини до квадрата:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Зведемо подібні і отримаємо:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Підносимо обидві частини цього рівняння знову до квадрата:

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2.$$

Спростимо і отримаємо

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

За умовою $a > c$, тому $a^2 - c^2 > 0$; позначимо $a^2 - c^2 = b^2$. Рівняння (68) набирає вигляду:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділивши рівняння на a^2b^2, отримаємо **канонічне рівняння еліпса**.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (69)$$

Це рівняння другого порядку, отже, еліпс – лінія другого порядку.

Визначимо окремі властивості еліпса і дослідимо його форму за рівнянням.

1. Рівняння (69) містить змінні *x* та *y* лише у другому степені, що означає належність до еліпса точок з координатами $(x;y)$; $(-x;y)$; $(x;-y)$ і $(-x;-y)$. Тому еліпс симетричний відносно осей *Ox* і *Oy*, а також відносно точки $O(0;0)$. Ця точка називається центром еліпса.

Дослідження форми еліпса можна обмежити дослідженням частини еліпса, що розміщена в одному, наприклад в першому, координатному куті.

2. У першому координатному куті $x \ge 0$ і $y \ge 0$, тому з рівняння (69) отримаємо

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (70)$$

З рівняння (70) видно, що точки $A_1(a;0)$ і $B_1(0;b)$ належать еліпсу, причому при збільшенні *x* від 0 до *a*, *y* зменшиться від b до 0. Областю значень даної функції є інтервал $|x| \le a, (-a \le x \le a)$, оскільки для $x > a$ вираз (70) втрачає зміст.

Таким чином, частина еліпса, розміщена в першому координатному куті, має форму дуги A_1B_1 (рис. 35).

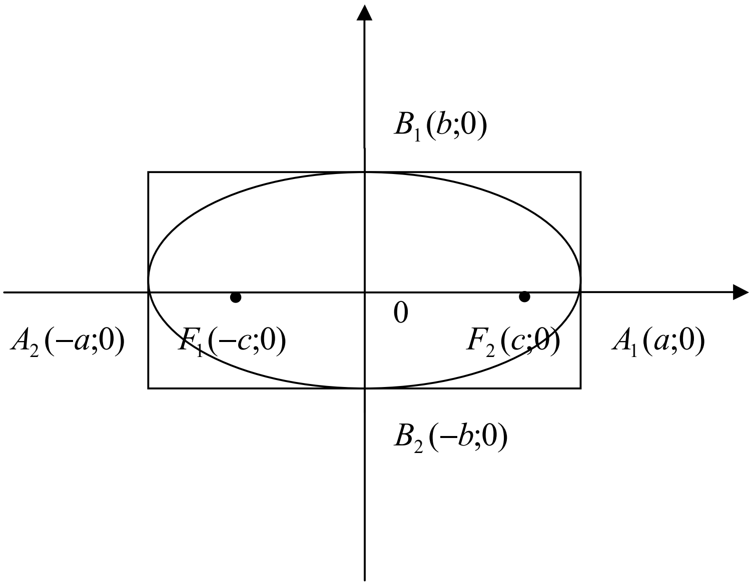


Рис. 35

Щоб отримати весь еліпс, симетрично осям відобразимо дугу A_1B_1. Отриманий еліпс вписаний в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$.Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в точках його перетину з осями *Ox* і *Oy*. Точки перетину еліпса з осями $A_1(a;0), A_2(-a;0), B_1(0;b), B_2(0;-b)$ називаються вершинами еліпса. Величини $A_1A_2 = 2a,\ B_1B_2 = 2b$ – відповідно великою та малою осями еліпса.

Із властивостей 1 і 2 випливає, що еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії (головні осі еліпса) і центр симетрії (центр еліпса).

Числа a і b називаються відповідно великою і малою півосями еліпса.

3. Якщо $a = b$, то рівняння (69) набирає вигляду $x^2 + y^2 = a^2$, а це є рівняння кола.

Тому можна вважати коло окремим випадком еліпса. Із рівності $b^2 = a^2 - c^2$ при $a = b$ маємо $c = 0$, тобто коло є еліпсом, у якого центр збігається з фокусами.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, яка називається ексцентриситетом еліпса і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини великої півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{71}$$

причому $0 \le \varepsilon < 1$, оскільки $0 \le c < a$.

Якщо $\varepsilon = 0$, то $c = 0$, тобто $b = a$ й еліпс перетворюється на коло. При наближенні ε до одиниці відношення $\frac{b}{a}$ зменшується, що означає розтягування еліпса вздовж осі *Ox*.

4. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса з фокусами F_1 і F_2. Відстані $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ називаються фокальними радіусами точки $M(x;y)$. За визначенням еліпса $r_1 + r_2 = 2a;\ r_1 = a + \varepsilon x;\ r_2 = a - \varepsilon x$.

Приклад 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *Ox*, симетрично початку координат, якщо йому належать точки $M_1(3;2)$ *і* $M_2(4;\frac{2\sqrt{2}}{3})$.

Розв'язання

1) У канонічне рівняння еліпса підставимо координати точок M_1 і M_2

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \text{ і } \frac{16}{a^2} + \frac{8}{9b^2} = 1.$$

2) Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \to b^2 = \dfrac{4a^2}{a^2 - 9} \\ \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{8}{9b^2} = 1 \to \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{2\left(a^2 - 9\right)}{9a^2} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{144 + 2a^2 - 18}{9a^2} = 1 \to 126 + 2a^2 = 9a^2$$

$$7a^2 = 126 \to a^2 = 18;\ b^2 = \frac{4 \cdot 18}{18 - 9} = 8$$

3) Запишемо рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Приклад 2. Знайти довжину осей $2a; 2b$, ексцентриситет ε і відстань між фокусами $2c$ для еліпса

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Розв'язання

1) Обчислимо a і b, за умовою $a^2=169$, тоді $a=13$; $b^2=25\to b=5$, відповідно $2a=26$ і $2b=10$.

2) Щоб знайти ε, обчислимо *c*: $c=\sqrt{a^2-b^2}$, тому $c=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$, тоді $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$, а $2c=2\cdot12=24$.

Приклад 3. Написати рівняння еліпса, який має велику піввісь 4 і проходить через точку $A(2;\sqrt{2})$. Побудувати еліпс, обчислити його ексцентриситет і фокальну відстань.

Гіпербола

Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є сталою величиною, що менша від відстані між фокусами.

Виведемо рівняння гіперболи за даним визначенням. Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів через $2a$. За визначенням $2a<2c$. Розмістимо фокуси гіперболи на осі *Ox* симетрично відносно початку координат, тоді матимемо $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$. Запишемо за визначенням модуль різниці відстаней довільної точки гіперболи $M(x;y)$ від фокусів:

$$|MF_1-MF_2|=2a;$$

в координатній формі це дорівнює:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Виконаємо перетворення даного рівняння, позбавляючись від коренів. (Спробувати зробити самостійно). Тоді отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{72}$$

де $b^2=c^2-a^2$.

Це рівняння другого порядку, отже гіпербола є лінією другого порядку і рівняння (72) є канонічним рівнянням гіперболи. Аналізуючи його, встановимо деякі властивості і форму гіперболи.

1. Гіпербола симетрична осям *Ox*; *Oy* і початку координат, бо координати входять в рівняння тільки в парному степені.

2. Для частини гіперболи, що лежить в першому координатному куті, з рівняння (72) визначаємо:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{73}$$

З цієї рівності видно, що $|x| \geq a$. Точка $A_1(a;0)$ належить гіперболі і є точкою перетину гіперболи з віссю *Ox*. <u>Ось *Oy* гіпербола не перетинає.</u>

При зростанні *x* значення *y* теж збільшується. Покажемо, що, віддаляючись у нескінченність, змінна точка гіперболи $M(x;y)$ необмежено наближується до прямої

$$y = \frac{b}{a}x. \tag{74}$$

Така пряма називається асимптотою гіперболи. Візьмемо точку N, що лежить на асимптоті і має ту саму абсцису *x*, що і точка $M(x;y)$ гіперболи і знайдемо різницю MN між ординатами цих точок (рис.36).

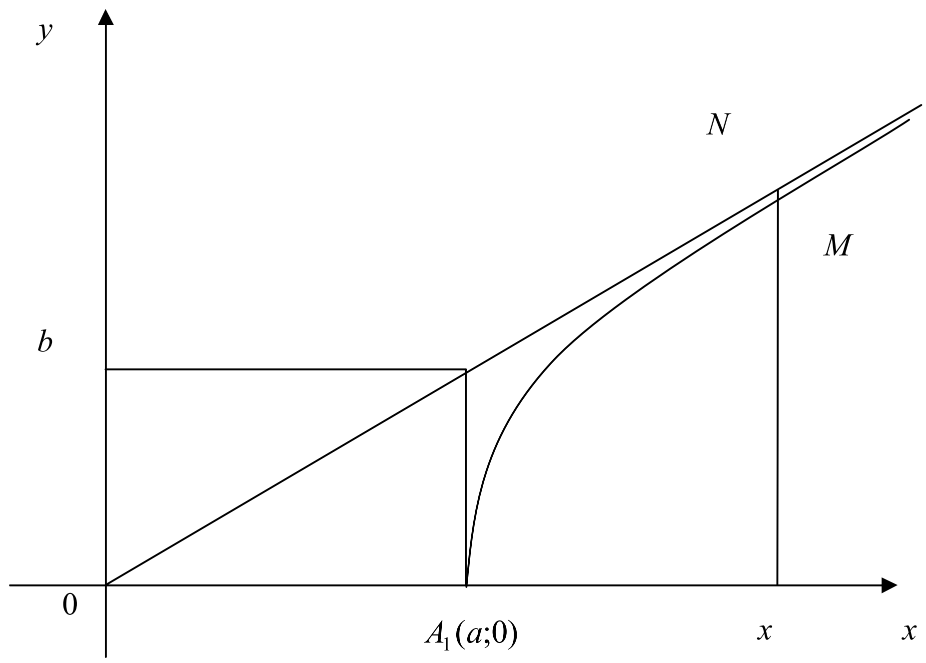


Рис. 36.

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\frac{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{\left(x^2 - x^2 + a^2\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} == \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Зрозуміло, якщо $x \to +\infty$, то знаменник теж прямує до $+\infty$, а $MN \to 0$, тому що чисельник є сталою величиною. Отже, точки гіперболи, віддаляючись від точки $A_1(a;0)$ у нескінченність, необмежено наближаються до прямої (74), тобто ця пряма є асимптотою.

Гіпербола складається з двох гілок (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x \quad і \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Осі симетрії називаються осями гіперболи, а точка перетину осей – її центром. Вісь *Ox* перетинає гіперболу у двох точках: $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)$, які називаються вершинами гіперболи. Ця вісь називається дійсною віссю гіперболи, а вісь, яка не має з гіперболою спільних точок – уявною віссю. Дійсною віссю гіперболи є відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи і його довжину $A_1A_2 = 2a$. Відрізок $B_1B_2 = 2b$ і його довжина є уявною віссю. Величини a і b відповідно називають дійсною і уявною півосями гіперболи. Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$ називається основним прямокутником гіперболи.

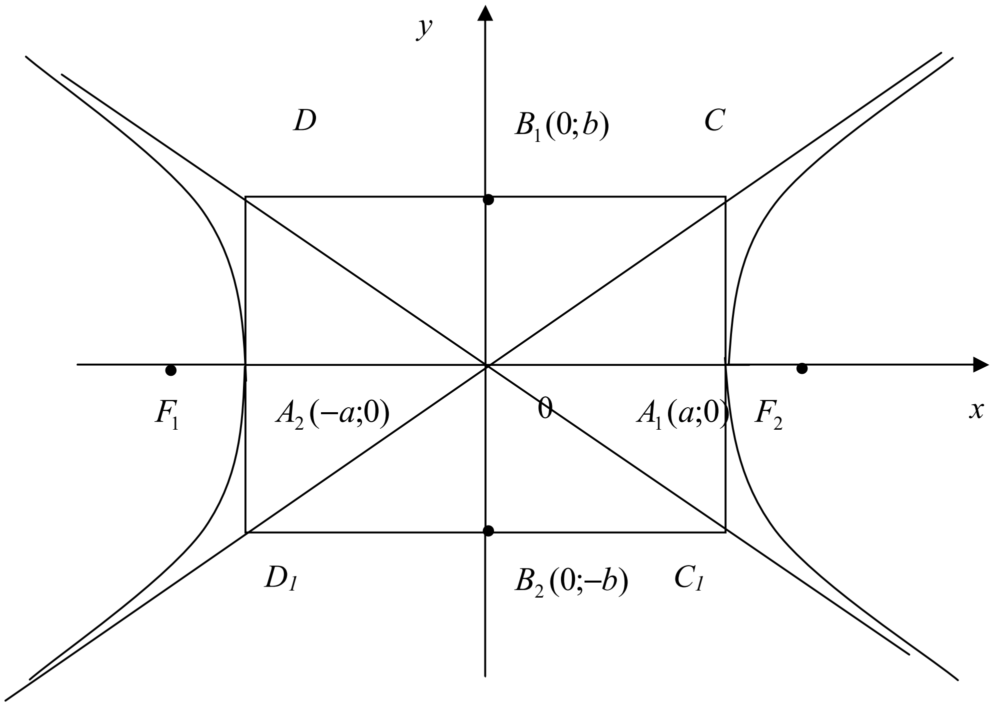


Рис. 37

При побудові гіперболи (72) необхідно спочатку побудувати основний її прямокутник C_1D_1DC (рис. 37), провести прямі, що проходять через його протилежні вершини – асимптоти гіперболи і визначити вершини гіперболи A_1 і A_2.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{75}$$

є також рівнянням гіперболи, яка називається спряженою до гіперболи (72). Вершини її лежать в точках $B_1(0;b)$ і $B_2(0;-b)$, а асимптоти збігаються з асимптотами даної (72) гіперболи.

Гіпербола з рівними півосями $(a = b)$ називається рівносторонньою, її канонічне рівняння має вигляд: $x^2 - y^2 = a^2$. Основним прямокутником рівносторонньої гіперболи є квадрат із стороною $2a$, асимптотами є бісектриси координатних кутів $y = \pm x$.

3. Ексцентриситетом гіперболи є відношення половини фокальної відстані до довжини дійсної півосі

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{76}$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Відношення $\frac{b}{a}$ можна виразити через ексцентриситет ε: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$. З цієї формули видно, що від ексцентриситету залежить форма гіперболи: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тим більше основний прямокутник витягується по осі *Oy*, а гіпербола відхиляється від осі *Ox*. Чим ближче ексцентриситет до 1, тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі *Ox*, а гіпербола наближається до цієї осі.

Приклад 1. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі *Ox* симетрично початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{3}$.

Розв'язання

$2a = 6 \qquad 1)\ a = \frac{2a}{2} = \frac{6}{2} = 3;$

$\varepsilon = \frac{5}{3} \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} = \frac{c}{3} \to c = 5$

2) Знайдемо b^2: $\quad b^2 = c^2 - a^2, \quad b^2 = 25 - 9 = 16$.

3) Запишемо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Приклад 2. З'ясувати чи є рівняння $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ рівнянням гіперболи. Якщо так, то знайти її центр і півосі.

Розв'язання

1) Виділимо в рівнянні повні квадрати відносно *x* і *y*:

$$16x^2-9y^2-64x-54y-161=\left(16x^2-2\cdot 4x\cdot 8+64\right)-64-$$
$$-\left(9y^2+2\cdot 3y9+81-81\right)-161=\left(4x-8\right)^2-\left(3y+9\right)^2-$$
$$-64+81-161=16\left(x-2\right)^2-9\left(y+3\right)^2-144=0$$

або

$$\frac{\left(x-2\right)^2}{9}-\frac{\left(y+3\right)^2}{16}=1.$$

Це є рівняння гіперболи з центром в точці $O_1(2;-3)$.

2) З рівняння $a=3;\quad b=4$.

Приклад 3. Знайти відстань фокуса гіперболи від її асимптоти, якщо $x^2-8y^2=8$.

Розв'язання

1) Запишемо рівняння гіперболи в канонічному виді:

$$x^2-8y^2=8\ \Big|:8,$$
$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{1}=1.$$

З рівняння $a=2\sqrt{2};\ b=1;\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8+1}=3$.

2) Координати фокусів: $F_1\left(-3;0\right);\ F_2\left(3;0\right)$. Рівняння асимптот: $y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$.

Відстань від фокуса до асимптоти обчислимо за формулою: $d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $x_0;y_0$ – координати фокуса, а $Ax+By+C$ – рівняння асимптоти в загальному вигляді:

У нас це буде: $\sqrt{2}x\pm 4y=0\to d=\frac{\left|\sqrt{2}\cdot 3-4\cdot 0\right|}{\sqrt{2+16}}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=1.$

Парабола

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких рівновіддалена від даної точки, яку називають фокусом, і від даної прямої, яку називають директрисою. Директриса не проходить через фокус параболи.

Нехай на площині задані фокус *F* і директриса, причому відстань фокуса від директриси дорівнює *p*. Візьмемо прямокутну систему координат *Oxy* так, щоб вісь *Ox* проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь *Oy* ділила відстань між фокусами і директрисою навпіл (рис. 38).

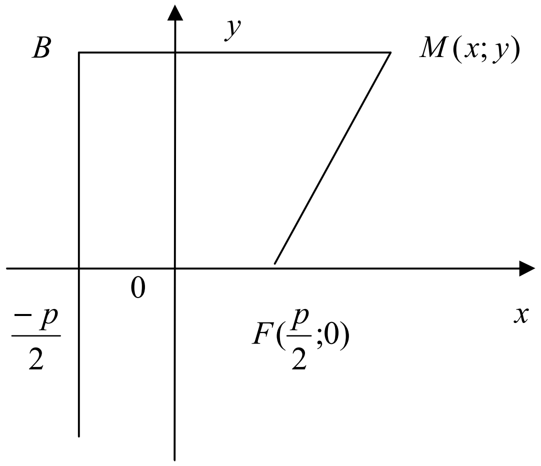


Рис. 38

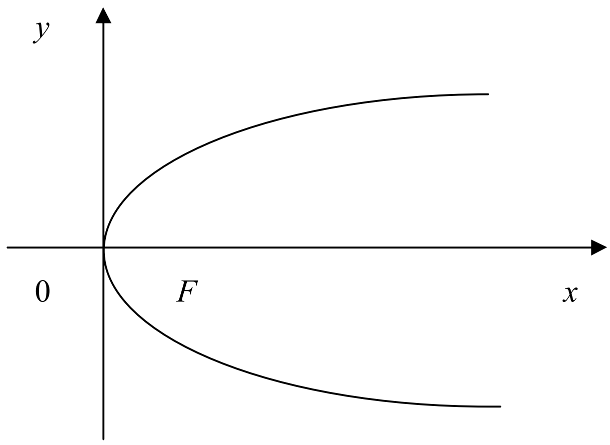


Рис. 39

Тоді фокус має координати $F(\frac{p}{2};0)$, а рівняння директриси:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка площини, а відрізки *MB* і *MF* – відстані від цієї точки від директриси і фокуса. Точка *M* належить параболі за умови, що *MB*=*MF*, або

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \qquad (77)$$

Отримали рівняння параболи. Спростимо його, підносячи до квадрата:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

$$y^2 = 2px. \qquad (78)$$

Рівняння (78) називається канонічним рівнянням параболи. Оскільки це рівняння другого порядку, то парабола – лінія другого порядку.

Дослідимо рівняння (78), тобто параболу. Оскільки в рівнянні змінна *y* міститься в квадраті, то парабола симетрична відносно осі *Ox*. Розглянемо ту частину параболи, яка лежить у верхній півплощині, тобто для $y \geq 0$. Зважаючи на дану нерівність, представляємо рівняння параболи так:

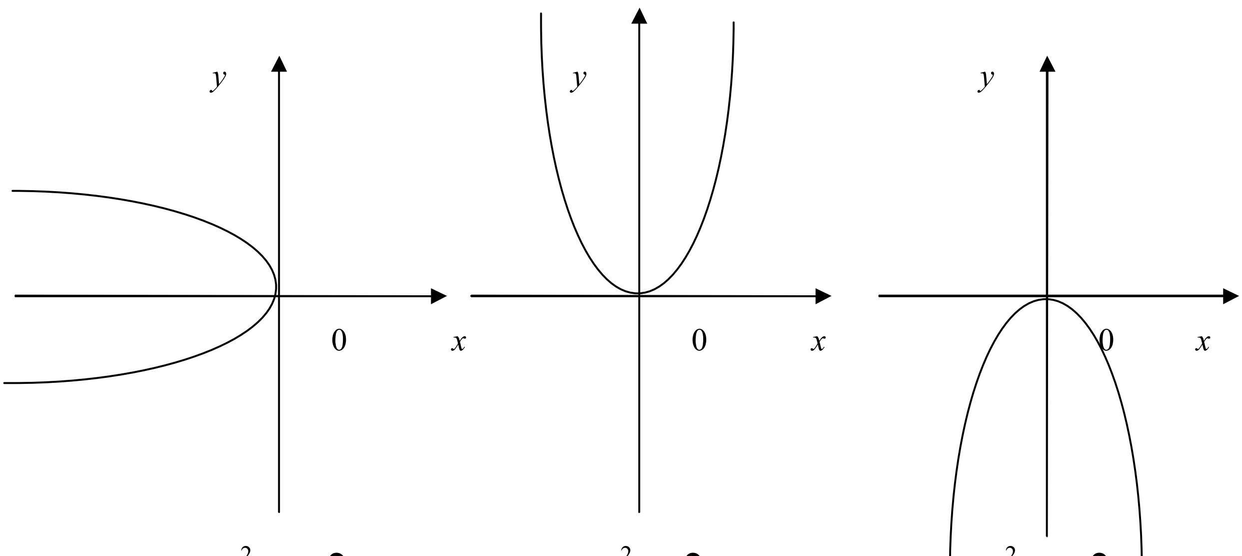
$$y = \sqrt{2px}. \qquad (79)$$

Із цього рівняння видно, що $x \geq 0$, тобто парабола розміщена справа від вісі *Oy*. Оскільки значення $x = 0, y = 0$ задовольняють рівнянню (79), то парабола проходить через початок координат. Із збільшенням *x* значення *y* також зростає. Отже, змінна точка параболи $M(x, y)$, виходячи з початку координат, із зростанням *x* рухається вправо і вверх. Отримати всю параболу можна дзеркально відносно осі *Ox*, відобразивши лінію над віссю *Ox* (рис. 39).

Вісь симетрії параболи називається її **віссю**; точка перетину осі з параболою – **вершиною** параболи; число, яке дорівнює відстані фокуса від директриси, - **параметром** параболи. Рівняння (78) задає параболу, віссю якої є вісь *Ox*; вершиною – точка $O(0;0)$ і параметром – число *p*.

Параметр *p* впливає на форму параболи. Якщо в рівнянні (78) покласти $x = \frac{p}{2}$, то відповідні значення ординати $y = \pm p$, тобто маємо на параболі дві симетричні відносно осі *Ox* точки $\left(\frac{p}{2}; p\right)$ і $\left(\frac{p}{2}; -p\right)$. Відстань між ними дорівнює $2p$ і вона збільшується при зростанні *p*. Отже, параметр *p* характеризує «ширину» параболи.

Рівняння $y^2 = -2px; x^2 = 2py; x^2 = -2py$, у яких параметр $p > 0$, визначають параболи (рис. 40).



$y^2 = -2px$ $\quad$ $x^2 = 2py$ $\quad$ $x^2 = -2py$

Рис. 40

Приклад 1. Дана парабола $x^2 = -16y$. Знайти координати її фокуса і написати рівняння директриси.

Розв'язання. Дана парабола симетрична відносно осі *Oy* і розміщена в нижній півплощині, $y < 0$.

Із заданого рівняння знаходимо $2p = 16 \to p = 8$. Відстань від початку координат до фокуса дорівнює $\frac{p}{2}$, тобто фокус має координати $\left(0;-\frac{p}{2}\right)$ або $(0;-4)$. Директрисою даної параболи є пряма $y = 4$.

Приклад 2. Директрисою параболи з вершиною в початку координат є пряма $3x + 7 = 0$. Записати рівняння параболи і визначити координати її фокуса.

Розв'язання.

1) Запишемо рівняння директриси, розв'язавши відносно змінної *x*: $x = -\frac{7}{3}$. Таке рівняння директриси визначає параболу, симетричну відносно осі *Ox*. Рівняння такої параболи має вигляд: $y^2 = 2px$, а її директриса задається рівнянням $x = -\frac{p}{2}$. Для нашої параболи $-\frac{p}{2} = -\frac{7}{3}$, або $p = \frac{14}{3}$. Рівняння параболи: $y^2 = 2 \cdot \frac{14}{3}x = \frac{28}{3}x$.

2) Координати фокуса параболи визначаються такі: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, або $F\left(\frac{7}{3};0\right)$

Приклад 3. У параболу $x^2 = y\sqrt{3}$ вписано рівносторонній трикутник так, що одна з вершин його лежить у вершині параболи. Знайти сторону трикутника.

Розв'язання.

1) Парабола $x^2 = \sqrt{3}y$ симетрична відносно осі *Oy*, її гілки направлені вгору, а вершина лежить в початку координат. Побудуємо схематично таку параболу і впишемо в неї трикутник *ABC* (рис. 41).
2)

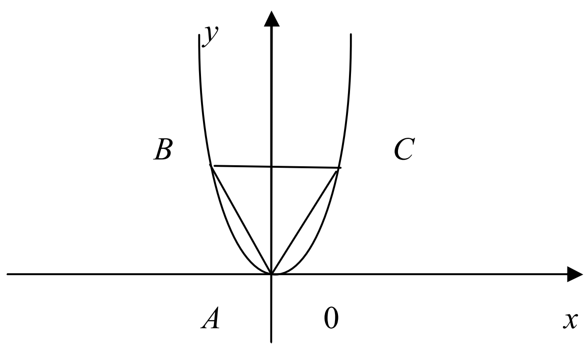


Рис. 41

2) Оскільки трикутник рівносторонній, то $AB = BC = AC$. Координати вершин такі: $A(0;0)$; $B(-x_0; y_0)$; $C(x_0; y_0)$.

Запишемо в координатній формі рівність $AB = BC$: $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2x_0$, утворимо систему рівнянь, додавши рівняння параболи $x_0^2 = \sqrt{3}y_0 \to y_0 = \frac{x_0^2}{\sqrt{3}}$.

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{x_0^4}{3}} = 2x_0.$$

Підносимо до квадрату:

$$x_0^2 + \frac{x_0^4}{3} = 4x_0^2;$$

$$\frac{x_0^4}{3} - 3x_0^2 = 0$$

$$x_0^2\left(\frac{x_0^2}{3} - 3\right) = 0$$

$$\frac{x_0^2}{3} = 3 \to x_0 = 3.$$

Оскільки $BC = 2x_0$, то $BC = 6$.

Приклад 4. Написати рівняння параболи, кожна точка якої рівновіддалена від точки $F(0;0)$ і прямої $x = -4$. Побудувати параболу.

Розв'язання.

1) Рівняння директриси $x = -4$ визначає параболу, симетричну осі *Ox*. Її рівняння має вигляд: $y^2 = 2px$ і її директриса задається рівнянням $x = -\frac{p}{2}$. У нашому випадку $-\frac{p}{2} = -4 \to p = 8$.

2) Вершина параболи має координати $\left(\frac{-4+0}{2}; 0\right)$. Щоб знайти рівняння параболи, запишемо рівність відстаней від довільної точки $A(x; y)$ до директриси і фокуса:

$$A_1A = AF; \quad \sqrt{\left(x - x_{A_1}\right)^2 + \left(y - y_{A_1}\right)^2} = \sqrt{\left(x - x_F\right)^2 + \left(y - y_F\right)^2}$$

або з урахуванням координат точки $A_1(-4; y)$ і $F(0;0)$

$(x+4)^2 = x^2 + y^2;$

$x^2 + 8x + 16 - x^2 - y^2 = 0;$

$y^2 = 8x + 16.$

3) Побудуємо параболу (рис. 42)

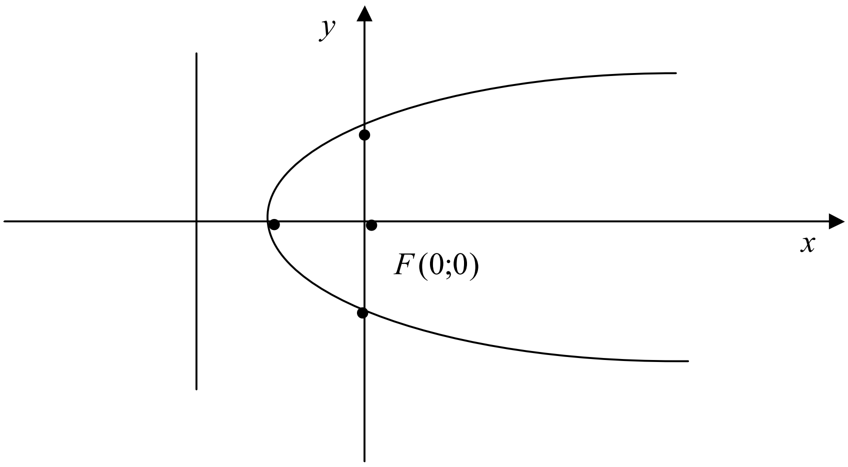


Рис. 42

6. Площина та пряма у просторі

Розглянемо в просторі в прямокутній системі координат такий геометричний об’єкт, як поверхня. Координати точок, які лежать на поверхні, не можуть бути довільними. Вони повинні задовольняти певним умовам. Умови, яким задовольняють координати точок поверхні, відображаються у рівнянні поверхні. Рівнянням поверхні називають рівняння, яке зв’язує змінні x, y, z і якому задовольняють координати будь-якої точки поверхні і не задовольняють координати точок, які на поверхні не лежать. У загальному випадку таке рівняння має вигляд $F(x, y, z) = 0$. Наприклад, якщо точка $M_0(x_0, y_0, z_0) = 0$ знаходиться на поверхні (рис. 43), то підставивши її координати у рівняння, отримаємо тотожність: $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Якщо точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на поверхні не лежить, то підставивши її координати у рівняння, отримаємо нерівність: $F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Якщо вираз $F(x, y, z)$ в рівнянні поверхні є многочленом від змінних x, y, z, то поверхня, яка задається цим рівнянням, називається алгебраїчною.

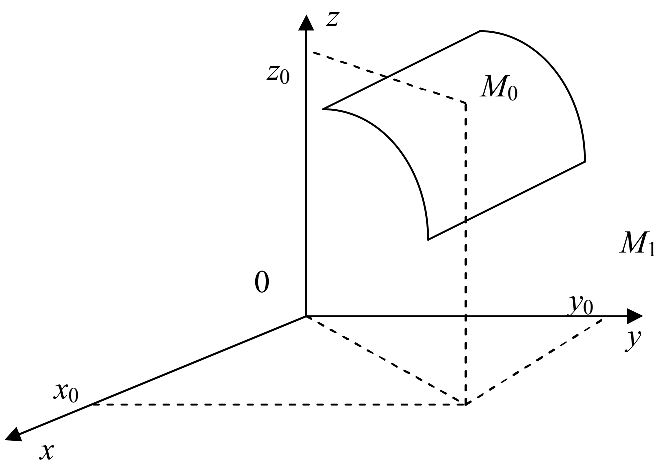


Рис. 43

Неалгебраїчні поверхні називаються трансцендентними. Порядком алгебраїчної поверхні називають степінь многочлена, яким задається дана поверхня. Далі розглядатимемо лише алгебраїчні поверхні першого порядку і деякі алгебраїчні поверхні другого порядку.

Рівняння площини

Рівняння площини із заданим вектором нормалі

Нехай в прямокутній системі координат *Oxyz* задано площину, на якій лежить точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 44).

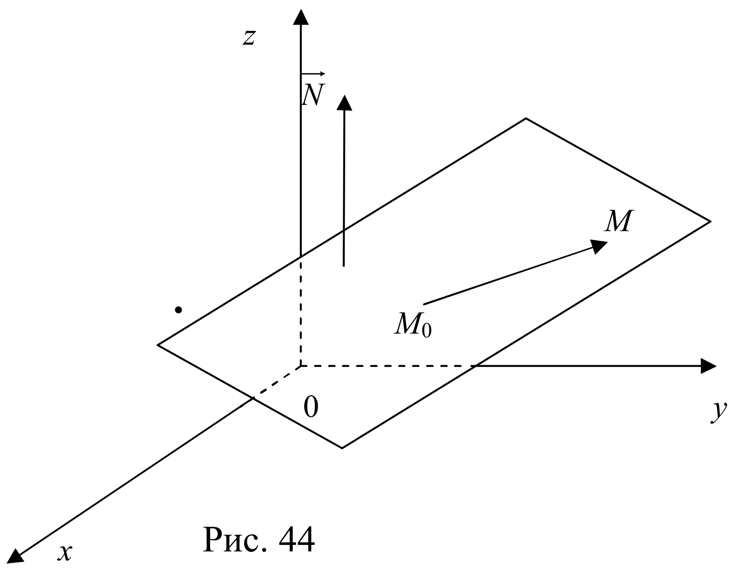


Рис. 44

Нехай також задано вектор $\vec{N}(A, B, C)$, перпендикулярний до площини. Даний вектор $\vec{N}$ називають вектором нормалі (нормальним вектором) площини. Виходячи з цих умов отримаємо рівняння площини. Для цього на площині, крім точки M_0, візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ зі змінними координатами та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$. Цей вектор лежить на площині і має координати $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{N}$ перпендикулярний до площини, він перпендикулярний до будь-якого вектора, розташованого на площині, а тому при будь-якому положенні точки *M* вектори $\overrightarrow{N}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні. Як відомо, скалярний добуток взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ Записавши скалярний добуток векторів $\overrightarrow{N}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ в координатному вигляді, отримаємо рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (80)$$

яке називають рівнянням площини із заданим вектором нормалі, що проходить через задану точку.

Розкриємо дужки в рівнянні (80):

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Позначивши $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, отримаємо рівняння площини у вигляді:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (81)$$

яке називається загальним рівнянням площини. Дане рівняння є рівнянням першого степеня відносно змінних x, y, z, тобто лінійне рівняння. Отже, будь-якій площині відповідає рівняння першого степеня відносно змінних x, y, z. Навпаки, можна стверджувати, що кожному лінійному рівнянню відносно x, y, z відповідає певна площина, причому коефіцієнти *A*, *B*, *C* при змінних в цьому рівнянні є координатами вектора нормалі $\vec{N}$ площини.

Приклад 1. Написати рівняння площини, яка має вектор нормалі $\overrightarrow{N}$ (1;2;3) і проходить через точку $M_0(1;1;1)$. Побудувати площину.

Розв'язання. Використаємо рівняння (80):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Тут координати вектора нормалі $\overrightarrow{N}$ дорівнюють: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$. Координати точки M_0 дорівнюють: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Підставивши відповідні значення у рівняння, отримаємо шукане рівняння площини: $1(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$.

Розкривши дужки, отримаємо загальне рівняння даної площини:

$$x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

Для побудови площини знайдемо точки її перетину з осями координат. Поклавши $y = z = 0$, знайдемо $x = 6$ (точка перетину з віссю *Ox*). Поклавши $x = z = 0$, знайдемо $y = 3$ точка перетину з віссю *Oy*). Поклавши $x = y = 0$, знайдемо $z = 2$ (точка перетину з віссю *Oz*). Поставивши ці точки на осях координат з'єднуємо їх і отримаємо шукану площину (рис. 45).

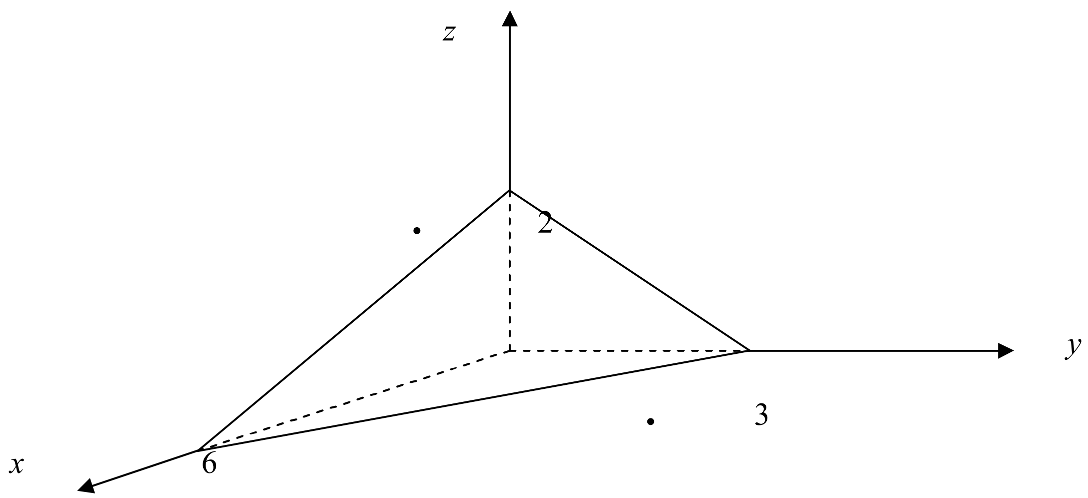


Рис. 45

Приклад 2. Написати рівняння площини, яка паралельна до площини $2x - y + 3z - 1 = 0$ і проходить через точку $M_0(2;3;-1)$.

Розв'язання. Оскільки площини паралельні між собою, вектор нормалі шуканої площини $\overrightarrow{N_2}$ колінеарний до вектора нормалі заданої площини $\overrightarrow{N_1}$ або рівний йому. Тому за вектор нормалі шуканої площини можна прийняти вектор $\overrightarrow{N_2} = \overrightarrow{N_1}$, який має координати A = 2, B = –1, C = 3 (коефіцієнти x, y, z у рівнянні). Підставивши ці значення, а також координати точки M_0($x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $z_0 = -1$) у рівняння (1) отримаємо рівняння шуканої площини:

$$2(x - 2) - 1(y - 3) + 3(z + 1) = 0.$$

Розкривши дужки, отримаємо загальне рівняння шуканої площини:

$$2x - y + 3z + 2 = 0.$$

Розглянемо далі окремі випадки загального рівняння площини (81).

1. Один з коефіцієнтів при змінних дорівнює 0, наприклад, *A*=0. Загальне рівняння площини (81) в цьому випадку має вигляд: $\vec{N}$ = (0,B,C). Це означає, що вектор нормалі площини перпендикулярний до осі *Ox*, а сама площина паралельна до осі *Ox*.

Якщо в рівнянні площини (81) *B*=0, тобто рівняння площини має вигляд $Ax + Cz + D = 0$, то це означає, що вектор нормалі площини $\vec{N}$ = (A,0,C) перпендикулярний до осі *Oy*, а площина паралельна до осі *Oy*.

Аналогічно, якщо в рівнянні (81) C=0, тобто рівняння має вигляд $Ax+Bz+D=0$, то ця площина паралельна до осі *Oz*, оскільки вектор нормалі $\vec{N}$ = (A,B,0) перпендикулярний до цієї осі.

2. Два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю. Наприклад, A=B=0, тоді рівняння площини має вигляд: $Cz+D=0$. Дана площина паралельна до координатної площини *Oxy*, оскільки вектор нормалі $\vec{N}$(0;0;C) перпендикулярний і до осі *Ox*, і до осі *Oy* одночасно, тобто перпендикулярний до координатної площини *Oxy*. Аналогічно, якщо загальне рівняння набирає вигляду: $Ax+D=0$, (B=C=0), або $By+D=0$, A=C=0, то маємо площини, паралельні до координатних площин відповідно *Oxy* і *Oxz*.

3. Вільний член *D* в загальному рівнянні площини (81) дорівнює нулю, тобто рівняння площини має вигляд: $Ax+By+Cz=0$.

Оскільки в даному випадку рівнянню площини задовольняють значення $x=y=z=0$, то це означає, що площина проходить через початок координат, тобто точку *O* (0; 0; 0).

4. Один з коефіцієнтів при змінних, а також вільний член у рівнянні (81) дорівнюють нулю. Наприклад, якщо A=D=0, то рівняння має вигляд $By+Cz=0$. Оскільки *D*=0, то це означає, що площина проходить через початок координат. У той же час вектор нормалі площини $\vec{N}$=(0;B;C) перпендикулярний до осі *Ox*, а тому дана площина проходить через вісь *Ox*. Аналогічно, якщо B=D=0 і рівняння площини має вигляд: $Ax+Cz=0$, то дана площина проходить через вісь *Oy*. Якщо C=D=0, тобто рівняння площини буде $Ax+By=0$, то площина проходить через вісь *Oz*.

Приклад 3. З’ясувати особливості розташування площин, заданих рівняннями: a) 3y–5=0; b)2x+3z–6=0; c)x+2y–z=0; d)3y+z=0. Побудувати ці площини.

Розв’язання.

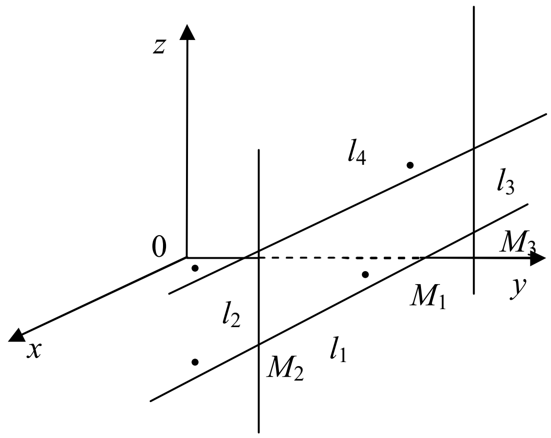


Рис. 46

а) Площина 3y–5=0 має вектор нормалі $\vec{N}(0;3;0)$. Даний вектор перпендикулярний до осей *Ox* і *Oz* одночасно, а тому площина паралельна до осей *Ox* і *Oz*, тобто паралельна координатній площині *Oxz*. Для побудови площини знайдемо точку перетину даної площини з віссю *Oy* (точку M_1). З рівняння площини знаходимо: *y*=5/3, а тому точка M_1 має координати: (0, 5/3, 0). Поставивши на осі дану точку, проводимо через неї пряму ℓ_1 паралельну до осі *Ox*. Пряма ℓ_1 є лінією перетину даної площини з координатною площиною *Oxy*. Після цього з двох яких-небудь точок M_2 і M_3, розташованих на прямій ℓ_1, проводимо ще дві прямі ℓ_2 і ℓ_3, паралельні до осі Oz. Нарешті, побудувавши пряму ℓ_4, яка паралельна до прямої ℓ_1 і перетинає прямі ℓ_2 і ℓ_3, закінчимо побудову даної площини (рис. 46).

б) Площина $2x+3z-6=0$ має вектор нормалі $\vec{N}(2;0;3)$. Даний вектор перпендикулярний до осі *Oy*, а сама площина паралельна до осі *Oy*. Для побудови площини знайдемо її точки перетину з осями *Ox* і *Oz* (точки M_1 і M_2). Поклавши z=0, знаходимо x=3, тобто точка M_1 має координати (3; 0; 0). Поклавши x=0, знаходимо $z = z_1$, тобто точка M_2 має координати (0; 0; 2). Поставивши точки M_1 і M_2 на осях *Ox* і *Oz* відповідно, проводимо через них пряму ℓ_1 (рис. 47). Через ці ж точки проводимо прямі ℓ_2 і ℓ_3 паралельні до осі *Oy*. Нарешті, провівши через прямі ℓ_2 і ℓ_3 пряму ℓ_4, паралельну до прямої ℓ_1 побудуємо дану площину.

в) У площині $x+2y-z=0$ вільний член $D=0$, а тому дана площина проходить через початок координат. Для побудови площини треба вказати

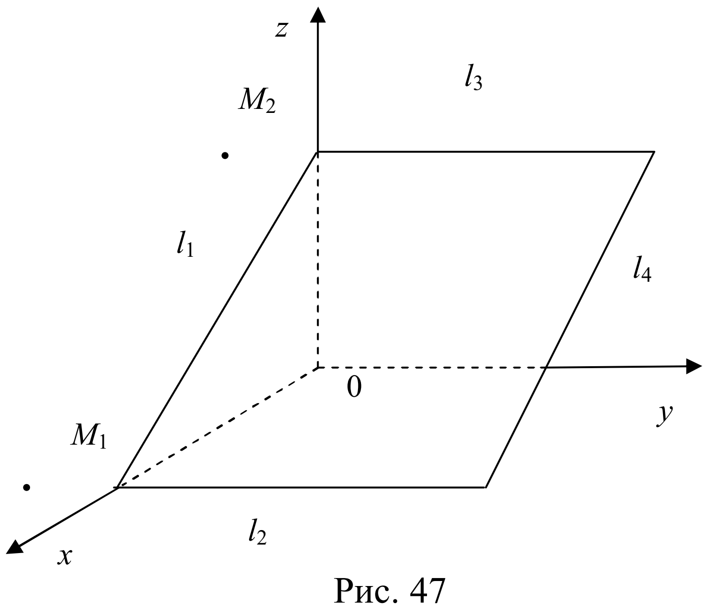


Рис. 47

які-небудь три точки, що лежать на площині. Одна з цих точок – точка

O(0;0;0). Знайдемо які-небудь дві точки, що лежать на площинах Oxz і Oyz. Поклавши y=0, отримаємо рівняння $x - z = 0$. Якщо, наприклад, x=1, то знайдемо, що z=1. Таким чином площина проходить через точку M_1(1; 0; 1), яка лежить на координатній площині Oxz. Поклавши x=0, отримаємо рівняння $2y - z = 0$. Якщо, наприклад, y=1, то знайдемо, що z=2. Отже, площина проходить через точку M_2(0; 1; 2), яка лежить на координатній площині Oyz. Поставивши ці точки (рис. 48), проводимо прямі OM_1 і OM_2, які є лініями перетину даної площини з координатними площинами Oxz і Oyz відповідно. З'єднавши далі точки M_1 і M_2, побудуємо трикутник OM_1M_2, який є частиною даної площини.

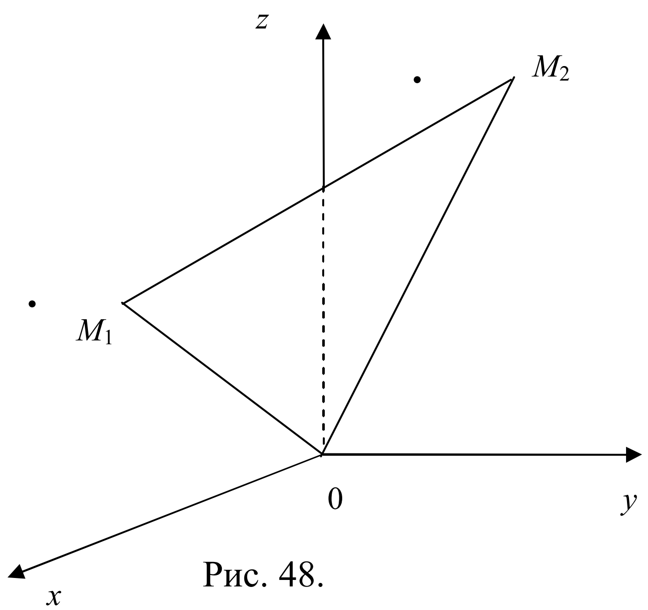


Рис. 48.

У площині 3y+z=0 вільний член D=0, а вектор нормалі $\vec{N}(0;3;1)$ перпендикулярний до осі Ox. Тому площина проходить через вісь Ox. Для побудови площини треба вказати яку-небудь одну точку, що лежить на даній площині, але не лежить на осі Ox. Поклавши, наприклад в рівнянні площини $y = -1$, отримаємо значення z=3. Оскільки координата x довільна, візьмемо її рівною нулю. Таким чином, обрано точку M(0,-1,3), яка лежить на координатній площині Oyz. Проводимо далі через точки M і O пряму ℓ_1 і далі через точку M пряму ℓ_2 паралельну до осі Ox. Нарешті, провівши пряму ℓ_3, яка паралельна прямій ℓ_1 і перетинає ℓ_2 і вісь Ox, будуємо площину (рис.49):

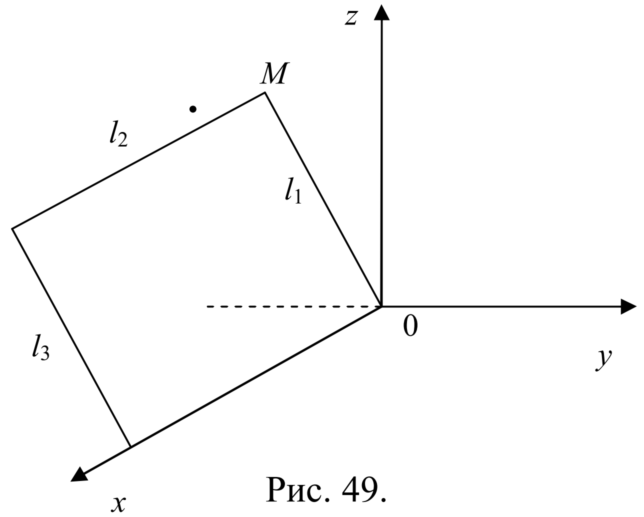


Рис. 49.

Рівняння площини, яка проходить через задану точку паралельно двом заданим векторам

Нехай в прямокутній системі координат *Oxyz* задано площину, на якій лежить точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Нехай також задано два не колінеарних вектори $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ та $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$, які знаходяться на цій площині або паралельні до неї (рис. 50). Отримаємо рівняння площини, виходячи з цих умов. Для цього на площині, крім точки M_0, візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ зі змінними координатами та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$. Цей вектор лежить на площині і має координати $(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розміщені в одній площині або на паралельних площинах, тобто вони компланарні. Як відомо, три компланарні вектори є лінійно залежними, а тому визначник, складений з координат цих векторів, дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (82)$$

У результаті отримали рівняння площини, яка проходить через задану точку паралельно двом заданим векторам. Розкривши визначник, отримаємо рівняння у вигляді:

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - (y-y_0)\begin{vmatrix} a_z & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} a_z & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$$

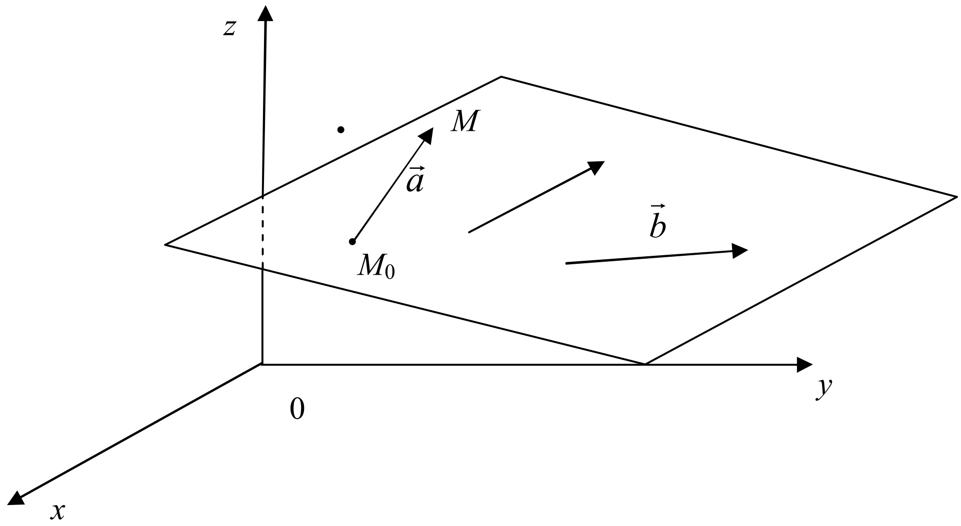


Рис. 50.

Приклад 1. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;2)$ і $M_2(2;3;4)$ паралельно осі *Ox*.

Розв'язання. На даній площині лежить вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, координати якого дорівнюють (1; 1; 2). Крім того, оскільки площина паралельна осі *Ox*, до неї паралельний будь-який вектор, який або лежить на цій осі, або паралельний до неї. Одним з цих векторів є одиничний вектор, спрямований вздовж осі *Ox*, тобто вектор $\vec{i}$ (1; 0; 0). Підставивши в рівняння (II.5.3) координати векторів $\vec{a} = \vec{i}$ та $\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$, а також координати точки M_1, отримаємо рівняння даної площини:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(y-2) + z - 2 = 2,$$

або $2y - z - 2 = 0$.

Зауваження. Замість координат точки M_1 в рівняння (82) можна підставити координати точки M_2. Результат при цьому не зміниться.

Приклад 2. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;4;5)$ та через вісь *Oy*.

Розв'язання. Оскільки площина проходить через вісь *Oy*, на ній розташована точка O(0; 0; 0). Тому на площині лежить вектор OM(2; 4; 5). На цій площині розміщується і одиничний вектор, спрямований вздовж осі *Oy*, тобто вектор $\vec{j}$ (0; 1; 0). Підставивши в рівняння (82) координати векторів $\vec{a} = \vec{j}$ та $\vec{b} = \overrightarrow{OM_0}$, а також координати точки *O*, отримаємо рівняння даної площини:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5x - 2z = 0.$$

Зауваження: замість координат точки O в рівняння (82) можна підставити координати точки M_0 . Результат при цьому не зміниться.

Приклад 3. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1; 2; 1)$, $M_2(2; 1; -1)$, $M_3(0; 2; 2)$.

Розв'язання. На даній площині лежать вектори: $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (3;–1;–2) і $\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$ (1; 0; 1). Підставивши в рівняння (82) координати векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а також координати однієї з даних точок, наприклад, M_1, отримаємо рівняння:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1) - 5(y-2) + (z-1) = -x - 5y + z + 8 = 0,$$

або $x + 5y - z - 8 = 0$.

Приклад 4. Написати рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $2x - y + z - 1 = 0$ і та проходить через точки $M_1(2; 1; -1)$ та $M_2(3; 2; 1)$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина перпендикулярна до площини $2x - y + z - 1 = 0$, вона паралельна до вектора нормалі цієї площини $\vec{N}$(2; –1; 1). Крім того на шуканій площині лежить вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ (1; 1; 2). Підставивши в рівняння (82) координати векторів $\vec{a} = \vec{N}$ та $\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$, а також координати точки M_1, отримаємо рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(x-1) - 3(y-1) + 3(z+1) = -3x - 3y + 3z + 12 = 0,$$

або $x + y - z - 4 = 0$.

Основні задачі на площину

Кут між двома площинами

Нехай задано дві площини, рівняння яких: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Знайдемо кут між площинами. Як відомо, двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом α (рис. 51). Але цей кут дорівнює куту між векторами нормалі даних площин:

$\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1), \overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$

Використовуючи формулу косинуса кута між двома векторами, знайдемо cosα:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{N_1 N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (83)$$

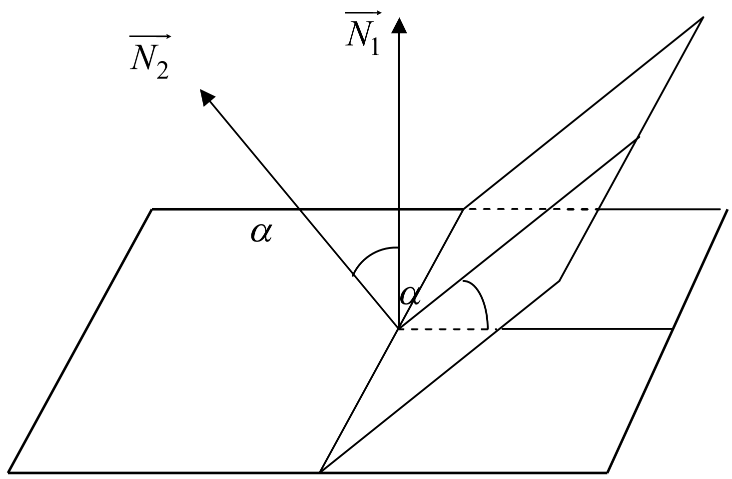


Рис. 51.

Приклад. Знайти косинус кута між площинами, рівняння яких: $2x - 3y + z - 1 = 0$, $x + 2y - 3z + 3 = 0$.

Розв'язання. Запишемо координати векторів нормалі даних площин: $\overrightarrow{\mathrm{N}_1}$ = (2;–3;1), $\overrightarrow{\mathrm{N}_2}$ = (1;2;–3). Підставивши координати векторів у формулу (II.5.4), знайдемо косинус кута між площинами:

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot(-3)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+4+9}} = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2}.$$

Точка перетину трьох площин

Нехай задано три площини, рівняння яких: $\mathrm{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0}$, $\mathrm{A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0}$, $\mathrm{A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0}$. Знайдемо точку перетину цих площин. Припустимо, що серед цих площин немає паралельних між собою, тобто така точка існує. Це означає, що координати векторів площин не пропорційні. Точка перетину цих площин належить всім трьом площинам, тобто її координати задовольняють рівнянню кожної з них. Тому координати точки перетину трьох площин знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Приклад. Знайти точку перетину площин:
$2x + y - z - 1 = 0$; $x - 2y + 3z - 5 = 0$; $3x + y + 2z - 8 = 0$.

Розв'язання. Координати точки перетину цих площин знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1; \\ x - 2y + 3z = 5;. \\ 3x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, наприклад, за формулами Крамера (розв'язати самостійно) отримаємо, що площини перетинаються в точці $M_0(1;1;2)$.

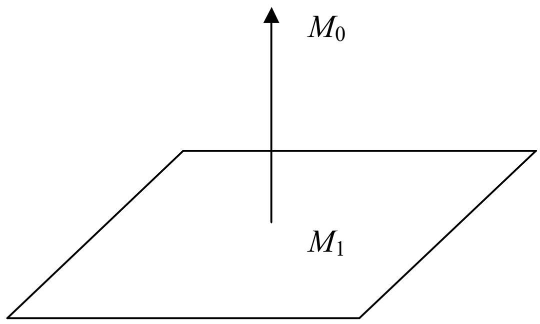


Рис. 52.

Відстань від точки до площини

Нехай дана площина, рівняння якої $Ax + By + Cz + D = 0$ і дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що не лежить на площині (рис. 52). Знайдемо відстань *d* від точки M_0 до даної площини. З точки M_0 опустимо перпендикуляр на дану площину і поставимо на ній точку M_1 – проекцію точки M_0 на площині. Нехай координати точки M_1 дорівнюють (x_1, y_1, z_1) (ці координати невідомі). Побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$. Координати цього вектора дорівнюють: $x - x_0, y - y_0, z - z_1$. Абсолютна величина даного вектора $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ дорівнює відстані *d*. Для визначення $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$ обчислимо скалярний добуток векторів нормалі даної площини $\vec{N}(A,B,C)$ і вектора $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$:

$$\vec{N} \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cos\alpha = \pm\left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|,$$

оскільки вектори $\vec{N}$ і $\overrightarrow{M_1M_0}$ колінеарні і α=0 або α=180^0. Звідси значення $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$=d дорівнює:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = d = \frac{\left|\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Але точка M_1 лежить на даній площині, тому її координати задовольняють рівнянню площини: $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, а тому маємо рівність: $-Ax_1-By_1-Cz_1=D$. Ураховуючи останнє співвідношення, остаточно отримаємо формулу для визначення відстані від точки до площини:

$$d = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (84)$$

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(3;1;-1)$ до площини $2x-y-2z+5=0$.

Розв'язання. Підставимо у формулу (84) координати вектора нормалі площини $\vec{N}$=(2;-1;-2) $\vec{N}=(2;-1;-2)$ і координати точки M_0 і отримаємо:

$$d = \frac{\left|2\cdot3-1\cdot1-2\cdot(-1)+5\right|}{\sqrt{4+1+4}} = 4.$$

Рівняння прямої в просторі
Рівняння прямої із заданим напрямним вектором

Нехай у просторі в прямокутній системі координат *Oxyz* задано пряму,

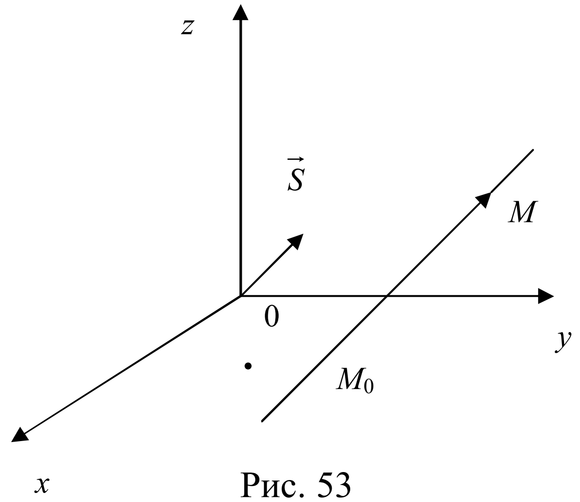


Рис. 53

на якій лежить точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 53). Нехай задано також вектор $\vec{S} = (m, n, p)$, паралельний до прямої. Цей вектор називають напрямним вектором прямої. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x; y; z)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. За умови вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{S}$ колінеарні, а тому вони пов'язані рівністю $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{S}$. Для координат цих векторів умова колінеарності набирає вигляду: $x - x_0 = \lambda m$; $y - y_0 = \lambda n$; $z - z_0 = \lambda p$.

Із цих рівностей отримаємо параметричне рівняння прямої:

$$x = x_0 + \lambda m;\ y = y_0 + \lambda n;\ z = z_0 + \lambda p, \tag{85}$$

а також канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{86}$$

Аналогічні рівняння були отримані для прямої на площині.

У рівняннях (85) і (86) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю. Наприклад, якщо $m = 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{S}$ перпендикулярний до осі *Ox*. Канонічне рівняння прямої в цьому випадку має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Воно визначає пряму, перпендикулярну до осі *Ox*. Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі *Oy* або *Oz*. Нехай $m = n = 0$, $p \neq 0$. Тоді напрямний вектор $\vec{S}$ перпендикулярний до осей *Ox* і *Oy*, тобто паралельний до осі *Oz*. Канонічне рівняння прямої в цьому випадку набуває вигляду:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Воно визначає пряму, паралельну до осі *Oz*. Аналогічно рівняння, в яких $m = p = 0$, $n \neq 0$, або $n = p = 0$, $m \neq 0$, визначають прямі, відповідно паралельні осям *Oy* і *Ox*.

Розглянемо окремий випадок канонічного рівняння, коли на прямій лежать дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. За напрямний вектор прямої можна прийняти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Підставивши в канонічне рівняння (86) координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, а також координати точки M_1, отримаємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (87)$$

Приклад 1. Написати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;2;3)$ паралельно до вектора $\vec{S}=(2;-1;4)$.

Розв'язання. Підставимо в канонічне рівняння (86) координати точки M_0: $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=3$, координати напрямного вектора $\vec{S}$: $m=2$, $n=-1$, $p=4$ і отримаємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

Приклад 2. Написати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;1;-3)$ та $M_2(4;1;1)$.

Розв'язання. Підставимо в рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, координати точок M_1 та M_2 і отримаємо:

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{1-1}=\frac{z+3}{1+3}$$

або

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{4}.$$

Оскільки координата n напрямного вектора $\vec{S}$ дорівнює нулю, дана пряма перпендикулярна до осі Oy.

Загальне рівняння прямої в просторі

Нехай в просторі дано дві непаралельні площини, рівняння яких: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Ці площини перетинаються на прямій, усі точки якої лежать як на одній, так і на другій площині. А тому координати будь-якої точки прямої задовольняють рівнянню і першої, і другої площини. Таким чином, координати будь-якої точки прямої, на якій перетинаються дані площини, задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (88)$$

Систему рівнянь (88) називають загальним рівнянням прямої.

Для того щоб перейти від загального (88) до канонічного рівняння прямої (86), необхідно вказати яку-небудь точку, яка лежить на цій прямій, і знайти координати напрямного вектора прямої. Для того щоб знайти координати точки, яка лежить на прямій, треба розв'язати систему рівнянь (88). Дана система має безліч розв'язків, а тому одну з координат *x*, *y* або *z* можна покласти рівною деякому числу, наприклад, $z = 0$. Після цього розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1; \\ A_2x + B_2y = -D_2. \end{cases}$$

і знайти дві інші координати даної точки. Напрямний вектор прямої можна знайти двома способами. За першим способом можна знайти координати другої точки, яка лежить на прямій, і далі написати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. За другим способом напрямний вектор можна визначити як векторний добуток векторів нормалі даних площин, тобто $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$.

Приклад. Пряма задана загальним рівнянням:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0; \\ x - 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Записати канонічне рівняння прямої.

Розв'язання. Знайдемо координати якої-небудь точки M_1, яка лежить на прямій. Для цього одну зі змінних покладаємо рівною деякому числу, наприклад, $z = 0$. У результаті, підставивши це значення *z* в рівняння прямої, отримаємо систему рівнянь, з якої визначимо дві інші координати даної точки:

$$\begin{cases} 2x + y = 1; \\ x - 2y = -2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо x=0, y=1. Отже, точка M_1 має координати (0;1;0). Напрямний вектор прямої знайдемо двома способами.

Перший спосіб. Знайдемо координати ще однієї точки M_2, поклавши, наприклад, $z = 1$. Підставимо це значення *z* в рівняння прямої і отримаємо систему рівнянь, з якої визначимо дві інші координати даної точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0; \\ x - 2y + 1 + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x + y = 4; \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо x=1, y=2. Таким чином, точка M_2 має координати (1;2;1). Напрямний вектор $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$ має координати: $\vec{S}$= (1;1;1).

Другий спосіб. Напрямний вектор $\vec{S}$ знайдемо як векторний добуток векторів нормалі площин, рівняння яких є системою рівнянь: $\vec{S}_2 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, де $\overrightarrow{N_1}$ =

(2;1;-3), $\overrightarrow{N_2}$ = (1;-2;1). Використовуючи формулу векторного добутку векторів, коли відомі координати векторів, знайдемо:

$$\vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{S}_i - \vec{S}_j - \vec{S}_k .$$

Таким чином, $\vec{S}_2$= (–5;–5;–5). Замість вектора $\vec{S}_2$ можна взяти вектор, колінеарний йому з координатами: $\vec{S}_3$= (1;1;1), який дорівнює вектору $\overrightarrow{S_1}$, який обчислений першим способом. У результаті рівняння прямої набирає вигляду:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1}.$$

Кут між двома прямими у просторі

Нехай дано дві прямі, які задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \qquad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

де напрямні вектори прямих $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ дорівнюють $\vec{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Кут α між двома прямими дорівнює куту між векторами $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$. Косинус цього кута визначають за формулою:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{89}$$

Приклад. Знайти косинус кута між прямими, які задані рівняннями:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{1}; \quad \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$

Розв'язання. Напрямні вектори даних прямих $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ дорівнюють: $\vec{S}_1$= (2;-3;1), $\vec{S}_2$= (–1;–2;3). Підставивши координати векторів у формулу (89), отримаємо:

$$\cos\alpha = \frac{-2+6+3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Взаємне розміщення прямих і площин

Кут між прямою і площиною

Нехай задано пряму і площину, рівняння яких $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} =$

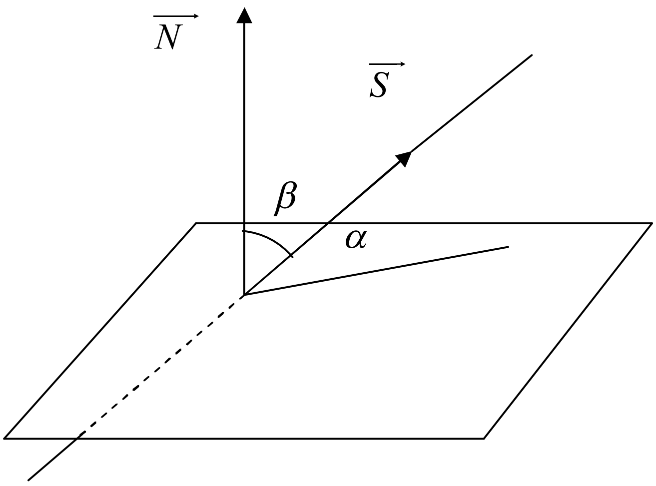


Рис. 54.

$= \frac{z-z_0}{p}$ і $Ax + By + Cz + D = 0$ відповідно. Знайдемо кут α між прямою і площиною (рис. 54).

Цей кут пов'язаний з кутом ß між напрямним вектором прямої $\vec{S}$ і вектором нормалі площини $\vec{N}$ співвідношенням $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Використовуючи формулу косинуса кута між двома векторами, знайдемо:

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{|\vec{S}|\cdot|\vec{N}|} = \frac{mA + nB + pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (90)$$

Приклад. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ і площиною $3x + 4y + 5z - 6 = 0$.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої дорівнює: $\vec{S}$ = (2;–2;1), вектор нормалі площини $\vec{N}$= (3;4;5). Підставивши координати векторів в формулу (90), знайдемо синус кута між прямою і площиною:

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot3 - 2\cdot4 + 1\cdot5}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{9+16+25}} = \frac{3}{3\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Точка перетину прямої і площини

Нехай задано пряму і площину рівняння яких відповідно:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad \text{і} \qquad Ax+By+Cz+D=0.$$

Знайдемо точку перетину прямої і площини. Для цього рівняння прямої запишемо в параметричній формі (5):

$$x=x_0+\lambda m; \qquad y=y_0+\lambda n; \qquad z=z_0+\lambda p. \qquad (91)$$

де λ – змінна величина. Підставимо величини x, y, z (91) в рівняння площини:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+\lambda(Am+Bn+Cp)=0.$$

Звідси знаходимо величину λ:

$$\lambda=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Підставивши λ у формулу (91), знайдемо координати точки перетину прямої і площини.

Приклад. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-3}$ і площини $x-2y+z+3=0$.

Розв'язання. Рівняння прямої запишемо в параметричному вигляді: $x=2+3\lambda$; $y=-1+2\lambda$; $z=1-3\lambda$. Підставимо величини x, y, z у рівняння площини: $2+3\lambda+2-4\lambda+1-3\lambda+3=0$ або $-4\lambda+8=0$. Звідси знаходимо λ=2. Підставивши значення λ у вирази для x, y, z

$$x=2+3\cdot 2=8; \qquad y=-1+2\cdot 2=3; \qquad z=1-3\cdot 2=-5$$

Таким чином точкою перетину прямої і площини є точка M_0(8; 3;–5).

7. Поверхні другого порядку

Поняття поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називають множину точок, координати яких в прямокутній системі координат задовольняють рівнянню виду:

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0, \qquad (92)$$

і де хоча б один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f не дорівнює нулю.

Рівняння (92) називають загальним рівнянням поверхні другого порядку.

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, сфера, циліндричні та конічні поверхні, еліпсоїд, гіперболоїди та параболоїди. Для кожної з цих поверхонь існує система координат, в якій рівняння (92) має найпростіший (або канонічний) вигляд. Розглянемо ці поверхні та їх канонічні рівняння.

Сфера

Сферою називають поверхню, усі точки якої рівновіддалені від заданої точки, що є центром сфери. Відрізок, що з'єднує центр сфери з її довільною точкою називається радіусом сфери.

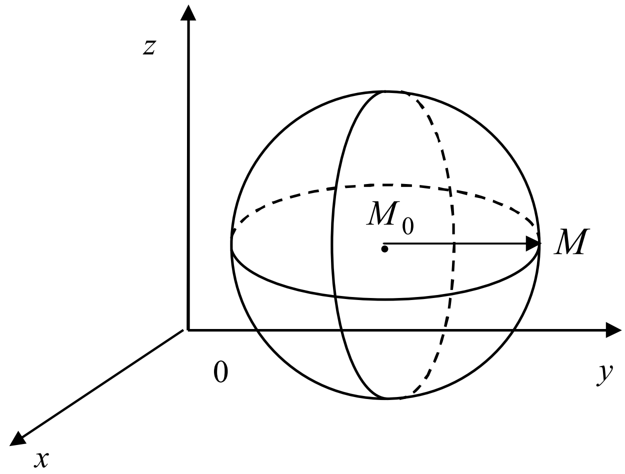


Рис. 55

Отримаємо рівняння сфери. Нехай сфера має радіус R, а її центр лежить в точці $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0)$ (рис. 55). На сфері візьмемо довільну точку $\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} = (\mathrm{x}-\mathrm{x}_0; \mathrm{y}-\mathrm{y}_0; \mathrm{z}-\mathrm{z}_0)$. Звідси з означення сфери для довжини вектора $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$ маємо рівність: $\left|\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\right| = \mathrm{R}$. Підставивши координати вектора, отримаємо рівняння сфери:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R.$$

Для зручності обидві частини рівняння підносять до квадрата і рівняння сфери набирає вигляду:

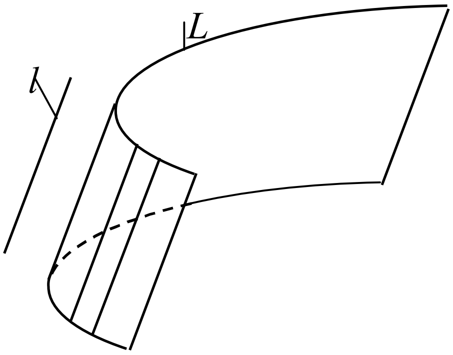
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2. \tag{93}$$

Якщо центр сфери лежить на початку координат, тобто $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, то рівняння сфери має вигляд

$$x^2+y^2+z^2 = R^2. \tag{94}$$

Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену з усіх прямих, які перетинають дану лінію L і паралельні прямій ℓ. При цьому лінію L називають напрямною циліндричної поверхні, а кожну з прямих, що складають цю поверхню і паралельних прямій ℓ – твірною (рис.56).



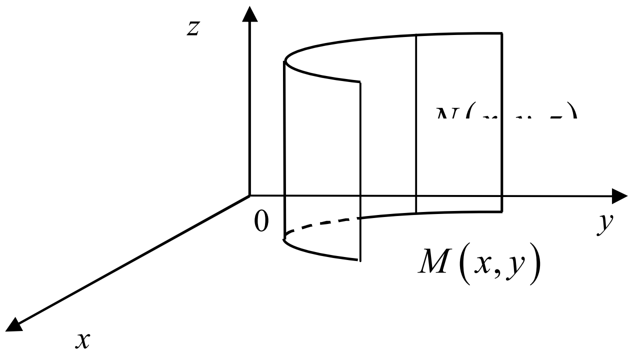


Рис. 56 Рис.57

Далі розглянемо випадок, коли твірні циліндричні поверхні паралельні осі *Oz*, а напрямна лежить в координатній площині *Oxy* (рис.57). Нехай задано рівняння $F(x; y) = 0$, яке в площині *Oxy* визначає деяку лінію L– множину точок M(x; y), координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх точок $N(x; y; z)$ простору, у яких дві перші координати *x* і *y* збігаються з координатами будь-якої точки M(x;y) лінії L, а третя координата z – довільна. Отже, що точка $N(x; y; z)$ проектується на площину *Oxy* в точки M(x;y) лінії L (рис. 57), тобто лежать на прямих, які паралельні осі *Oz* і перетинають лінію L. Множини таких прямих і є циліндричною поверхнею (рис. 57). Таким чином, рівняння $F(x; y) = 0$. визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі *Oz*, а напрямна *L* в площині *Oxy* має те ж саме рівняння $F(x; y) = 0$. У просторі *Oxyz* напрямна визначається системою двох рівнянь:

$$\begin{cases} F(x; y) = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

Аналогічно, рівняння $F(x; y) = 0$ і $F(x; y) = 0$, які не містять змінних *y* і *x*, визначають в просторі *Oxyz* циліндричні поверхні з твірними, паралельними відповідно осям *Oy* і *Ox*.

Розглянемо приклади циліндричних поверхонь.

Приклад 1. Поверхня, яка визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (95)$$

є циліндричною і називається еліптичним циліндром. Її твірні паралельні осі *Oz*, а напрямною є еліпс з півосями *a* і b, який лежить в площині *Oxy*. Зокрема, якщо $a = b$, то напрямною є коло, а поверхня є прямим круговим циліндром. Його рівняння

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Приклад 2. Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{96}$$

називається гіперболічним циліндром. Твірні цієї поверхні паралельні осі *Oz*, а напрямною є гіпербола, яка лежить в площині *Oxy* і має дійсну піввісь *a* і уявну піввісь b.

Приклад 3. Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням

$$y^2 = 2px, \tag{97}$$

називається параболічним циліндром. Її напрямною є парабола, яка лежить в площині *Oxy*, а твірні паралельні осі *Oz*.

Конічні поверхні

Поверхня, яка складається з усіх прямих, що перетинають дану лінію L і проходять через дану точку P, називається конічною поверхнею (рис. 58).

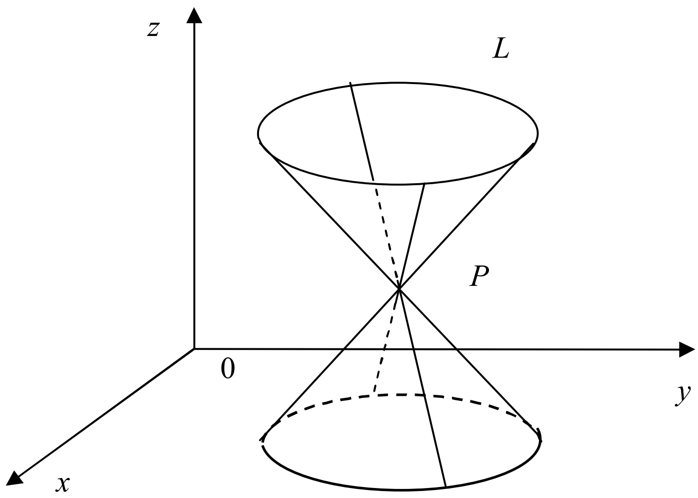


Рис. 58.

При цьому лінія L називається напрямною конічної поверхні, а кожна з прямих, що складають конічну поверхню, – твірною.

Приклад. Отримаємо рівняння конічної поверхні з вершиною на початку координат, для якої напрямною є еліпс:

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \\ Z = c \end{cases} \tag{98}$$

з півосями a і b, який лежить в площині $z=c$ (змінні координати еліпса позначили великими буквами на відміну від змінних координат x, y, z конічної поверхні).

Розглянемо на конічній поверхні довільну точку $M(x;y;z)$ і проведемо через неї твірну ОМ, яка перетинається з напрямною в точці $N(X;Y;c)$ (рис. 59.).

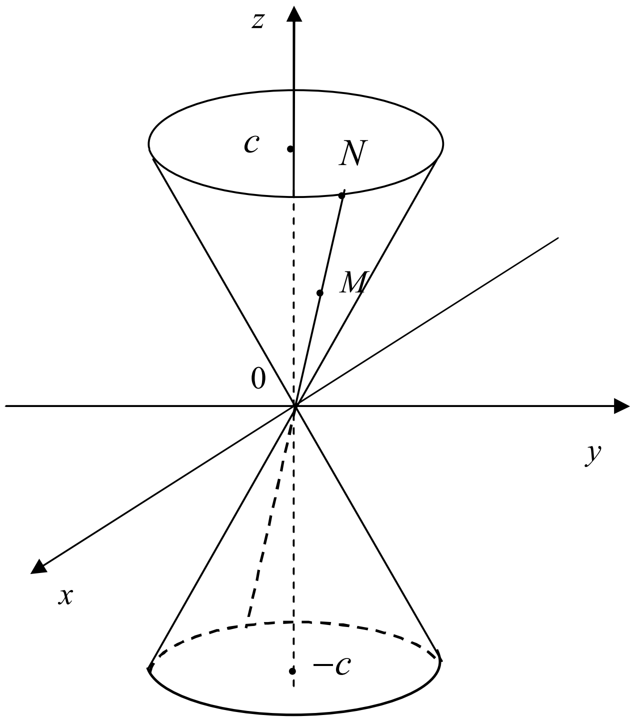


Рис. 59.

Складемо рівняння прямої ОМ, яка проходить через точки О(0; 0; 0) і $N(X;Y;c)$:

$$\frac{x-0}{X-0}=\frac{y-0}{Y-0}=\frac{z-0}{c-0} \qquad \text{або} \qquad \frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{c}.$$

Звідси отримаємо $X=cx/z$; $Y=cy/z$. Підставивши ці вирази в рівняння еліпса (14), отримаємо:

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1 \qquad \text{або} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

В результаті отримали рівняння конуса другого порядку. Зокрема, якщо $a=b$, то напрямною є коло з рівнянням:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2; \\ z=c. \end{cases}$$

а поверхнею є прямий круговий конус, рівняння якого

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{99}$$

Еліпсоїд

Еліпсоїдом називають поверхню, яка визначається канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{100}$$

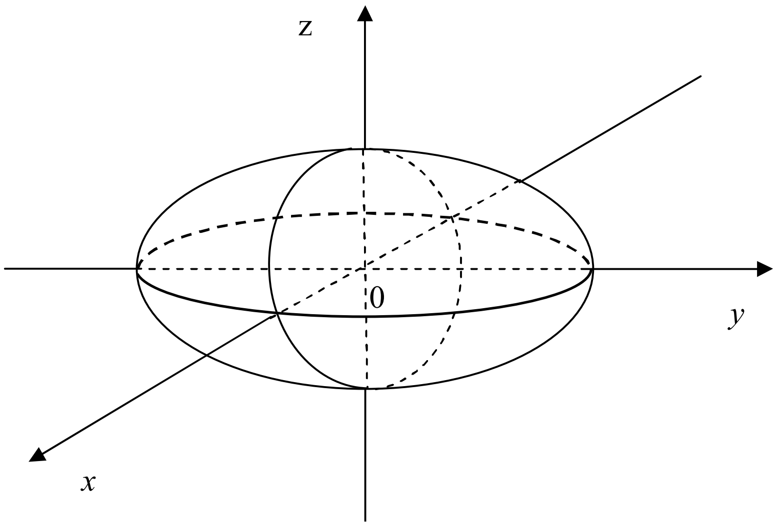


Рис. 60

Числа a, b і c називають півосями еліпсоїда. Вигляд еліпсоїда, представлений на рис. 60. Перетинаючи еліпсоїд площинами $z=h \quad (|h|\prec c)$, в перерізі отримаємо еліпси, рівняння яких мають вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \qquad \text{або} \qquad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,$$

$$\text{де } a_1^2=a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right), \qquad b_1^2=b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)\text{ю} \tag{101}$$

Із формули (101) випливає, що зі збільшенням величини $|h|$ півосі еліпса a_1 і b_1 зменшуються. При $|h|=c$ переріз переороджується в точку. При $|h|>c$ еліпсоїд і площина $z=h$ не перетинаються. Якщо еліпсоїд перетинати площинами $x=h$ $|h|<a$ і $y=h$ $|h|<b$, також в перерізі отримаємо еліпси, рівняння яких відповідно:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \qquad \text{і} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

Якщо в еліпсоїді дві які-небудь півосі збігаються, наприклад $a = b$, отримаємо еліпсоїд обертання:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

тобто еліпсоїд, отриманий в результаті обертання еліпса $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ навколо осі *Oz*.

Якщо всі три осі еліпсоїда рівні між собою, $c = b = a$, отримаємо рівняння сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Гіперболоїди

Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню, яка визначається канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (102)$$

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, яка необмежено розширюється вздовж осі *Oz* (рис. 61). Перетинаючи однопорожнинний гіперболоїд площинами, паралельними площині *Oxy*, дістанемо в перерізі еліпси, рівняння яких мають вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \text{ або } \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

де $a_1^2 = a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)$, $b_1^2 = b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)$.

Якщо дану поверхню перетинати площинами $x = h$, або $y = h$, в перерізі дістанемо гіперболи, рівняння яких відповідно:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad \text{та} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

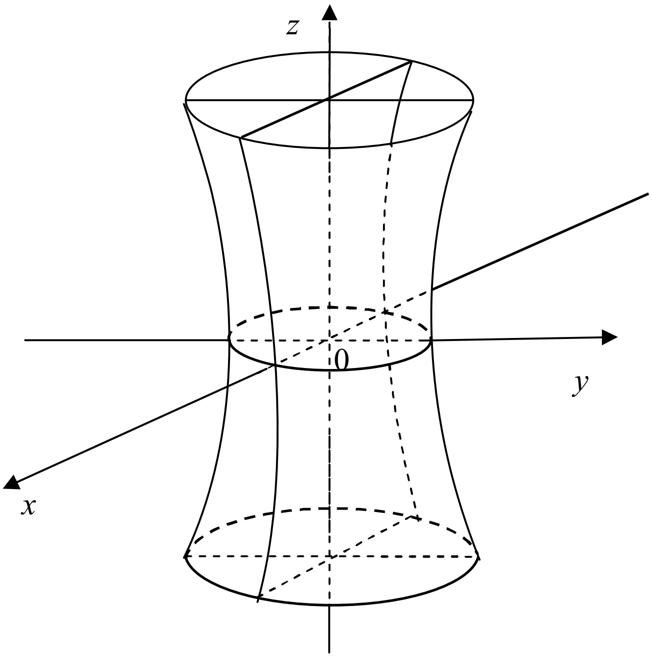


Рис. 61

Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню, яка визначається канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{103}$$

Двопорожнинний гіперболоїд має форму двох окремих порожнин, кожна з яких перетинає вісь *Oz* і має форму нескінченної чаші (рис. 62). Перетинаючи двопорожнинний гіперболоїд площиною $z = h$ (при $|h| > c$), в перерізі отримаємо еліпс, рівняння якого

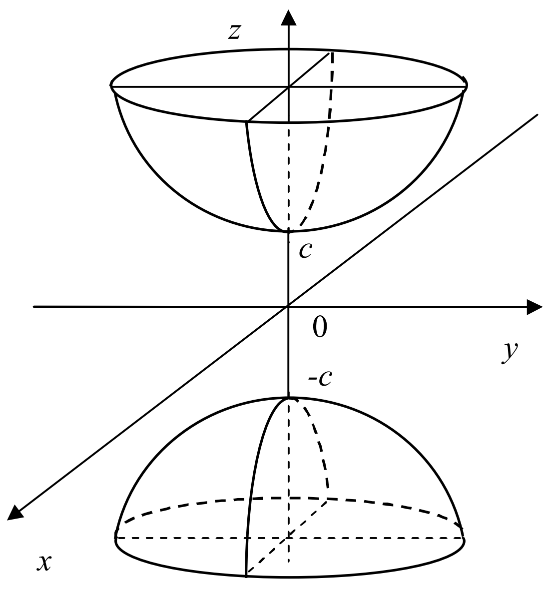


Рис. 62.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \qquad \text{або} \qquad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,$$

де $a_1^2=a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)$, $b_1^2=b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)$. При $|h|<c$ дана поверхня з площиною $z=h$ не перетинаються. Перетинаючи двопорожнинний гіперболоїд площинами $x=h$ і $y=h$ отримаємо в перерізі гіперболи, рівняння яких відповідно:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{a^2} \qquad \text{та} \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{b^2}.$$

Параболоїди

Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називають поверхню, яка визначається канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z. \tag{104}$$

Еліптичний параболоїд має форму нескінченної чаші (рис. 63). Перетинаючи еліптичний параболоїд координатними площинами *Oxz* і *Oyz*, отримаємо параболи, рівняння яких $x_2=a^2z$, $y_2=b^2z$ відповідно. Перетинаючи

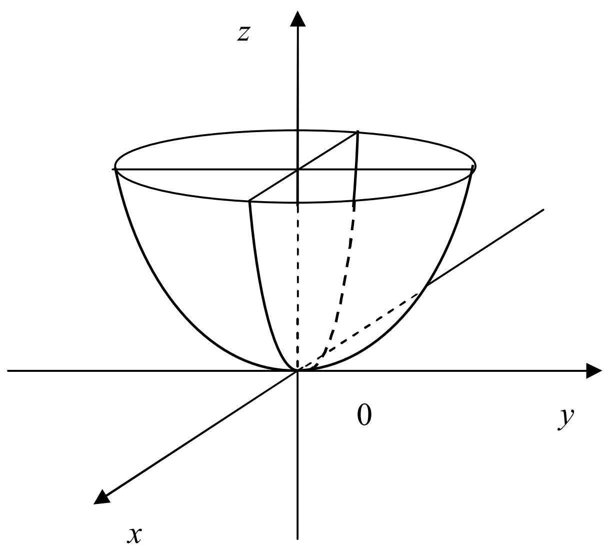


Рис. 63

поверхню площинами $z=h\ (h>0)$ в перерізі отримаємо еліпси, рівняння яких:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h.$$

Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називають поверхню, яка визначається канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \quad (105)$$

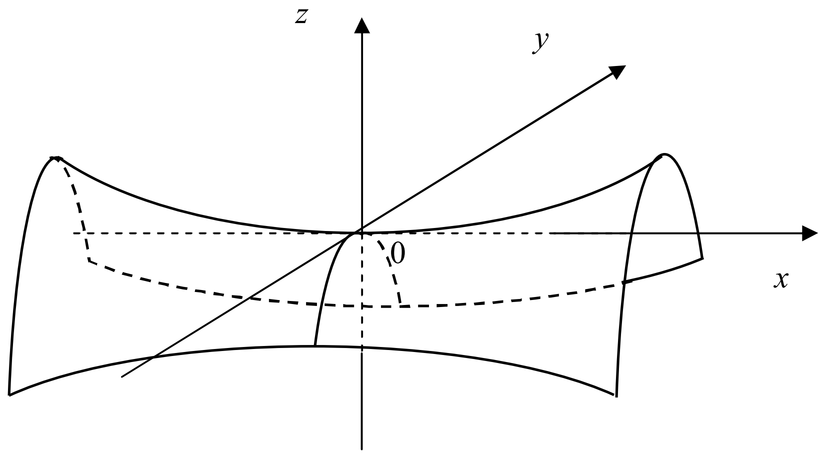


Рис. 64

Ця поверхня має форму сідла (рис. 64), перетинаючи її площиною *Oxz*, одержимо параболу:

$$x_2 = a^2 z.$$

При перетині поверхні площинами $\mathrm{x} = \mathrm{h}$, отримаємо параболу:

$$y_2 = b^2\left(\frac{h^2}{a^2} - z\right).$$

Якщо гіперболічний параболоїд перетнути площинами $\mathrm{z} = \mathrm{h}\ (\mathrm{h} \neq 0)$, одержимо гіперболу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h.$$

8. Поверхні в архітектурі будівель, конструкцій та виробів

Найбільшою популярністю у архітекторів та інженерів користуються споруди і вироби у формі поверхонь обертання, перенесення, а також циліндричних, конічних і зонтичних поверхонь. Деякі класи поверхонь представлені в реальних спорудах їх найпростішими формами. В даний час описано понад 550 поверхонь. Проілюструємо застосування деяких аналітичних поверхонь в формах реальних будівельних конструкцій, будівель і споруд.

Поверхні обертання, серед яких найбільш широко застосовують сферичну. Сферичні купола зводили ще в глибоку давнину, починаючи з добре збереженого купола-ротонди Пантеону в Римі (рис. 65), потім сплеск інтересу до них стався в зв'язку з будівництвом залізобетонних напівсферичних куполів планетаріїв (рис. 66-68). Величезний внесок в розширення застосування сферичних поверхонь внесли геодезичні куполи Н. Фостера.

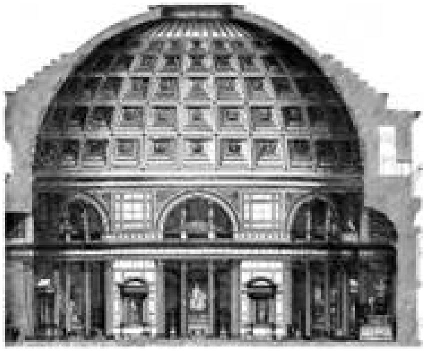


Рис 65. Сферичний купол храму-ротонди (Пантеон). Італія, м Рим, 125 р

Рис. 66. Експериментальний планетарій на даху фабрики "Карл Цейс". Німеччина, 1924 р

Рис. 67. Планетарій в Ганновері. Німеччина, 1927-1928 рр., В наші дні - кінотеатр

Рис. 68. Планетарій в Берліні. Німеччина, 1920-ті рр.

Наступними за широтою застосування є *Параболоїди обертання,* які можна бачити в обрисах глиняних куполів в Африці (рис. 69), куполів зі снігу у народів Півночі (рис. 70), планетарію в Бохумі (рис. 71).

Рис.69. Африканські купола

Рис. 70**.** Яранга ескімосів

Рис. 71. Планетарій. Німеччина, м Бохум, 1964 р

Еліпсоїд обертання також користується авторитетом у архітекторів. Наприклад, він використовувався для формоутворення сталевого купола над стадіоном у м. Сан-Паулу, Бразилія (рис. 72), спортзалу в м. Атланта, США (рис. 73). Еліптичний купол застосували в атомному центрі Мюнхена, Німеччина.

Рис. 72. Спортзал в м Атланта. США, 1957 р

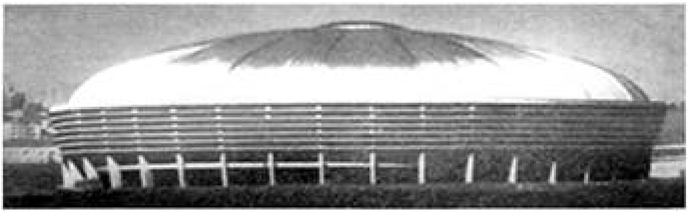


Рис. 73**.** Критий стадіон в парку в м Сан-Паулу. Бразилія, 1958 р

Круговий конус також відноситься до класу поверхонь обертання. У старі часи він найбільш широко застосовувався в мусульманських містах при будівництві мінаретів (рис. 74), в деяких областях Італії як конічні даху над житловими приміщеннями (рис. 75), в якості димарів, веж маяків.

Рис. 74. Колишня столиця Хорезмского регіону - м КуняУргенч на березі річки Амудар'ї. Туркменістан, 1321-13 * 36 рр.

Рис. 75. Труллі. Італія

Здається, що форма конуса використовується настільки часто, що створити нову споруду, яка не повторює вже освоєні конічні форми (канони) або містить елементи інновації, просто неможливо. Однак архітектори, дизайнери та інженери настільки переконані у функціональній цінності конічної форми, що і зараз беруть її за основу своїх композицій стосовно будівель, конструкцій і виробів. Побудовано та функціонують багато веж у формі конічної поверхні, і практично кожна з них є шедевром архітектури та інженерної думки, але найвідомішою прямою конічною круговою оболонкою є Останкінська телевежа. Споруджена залізобетонна башта являє собою порожнисту конічну оболонку з сильно розвиненою підставою. У наш час найбільш красивою спорудою із застосуванням конічної оболонки вважається водонапірна вежа в Кувейті (рис. 76).

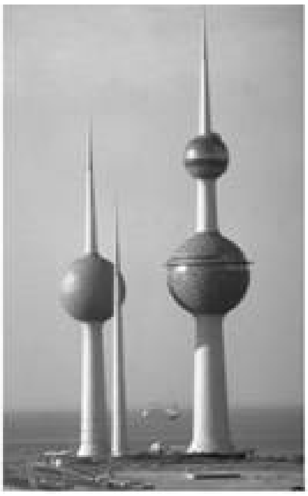


Рис. 76. Водонапірна вежа. Кувейт, 1979 г.

Односмужний гіперболоїд обертання Особливості геометрії гіперболічних оболонок дозволяють широко використовувати їх в світовій будівельній практиці. Основною областю застосування таких форм є промислове будівництво (рис. 77), але є приклади і цивільних споруд

Рис. 77. Градирня

Не потребують спеціальних пояснень можливості застосування в архітектурі ще однієї поверхні обертання - *кругового циліндра.* Ось кругового циліндра в реальних спорудах в залежності від задуму архітектора або згідно функціональному призначенню циліндричної конструкції може розташовуватися вертикально або горизонтально (рис. 78) відносно земної поверхні. Залежно від довжини їх ділять на короткі, у яких проліт на поздовжній осі не більше ніж півтори довжини хвилі (ширини споруди), і довгі, у яких проліт на поздовжній осі більш ніж півтори хвилі.

Рис. 78. Багатофункціональна швидкобудуєма бескаркасна арочна будівля з тонколистової оцинкованої сталі

До довгих оболонок можна віднести оболонки покриття гаража в Бурнемауте (Великобританія), спортивного залу в Мадриді (Іспанія, 1935 г.). Широко застосовуються короткі циліндричні типові оболонки для будівель з сіткою колон 24×12 м і 18×12 м.

Група поверхонь, що входить в клас "лінійчатих поверхонь", крім уже розглянутих односмужних гіперболоїдів обертання в архітектурі широко представлена *гіперболічним параболоїдом (гіпару)* (рис. 79).

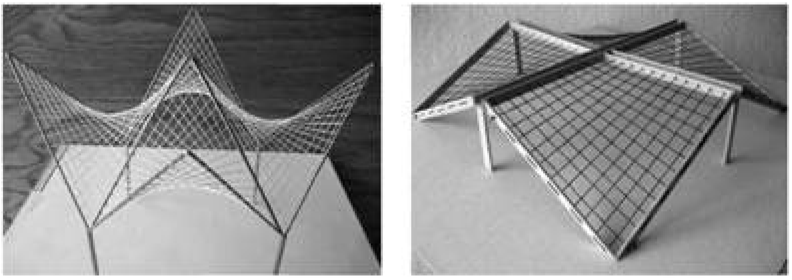


Рис. 79. Моделі споруд, що включають в себе 2 і 4 фрагмента гіперболічного параболоїда, побудованого рухом прямої, утвореної двома перехресними прямими

Гіперболічні параболоїди відносяться також до класу *поверхонь прямого перенесення.* Про популярність форми гіперболічного параболоїда говорить і той факт, що А. Тедескі - батько тонкостінних оболонкових залізобетонних конструкцій в США - теж брав участь в проектуванні гіпару, який свого часу вважався найдовшим гіпару в світі (рис. 80).

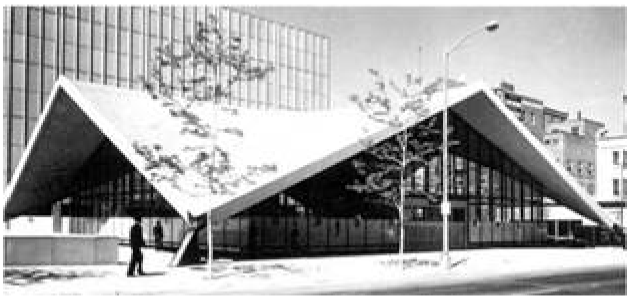


Рис. 80. Одне з споруд Прінстонського університету. США, шт. Колорадо, м Денвер, 1959 р, з архіву А. Тедескі

Гіпар (гіперболічний параболоїд скорочено) Ф. Кандели (рис. 81), Я. Ксенакіса (рис. 82).

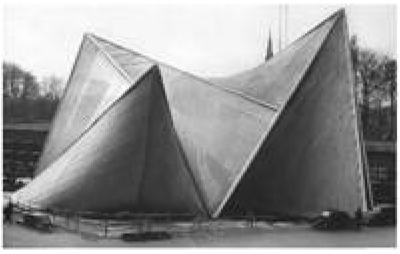


Рис. 81. Павільйон фірми "Філіпс" на Всесвітній виставці в Брюсселі "Ексно-58", арх. Я. Ксенакіс

Рис. 82. Ферроцементна оболонка в формі гіпару товщиною 16 мм для Павільйону космічних променів. Мехіко, 1953-1954 рр**.,** арх**.** Ф**.** Кандела

Коноїд. Відомі дев'ять типів коноїдів в залежності від виду напрямної кривої: параболічні, синусоїдальні, за допомогою ключового окружністю і т.д. Перші три перерахованих виду коноїд знайшли застосування в реальних спорудах. Вперше оболонка покриття в формі параболічного коноида була запроектована у Франції Е. Фрейсіне (рис. 83).

Рис.83. Коноідальная оболонка. 1928 р арх. Е. Фрейсіне

У 1908 р. іспанський архітектор А. Гауді прийняв пропозицію запроектувати оригінальну, але дуже дешеву школу для дітей робітників. Гауді вирішив зробити покриття школи в формі *синусоїдального коноїда* (рис. 84). Надалі ця споруда деякими архітекторами була названа геніальною. Коноїдальні оболонки застосовувалися також в Румунії, СРСР, Польщі, Чехословаччини, Франції та Італії при величині прольотів від 18 до 60 м.

Рис. 84. Школа з коноідальной дахом для дітей робітників. Іспанія

Лінійчаті поверхні нульовою гауссовой кривизни представлені конусами і циліндрами. Приклади кругових конічних і циліндричних оболонок обертання представлені в розділі "Поверхні обертання". Умовно *циліндричні* поверхні поділяють на прямі (рис. 85) і похилі*, а конічні* - на конічні поверхні обертання, прямі і похилі з круговою і еліптичною направляючої кривої, і незамкнуті конічні поверхні.

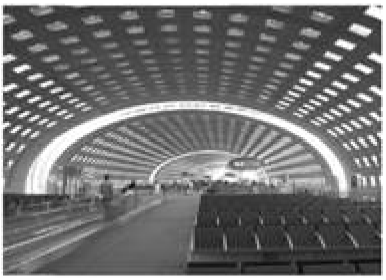


Рис. 85. Пряма еліптична циліндрична поверхня - секція Е терміналу аеропорту ім. Ш. де Голля. Франція, м. Париж

Елементарно просто підійшла група інженерів і архітекторів під керівництвом архітектора А. Еріксона до використання похилої конічної форми для будівлі чотириповерхового Музею скла - Міжнародного центру сучасного мистецтва в Такомі. Ця споруда не залишить байдужим жодного відвідувача (рис. 86).

Рис. 86. Музей скла. США, м Такома

ІІІ.Диференціальне числення функції однієї змінної

1.Похідна

Означення похідної, фізичний та геометричний зміст

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка означена на деякому проміжку, і має графік, зображеним на рис. 87. Введемо поняття приростів аргументу і функції. Візьмемо два значення аргументу -начальне x_0 та кінцеве x. Різниця $x - x_0$ називається *приростом аргументу* та позначається як Δx, тобто $\Delta x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$. Можна сказати, що x отримав приріст Δx. Якщо в точці x_0 функція мала значення $y_0 = f(x_0)$, то в точці $x_0 + \Delta x$ функція матиме значення $y = f(x_0 + \Delta x)$. Величина $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ називається *приростом функції* $y = f(x)$ в точці x_0 та позначається символом Δy, тобто $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

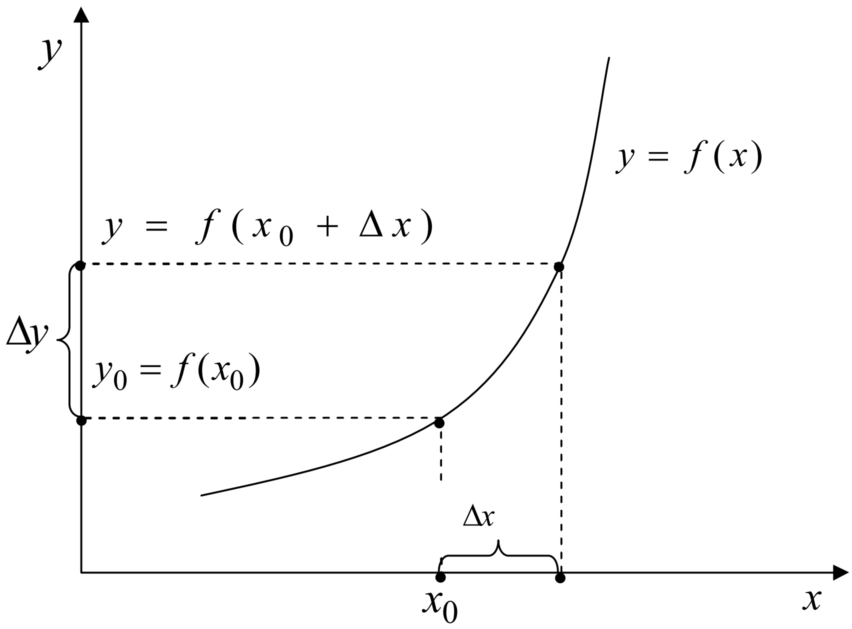


Рис. 87

Після введення понять приростів аргументу і функції дамо означення похідної функції. Нехай на деякому проміжку $[a;b]$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in [a;b]$ і дамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала проміжку $[a;b]$. У результаті приросту аргументу функція отримає приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Визначення. *Похідною функції* $y = f(x)$ *називається границя відношення приросту функції* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *до приросту аргументу цієї функції* Δx*, якщо приріст аргументу прямує до нуля, тобто:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (106)$$

Для позначення похідної використовують символи $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$. У разі обчислення похідної в точці, наприклад, $x = a$, похідну позначають як $f'(a)$ або $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$, $\left.y'\right|_{x=a}$. Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції. Якщо границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ у даній точці не існує, то не існує в цій точці і похідної $f'(x)$.

Згідно з визначенням похідної, можна сформулювати таке *правило знаходження похідної*. Щоб знайти значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x треба:

1. Надати значенню x довільного приросту Δx і знайти відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

2. Знайти відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

3. Знайти границю цього відношення

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона дорівнює похідній $f'(x)$.

Фізичний зміст похідної

Щоб зрозуміти фізичний зміст похідної, розглянемо нерівномірний прямолінійний рух матеріальної точки. Нехай матеріальна точка рухається, тобто координата точки є функцією часу $S = S(t)$. У момент часу t_1 матеріальна точка знаходилась у точці з координатою $S_1 = S(t_1)$ (рис. 88). Розглянемо момент часу t_2, проміжок часу між t_1 і t_2 дорівнює $\Delta t = t_2 - t_1$, тоді можна записати $t_2 = t_1 + \Delta t$.

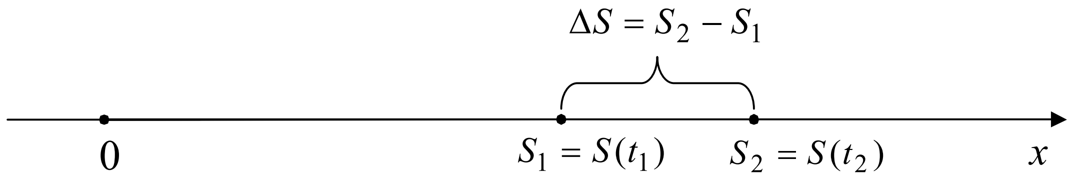


Рис. 88

У момент часу t_2 точка змістилась і стала мати координату $S_2 = S(t_2)$, або $S_2 = S(t_1 + \Delta t)$. Відстань, яку здолала точка за проміжок часу Δt, дорівнює $\Delta S = S_2 - S_1 = S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)$. Як відомо з курсу фізики, середня швидкість матеріальної точки $\overline{V}$ дорівнює відношенню відстані що здолала матеріальна точка (у нашому випадку відстань – це ΔS) до часу за який вона здолала цю відстань (у нашому випадку час – це Δt), тобто $\overline{V} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Оскільки рух матеріальної точки був нерівномірним $\overline{V}$ – це середня швидкість руху за час Δt, однак, чим менше ми розглядаємо проміжок часу Δt, тим точніше буде значення швидкості, і якщо спрямувати Δt до нуля, то отримаємо миттєве значення швидкості V у момент часу t_1, тобто $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$, а такий запис згідно з визначенням є похідна функції S по змінній t, тобто *похідна від координати по часу – це* миттєва *швидкість.*

Геометричний зміст похідної

Розглянемо функцію $y = f(x)$ та відповідну неї криву (рис. 89). Візьмемо на кривій довільну точку $M(x; y)$. Проведемо дотичну до кривої в цій точці та позначимо через α кут, що дотична утворює з додатним напрямом осі Ox. Дамо незалежній невідомій приріст Δx, тоді функція отримає приріст Δy.

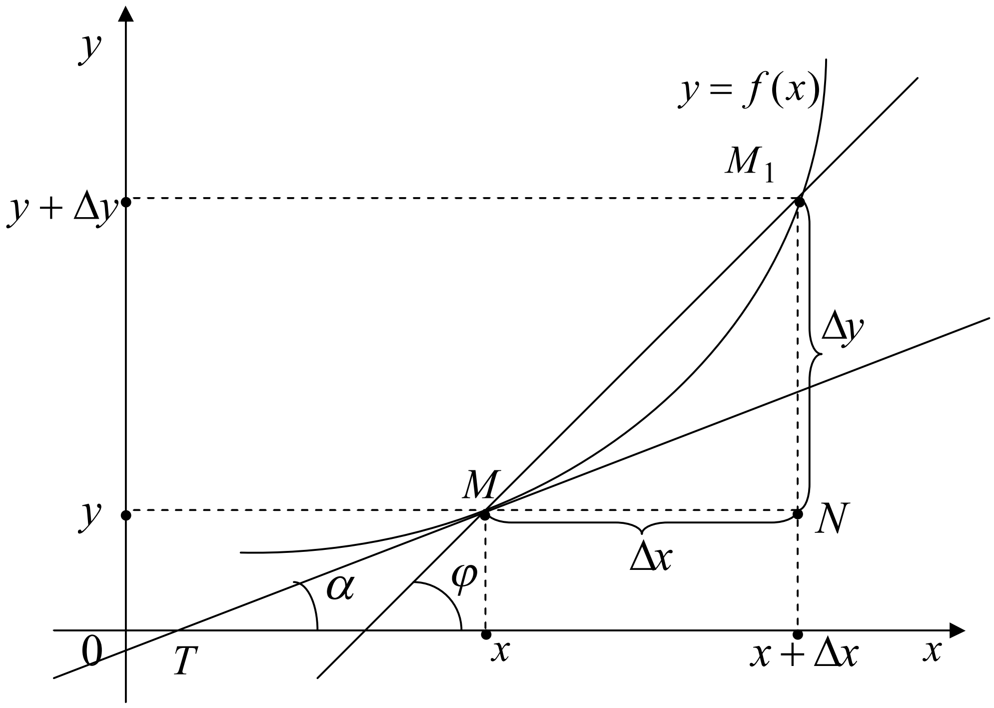


Рис. 89

Значенням $x + \Delta x$ і $y + \Delta y$ на кривій буде відповідати точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Проведемо січну MM_1 до кривої та позначимо через φ кут, що січна утворює з додатним напрямом осі Ox. З ΔMNM_1 знаходимо, що кутовий коефіцієнт січної дорівнює $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{NM_1}{NM} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \to 0$, то точка M_1 прямує до точки *M* уздовж кривої $y = f(x)$, а січна MM_1, повертаючись навколо точки *M*, переходить у дотичну MT. Кут φ при цьому прямує до деякого граничного значення α. Отже, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \qquad (107)$$

Тобто *кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в деякій точці до графіка функції* $y = f(x)$ *дорівнює значенню похідної функції у цій точці* $k = f'(x)$.

Отримаємо рівняння дотичної до кривої. З аналітичної геометрії відомо, що загальний вигляд рівняння прямої, яка проходить через точку з координатами $(x_0; y_0)$ та із заданим

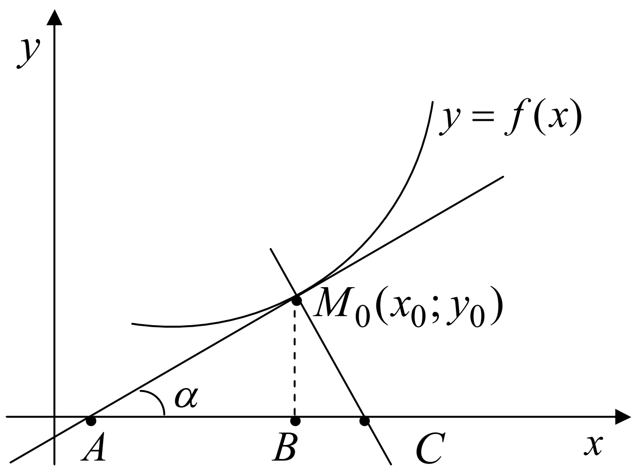


Рис. 90

кутовим коефіцієнтом, має вигляд: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Нехай дотична проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ в напрямі, що визначається кутом α, тоді поклавши $k = f'(x_0)$ з урахуванням формули (107) отримаємо

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (108)$$

Дане рівняння називається рівнянням дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$.

Визначення. *Нормаллю* до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної. На рис. 90 нормаллю до кривої є пряма M_0C.

Отримаємо рівняння нормалі до кривої. З аналітичної геометрії відомо, що кутові коефіцієнти двох взаємно перпендикулярних прямих пов'язані умовою $k_1k_2 = -1$, звідки кутовий коефіцієнт нормалі k_2 дорівнюватиме $k_2 = -1/k_1 = -1/f'(x_0)$. Тоді рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ матиме вигляд $y - y_0 = -\left(1/f'(x_0)\right)(x - x_0)$.

Приклад 1. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2 - 3x - 4$ в точках перетину кривої з віссю Ox.

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $x^2 - 3x - 4 = 0$, отримаємо абсциси точок перетину кривої з віссю Ox: $x_1 = -1,\ x_2 = 4$. Знайдемо значення похідної функції в цих точках: $y' = 2x - 3$, $y_1' = -5$, $y_2' = 5$. Запишемо рівняння дотичних, ураховуючи, що $y_0 = 0$: $y = -5(x+1) = -5x - 5$ – у першій точці, $y = 5(x-4) = 5x - 20$ – у другій точці. Рівняння нормалі до кривої у цих точках мають вигляд: $y = -(1/-5)(x+1) = 0,2x + 0,2$, $y = -(1/5)(x-4) = -0,2x + 0,8$ – у першій і другій точках відповідно.

Розглянемо поняття однобічних похідних.

Визначення. Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x. *Правою похідною* функції в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу цієї функції Δx, якщо приріст аргументу прямує до нуля справа, тобто:

$$f_+'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається *ліва похідна* функції в точці x_0:

$$f_-'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, то під похідною в точці a розуміють праву похідну, а в точці b – ліву.

З формули (106) випливає, що коли неперервна функція $f(x)$ має ліву і праву похідні в точці x і вони рівні, то похідна $f'(x)$ існує, причому $f_+'(x) = f_-'(x) = f'(x)$. Якщо $f_+'(x) \neq f_-'(x)$, то похідна в точці x не існує. Також похідна не існує в точках розриву функцій.

Приклад 2. Похідна функції $y = |x|$ в точці $x = 0$ не існує. Для доведення цього знайдемо праву і ліву похідні цієї функції:

$$f_+'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

$$f_-'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -1.$$

Тобто $f_+'(x) \neq f_-'(x)$ і похідна цієї функції в точці $x = 0$ не існує.

Функція називається диференційованою в точці x_0, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$. Функція називається *диференційованою на проміжку*, якщо вона диференційовна в кожній точці цього проміжку.

Розглянемо далі теорему, яка пов’язує неперервність і диференційованість функції.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. За властивістю границь відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ може бути записане у вигляді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тоді приріст функції дорівнюватиме $\Delta y = (f'(x_0) + \alpha(\Delta x))\Delta x$ і прямуватиме до нуля при $\Delta x \to 0$, а за властивістю неперервних функцій це означає, що функція $f(x)$ в точці x_0 неперервна.

Обернене твердження цієї теореми неправильне, тобто якщо функція неперервна в цій точці, то вона не обов’язково диференційована в цій точці. Як приклад цього можна розглянути поведінку функції $y = |x|$ у точці $x = 0$. Ця функція в точці $x = 0$ неперервна, в той же час вона не диференційовна, оскільки ліва та права похідні цієї функції в точці $x = 0$ не рівні між собою.

Основні формули і правила диференціювання

Наведемо таблицю похідних основних елементарних функцій:

1. $(C)' = 0$;
2. $(x^n)' = n x^{n-1}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Приклад 1. Знайти похідні функцій: 1) $y = x^5$; 2) $y = \frac{1}{x^3}$;

3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання

1) Використовуючи формулу похідної степеневої функції при $n = 5$, отримаємо $\left(x^5\right)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

2) Застосуємо для цієї функції визначення степеня з від'ємним показником $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Використовуючи далі формулу похідної степеневої функції при $n = -3$, отримаємо $\left(x^{-3}\right)' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

3) Застосуємо для цієї функції визначення степеня з дробовим показником $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Використовуючи далі формулу похідної степеневої функції при $n = 1/2$, отримаємо:

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4) Застосуємо для цієї функції визначення степеня з дробовим від'ємним показником $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Використовуючи далі формулу похідної степеневої функції при $n = -1/3$, отримаємо:

$$(x^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \log_5 x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу похідної логарифмічної функції при $a = 5$, отримаємо: $\left(\log_5 x\right)' = \frac{1}{x\ln 5}$.

Правила диференціювання суми, добутку і частки двох функцій

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці x, то в цій точці також диференційовані їх сума, різниця, добуток і частка (частка за умови, що $v(x) \neq 0$), причому справедливі такі формули:

$$1)\ (u \pm v)' = u' \pm v';\ 2)\ (u \cdot v)' = u'v + v'u;\ 3)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{(uv)^2}.$$

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак похідної тобто $(Cu(x))' = Cu'(x)$.

Використовуючи правило диференціювання добутку двох функцій та приймаючи до уваги теорему 1, матимемо:

$$y' = (Cu(x))' = C'u(x) + Cu'(x) = 0 + Cu'(x) = Cu'(x).$$

Наслідок 2. Похідні тригонометричних функцій tgx і $ctgx$ знаходять за формулами

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}.$$

Приклад 3. Знайти похідні функцій 1) $y = x^3 \sin x$; 2) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання

1) Використовуючи формулу похідної добутку двох функцій, отримаємо:

$$\left(x^3 \sin x\right)' = \left(x^3\right)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

2) Використовуючи формулу похідної частки функцій, отримаємо:

$$\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\cos x)' \sqrt{x} - \cos x \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-\sqrt{x} \sin x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cos x}{x} = -\frac{2x \sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}.$$

Диференціювання складеної функції

Введемо поняття складеної функції. Нехай функція $y = f(u)$ є функцією аргументу u, яка визначена на множині U з областю значень Y, а змінна u у свою чергу є функцією $u = \varphi(x)$ від змінної x, яка визначена на множині X з областю значень U. Тоді функція $y = f\left[\varphi(x)\right]$, яка визначена на множині X, називається *складеною* функцією (*композицією* функцій, функцією від функції). При цьому функція u називається проміжним аргументом. Наприклад, якщо $y=\ln u$, а $u=\cos x$, то функція $y=\ln(\cos x)$ є складеною функцією. Правило обчислення похідної складеної функції дає така теорема.

Теорема 6. Якщо функція $u=u(x)$ має в деякій точці x_0 похідну $u'_x = u'(x_0)$ і приймає в цій точці значення $u_0 = u(x_0)$, а функція $y = f(u)$ має в точці u_0 похідну $y'_u = f'(u_0)$, то складена функція $y = f(u(x))$ в точці x_0 також має похідну, яка дорівнює $y'_x = f'_u(u_0)\cdot u'_x(x_0)$. Тобто похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу u на похідну проміжного аргументу по x.

У разі фіксованого значення x_0 матимемо $u_0 = u(x_0)$, $y_0 = f(u_0)$. Для нового аргументу $x_0+\Delta x$ матиме $u=u(x_0+\Delta x)$, $y = f(u_0+\Delta u)$. Прирости цих функцій відповідно дорівнюють:

$$\Delta u = u(x_0+\Delta x) - u(x_0), \quad \Delta y = f(u_0+\Delta u) - f(u_0).$$

Оскільки u – диференційована в точці x_0, то u – неперервна в цій точці. Тому при $\Delta x \to 0$ приріст $\Delta u \to 0$. Аналогічно, при $\Delta u \to 0$, приріст $\Delta y \to 0$. Припустимо, що $\Delta u \neq 0$. Тоді в силу диференційовности функції $y=f(u)$ можна записати $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u(u_0)$. З цього співвідношення, використовуючи властивість границі, отримаємо (при $\Delta u \to 0$): $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u)$, де $\alpha(\Delta u)\to 0$ при $\Delta u \to 0$, і відповідно при $\Delta x \to 0$.

Запишемо останню рівність у вигляді: $\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$. Отримана рівність справедлива і при $\Delta u = 0$, якщо вважати, що $\alpha(\Delta u = 0) = 0$. Розділимо всі члени отриманої рівності на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

За умови $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$. Тому, переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Отже, щоб продиференціювати складену функцію $y = f(u(x))$, треба знайти похідну від “зовнішньої” функції f, розглядаючи її аргумент як змінну, та помножити на похідну від “внутрішньої ” функції по незалежній змінній.

Приклад 4. Знайти похідну функції: 1) $y=\ln(\cos x)$, 2) $y=\sin 3x$.

Розв’язання

1) Позначивши $u=\cos x$, згідно з формулою отримаємо:

$$y'=\left(\ln\left(\cos x\right)\right)'=\left(\ln u\right)'\cdot\left(\cos x\right)'=\frac{1}{u}\cdot\left(-\sin x\right)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-ctgx.$$

2) Позначивши $u=3x$, згідно з формулою отримаємо:

$$y'=\left(\sin 3x\right)'=\left(\sin u\right)'\left(3x\right)'=\cos u\cdot 3=3\cos 3x.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y=x3^{x}$.

Розв’язання. Застосуємо формулу похідної добутку двох функцій $\left(x3^{x}\right)'=\left(x\right)'3^{x}+x\left(3^{x}\right)'$. Ураховуючи далі, що $\left(x\right)'=1$ і використовуючи формулу похідної показникової функції, отримаємо: $\left(x3^{x}\right)'=3^{x}+x3^{x}\ln 3$.

Похідні вищих порядків

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована на деякому відрізку $[a;b]$. Значення похідної $f'(x)$ залежить від x, тобто являє собою також функцію від змінної *x*. Нехай ця функція також має похідну. Диференціюючи її, отримаємо, другу похідну від функції $f(x)$.

Визначення 1. Похідна від першої похідної називається *похідною другого порядку*, або *другою похідною* від цієї функції $y=f(x)$ та позначається y'' або $f''(x)$. Отже, $y''=(y')'$.

Наприклад, якщо $y=x^5$, то $y'=5x^4$, а $y''=(y')'=(5x^4)'=20x^3$.

Аналогічно похідну другого порядку також можна про-диференціювати. Похідна від другої похідної називається похідною третього порядку та позначається y''' або $f'''(x)$.

Визначення 2. Взагалі похідною n-го порядку від функції $f(x)$ називається похідна (перша) від похідної $(n-1)$-го порядку та позначається символом $y^{(n)}$ або $f^{(n)}(x)$: $y^{(n)}=(y^{n-1})'$.

Таким чином, для знаходження похідної вищого порядку від цієї функції послідовно знаходять всі її похідні нижчих порядків.

Приклад 6. Обчислити похідну порядку n функції $y=f(x)$:

а) $y = x^3$, $n = 4$ б) $y = \sin x$, $n = 3$.

Розв'язання

а) $\left(x^3\right)^{(4)}$, для обчислення похідної четвертого порядку послідовно будемо знаходити похідні нижчих порядків: $y' = (x^3)' = 3x^2$, $y'' = (y')' = (3x^2)' = 6x$, $y''' = (y'')' = (6x)' = 6$, $y^{(4)} = (y''')' = (6)' = 0$;

б) $(\sin x)'''$, як і в попередньому прикладі будемо шукати послідовно похідні нижчих порядків: $y' = (\sin x)' = \cos x$, $y'' = (y') = (\cos x)' = -\sin x$, $y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x$.

Розв'язання задач на обчислення похідних

Приклад 1. Обчислити похідну функції $y = x^6 - \dfrac{2}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язання. Застосовуючи визначення від'ємного і дробового степенів, запишемо цю функцію у вигляді $y = x^6 - 2x^{-2} + 5x^{\frac{3}{5}} + 6x^{-\frac{2}{3}}$. Використовуючи формулу похідної суми функцій, а також формулу похідної степеневої функції, знайдемо похідну цієї функції:

$$y' = 6x^{6-1} - 2\cdot(-2)x^{-2-1} + 5\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} + 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = 6x^5 + 4x^{-3} + 3x^{-\frac{2}{5}} - 4x^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= 6x^5 + \frac{4}{x^3}x^{-3} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

Приклад 2. Обчислити похідну функції $y = e^x \ln x^3$.

Розв'язання. Використаємо властивість логарифмів і запишемо функцію у вигляді $y = 3e^x \ln x$. Виносимо сталий множник за знак похідної, і застосовуємо формулу похідної від добутку функцій, а також таблицю похідних:

$$y' = 3\left(e^x \ln x\right)' = 3\left(e^x\right)' \ln x + 3e^x \left(\ln x\right)' = 3e^x \ln x + 3e^x \frac{1}{x} = 3e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

.

Приклад 3. Обчислити похідну функції $y = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу похідної частки функцій, отримаємо:

$$y' = \frac{(1+\cos x)'\sin x - (1+\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - (1+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{(1+\cos x)}{\sin^2 x}.$$

Приклад 4. Обчислити похідну функції $y = \sin^3 x$.

Розв'язання. Для функції останньою операцією є піднесення до кубу, тому проміжний аргумент $u = \sin x$ і $y = u^3$. За формулами похідної складеної функції і таблиці похідних, отримаємо:

$$y'_x = \left(\sin^3 x\right)'_x = \left(u^3\right)'_u (\sin x)'_x = 3u^2 \cos x = 3\sin^2 x \cos x.$$

Приклад 5. Обчислити похідну функції $y = e^{\sin^4 x}$.

Розв'язання. Для функції $y = e^{\sin^4 x}$ останньою операцією є піднесення експоненти до степені $\sin^4 x$, тому проміжний аргумент $u = \sin^4 x$. Проміжним аргументом функції $\sin^4 x$ є $v = \sin x$. За формулами похідної складеної функції і таблиці похідних, отримаємо:

$$y'_x = \left(e^u\right)'_u \left(v^4\right)'_v (\sin x)'_x = e^u \cdot 4v^3 \cdot \cos x = e^{\sin^4 x} \cdot 4\sin x \cdot \cos x =$$

$$= 2e^{\sin^4 x} \sin 2x.$$

Приклад 6. Обчислити похідну функції $y = \sqrt[3]{arctg\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Для функції $y = \sqrt[3]{arctg\sqrt{x}}$ останньою операцією є добування кореня з $y = arctg\sqrt{x}$, тому проміжний аргумент $u = arctg\sqrt{x}$. Проміжним аргументом функції $u = arctg\sqrt{x}$ є $v = \sqrt{x}$. За формулами похідної складеної функції і таблиці похідних отримаємо:

$$y'_x = \left(u^{1/3}\right)'_u \cdot (arctgv)'_v \cdot \left(\sqrt{x}\right)'_x = \frac{1}{3}u^{-2/3} \cdot \frac{1}{1+v^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$=\frac{1}{6\sqrt[3]{\left(arctg\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Приклад 7. Обчислити похідну другого порядку функції $y=x\ln\left(x^2+1\right)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну першого порядку, використовуючи формули похідної добутку і складеної функції

$$y'=(x)'\ln\left(x^2+1\right)+x\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'=1\cdot\ln\left(x^2+1\right)+x\cdot(\ln u)'_u\cdot\left(x^2+1\right)'=$$

$$=\ln\left(x^2+1\right)+x\cdot\frac{1}{u}\cdot 2x=\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}.$$

Знайдемо похідну другого порядку, обчисливши похідну від похідної цієї функції. При цьому використаємо вже обчислене значення похідної функції $\ln\left(x^2+1\right)$, яка дорівнює $\frac{2x}{x^2+1}$:

$$y''=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'+\left(\frac{2x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{\left(2x^2\right)'\left(x^2+1\right)-2x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x\left(x^2+1\right)-2x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3+4x-4x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Після алгебраїчних перетворювань остаточно отримаємо значення похідної другого порядку заданої функції:

$$y''=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

2.Диференціал функції

Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна в точці $x\in[a,b]$, тобто має в цій точці похідну $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, тоді з властивості границь $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, звідки приріст функції запишеться у вигляді

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

У цьому виразі перший з доданків є лінійним відносно Δx і при $\Delta x \to 0$ та $f'(x) \neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з Δx, оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x).$$

Другий доданок – нескінченно мала величина вищого порядку ніж Δx, оскільки:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx, тобто містить Δx у степені, вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргумента.

Визначення. *Диференціалом* dy *функції* $y = f(x)$ *у точці* x *називається головна частина, приросту функції* $f(x)$ *в цій точці:*

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$ тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому формулу для диференціала можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \tag{109}$$

Остання формула дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної, тобто

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Геометричній зміст диференціала

Розглянемо функцію $y = f(x)$ та відповідну до неї криву (рис. 91). Візьмемо на кривій довільну точку $M(x; y)$, проведемо дотичну до кривої в цій точці та позначимо через α кут, що дотична утворює з додатним напрямом осі Ox. Дамо незалежній невідомій приріст Δx, тоді функція отримає приріст $\Delta y = NP$. Значенням $x + \Delta x$ і $y + \Delta y$, на кривій буде відповідати точка $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$. З ΔMNQ знаходимо $QN = MN \,\mathrm{tg}\alpha$, оскільки $\mathrm{tg}\alpha = f'(x)$, а $MN = \Delta x$, то $QN = \Delta x f'(x)$. За визначенням диференціала $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, тому $dy = NT$. Таким чином, диференціал функції $f(x)$, відповідний цим значенням x та Δx дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ у цій точці x.

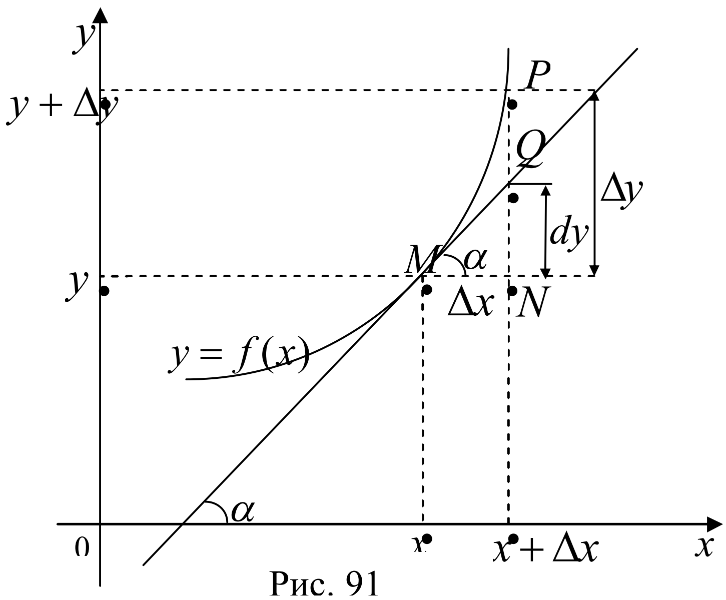


Рис. 91

Отже, диференціал функції $f(x)$ при заданих значеннях і Δx дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці x. Приріст функції Δy при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, зміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати AP кривої ординатою дотичної AQ. Така заміна доцільна лише для достатньо малих значень Δx.

Властивості диференціала

Оскільки диференціал функції є добуток похідної цієї функції на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко отримати розглядаючи властивості похідної. Якщо функції u і v диференційовні, а C – константа, то матимемо такі правила знаходження диференціалів:

$$dC = 0, \quad d(Cu) = cdu, \quad d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = udv + vdu,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Застосування диференціала у наближених обчисленнях

Нехай нам відомо значення функції $y_0 = f(x_0)$ та її похідної $y'_0 = f'(x_0)$ в точці x_0. Знайдемо значення функції в деякій близькій до x_0 точці x.

Як відомо, приріст функції Δy можна представити у вигляді суми $\Delta y = dy + \alpha \Delta x$, тобто приріст функції відрізняється від диференціала на безкінечно малу величину. Тому, нехтуючи при малих Δx другим доданком у наближених обчисленнях, інколи користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Оскільки за визначенням, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, то $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Звідки

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (110)$$

Абсолютна похибка формули (110) наближено дорівнює абсолютні величині диференціалу: $\left| f(x+\Delta x) - f(x) \right| = |\Delta y| \approx |dy| = \left| f'(x)\Delta x \right|$.

Відносна похибка формули (110) визначається за формулою: $\left|\dfrac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\dfrac{dy}{y}\right|$.

Приклад. Обчислити значення функції $y = \sqrt[3]{x}$, у точці $x = 26{,}5$.

Розв'язання. Для обчислення наближеного значення функції скористуємося формулою (110). Необхідно знати значення функції в точці поблизу якої шукаємо наближене значення функції, в нашому випадку $x_0 = 27$ відповідно $\Delta x = x - x_0 = 26{,}5 - 27 = -0{,}5$. Значення функції в цій точці буде $y(27) = \sqrt[3]{27} = 3$, далі знайдемо значення похідної в точці: x_0

$$y'\big|_{x_0=27} = \left(\sqrt[3]{x}\right)'\Big|_{x_0=27} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Big|_{x_0=27} = \frac{1}{18}.$$

Підставимо у формулу (110) знайдені величини та отримаємо $\sqrt[3]{26{,}8} = \sqrt[3]{27} + \dfrac{1}{18} \cdot (-0{,}5) = 3 - \dfrac{1}{36} = 2\dfrac{35}{36} \approx 2{,}972$.

Безпосереднє обчислення дає результат $\sqrt[3]{26{,}8} \approx 2{,}99257$.

3.Дослідження функції задопомогою похідної

Монотонність функції

Достатня умова зростання функції: якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a;b) і $f'(x) > 0$ всюди, крім, можливо, скінченого числа точок, в яких $f'(x) = 0$ на (a;b), то функція $f(x)$ зростає на проміжку (a;b) .

Нехай $f'(x) > 0$ і x_1 і x_2 – довільні точки з $(a;b)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$виконуються всі умови теореми Лагранжа, тому $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ $c \in (x_1; x_2)$. За умови $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, а тому $f(x_2) - f(x_1) > 0$, або $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ зростає.

Достатня умова спадання функції: якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) < 0$ всюди, крім, можливо, скінченого числа точок, в яких $f'(x) = 0$ на $(a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на проміжку $(a;b)$.

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно.

Необхідна умова монотонності: якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на $(a;b)$. Зауважимо, що необхідна умова монотонності більш слабка. Геометрична

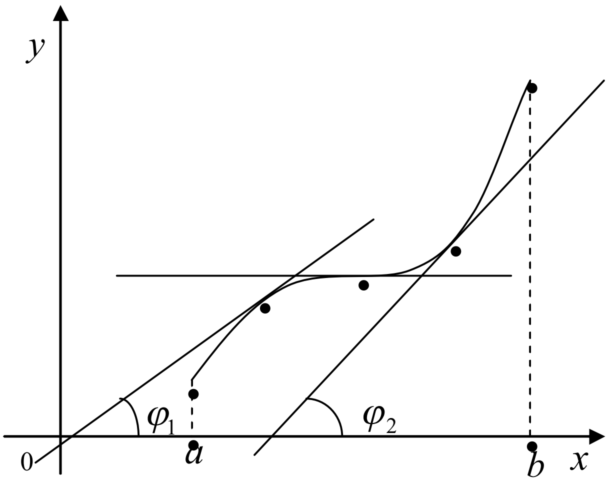


Рис. 92

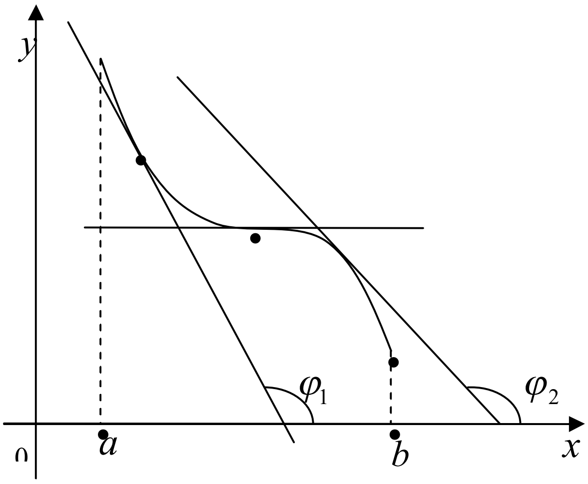


Рис. 93

інтерпретація теорем 1, 2 і 3 дана на рис. 92 і рис. 93.

Локальний екстремум функції

Визначення. *Точка* x_0 *називається точкою локального максимуму (або мінімуму) функції* $f(x)$, *якщо існує такий окіл* $0<|x-x_0|<\delta$, *точки* x_0, *який належить області визначення функції, і має для всіх* x *з цього околу виконуватися нерівність* $f(x)<f(x_0)$ (*або* $f(x)>f(x_0)$).

Геометричний зміст точок локального максимуму і мінімуму зрозумілий з рис. 95 і 96. Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму, а значення функції в цих точках

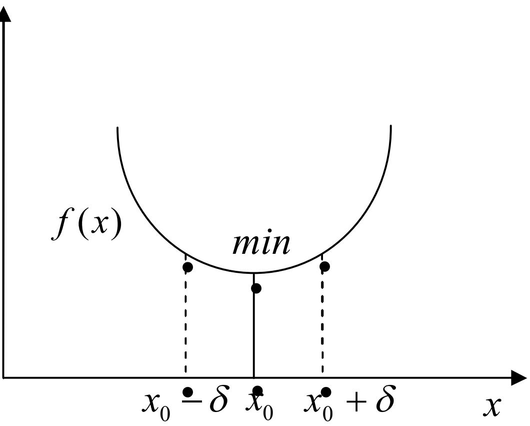


Рис. 95

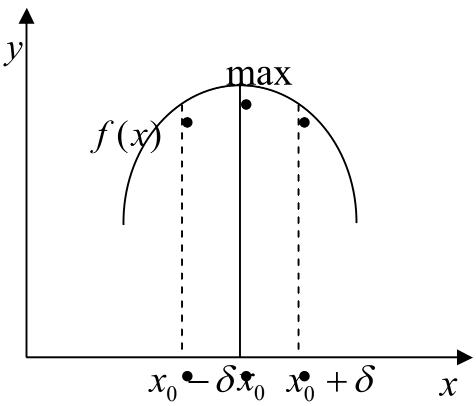


Рис. 96

називаються відповідно локальним максимумом і локальним мінімумом або локальним екстремумом. З означення випливає, що поняття екстремуму носить локальний характер у тому розумінні, що нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$) може і не виконуватись для всіх значень x з області визначення функції, але повинна виконуватись лише в деякому околі точки x_0. Отже, не слід плутати локальний максимум з найбільшим значенням функції, якого вона може набувати в області визначення (абсолютним максимумом). Локальних максимумів функція може мати кілька, абсолютний максимум – тільки один. Це саме стосується локального і абсолютного мінімумів. Може статись, що окремий локальний мінімум більший від деякого локального максимуму, тоді як абсолютний мінімум не перевищує абсолютного максимуму M.

Теорема 1. (необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.

Оскільки за умовою x_0 – точка локального екстремуму, то існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, в якому значення $f(x_0)$ найбільше або найменше. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$.

Теорема 1 має такий геометричний зміст (рис.97). Якщо точки x_1, x_2, x_3, x_4 – точки локального екстремуму і у відповідних точках графіка існують невертикальні дотичні, то ці дотичні паралельні осі Ox. Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною але недостатньою, для того щоб диференційована в точці x_0 функція мала локальний екстремум. Це означає, що не будь-яка точка x_0 в якій $f'(x_0)$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ має похідну $y = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму.

Досі розглядалися функції, що в точках екстремуму мають похідну. Проте існують функції, що в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y = |x|$ має в точці $x = 0$ мінімум, але не має в цій точці похідної. Це зовсім не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ недиференційована в точці $x = 0$ і не має в цій точці екстремуму.

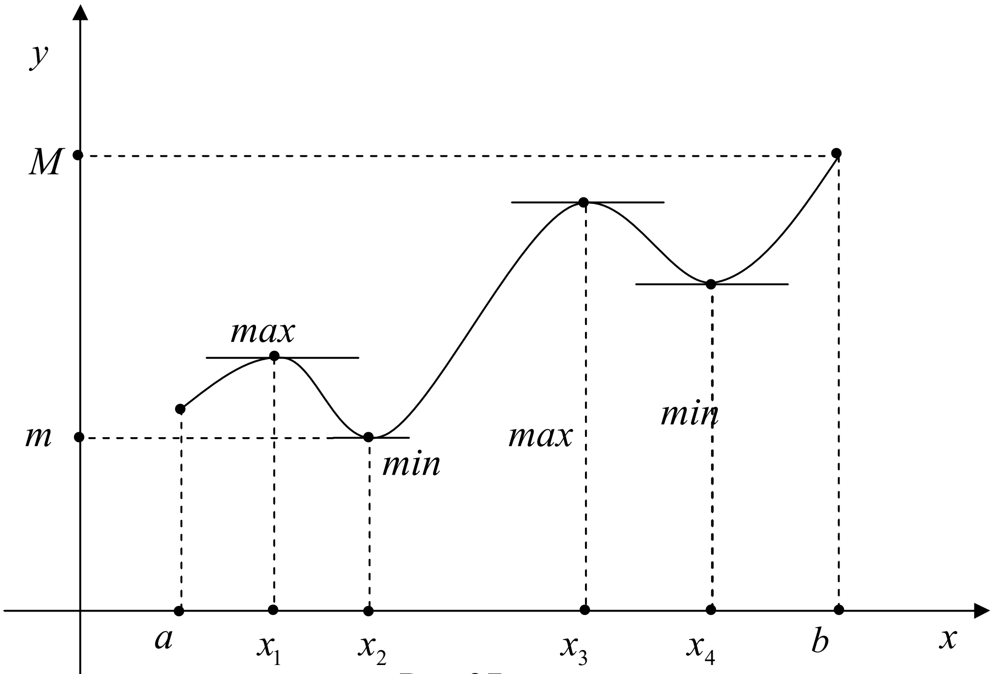


Рис.97

Таким чином, повну необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною. Обернене твердження неправильне: не всяка критична точка критична точка є екстремальною точкою. Критичні точки іноді називають точками можливого екстремуму.

Теорема 2. (Перша достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0-\delta;\, x_0+\delta)$ точки x_0, у якому функція має похідну $f'(x)$, крім, можливо точки x_0, тоді:

1. Якщо в інтервалі $(x_0-\delta;\, x_0)$ похідна $f'(x)>0$, а в інтервалі $(x_0;\, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)<0$, тоді точка x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$.
2. Якщо в інтервалі $(x_0-\delta;\, x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а в інтервалі $(x_0;\, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$, тоді точка x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$.
3. Якщо в інтервалах $(x_0-\delta;\, x_0)$ і $(x_0;\, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Теорема 3. (Друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0)=0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x) \neq 0$. Якщо $f''(x) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо $f''(x) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Базуючись на теоремах 1–3, можна сформулювати схему для дослідження функції на наявність екстремумів.

1. Знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього необхідно розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які належать області існування функції $f(x)$; знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує.

2. Якщо функція не має критичних точок, то вона не має також і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення функції критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише у разі переходу через критичну точку.

3. За зміною знака у разі переходу через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ у цих точках. Скласти таблицю за результатами дослідження.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^2 + 6x + 3$ на існування екстремумів.

Розв'язання. Згідно зі сформульованою схемою дослідження функцій знайдемо похідну функції $y' = 2x + 6$, далі за умови рівності нулю похідної знайдемо критичні точки $2x_0 + 6 = 0$, звідки $x_0 = -3$. Перевіримо, чи є знайдена критична точка екстремальною точкою, для цього установимо як змінюється знак похіднпї у разі переходу через точку x_0. Підставимо довільні значення x справа та зліва від точки x_0.

$y'(-4) = 2 \cdot (-4) + 6 = -2 < 0$;

$y'(0) = 2 \cdot (0) + 6 = 6 > 0$.

Відмітимо інтервали зростання та спадання функції.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

При переході через критичну точку x_0 похідна змінює знак з “-” на “+”. Згідно з першою достатньою умовою в цій точці функція має локальний екстремум, причому цей екстремум – мінімум. Знайдемо значення функції в цій точці. $y(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 3 = -6$.

Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Визначення 1. *Крива* $y = f(x)$ *називається опуклою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.*

Визначення 2. *Крива* $y = f(x)$ *називається вгнутою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.*

Визначення 3. *Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.*

На рис. 98 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a;b)$, угнута на інтервалі $(b;c)$ і точка $B(b; f(b))$ – точка перегину.

Теорема 1. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на $(a;b)$, тоді:

1. Якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a;b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на $(a;b)$.
2. Якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a;b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a;b)$.

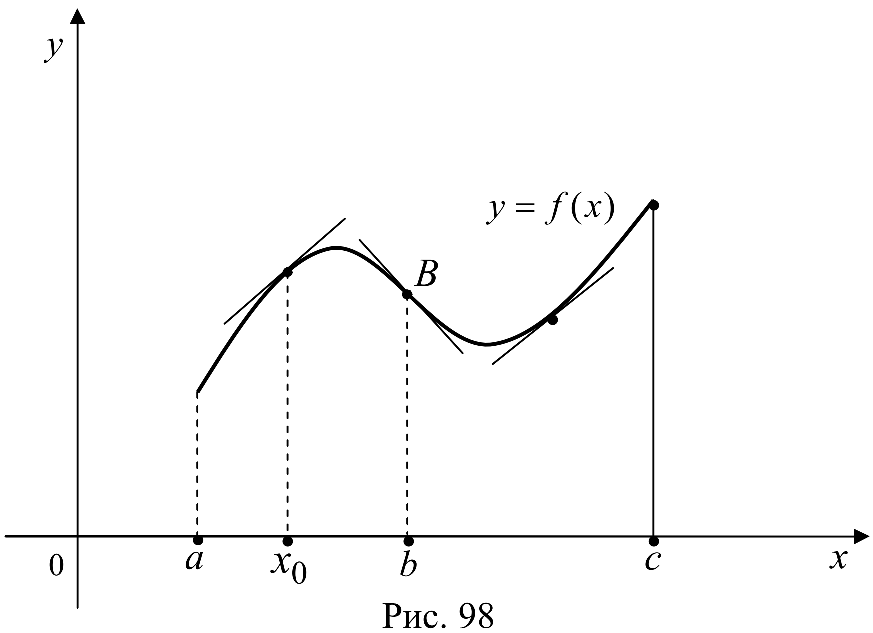


Рис. 98

Візьмемо на інтервалі $(a;b)$ довільну точку x_0 та проведемо дотичну до кривої з абсцисою $x = x_0$ (рис. 99). Покажемо, що усі точки кривої знаходяться вище дотичної. Рівняння кривої має вигляд: $y = f(x)$. Рівняння дотичної в точці $x = x_0$ має вигляд: $Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, або $Y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

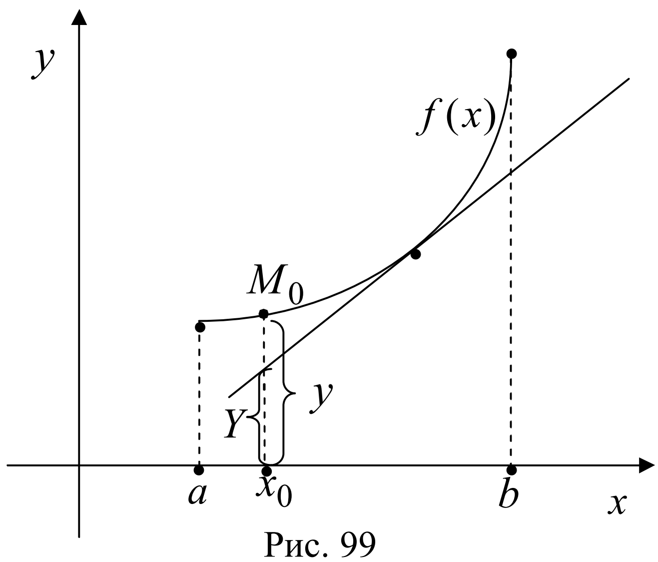


Рис. 99

Тоді різниця ординат кривої та дотичної при одному й тому значенні x дорівнює $y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Згідно з теоремою Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Тоді маємо

$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$,

або $y - Y = \left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0)$.

Скориставшись теоремою Лагранжа для виразу

$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0)$

матимемо

$y - Y = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0, c)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $x > x_0$. У цьому випадку $x_0 < c < x$, оскільки $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$, крім того за умовою $f''(c_1) > 0$, то маємо $y - Y < 0$.

Далі розглянемо випадок $x < x_0$, матимемо $x < c < x_0$ та $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, а оскільки за умовою $f''(c_1) < 0$, то маємо $y - Y < 0$. Тобто будь-яка точка кривої $y = f(x)$ лежить вище дотичної, тобто крива вгнута.

Аналогічно доводиться друге твердження теореми.

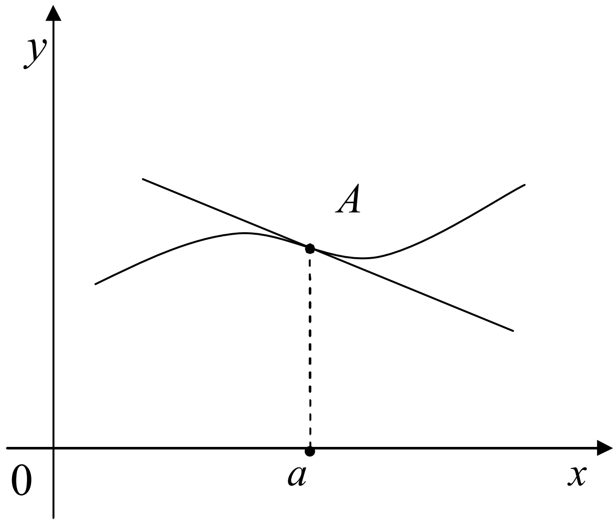


Рис. 100

Теорема 2. (Достатні умови існування точки перегину). Нехай крива визначається рівнянням $y = f(x)$, якщо $f''(a) = 0$ або $f''(a)$ не існує та у разі переходу через значення $x = a$ похідна $f''(x)$ змінює знак, тоді точка кривої з абсцисою $x = a$ є точка перегину.

1) Нехай $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тоді при $x < a$ крива опукла і при $x > a$ − угнута. Тобто точка A кривої з абсцисою $x = a$ є точка перегину (рис. 100).

2) Нехай $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тоді при $x < b$ крива опукла і при $x > b$ − угнута. Тобто точка B кривої з абсцисою $x = b$ є точка перегину.

Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати графік, треба:

1. Знайти область існування функції;
2. Знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4. Знайти точки розриву та дослідити їх;
5. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
6. Знайти інтервали опуклості, вгнутості і точки перегину;
7. Знайти асимптоти кривої;
8. Побудувати графік, ураховуючи дослідження проведені в п. 1−7.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 7$, побудувати графік.

Розв'язання

1. Функція означена на інтервалі $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Функція не має точок розриву.
3. Функція неперіодична. Функція не парна та ні непарна Оскільки

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^2}{2} - 6(-x) + 7 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + 7 \neq f(x) \neq -f(x).$$

Для того щоб дослідити функцію на наявність екстремумів, необхідно спочатку, використовуючи схему, отриману в п. 3.3 цієї частини, знайти спочатку похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 7\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{x^2}{2}\right)' - (6x)' + (7)' = x^2 - x - 6$$

та прирівняти до нуля $x^2 - x - 6 = 0$. Далі розв'язуючи отримане квадратне рівняння, знайдемо критичні точки $x_1 = -2$ та $x_2 = 3$, встановимо, чи є отримані точки екстремальними, для цього установимо, яким чином змінюється знак похідної у разі переходу через ці точки. Матимемо три інтервали: $(-\infty;-2)$, $(-2;\,3)$, $(3;\infty)$ з кожного з них візьмемо довільне значення x та підставимо у вираз для похідної:

$y'(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 6$,

$y'(0) = (0)^2 - (0) - 6 = -6$,

$y'(4) = (4)^2 - (4) - 6 = 6$,

Побудуємо допоміжну таблицю.

x	$(-\infty;-2)$	3	$(-2;\,3)$	-3	$(3;\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Оскільки у разі переходу через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з "+" на "–", то в цій точці маємо локальний максимум, у точці $x_2 = 3$ похідна змінює знак з "–" на "+", тому в цій точці маємо локальний мінімум.

4. Установимо інтервали опуклості та вгнутості, для цього знайдемо другу похідну $y'' = (y')' = (x^2 - x - 6)' = 2x - 1$ та прирівняємо її до нуля

$2x-1=0$, розв'язуючи отримане рівняння, знайдемо критичну точку другого роду $x=\frac{1}{2}$, щоб встановити, чи є знайдене значення точкою перегину, встановимо як змінюється знак другої похідної у разі переходу через неї. Матимемо два інтервали $(-\infty;\frac{1}{2})$ та $(\frac{1}{2};\infty)$ з кожного з них візьмемо довільне значення x та підставимо у вираз для другої похідної:

$y''(0)=2\cdot 0-1=-1$,

$y''(1)=2\cdot 1-1=1$.

Побудуємо допоміжну таблицю.

x	$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};\,\infty\right)$
$f''(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Оскільки на інтервалі $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$, $f''(x)>0$, то на цьому інтервалі графік функції опуклий, на інтервалі $\left(\frac{1}{2};\,\infty\right)$, $f''(x)<0$ – графік функції вгнутий, а точка $x=\frac{1}{2}$ є точкою перегину, оскільки у разі переходу через неї друга похідна змінює знак.

5. Оскільки точок розриву немає, то й вертикальних асимптот також немає, встановимо, чи є у функції похилі асимптоти, якщо вони є, то отримаємо їх рівняння у вигляді $y=kx+b$. Спочатку знайдемо, коефіцієнт k за формулою: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+7}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-6+\frac{7}{x}\right)=\infty.$$

Оскільки границя не існує, то похила асимптота також не існує.

Згідно з отриманими даними будуємо графік функції (рис. 101).

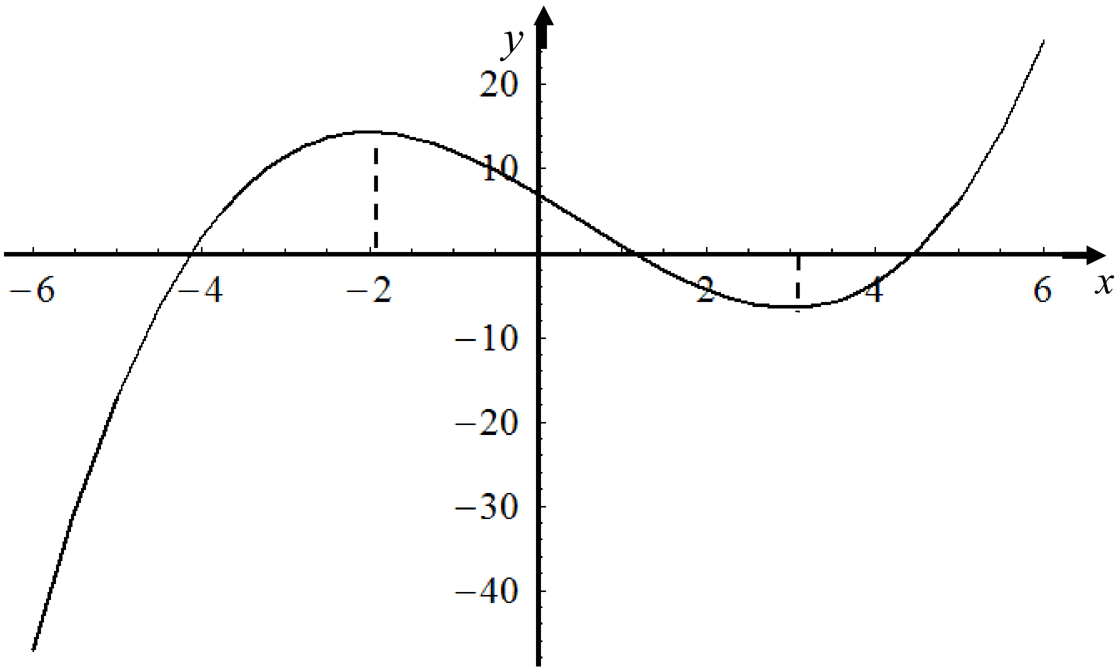


Рис. 101

Приклад 2. Дослідити функцію $y = 5e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}}$, побудувати графік.

Розв'язання

1. Функція означена на інтервалі $x \in (-\infty;\, +\infty)$.
2. Функція не має точок розриву.
3. Функція не періодична. Функція ні парна, ні непарна.
4. Щоб дослідити функцію на наявність екстремумів використовуючи схему побудови графіка функції, знайдемо похідну функції. Під час обчислення похідної скористаємося правилом диференціювання складеної функції:

$$y' = \left(5e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}}\right)' = 5\left(-\frac{(x-2)^2}{4.5}\right)' e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}} = -\frac{10(x-2)}{4.5}e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}}.$$

За умови рівності нулю похідної знайдемо критичні точки $-\frac{10(x-2)}{4.5}e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}} = 0$.

Оскільки вираз $e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}}$ ні при якому x не дорівнює нулю, маємо єдиний розв'язок цього рівняння $x = 2$. З'ясуємо, чи є критична точка $x = 2$ точкою екстремуму. Для цього установимо, яким чином змінюється знак похідної у разі переходу через цю точку. Маємо два інтервали $(-\infty; 2)$ та $(2; \infty)$, візьмемо з кожного інтервалу довільне значення x:

$$y'(0)=-\frac{10(0-2)}{4.5}e^{-\frac{(0-2)^2}{4.5}}=\frac{20}{4.5}e^{-\frac{4}{4.5}}>0;$$

$$y'(3)=-\frac{10(3-2)}{4.5}e^{-\frac{(3-2)^2}{4.5}}=-\frac{10}{4.5}e^{-\frac{1}{4.5}}<0.$$

Оскільки у разі переходу через точку $x=2$ похідна змінює знак з “+” на “ –“, то в цій точці маємо локальний максимум.

6. Установимо інтервали опуклості та вгнутості, для цього знайдемо другу похідну:

$$y''=(y')'=\left(-\frac{10(x-2)}{4.5}e^{-(x-2)^2/4.5}\right)'=$$

$$=-\frac{10}{4.5}\left(\left(x-2\right)'e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}}+\left(x-2\right)\left(e^{-(x-2)^2/4.5}\right)'\right)=$$

$$=-\frac{10}{4.5}\left(e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}}+\left(x-2\right)\left(-\frac{(x-2)^2}{4.5}\right)'e^{-(x-2)^2/4.5}\right)=$$

$$=-\frac{10}{4.5}\left(e^{-\frac{(x-2)^2}{4.5}}-\frac{2}{4.5}\left(x-2\right)\left(x-2\right)e^{-(x-2)^2/4.5}\right)=$$

$$=-\frac{10}{4.5}\left(1-\frac{2}{4.5}\left(x-2\right)^2\right)e^{-(x-2)^2/4.5}.$$

З умови рівності другої похідної нулю, знайдемо критичні точки другого роду:

$$-\frac{10}{4.5}\left(1-\frac{2}{4.5}\left(x-2\right)^2\right)e^{-(x-2)^2/4.5}=0.$$

Оскільки $e^{-(x-2)^2/4.5}$ ні при якому x не дорівнює нулю матимемо $1-\frac{2}{4.5}(x-2)^2=0;$

$$(x-2)^2=\frac{4.5}{2};\ (x-2)^2=\frac{9}{4};\ x-2=\pm\frac{3}{2};\ x=2\pm\frac{3}{2}.$$

Маємо дві критичних точки другого роду $x_1=0,5$ та $x_2=3,5$. Установимо, як змінюється знак другої похідної у разі переходу через неї. Матимемо три інтервали $(-\infty;0{,}5)$, $(0{,}5;3{,}5)$ та $(3{,}5;\infty)$ з кожного з них візьмемо довільне значення x та підставимо у вираз для другої похідної. Візьмемо з першого наприклад $x=0$:

$$y''(0)=-\frac{10}{4.5}\left(1-\frac{2}{4.5}(0-2)^2\right)e^{-(0-2)^2/4.5}=-\frac{10}{4.5}\left(1-\frac{8}{4.5}\right)e^{-4/4.5}=\frac{140}{81}e^{-4/4.5}>0.$$

З другого $x=1$

$$y''(1)=-\frac{10}{4.5}\left(1-\frac{2}{4.5}(1-2)^2\right)e^{-(1-2)^2/4.5}=-\frac{10}{4.5}\left(1-\frac{1}{4.5}\right)e^{-1/4.5}=-\frac{140}{81}e^{-4/4.5}<0\cdot$$

З третього $x=4$

$$y''(4)=-\frac{10}{4{,}5}\left(1-\frac{2}{4{,}5}(4-2)^2\right)\cdot e^{-(4-2)^2/4{,}5}=\frac{140}{81}e^{-4/4{,}5}>0.$$

Оскільки на інтервалі $(-\infty;0{,}5)$, $f''(x)>0$, то на цьому інтервалі графік функції угнутий, на інтервалі $(0{,}5;3{,}5)$, $f''(x)<0$ – графік функції опуклий, на інтервалі $(3{,}5;\infty)$ $f''(x)>0$ – графік функції опуклий, тоді маємо дві точки перегину.

Згідно з отриманими даними будуємо графік функції (рис. 102).

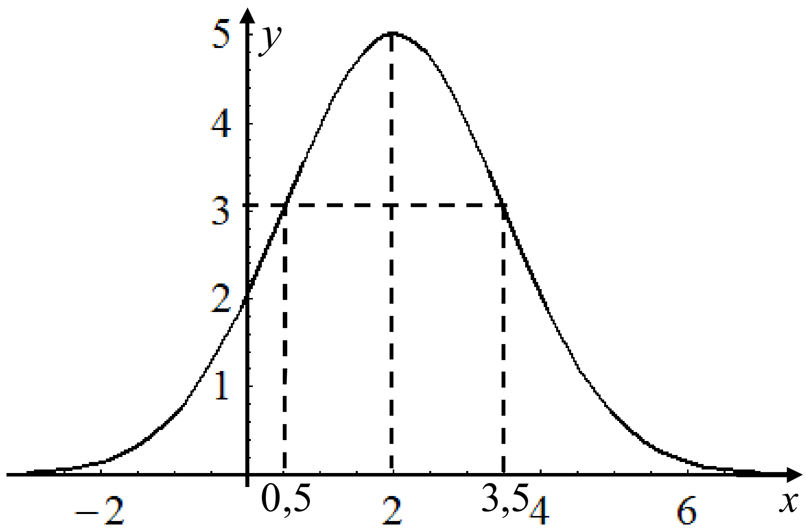


Рис. 102

Приклад 3. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$, побудувати графік.

Розв'язання

1. Функція визначена на інтервалі $x\in(-\infty;5)\cup(5;\infty)$.

2. У точці $x=5$, функція має розрив, оскільки в знаменнику дробу виникає нуль. Установимо тип цього розриву. Для цього обчислимо границю справа та зліва.

$$a = \lim_{x \to 5+0} \frac{(x-1)(x-4)}{x-5} = \frac{(5+0-1)(5+0-4)}{5+0-5} = \frac{4 \cdot 1}{+0} = \infty.$$

$$b = \lim_{x \to 5-0} \frac{(x-1)(x-4)}{x-5} = \frac{(5-0-1)(5-0-4)}{5-0-5} = \frac{4 \cdot 1}{-0} = -\infty.$$

Оскільки границі справа та зліва не існують, тому в точці $x = 2$ маємо розрив другого роду.

3. Дослідимо функцію на наявність екстремумів використовуючи схему отриману в п. 3.3 цієї частини. Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x-5} \right)' = \frac{\left(x^2 - 5x + 4\right)' \cdot (x-5) - \left(x^2 - 5x + 4\right) \cdot (x-5)'}{(x-5)^2} =$$

$$= \frac{(2x-5)(x-5) - (x^2 - 5x + 4)}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x + 21}{(x-5)^2}.$$

За умови рівності похідної нулю знайдемо критичні точки:

$\frac{x^2 - 10x + 21}{(x-5)^2} = 0$, ця рівність може виконуватись лише в одному випадку – коли чисельник дорівнює нулю, тобто: $x^2 - 10x + 21 = 0$, звідки $x_1 = 3$ та $x_2 = 7$, маємо дві критичні точки $x_1 = 3$ та $x_2 = 7$. У точці $x = 5$ похідна не існує, однак ця точка не належить області визначення функції. Матимемо чотири інтервали: $(-\infty; 3)$, $(3; 5)$, $(5; 7)$ та $(7; \infty)$. Установимо знак похідної на цих інтервалах: $y'(0) = \frac{0^2 - 10 \cdot 0 + 21}{(0-5)^2} = \frac{21}{25} > 0$,

$$y'(4) = \frac{4^2 - 10 \cdot 4 + 21}{(4-5)^2} = -3 < 0,$$

$$y'(6) = \frac{6^2 - 10 \cdot 6 + 21}{(6-5)^2} = -3 < 0,$$

$$y'(8) = \frac{8^2 - 10 \cdot 8 + 21}{(8-5)^2} = \frac{5}{9} > 0.$$

Побудуємо допоміжну таблицю.

x	$(-\infty;3)$	3	$(3;5)$	5	$(5;7)$	7	$(7;\infty)$
$f'(x)$	+	0	–		–		+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Установимо інтервали опуклості та вгнутості:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(x^2-10x+21\right)'(x-5)^2 - \left(x^2-10x+21\right)\left((x-5)^2\right)'}{(x-5)^4} =$$

$$\frac{(2x-10)(x-5)^2 - 2\left(x^2-10x+21\right)(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{8}{(x-5)^3}.$$

7. Точок перегину у цієї функції немає, оскільки друга похідна $y'' = \dfrac{8}{(x-5)^3}$ не дорівнює нулю при жодному x, однак у точці $x = 5$, друга похідна не існує, тому з'ясуємо знак другої похідної на інтервалах $(-\infty;5)$ та $(5;\infty)$. Матимемо $y''(4) = \dfrac{8}{(1-5)^3} = -8$, $y''(6) = \dfrac{8}{(6-5)^3} = 8$.

Побудуємо допоміжну таблицю.

x	$(-\infty;5)$	0,5	$(5;\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Функція $f(x)$ на інтервалі $(-\infty;5)$ опукла, оскільки друга її похідна на цьому інтервалі від'ємна, на інтервалі $(-\infty;5)$ вгнута, оскільки $f''(x) > 0$.

8. Оскільки границя функції $\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ у точці $x = 5$ не існує, тобто $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+4}{x-5} = \infty$, маємо вертикальну асимптоту рівняння якої має вигляд $x = 5$. Установимо, чи є у функції похилі асимптоти, якщо вони є, то

отримаємо їх рівняння у вигляді $y = kx + b$. Спочатку знайдемо , коефіцієнт k за формулою : $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x-5}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5x+4}{x(x-5)}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2(1-5/x+4/x^2)}{x^2(1-5/x)}\right) = 1.$$

Обчислимо коефіцієнт b за формулою

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5x+4}{x-5} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x+4-x^2+5x}{x-5} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-5} = 0 .$$

Таким чином, рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = x$. Згідно з отриманими даними будуємо графік функції (рис. 103).

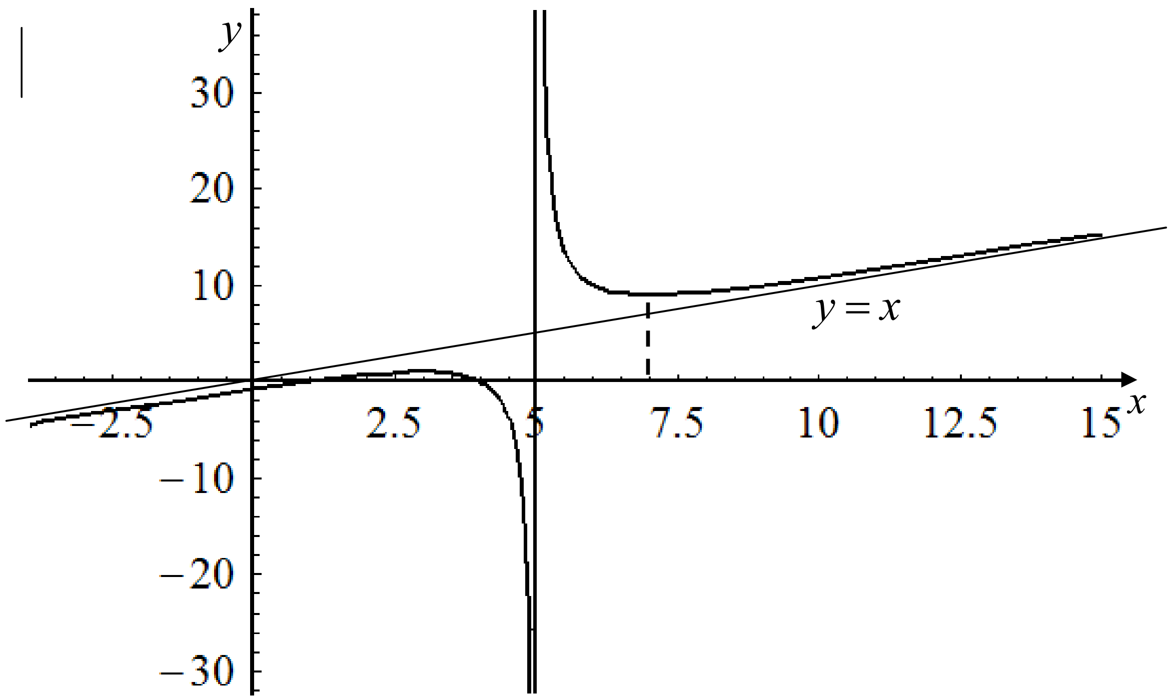


Рис. 103

Контрольна робота № 5

Завдання 1. Обчислити похідну функції:

1.

a) $y = \frac{1}{x} + 5\sqrt[5]{x^7} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$, b) $y = x^5 \sin x$,

c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$, d) $y = \left(arctg\sqrt{x}\right)^2$.

2.

a) $y = \frac{1}{x^2} - 10\sqrt[5]{x^8} - \frac{8}{\sqrt[4]{x^3}}$, b) $y = x^4 \cos x$,

c) $y = \frac{arctgx}{1+x^2}$, d) $y = \ln^3\left(1+x^2\right)$.

3.

a) $y = \frac{1}{x^3} + 5\sqrt[5]{x^9} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$, b) $y = x^3 tgx$,

c) $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$, d) $y = \sqrt{arcctg\sqrt{x}}$.

4.

a) $y = \frac{1}{x^4} - 8\sqrt[4]{x^7} + \frac{3}{\sqrt[6]{x}}$, b) $y = x^2 ctgx$,

c) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$, d) $y = \frac{1}{\arccos\sqrt{x}}$.

5.

a) $y = \frac{1}{x^5} + 5\sqrt[5]{x^6} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, b) $y = x^5 5^x$,

c) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, d) $y = tg^2 3x$.

6.

a) $y = \frac{1}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, b) $y = x^6 \log_3 x$,

c) $y = \frac{e^x}{x^3}$, d) $y = \sin^3 5x$.

7.

a) $y=\frac{1}{x^7}+8\sqrt[4]{x^5}-\frac{15}{\sqrt[5]{x^2}}$, b) $y=x^5e^x$,

c) $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$, d) $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^3$.

8.

a) $y=\frac{1}{x^8}+6\sqrt[3]{x^2}-\frac{10}{\sqrt[5]{x^3}}$, b) $y=x^4\ln x$,

c) $y=\frac{arcctgx}{1+x^2}$, d) $y=e^{\sin 5x}$.

9.

a) $y=\frac{1}{x^9}-3\sqrt[3]{x^5}+\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}$, b) $y=x^3\arcsin x$,

c) $y=\frac{\ln x}{\sin x}$, d) $y=\sqrt{ctg2x}$.

10.

a) $y=\frac{1}{x^{10}}+4\sqrt{x^3}-\frac{8}{\sqrt[4]{x}}$, b) $y=x^2\arccos x$,

c) $y=\frac{e^x}{\cos x}$, d) $y=e^{ctg4x}$.

11.

a) $y=\frac{1}{x}+5\sqrt[5]{x^8}-\frac{15}{\sqrt[3]{x}}$, b) $y=xarcctgx$,

c) $y=\frac{\ln x}{\cos x}$, d) $y=ctg^2 4x$.

12.

a) $y=\frac{1}{x^2}-5\sqrt[5]{x^9}+\frac{12}{\sqrt[6]{x}}$, b) $y=x^7arctgx$,

c) $y=\frac{e^x}{\sin x}$, d) $y=\sqrt[3]{\ln\left(1+x^3\right)}$.

13.

a) $y=\frac{1}{x^3}+4\sqrt[4]{x^7}-\frac{4}{\sqrt{x}}$, b) $y=x^6\sin x$,

c) $y=\frac{\arcsin x}{x^2}$, d) $y=\cos^4 3x$.

14.

a) $y=\frac{1}{x^4}-10\sqrt[5]{x^6}+\frac{10}{\sqrt[5]{x}}$, b) $y=x^5\cos x$,

c) $y=\frac{\arccos x}{x^3}$, d) $y=\ln ctg 4x$.

15.

a) $y=\frac{1}{x^5}-6\sqrt[3]{x^4}+\frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$, b) $y=x^4 tgx$,

c) $y=\frac{\log_3 x}{x}$, d) $y=\sqrt[4]{\sin 4x}$.

16.

a) $y=\frac{1}{x^6}+2\sqrt[4]{x^5}-\frac{10}{3\sqrt[5]{x^3}}$, b) $y=x^3 ctgx$,

c) $y=\frac{x}{\log_5 x}$, d) $y=\frac{1}{\sin^2 3x}$.

17.

a) $y=\frac{1}{x^7}-3\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$, b) $y=x^3 3^x$,

c) $y=\frac{1+\sin x}{\cos x}$, d) $y=\frac{1}{arctgx^2}$.

18.

a) $y=\frac{1}{x^8}+6\sqrt[3]{x^5}-\frac{8}{\sqrt[4]{x}}$, b) $y=x\log_5 x$,

c) $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, d) $y=\sqrt{\arcsin x^2}$.

19.

a) $y=\frac{1}{x^9}-2\sqrt{x^3}+\frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$, b) $y=x^7e^x$,

c) $y=\frac{1-\sin x}{\cos x}$, d) $y=\frac{1}{\ln^3(1+x)}$.

20.

a) $y=\frac{1}{x^{10}}+10\sqrt[5]{x^7}-\frac{6}{\sqrt[4]{x^3}}$, b) $y=x^6\ln x$,

c) $y=\frac{x^2}{e^x}$, d) $y=\sqrt{\sin 6x}$.

21.

a) $y=\frac{1}{x}+\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^9}-\frac{6}{\sqrt{x}}$, b) $y=x^5\arcsin x$,

c) $y=\frac{\sin x}{\ln x}$, d) $y=\frac{1}{\sqrt{tg 4x}}$.

22.

a) $y=\frac{1}{x^2}-\frac{8}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{5}{2\sqrt[5]{x}}$, b) $y=x^4\arccos x$,

c) $y=\frac{\cos x}{e^x}$, d) $y=e^{\sqrt{\sin x}}$.

23.

a) $y=\frac{1}{x^3}+\frac{5}{3}\sqrt[5]{x^6}-\frac{9}{2\sqrt[3]{x^2}}$, b) $y=x^3 arcctgx$,

c) $y=\frac{\cos x}{\ln x}$, d) $y=\sqrt[3]{tg 6x}$.

24.

a) $y=\frac{1}{x^4}-\frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{6\sqrt[5]{x^3}}$, b) $y=x^2 arctgx$,

c) $y=\frac{x^3}{\ln x}$, d) $y=e^{\sqrt{\cos x}}$.

25.

a) $y=\frac{1}{x^5}+\frac{2}{5}\sqrt[4]{x^5}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^4}}$, b) $y=xsinx$,

c) $y=\frac{1+x^2}{arctgx}$, d) $y=\frac{1}{\ln(sin3x)}$.

26.

a) $y=\frac{1}{x^6}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{\sqrt[4]{x}}$, b) $y=x^6\cos x$,

c) $y=\frac{1+x^2}{arcctgx}$, d) $y=\frac{1}{\ln^2 4x}$.

27.

a) $y=\frac{1}{x^7}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{15}{2\sqrt[5]{x^2}}$, b) $y=x^5 tgx$,

c) $y=\frac{\sin x}{e^x}$, d) $y=\left(\arccos x^2\right)^2$.

28.

a) $y=\frac{1}{x^8}-2\sqrt{x^3}+\frac{2}{3\sqrt[4]{x^3}}$, b) $y=x^4 ctgx$,

c) $y=\frac{x^2}{\arcsin x}$, d) $y=e^{\sqrt[3]{\cos x}}$.

29.

a) $y=\frac{1}{x^9}+\frac{1}{7}\sqrt[5]{x^7}-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$, b) $y=x^2 2^x$,

c) $y=\frac{x^3}{\arccos x}$, d) $y=\frac{1}{\sqrt{ctg2x}}$.

30.

a) $y=\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{4}\sqrt[5]{x^8}+\frac{3}{\sqrt[6]{x}}$, b) $y=x^2\log_2 x$,

c) $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$, d) $y=e^{\arcsin x^2}$.

Завдання 2. Знайти похідну другого порядку функції

1. $y = x^2 \sin x$,
2. $y = x^4 \ln x$,
3. $y = x^3 \cos x$,
4. $y = \ln^2 x$,
5. $y = e^{-x^3}$,
6. $y = x^4 \ln x$,
7. $y = x^2 e^x$,
8. $y = \left(1 + x^2\right) arctgx$,
9. $y = \cos^2 x$,
10. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$,
11. $y = e^{-x^2}$,
12. $y = \ln \sin x$,
13. $y = \sqrt{1 + 2x}$,
14. $y = \cos x^2$,
15. $y = tgx$,
16. $y = \arccos x$,
17. $y = \dfrac{\cos x}{x}$,
18. $y = e^{\sin x}$,
19. $y = \ln\left(1 + x^2\right)$,
20. $y = \sin^2 x$,
21. $y = arcctgx$,
22. $y = e^{\cos x}$,
23. $y = \sin x^2$,
24. $y = ctgx$,
25. $y = \arcsin x$,
26. $y = \dfrac{\sin x}{x}$,
27. $y = \ln \sqrt{x + x^2}$,
28. $y = \ln \cos x$,
29. $y = 2^{-x^2}$,
30. $y = \log_2 (1 + x)$.

Завдання 3. Використовуючи диференціал знайти наближене значення функції $y = f(x)$ в точці $x = a$

1. $y = \sqrt{x}$, $a = 4.5$;
2. $y = \sqrt{x}$, $a = 3.5$;
3. $y = \sqrt{x}$, $a = 8$;
4. $y = \sqrt{x}$, $a = 10$;
5. $y = \sqrt{x}$, $a = 15$;
6. $y = \sqrt{x}$, $a = 17$;
7. $y = \sqrt{x}$, $a = 24$;

8. $y = \sqrt{x}$, $a = 26$;

9. $y = \sqrt{x}$, $a = 35$;

10. $y = \sqrt{x}$, $a = 37$;

11. $y = \sqrt{x}$, $a = 50$;

12. $y = \sqrt{x}$, $a = 48$;

13. $y = \sqrt{x}$, $a = 60$;

14. $y = \sqrt{x}$, $a = 66$;

15. $y = \sqrt{x}$, $a = 80$;

16. $y = \sqrt{x}$, $a = 95$;

17. $y = \sqrt{x}$, $a = 105$;

18. $y = \sqrt{x}$, $a = 120$;

19. $y = \sqrt{x}$, $a = 50$;

20. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 7$;

21. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 9$;

22. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 30$;

23. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 25$;

24. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 60$;

25. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 65$;

26. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 120$;

27. $y = \sqrt[3]{x}$, $a = 130$;

28. $y = \sqrt[4]{x}$, $a = 15$;

29. $y = \sqrt[4]{x}$, $a = 17$;

30. $y = \sqrt[5]{x}$, $a = 30$.

Завдання 4. Дослідити функцію та побудувати її графік

1.

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$; б) $y = 3e^{-\frac{(x-1)^2}{12.5}}$; в) $y = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{4x + 4}$.

2.

а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$; б) $y = 3e^{-\frac{(x-2)^2}{12.5}}$; в) $y = \dfrac{x^2 + 10x + 13}{4x + 4}$.

3.

а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$; б) $y = 3e^{-\frac{(x-3)^2}{12.5}}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 10x + 13}{4 - 4x}$.

4.

а) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 14$; б) $y = 3e^{-\frac{(x+1)^2}{12.5}}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{4x - 4}$.

5.

а) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + \dfrac{1}{3}$; б) $y = 3e^{-\frac{(x+2)^2}{12.5}}$; в) $y = \dfrac{6 - x^2}{2x - 4}$.

6.

а) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 20x - 9\dfrac{1}{3}$; б) $y = 3e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{4 - 2x}$.

7.

а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 18x - 16\dfrac{1}{2}$; б) $y = 3e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$; в) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{2 - 2x}$.

8.

а) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1\dfrac{2}{3}$; б) $y = 3e^{-\frac{(x-3)^2}{18}}$; в) $y = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{2x + 2}$.

9.

а) $y = \dfrac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x - 2\dfrac{2}{3}$; б) $y = 3e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$; в) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 12}{2x + 2}$.

10.

а) $y=\frac{2}{3}x^3+5x^2+8x-1\frac{1}{3}$; б) $y=3e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$; в) $y=\frac{x^2+6x+6}{2x+4}$.

11.

а) $y=\frac{2}{3}x^3+7x^2+20x+9\frac{1}{3}$; б) $y=3e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}$; в) $y=\frac{x^2}{4x+8}$.

12.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2+18x+17$; б) $y=2e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$; в) $y=\frac{3+x^2}{2-2x}$.

13.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+2\frac{2}{3}$; б) $y=3e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}$; в) $y=\frac{x^2}{8-4x}$.

14.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x-5$; б) $y=3e^{-\frac{(x+3)^2}{18}}$; в) $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$.

15.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-5x^2+21x-18$; б) $y=3e^{-\frac{(x+4)^2}{18}}$; в) $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$.

16.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$; б) $y=3e^{-\frac{(x+5)^2}{18}}$; в) $y=\frac{x^2+5x+8}{x+2}$.

17.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4$; б) $y=2e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2+x+4}{x+1}$.

18.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+3x^2+5x-3$; б) $y=2e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$.

19.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+4x^2+12x+5$; б) $y=2e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-3x}{x+1}$.

20.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+5x^2+21x+17\frac{1}{3}$; б) $y=2e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-3x-4}{x-1}$.

21.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x+7$; б) $y=2e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-2x+2}{1-x}$

22.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+14x-2\frac{2}{3}$; б) $y=2e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-x+9}{x-1}$.

23.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+7\frac{5}{6}$; б) $y=2e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2}{4-x}$.

24.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+2\frac{2}{3}$; б) $y=2e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-6x+9}{2-x}$.

25.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x-3\frac{1}{2}$; б) $y=2e^{-\frac{(x+2)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$.

26.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+6x-6$; б) $y=2e^{-\frac{(x+4)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$.

27.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x-8\frac{2}{3}$; б) $y=2e^{-\frac{(x+5)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-4x+7}{2-2x}$.

28.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2+14x+1\frac{5}{6}$; б) $y=2e^{-\frac{(x+6)^2}{8}}$; в) $y=\frac{x^2-2x-7}{2x+4}$.

29.

а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{2}x^2+24x-16{,}5$; б) $y=3e^{-\frac{(x+6)^2}{18}}$; в) $y=\frac{x^2+6x-3}{4x-4}$.

30.

а) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{2}x^2+24x+15\frac{2}{3}$; б) $y=3e^{-\frac{(x+3)^2}{12.5}}$; в) $y=\frac{x^2-3x-4}{2-x}$.

IV. Диференціальне числення функції декількох змінних

Під час вивчення багатьох завдань природничих наук, економіки та інших напрямів можна спостерігати залежність певної величини не тільки від однієї змінної, а від двох, трьох і більше незалежних змінних. Наприклад, опір провідника електричного струму залежить від довжини провідника, площі його перетину, температури, матеріалу, з якого він виготовлений і ще від інших величин.

Якщо незалежні змінні позначити через $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, а літерою u залежну від них величину, тоді функція n змінних буде мати такий вид

$$u=f\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right).$$

Функцію двох змінних позначають так: $z=f\left(x;y\right)$, $z=z\left(x;y\right)$ або $F\left(x;y;z\right)=0.$

Визначення. Змінна величина z називається функцією двох незалежних змінних x та y, якщо кожній парі значень x, y із множини D за певним правилом або законом ставиться у відповідність одне значення z із множини E.

Множина D називається областю визначення функції z, а множина E – областю її значень. Змінні x та y відносно функції z називаються її аргументами.

Частинним значенням аргументів $\left(x_0;y_0\right)\in D$ відповідає частинне значення функції $z_0=f\left(x_0;y_0\right)\in E$.

1. Геометричний зміст функції двох змінних

У прямокутній системі координат у просторі $OXYZ$ область визначення функції двох змінних може бути представлена деякою множиною точок $(x;y)$ координатної площини Oxy. Нехай точці $P(x;y)$ цієї області відповідає визначене значення функції $z=f(P)$. Це значення приймемо за зетову координату (аплікату) точки M.

Таким чином, поставивши у відповідність кожній точці $(x;y)\in D(z)$ аплікату $z=f(x;y)$, ми отримаємо деяку множину точок $(x;y;z)$ тримірного простору, тобто деяку поверхню. Тому рівність $z=f(x;y)$ називають рівнянням поверхні, подібно до того як функцію однієї змінної $y=f(x)$ називають рівнянням лінії. Геометричний образ (графік) функції $z=f(x;y)$ показаний на рис. 104.

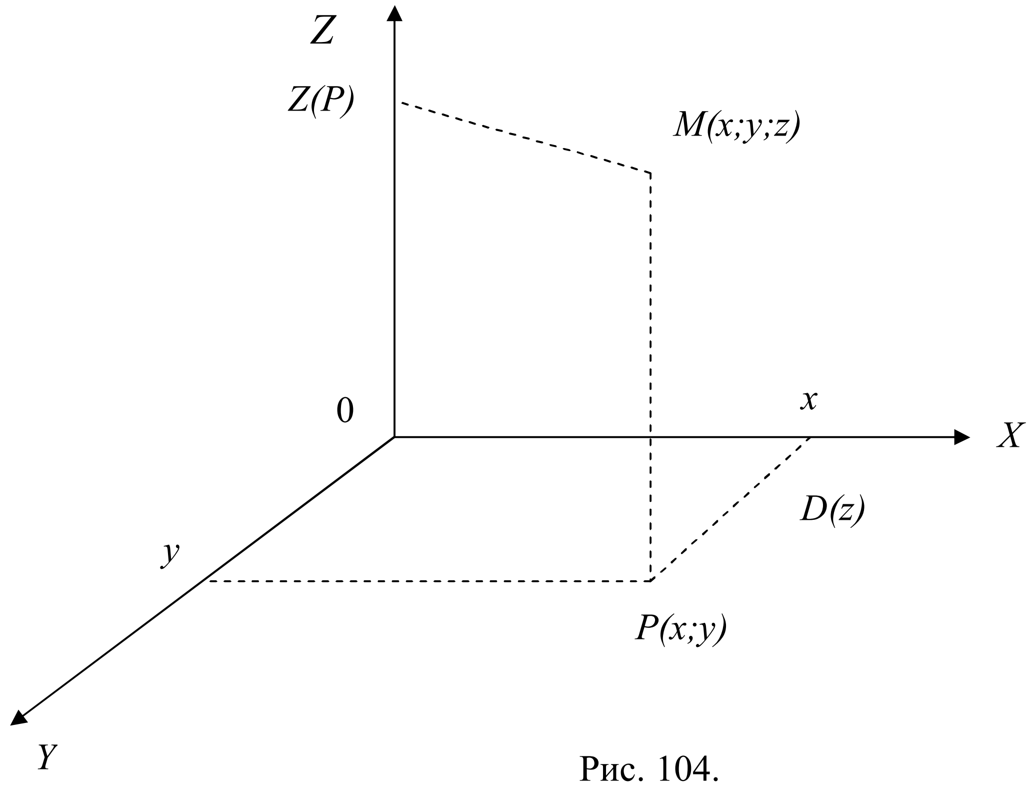


Рис. 104.

Можна вивчити поверхню за допомогою перетину її площини, паралельними площині Oxy.

Нехай $z=c$ (c – деяка стала). Тоді тримаємо залежність між змінними x та y:

$$c=f(x;y).$$

Це є рівняння проекції на площину Oxy лінії перетину поверхні $z=f(x;y)$ з площиною $z=c$.

Визначення. Лінією рівняння функції $z=f(x;y)$ називається лінія на площині Oxy в кожній точці якої функція зберігає стале значення (ізолінія). При різних c отримаємо різні лінії рівняння для цієї функції .

Поняттям «лінії рівняння» користуються в картографії. Там лінії рівня – це лінії, на яких висота точок земної поверхні над рівнем моря має одне і теж значення. Можна говорити не тільки про рівень окремої точки місцевості відносно рівня моря, а і про характер рельєфу, що особисто важливо, якщо місцевість гориста.

Приклад. Побудувати лінії рівня функції:

$$z=x^2-y^2.$$

Лінії рівня заданої функції визначаються рівнянням $x^2-y^2=c$. Визначаючи c різні значення отримаємо сімейство ліній рівня, що є рівносторонніми гіперболами (рис. 105).

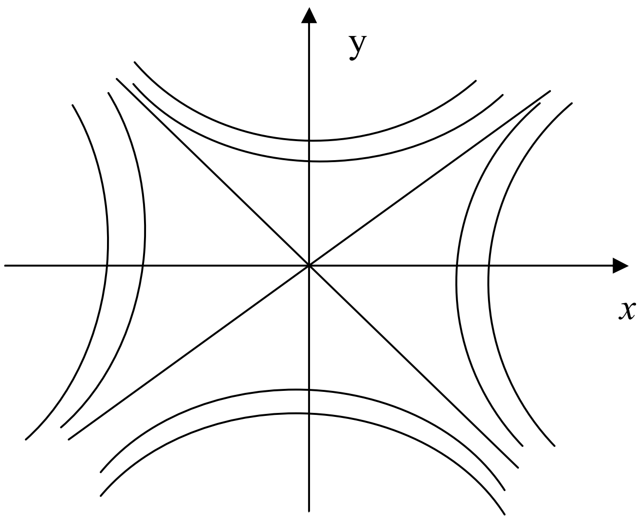


Рис. 105

При $c=0$ отримаємо $x^2-y^2=0,$ або $(x-y)(x+y)=0$. Це означає, що асимптоти гіпербол $x-y=0$ *і* $x+y=0$ (бісектриси координатних кутів) також належать до числа ліній рівня. Аналогічно вводяться поняття «поверхні рівня» для функції трьох незалежних змінних.

Визначення. Поверхню рівня функції $u = f(x;y;z)$називається поверхня в просторі $Oxyz$, у точках якої функція зберігає стале значення (ізоповерхні).

Рівнянням поверхні рівня, яке відповідає значенню $u = c$, буде:

$$f(x;y;z) = c.$$

Нехай, наприклад, задана функція $u = x^2 + y^2 + z^2$. Тоді поверхнями рівняння будуть сфери $x^2 + y^2 + z^2 = c$ з центром на початку координат і радіусом $R = \sqrt{c}$.

2.Частинні похідні функції двох змінних, їх геометричний зміст

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякій області D. Якщо незалежна змінна x отримала приріст Δx, а змінна y залишилася сталою $y = const$, то різниця $f(x+\Delta x;y) - f(x;y) = \Delta z$ (або $\Delta f(x;y)$ називається частинним приростом функції двох змінних $(x;y)$по змінній x. Аналогічно частинний приріст по змінній y при $x = const$ буде мати вигляд:

$$\Delta_y z = f(x;y+\Delta y) - f(x;y)$$

Розглядаючи зміну z залежно тільки від зміни одного аргументу, фактично переходимо до функції однієї змінної.

Визначення. Частинною функцією $z = f(x;y)$ похідною називається відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту Δx за умови прямування Δx до нуля. Тобто

$$z_x^/ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається частинна похідна функції $z = f(x;y)$ за змінною y:

$$z_y^/ = \lim \frac{\Delta_y z}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Крім позначення частинних похідних $z_x^/, z_y^/$ використовуються ще такі позначення: $f_x^/(x;y)$, $f_y^/(x;y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Для функції n – змінних $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ частинна похідна функції u за змінною $x_i\left(i = 1, 2...n\right)$ дорівнює границі відношення частинного приросту функції за змінною x_i $\Delta_{xi}u$ до приросту цієї змінної Δx_i за умови прямування Δx_i до нуля, тобто:

$$u'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_i u}{\Delta x_i}.$$

Оскільки кожна частинна похідна є фактично похідною однієї змінної (інші змінні залишаються сталими), то у разі обчислення частинних похідних користуються відомими правилами диференціювання і формулами таблиці похідних функції однієї змінної.

З`ясуємо *геометричний зміст* частинних похідних функції двох змінних. Оскільки графіком функції $z = f\left(x; y\right)$ є поверхня (рис. 106) то площина $x = const$ перетинає цю поверхню по лінії *PT*.

Точці $M\left(x; y\right)$ площини Oxy відповідає точка поверхні $P\left(x; y; z\right)$. Залишаючи x сталим і змінюючи тільки y (*Δy=MN=PT′* – приріст аргументу y) бачимо, що функції z відповідає приріст $\Delta_y z = TT'$ (точці $N\left(x; y + \Delta y\right)$ відповідає точка $T\left(x; y + \Delta y; z + \Delta z\right)$на поверхні $z = f\left(x; y\right)$.

Відношення $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ дорівнює тангенсу кута, який утворює січна *PT* з додатним напрямом осі OY:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = tg\angle TPT'.$$

Отже, границя $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = z'_y$ дорівнює тангенсу кута β, утвореного дотичною *PB* для кривої *PT* в точці *P* з додатним напрямом осі OY: $z'_y = tg\beta$.

Таким чином, частинна похідна z'_y чисельно дорівнює тангенсу кута β між віссю OY і дотичною до кривої, утвореної у разі перетину поверхні $z = f\left(x; y\right)$ з площиною $x = const$.

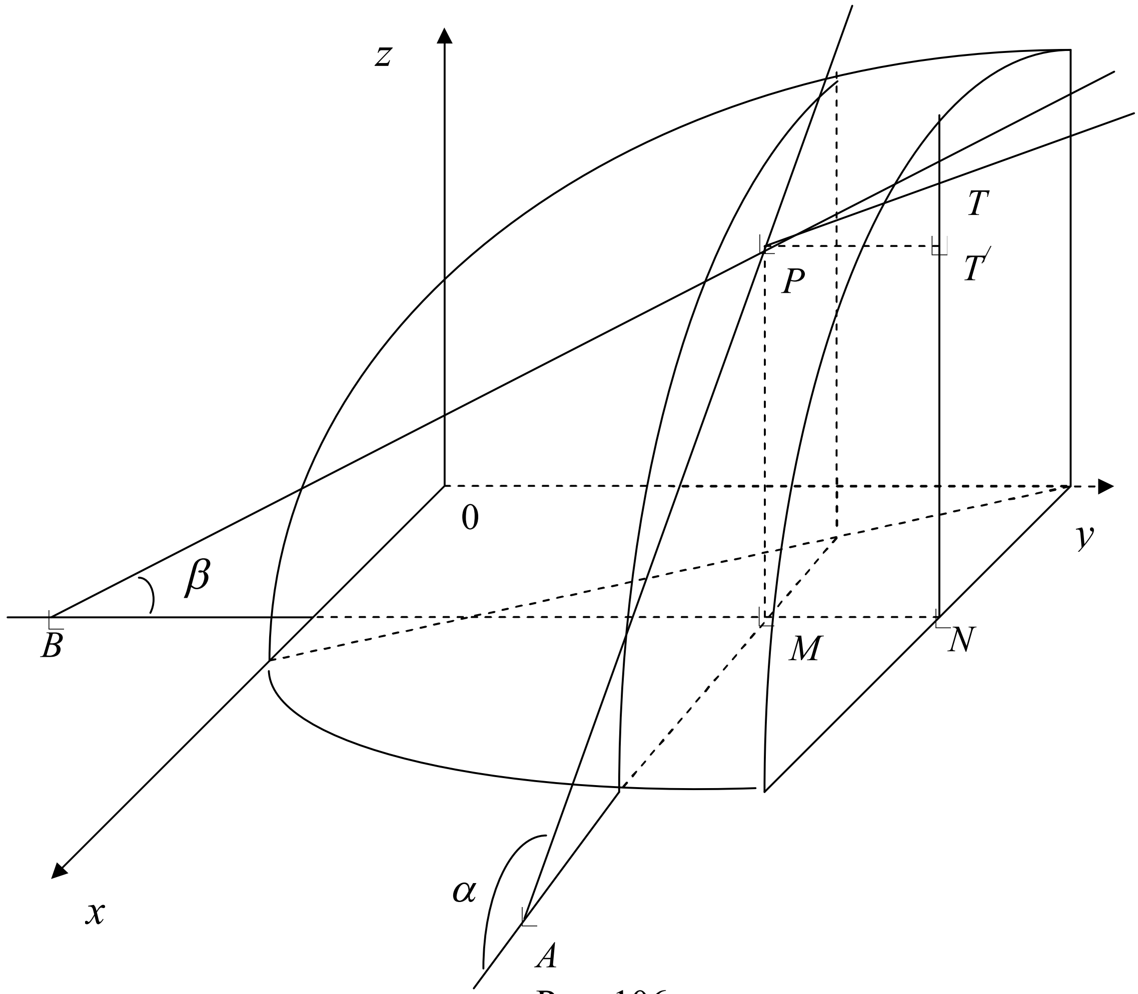


Рис. 106

Аналогічно частина похідна $z_x^{/}$ чисельно дорівнює тангенсу кута між віссю Ox і дотичною до кривої, утвореної у разі перетину поверхні $z = f\left(x; y\right)$ з площиною $y = const$.

3.Повний диференціал функції двох змінних і його застосування в наближених обчисленнях

Повний приріст функції

У разі знаходження частинних похідних функції двох змінних розглядалися частинні прирости функції, коли тільки один з аргументів отримував приріст. Розглянемо тепер повний приріст, який отримає функція у разі зміни обох її аргументів.

Нехай задана неперервна функція $z = f\left(x; y\right)$. Припустимо, що її аргументи $x \; i \; y$ отримали відповідно прирости $\Delta x \; i \; \Delta y$. Тоді функція $z = f\left(x; y\right)$ буде мати повний приріст Δz, який визначається за формулою:

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x; y+\Delta y\right) - f\left(x; y\right). \qquad (111)$$

Геометрично повний приріст функції Δz дорівнює приросту аплікати графіка функції $z = f\left(x; y\right)$ при переході із точки $P\left(x; y\right)$ у точку $P_1\left(x+\Delta x; y+\Delta y\right)$ (рис. 107).

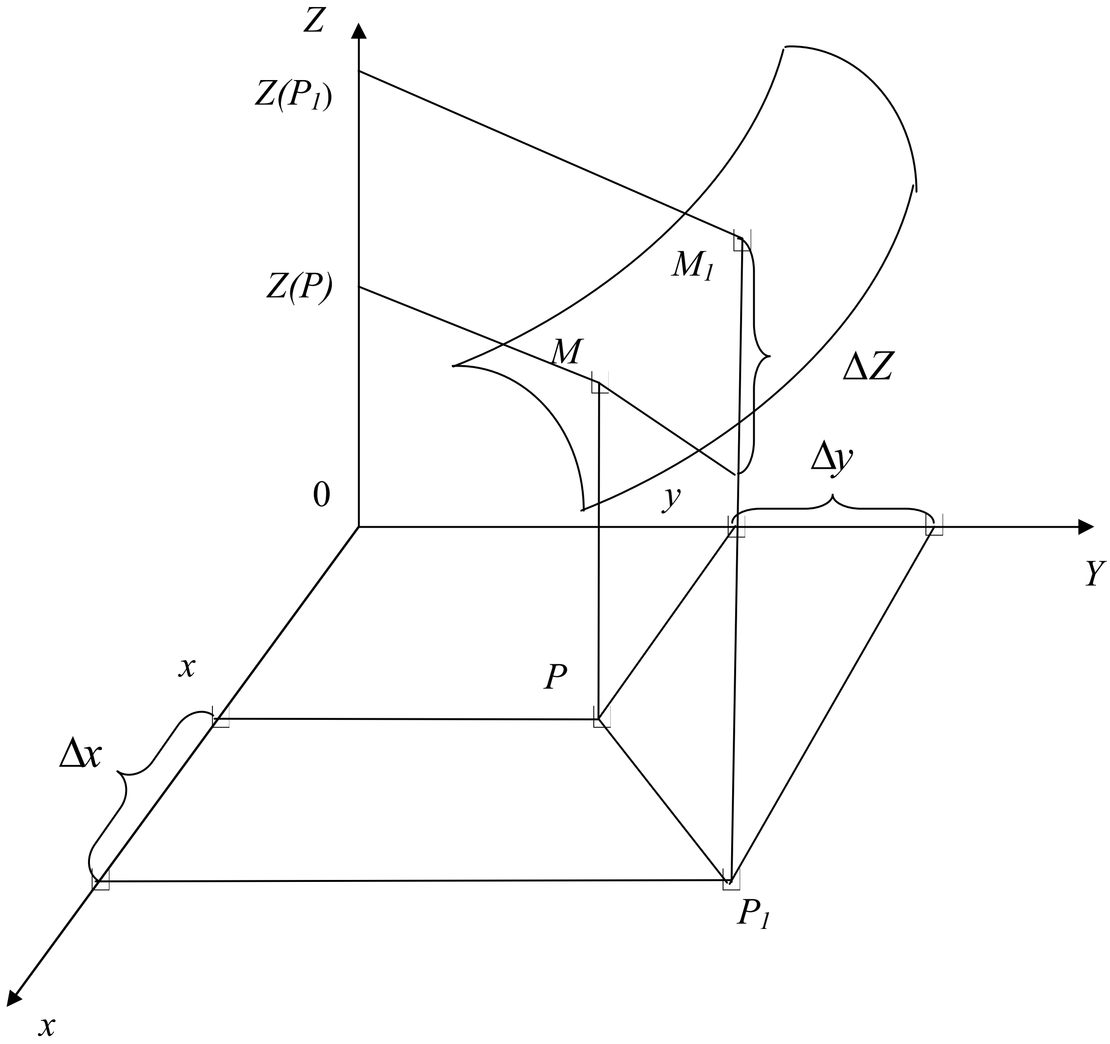


Рис. 107

Відмітимо, що повний приріст у загальному випадку не дорівнює сумі частинних прирості, тобто: $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$. Наприклад, для $z = xy$ маємо:

$$\Delta_x = y\Delta x; \quad \Delta_y z = x\Delta y; \quad \Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

3.Повний диференціал функції двох змінних

Функція $z = f\left(x; y\right)$ називається диференціальною в точці (x;y), якщо її повний приріст у цій точці можна представити у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (112)$$

де A *і* B – деякі незалежні від Δx *і* Δy числа, а α *і* β нескінченно малі при $\Delta x \to 0;\ \ \Delta y \to 0$ і залежні від Δx *і* Δy функції.

Таким чином, якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в цій точці, то її повний приріст у цій точці складається з головної частини приросту $A\Delta x + B\Delta y$, лінійної відносно Δx *і* Δy і нелінійної частини $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, більш вищого порядку мализни, чим головна частина приросту.

Головна частина приросту функції $z = f(x; y)$, лінійна відносно Δx *і* Δy, називається повним диференціалом цієї функції.

Повний диференціал позначається символом dz або $df(x; y)$. Таким чином:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (113)$$

У виразі для диференціала $A\Delta x + B\Delta y$ величини *A* і *B* не залежать від Δx *і* Δy, але залежать від точки $P(x; y)$, в якій цей диференціал розглядається. Іншими словами *A* та *B* є функціями x та y. Вигляд цих функцій установлюється такою теоремою.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ у точці $P(x; y)$ диференційована (тобто має диференціал $A\Delta x + B\Delta y$), то вона має в точці $P(x; y)$ перші частинні похідні $z_x^{/}$ *і* $z_y^{/}$, причому:

$$z_x^{/} = A;\ \ z_y^{/} = B.$$

Доведення. Оскільки за умовою теореми дана функція в точці $P(x; y)$ диференційована, то її повний приріст Δz у цій точці знаходиться за формулою (112). Ця формула справедлива для яких завгодно достатньо малих Δx *і* Δy. Вона залишається справедливою також, якщо $\Delta y = 0$, а $\Delta x \neq 0$. Але тоді приріст функції Δz стає частинним приростом $\Delta_x z$ і рівняння (112) приймає такий вигляд:

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Розділимо обидві частини цього рівняння на Δx і переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x}.$$

Оскільки α – нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx при $\Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha}{\Delta x} = 0,$ а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A,$ тобто частинна похідна $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = z_x^/$ у точці $P(x; y)$ існує і дорівнює A. Аналогічно можна показати, що частинна похідна $z_y^/$ у точці $P(x; y)$ існує і дорівнює B.

Замінимо тепер у формулах (112) і (113) A і B частинними похідними $z_x^/ \; i \; z_y^/$, отримаємо:

$$\Delta z = z_x^/ \Delta x + z_y^/ \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \tag{114}$$

$$dz = z_x^/ \Delta x + z_y^/ \Delta y \tag{115}$$

Як і у випадку функції однієї змінної для приростів незалежних змінних справедливо $\Delta x = dx; \; \Delta y = dy$. Тобто вони дорівнюють своїм диференціалам. Тоді вираз для диференціала функції двох змінних можна подати як суму частинних диференціалів:

$$dz = d_x z + d_y z, \text{ де } d_x z = z_x^/ dx, \quad d_y z = z_y^/ dy$$

Застосування диференціала для наближених обчислень

Порівнюючи повний приріст функції двох змінних (114) з її диференціалом (115) бачимо, що різниця між ними $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$ прямує до нуля швидше ніж $\Delta x \; i \; \Delta y$, і тому при малих $|\Delta x| \; i \; |\Delta y|$ цим додатком можна знехтувати.

Тоді наближено справедливо:

$$\Delta z \approx z_x^/ \Delta x + z_y^/ \Delta y, \tag{116}$$

тобто приріст функції приблизно дорівнює її повному диференціалу. Звідси випливає формула застосування диференціала для наближених обчислень

$$f(x_0 + \Delta x; y + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f_x^/(x_0; y_0)\Delta x + f_y^/(x_0; y_0)\Delta y \tag{117}$$

або

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0; y_0) + f_x^/(x_0; y_0)\Delta x + f_y^/(x_0; y_0)\Delta y \tag{118}$$

Остання є формула наближеного значення функції в точці $M_1(x_0 + \Delta x; \; y_0 + \Delta y)$, якщо відомі $f(x_0; y_0)$, $f_x^/(x_0; y_0)$, $f_y^/(x_0; y_0)$ та $\Delta x \; i \; \Delta y$.

Аналогічні наближені формули можна вивести й для функції трьох змінних:

$$u\left(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z\right)=u\left(x;y;z\right)+u_x^{/}\left(x;y;z\right)+ \\ +u_y^{/}\left(x;y;z\right)+u_z^{/}\left(x;y;z\right) \tag{119}$$

Приклад 1. Обчислити наближено $arctg\dfrac{1,02}{0,95}$, на підставі значення функції $z=arctg\dfrac{y}{x}$, при $x=1;\ y=1.$

Розв'язання. Значення функції z при $x=1;\ y=1 \in z=arctg\left(\dfrac{1}{1}\right)=\dfrac{\pi}{4}\cong 0,785$. Знайдемо приріст Δz наближено в якій завгодно точці:

$$\Delta z\approx dz=z_x^{/}\Delta x+z_y^{/}\Delta y=-\frac{y\Delta x}{x^2+y^2}+\frac{x\Delta y}{x^2+y^2}.$$

А в точці $(1;1)$ і при $\Delta x=-0,05\ i\ \Delta y=0,02$:

$$\Delta z=-\frac{1(-0,05)}{1+1}+\frac{1\cdot 0,02}{1+1}=0,035.$$

Отже, $arctg\dfrac{1,02}{0,95}\approx arctg\dfrac{1}{1}+\Delta z=0,785+0,035=0,82.$

Задана функція $z=f\left(x;y\right)$ та дві точки $A(x_0;y_0)\ i\ B\left(x_1;y_1\right)$. На підставі точного значення функції в точці A , знайти наближене значення функції в точці B за формулою $f\left(x_1;y_1\right)\approx f\left(x_0;y_0\right)+dz\left(A\right)$.

Контрольна робота № 6

1. $z=x^y$;	A(1;3),	B(1,02; 2,97).
2. $z=\sqrt{x^2+y^2}$;	A(3;4),	B(2,96; 4,05).
3. $z=\sqrt{2x-5y^2}$;	A(3;1),	B(3,02; 0,97).
4. $z=arctg\dfrac{x}{y}$;	A(1;1),	B(1,03; 0,95).
5. $z=\sqrt[3]{x^2+3y^2}$;	A(4;4),	B(3,94; 4,10).
6. $z=\ln\left(x-\sqrt{y}\right)$;	A(2;1),	B(2,04; 0,98).
7. $z=x^2+5y^2-x+2y$	A(-2;-3),	B(-2,01;-2,98).

8. $z = 3x^2 - xy + 4x - 6$; A(1;-2), B(1,03; -2,03).

9. $z = xy - 6x^2 + 3y$; A(3;-2), B(2,99; -2,02).

10. $z = 3x^2 + 2y^2 - 5xy + 1$; A(2;1), B(2,03; 0,97).

11. $z = 4xy - 7x + 8y$; A(-4;3), B(-3,98; 2,99).

12. $z = x^2 - 3xy - 3y^2$; A(1;4), B(0,97; 4,02).

13. $z = 4 - x^2 - 2xy^2$; A(-3;3), B(-2,98; 2,99).

14. $z = 5x + 3y - 6xy$; A(5;-1), B(5,02; -1,03).

15. $z = x^2 + 4y^2 - xy + 6$; A(2;2), B(1,99; 2,04).

16. $z = xy + y^2 - 8x$; A(-1;3), B(-1,02; 3,01).

17. $z = x^2 + xy + y^2$ A(1;2), B(1,02; 1,96).

18. $z = 3x^2 - xy + x + y$; A(1;3), B(1,06; 2,92).

19. $z = x^2 + 3xy - 6y$; A(4;1), B(3,96; 1,03).

20. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; A(2;3), B(2,02; 2,97).

21. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; A(2;1), B(1,96; 1,04).

22. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; A(2;4), B(1,98; 3,91).

23. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$; A(-1;3), B(-0,98; 2,97).

24. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$; A(3;3), B(3,02; 2,98).

25. $z = 2xy + 3y^2 - 5x$ A(3;4), B(3,04; 3,95).

26. $z = xy + 2y^2 - 2x$ A(1;2), B(0,97; 2,03).

4.Частинні похідні і диференціали вищих порядків

Нехай частинні похідні $f_x^{/}(x;y)$ *і* $f_y^{/}(x;y)$ функції $z = f(x;y)$ визначені в околі деякої точки. У свою чергу вони є функціями двох змінних і можуть мати похідні за тими ж змінними. Самі $f_x^{/}(x;y)$ *і* $f_y^{/}(x;y)$ називаються частинними похідними першого порядку, а похідні від них – похідними другого порядку. Вони позначаються так:

$$\left(z_x^{/}\right)_x^{/} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = f_{xx}^{//}(x;y) = z_{xx}^{//},$$

$$\left(z_x^{/}\right)_x^{/} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}^{//}(x;y) = z_{xy}^{//},$$

(похідні від $z_x^{/}$ по x і по y):

$$\left(z_y^{/}\right)_y^{/} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}^{//}\left(x;y\right) = z_{yy}^{//},$$

$$\left(z_y^{/}\right)_x^{/} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}^{//}\left(x;y\right) = z_{yx}^{//},$$

(похідні від $z_x^{/}$ по y і по x). Величини $z_{xy}^{//}$ *і* $z_{yx}^{//}$ називаються мішаними похідними.

Похідні другого порядку у свою чергу є функціями від змінних x та y. Від них також можна взяти похідні за цими змінними. Наприклад, $z_{x^2 y}^{///} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f_{x^3 y}^{///}\left(x;y\right)$ є частинна похідна третього порядку функції $f\left(x;y\right)$ продиференційована два рази по змінній x і один раз по y.

Частинні похідні для функції будь-якого числа змінних визначаються аналогічно.

Для мішаних частинних похідних справедлива така теорема: значення мішаної похідної не залежить від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad \left(z_{xy}^{//} = z_{yx}^{//}\right) \tag{120}$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y\ln x$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні:

$$z_x^{/} = \frac{y}{x}; \qquad z_y^{/} = \ln x.$$

Продиференціюємо перші похідні

$$z_{xx}^{//} = \left(z_x^{/}\right)_x^{/} = \left(\frac{y}{x}\right)_x^{/} = -\frac{y}{x^2}; \qquad z_{yy}^{//} = \left(z_y^{/}\right)_y^{/} = \left(\ln x\right)_x^{/} = 0$$

$$z_{xy}^{//} = \left(z_x^{/}\right)_y^{/} = \left(\frac{y}{x}\right)_y^{/} = \frac{1}{x}; \qquad z_{yx}^{//} = \left(z_y^{/}\right)_x^{/} = \left(\ln x\right)_x^{/} = \frac{1}{x}.$$

Твердження (61) виявилось правильним.

5.Екстремум функції двох змінних

Функція має екстремум у точці, якщо вона має екстремум чи мінімум у цій точці.

Функція $z = f(x;y)$ має локальний максимум у точці $M_0(x_0;y_0)$, якщо $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ для всіх точок $(x;y)$близьких, але не рівних $(x_0;y_0)$.

Функція $z = f(x;y)$ має локальний мінімум у точці $M_0(x_0;y_0)$, якщо $f(x_0;y_0) < f(x;y)$ для всіх точок $(x;y)$, але не рівних $(x_0;y_0)$.

Необхідна ознака існування екстремуму. Якщо функція $z = f(x;y)$ диференційована в точці $P_0(x_0;y_0)$ і має в ній екстремум, то в цій точці всі її частинні похідні дорівнюють нулю:

$$z_x^/(x_0;y_0) = 0; \qquad z_y^/(x_0;y_0) = 0 \tag{121}$$

або не існують.

Для доведення цього твердження розглянемо в околі точки P_0 тільки ті точки, для яких $y = y_0$. Отримана функція $f(x;y_0)$ є функцією однієї змінної x, яка має при $x = x_0$ екстремум. При цьому для екстремальної точки $f_x^/(x_0;y_0) = 0$ або не існує. Аналогічно в точці екстремуму $f_y^/(x_0;y_0) = 0$.

Ця умова необхідна, але недостатня. Наприклад, розглянемо функцію $z = xy$. Перші частинні похідні $z_x^/ = y;\ z_y^/ = x$ дорівнюють нулю в точці $P_0(0;0)$, отже ця точка є підозрілою на екстремум.

Однак екстремуму в ній функція $z = xy$ не має. У точці P_0 функція дорівнює нулю $z(P_0) = 0$, але в околі цієї точки є як додатні (в І і Ш-ій четвертях), так і від'ємні (в II і IV-ій четвертях) значення функції.

Достатня ознака існування екстремуму

Припустимо, що досліджувана функція $z = f(x;y)$ має неперервні частинні похідні першого і другого порядку $z_x^/;\ z_y^/;\ z_{xx}^{//};\ z_{xy}^{//};\ z_{yy}^{//};\ z_{yx}^{//}$. Нехай точка $(x_0;y_0)$ є точкою в якій виконується необхідна ознака існування екстремуму, тобто $f_x^/(x_0;y_0) = 0,\ f_y^/(x_0;y_0) = 0$. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці і для зручності позначимо:

$$f_{xx}^{//}\left(x_0;y_0\right)=A,\ f_{xy}^{//}\left(x_0;y_0\right)=f_{yx}^{//}\left(x_0;y_0\right)=B;\quad f_{yy}^{//}\left(x_0;y_0\right)=C,$$

і

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2. \tag{122}$$

Якщо $\Delta<0$, то в точці $\left(x_0;y_0\right)$екстремуму немає. Якщо ж $\Delta>0$, то екстремум функції є, причому це максимум, коли $A<0$, і мінімум, коли $A>0$.

Ознака не дає відповіді у випадку $\Delta=0$.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію:

$$z=x^2-xy+y^2-4x+5y+2.$$

Розв'язання: $z_x^/=2x-y-4;\quad z_y^/=-x+2y+5.$

$$\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ -x+2y+5=0 \end{cases}\Rightarrow\ x=1;\ y=-2.$$

У точці $P_0\left(1;-2\right)$ можливий екстремум. Знайдено другі частинні похідні в цій точці і за достатньою ознакою перевіримо чи має функція в ній екстремум.

$$z_{xx}^{//}=A=2;\qquad z_{xy}^{//}=B=-1;\qquad z_{yy}^{//}=c=2.$$

$$AC-B^2=4-\left(-1\right)^2=3>0.$$

Екстремум функція в т. $P_0\left(1;-2\right)$ має і оскільки $A>0$, то в ній буде мінімум.

$$z_{\min}=z\left(P\right)=1-1\left(-2\right)+\left(-2\right)^2-4\cdot 1+5\left(-2\right)+2=-5.$$

6.Метод найменших квадратів

У прикладних задачах залежність між змінними величинами x та y представляється у вигляді табличної функції – таблиці, отриманої в результаті спостережень або експерименту. Для вивчення закономірностей, які пов'язують ці змінні, важливо залежність між ними виразити аналітично, у вигляді формули. Кожна функція, яка наближено заміняє табличну функцію, отриману дослідним шляхом, називається емпіричною функцією (або емпіричною формулою).

Побудова емпіричної формули проводиться в такому порядку: 1) виявлення загального вигляду цієї формули; 2) визначення її параметрів та саме таких, щоб емпірична функція найкращим чином відповідала цим спостереженням.

У багатьох випадках вид залежності між змінними припускається відомим за якими-небудь теоретичними міркуваннями і завдання виміру емпіричної формули зводиться до визначення числових значень параметрів. Якщо характер залежності між змінними невідомий, то вид емпіричної формули може бути довільним. Перевага віддається простим формулам, які дають найкраще наближення до дослідних даних. Побудувавши спочатку графік за цими даними, порівнюють цей точковий графік з різними кривими, рівняння яких відомі, що дає можливість в ряді випадків вгадати залежності.

Частіше у разі підбору параметрів емпіричних формул користуються методом найменших квадратів, який можна сформулювати так: із формул виду $y = f(x)$ найбільш відповідною дослідним даним вважається та, для якої сума квадратів відхилень емпіричних даних від обчислених за формулою буде найменшою.

Нехай в результаті деяких спостережень отримано n значень y при відповідних значеннях незалежної змінної x. Результати подані в таблиці:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

У прямокутній системі координат XOY розглянемо кожну пару $(x_i; y_i)$ як координати точок M_i. Нехай, наприклад експериментальні точки розміщені на координатній площині так, як показано на рис. 108, 109.

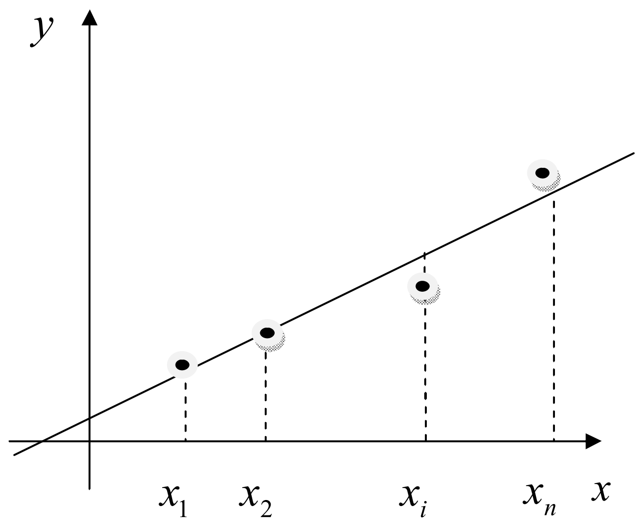


Рис. 108

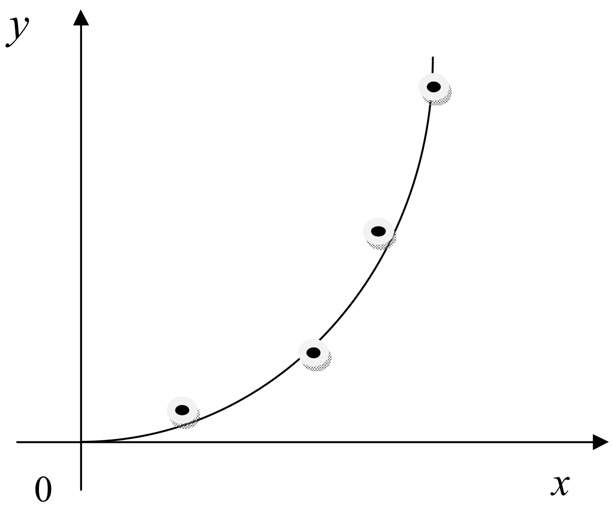


Рис. 109

Ураховуючи, що у разі проведення експерименту мали місце деякі похибки, природно припустити, що шукану функцію $y = f(x)$ можна шукати у вигляді лінійної функції.

Якщо емпіричні точки розміщені так, як показано на рис. 109, то пошук функції $y = f(x)$ можна знаходити у вигляді $y = ax^b$. Отже, залежно від того, уздовж якої кривої найбільш щільно розміщені експериментальні точки, в першому наближенні і вибирається вид аналітичної функції.

У разі вибраного вигляду функції $y = f(x, a, b, c, ...)$ залишається підібрати її параметри a, b, c так, щоб вона найкращим чином збігалася з результатами спостереження і описувала весь процес.

Розглянемо побудову емпіричної лінійної функції методом найменших квадратів (МНК). Припустимо, що між x і y існує лінійна залежність. Емпіричну функцію позначимо $y^* = ax + b$ і знаходимо невідомі параметри a і b. Різницю $y_i - y_i^*$ позначимо через δ_i і назвемо похибкою, або відхиленням у точці x_i, тобто $\delta_i = y_i - ax_i - b$. За МНК сума квадратів відхилень повинна бути найменшою. Отже, невідомі параметри a і b знаходять із умови, що

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2 \tag{123}$$

мала б найменше значення. Оскільки x_i та y_i – сталі (дані досліду), то вказана сума є функцією параметрів a і b, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = S(a;b).$$

Щоб знайти ці значення параметрів a і b, скористуємося необхідною ознакою екстремуму функції декількох змінних: знайдемо частинні похідні від функції $S(a;b)$ за змінними a і b і прирівняємо їх до нуля.

$$S_a^{/}(a;b) = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) x_i = 0;$$

$$S_b^{/}(a;b) = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0.$$

Після перетворення під знаком суми отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими $a\ i\ b$:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (124)$$

Цю систему називають *нормальною системою* для визначення параметрів функції $y^* = ax + b$ методом найменших квадратів. Вона має єдиний розв'язок і у разі знайдених значень $a\ i\ b$ функція S досягає мінімуму.

Якщо дослідні дані такі, що при побудові графіка вони приблизно розміщені по квадратній параболі, то можна шукати наближену залежність у вигляді $y^* = ax^2 + bx + c$. Для знаходження значень коефіцієнтів $a,\ b\ i\ c$ треба знайти мінімум такої функції

$$S(a;b;c) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^* - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^* - ax_i^2 - dx - c\right)^2.$$

Відповідна нормальна система рівнянь для знаходження параметрів a, b, c емпіричної функції буде мати вигляд:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i \end{cases}$$

Приклад. Отримані емпіричні дані залежності функції y при різних значеннях аргументу x наведені в таблиці:

x	1,3	2,4	3,1	4,4	5,1	6,7	6,9	7,2	7,9	8
y	5	5,5	6,4	6,9	8	8,2	10	12,4	14	15,6

Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x.

Розв'язок. Будемо шукати рівняння прямої у вигляді $y^* = ax + b$.

У разі складання нормальної системи для визначення коефіці-єнтів $a\ i\ b$ спочатку знайдемо:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 553,72; \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i = 52,6; \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 327,02; \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i = 92$$

.

Система матиме вигляд

$$\begin{cases} 327,02\grave{a} + 52,6b = 553,72 \\ 52,6a + 10b = 92. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $a = 0,425;$ $b = 1,175$. Таким чином, $y^* = 0,425x + 1,175$ - рівняння шуканої прямої.

Сума відхилень $\sum_{i=1}^{10}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]$, яка може стати контролем правильності обчислення, становить незначну величину, а саме 0,003. На рис. 110 показані побудовані точки експериментальних даних та знайдена пряма емпіричної функції.

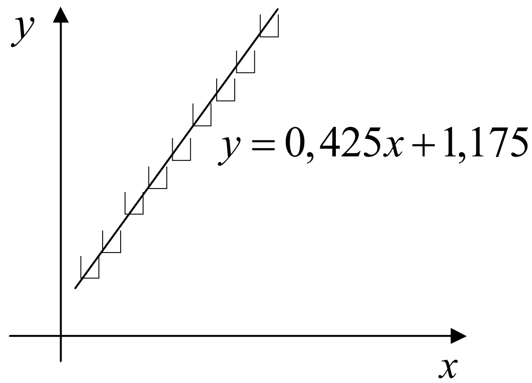


Рис. 110

Контрольна робота № 7

ВАРІАНТ № 1

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 5; \qquad z = \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + y^2 + x^2 y + 1.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1,5	3,2	4,4	5,8	6,6	6,8	8,7	9,5	10,2	11,1
y_i	3	3,7	5	5,1	5,9	5,4	5,5	6	7,1	6,7

ВАРІАНТ № 2

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 3; \quad z = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + y^2 + x^2 y - 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,4	2	3,3	4,2	4,5	5,3	5,8	6	6,8	8,2
y_i	1,2	2,1	2,7	3,8	5,6	5,6	7	6,4	8,3	9,1

ВАРІАНТ № 3

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 2; \qquad z = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - y^2 - x^2 y + 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	0,6	1,9	2,4	2,8	3,2	3,6	4,2	5,1	6,3	6,8
y_i	9	8,9	8,1	7,5	6,3	5,3	4,3	4,1	3,8	2

ВАРІАНТ № 4

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y - 4; \qquad z = \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - y^2 - x^2 y + 1.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,3	2,2	3,3	4,6	5,5	7	7,9	9,2	9,8	11,5
y_i	8	7,5	7,4	7,2	5,7	5,9	4,5	4,1	3,2	2,8

ВАРІАНТ № 5

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних

$$z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y + 3; \qquad z = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - y^2 - x^2 y + 3.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,5	2,8	3,7	4	5	5,4	7	8,6	9,5	10,5
y_i	2,4	2,4	3,7	4,7	5,6	6,7	7	7,3	7,8	9,5

ВАРІАНТ № 6

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + y^2 - x - y + 3; \qquad z = 2x^3 - 4x^2 + y^2 + x^2 y - 3.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,2	2,1	3,3	4,4	5,4	6,5	7	8	9,1	10,8

y_i	1,5	2,5	2,8	3	3,5	4,4	6,2	7,1	7,7	7,9

ВАРІАНТ № 7

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + y^2 - 3y + 5; \qquad z = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - y^2 - x^2 y + 1.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1,3	2	3	4,5	5,3	6,9	7,6	8,7	9	10,8
y_i	3,7	4,2	5,2	5,3	5	5,7	6,1	6,7	7,7	8,7

ВАРІАНТ № 8

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y + 4; \qquad z = x^3 - x^2 + y^2 + x^2 y - 3.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1	2	3	3,6	4,8	5,7	6,6	7,6	8,4	9,7
y_i	3	3,7	4,1	5,5	6,6	7,5	7,8	7,8	8,5	9

ВАРІАНТ № 9

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y + 1 \qquad z = x^3 + 2x^2 + y^2 + x^2 y - 5.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1,6	2,8	3	3,6	4,8	5,7	6,3	6,5	8	8,3
y_i	7,5	6,4	5,4	4,5	5	4,7	4,2	3,3	3	2,4

ВАРІАНТ № 10

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + y^2 + x + y - 4; \qquad z = 2x^3 + 4x^2 - y^2 - x^2 y - 1.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1,5	2	2,9	4	5,3	6,2	6,8	7,2	8	9,8
y_i	1,3	2,4	3,6	4,5	5,5	6,2	7,9	9,5	11,3	12,1

ВАРІАНТ № 11

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x + y + xy - x^2 - y^2 + 3; \qquad z = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - y^2 - x^2 y + 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1,3	2,4	3,6	4,5	5	5,3	5,9	10,5	10,8	13,2
y_i	7	6,4	6,1	6	4,8	3,9	3,7	3,1	1,9	1,6

ВАРІАНТ № 12

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 2x - y + xy - x^2 - y^2 + 1; \qquad z = \frac{7}{3}x^3 - 6x^2 + y^2 + x^2 y - 3.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	2	2,8	3,9	4,2	5	6,3	6,5	7,8	8,4	9,6
y_i	1,2	0,8	2,5	3,8	4,4	4,8	6	5,8	8	7,8

ВАРІАНТ № 13

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 2y - x + xy - x^2 - y^2 - 2; \qquad z = \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - y^2 - x^2 y + 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1,5	3	4,3	4,5	6	6,5	7	8,8	10,3	10,8
y_i	1,8	2,2	2,6	4,2	4	5,4	6,5	6	7,2	8,7

ВАРІАНТ № 14

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 3x + xy - x^2 - y^2 + 2; \qquad z = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 + x^2 y - 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність *y* від *x*

x_i	1,7	2,8	4,5	5	6,2	7,6	9,2	9,9	10,5	12,6
y_i	10,8	9,3	9,2	7,2	5,8	5,1	5,3	4	2	1,7

ВАРІАНТ № 15

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x - 2y + xy - x^2 - y^2 - 1; \qquad z = \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + y^2 + x^2 y - 1.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,8	3,2	4,5	5,4	6	7,1	9	10,9	12,8	15
y_i	1,5	2	3	4,2	5	5,2	5,9	6	6,5	7,9

ВАРІАНТ № 16

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 2x^2 + xy + y^2 - 5x - 3y + 4; \qquad z = \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 - y^2 - x^2 y + 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	2,5	3,5	4	5	7	8,3	9,5	9,9	10,7	11,2
y_i	11	9,6	7,7	6,2	6,4	5,8	4,6	3,7	2,8	1

ВАРІАНТ № 17

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 2x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y + 3; \qquad z = x^3 - 2x^2 - y^2 - x^2 y + 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	0,8	3	4,8	5,3	5,8	7,3	8,9	9,2	10,6	11,5
y_i	12	10	9,5	7	6,2	6,2	5	2,8	2,6	1,7

ВАРІАНТ № 18

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 2x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 4; \qquad z = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + y^2 + x^2 y - 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,2	2	2,5	3,5	4,6	5,3	6,2	6,6	8,2	8,5
y_i	6,4	7,1	8,1	8,2	8,5	10,2	10,3	11,4	11,7	13

ВАРІАНТ № 19

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 2x^2 + xy + y^2 + 5x + 3y + 6; \qquad z = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - y^2 - x^2 y - 1.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	0,7	1,7	2,6	3,8	4	4,8	5,2	5,5	6,8	8,8
y_i	11,4	12,4	11,2	10,4	9,9	8,5	7,3	6,5	5,2	5

ВАРІАНТ № 20

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 2x^2 + xy + y^2 + 4x + 3; \qquad z = \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + y^2 + x^2 y - 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,7	2,8	3,8	4,5	5,5	6,6	7,6	8,5	9,8	10,6
y_i	7,5	7,2	6,6	5,5	5,1	5,4	5,4	5	4,6	3,2

ВАРІАНТ № 21

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + 2y^2 - x - 3y + 1; \qquad z = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 - y^2 - x^2 y + 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	6,2	6,5	8	9,5	9,7	10	11,4	12,6	13,9	14,3
y_i	3,4	4,8	5,9	6,1	7,7	8,5	10	10,2	11,2	12,5

ВАРІАНТ № 22

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + x - 4y + 2; \qquad z = x^3 + x^2 - y^2 - x^2 y + 3.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	4	5,1	6,8	7,5	9,2	10,2	10,5	12,6	13,6	15
y_i	3,3	2,5	2	4,2	4,8	4,8	6	6,2	8	8,5

ВАРІАНТ № 23

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + y + 3; \qquad z = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + y^2 + x^2 y - 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	2,4	2,8	4,5	5,3	6,6	8	8,6	9	10,2	11,1
y_i	0,5	2,3	3,4	4,5	4,4	4,9	6,2	7,5	8	8,9

ВАРІАНТ № 24

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + x + 3y - 1; \qquad z = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + y^2 + x^2 y - 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1	1,9	3,5	4,3	5,6	6,9	7,5	9	10,5	12,8
y_i	5,2	4,5	4,4	4,6	4,5	3,7	2,5	3	1,4	1,3

ВАРІАНТ № 25

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y + 5; \qquad z = \frac{2}{3}x^3 - 7{,}5x^2 - y^2 - x^2 y + 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1	2,5	4	5,9	7,6	9,5	11,1	11,5	12,9	14
y_i	0,5	2	3,6	4,7	5	6,1	5,5	6,9	6,5	7,9

ВАРІАНТ № 26

1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = 3x + 3y - xy - 2x^2 - y^2 + 2; \qquad z = \frac{2}{3}x^3 + 7{,}5x^2 + y^2 + x^2 y - 2.$$

2. Методом найменших квадратів знайти пряму залежність y від x

x_i	1,5	3	4,4	5,1	7	7,5	8,6	10,2	11,3	12,2
y_i	10,7	9,7	9,1	6,8	6,4	4,7	3,4	3,8	2,7	1,3

V. Інтегральне числення.

1. Невизначений інтеграл

У цьому розділі ми будемо розв’язувати задачу, обернену до диференціювання, тобто за відомою похідною знаходити функцію.

Визначення 1. Первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку називається функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ на заданому проміжку:

$$f(x) = F'(x). \qquad (125)$$

Наприклад, нам відомо, що похідна функції $F(x)=x^2$ дорівнює $2x$, отже, первісна функції $f(x)=2x$ є функція $F(x)=x^2$. Але якщо похідна кожної функції одна (якщо вона є), то первісних функції багато. Для функції $f(x)=2x$ первісними є також функції $F_1(x)=x^2+1$, $F_2(x)=x^2-5$ і т. ін.

Теорема 1. Дві різні первісні деякої функції відрізняються одна від одної на стале число.

Доведення: Нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – дві різні первісні однієї і тієї ж функції $f(x)$. Тоді за визначенням первісної виконується рівність $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$. Похідні функцій $F_1(x)$ та $F_2(x)$ однакові, отже за наслідком теореми Лагранжа ці функції відрізняються одна від одної на стале число:

$$F_1(x)=F_2(x)+C.$$

Наслідок. Якщо додати до будь-якої первісної $F(x)$ функції $f(x)$ всі можливі сталі числа С, то одержимо всі первісні для функції $f(x)$.

Дійсно, з одного боку, якщо похідна від функції $F(x)$ є функцією $f(x)$, то похідна від функції $F(x)+C$, де С – будь-яка стала, також є $f(x)$ у силу того, що похідна від сталої величини дорівнює нулю. Отже, функція $F(x)+C$ є первісною для функції $f(x)$. З іншого боку ми довели, що будь-яку первісну для функції $f(x)$ можна отримати з функції $F(x)$ додаванням деякої сталої С. Тобто формула:

$$F(x)+C, \tag{126}$$

де $-\infty<C<+\infty$, а $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$, є загальним виразом для всіх первісних для функції $f(x)$.

Таким чином, ми дійшли до поняття невизначеного інтеграла.

Визначення 2. Загальний вираз для всіх первісних заданої неперервної функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ або від диференціального виразу $f(x)dx$ і позначається символом:

$$\int f(x)dx. \tag{127}$$

При цьому функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Ураховуючи формулу (126), можна записати для невизначеного інтегралу:

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \tag{128}$$

2. Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), \tag{129}$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Ця властивість безпосередньо є наслідком визначень невизначеного інтеграла і первісної.

2. Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції дорівнює самій функції з точністю до сталої величини.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{130}$$

Доведення: $dF(x) = F'(x)dx$, причому функція $F(x)$ є первісною для функції $F'(x)$. Тоді маємо: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$.

3. Сталий множник, який відмінний від нуля, можна виносити за знак невизначеного інтеграла.

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx. \tag{131}$$

Доведення: Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то маємо:

$\int Af(x)dx = A(F(x) + C) = AF(x) + C_1$,

де позначено $C_1 = AC$, причому C і C_1 – довільні сталі при $A \neq 0$. Функція $AF(x)$ є первісною для функції $Af(x)$, оскільки $F(x) + C$. Тому справедлива формула (131).

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми неперервних функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної з цих функцій.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{132}$$

Доведення: Нехай функції $F(x)$ та $G(x)$ – первісні для функції $f(x)$ та $g(x)$ відповідно. Тоді $\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = F(x) + G(x) + C$, де C, C_1, C_2 – довільні сталі, причому $C=C_1+C_2$. Функція $F(x) + G(x)$ є первісною для функції $f(x) + g(x)$, оскільки $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = $ $= f(x) + g(x)$. Отже, $\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C$ і виконується формула (132).

3. Таблиця найпростіших інтегралів

Ураховуючи те, що інтегрування є оберненою операцією стосовно диференціювання, із таблиці похідних основних елементарних функцій можна одержати таблицю найпростіших інтегралів.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$ 2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C;$ 4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$

5. $\int cosx \, dx = sinx + C;$ 6. $\int \frac{1}{cos^2 x1} dx = tgx + C;$

7. $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -ctgx + C;$ 8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + C;$

9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C.$

У подальшому ці дев'ять інтегралів будемо називати табличними.

4. Методи інтегрування

Для того, щоб обчислити інтеграл, необхідно тим чи іншим способом привести його до табличного. Це зробити не завжди можливо тому, що хоч будь-яка неперервна функція має первісну, але існують функції, в тому числі і елементарні, первісні для якрих не можна записати як комбінацію скінченої кількості елементарних функцій. Невизначені інтеграли від таких функцій називають інтегралами, що не беруться. Наприклад, $\int e^{x^2} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ та низка інших. У цьому розумінні інтегрування – це набір методів, які дозволяють проінтегрувати деякі класи функцій.

1) *Метод розкладання* або *безпосереднє інтегрування*. За допомогою властивостей 3 і 4 невизначеного інтеграла та звичайних алгебраїчних перетворень інтеграл від заданої функції зводиться до деякої комбінації табличних інтегралів.

Наприклад:

$$\int \frac{10x^8+3}{x^4} dx = \int \left(\frac{10x^8}{x^4} + \frac{3}{x^4} \right) dx = \int 10x^4 dx + \int 3x^{-4} dx = 10 \cdot \frac{x^5}{5} + 3 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

або

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -ctg\, x - tg\, x + C .$$

2) *Метод підстановки* або *заміна змінної*. Цей метод, як правило, використовується, коли під інтегралом стоїть складна функція. Якщо $f(x)$ і $x = \varphi(t)$ – неперервні функції, то, враховуючи формулу для диференціала $dx = \varphi'(t) dt$, маємо формулу заміни змінної у невизначеному інтегралі:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (133)$$

Інтеграл, який стоїть в правій частині рівності (133) може виявитись більш простим, ніж інтеграл, який стоїть в лівій частині цієї рівності.

Наприклад:

а) $$\int \sin 4x\,dx = \left|\begin{array}{c} 4x = t \\ x = \dfrac{t}{4} \\ dx = \left(\dfrac{t}{4}\right)' dt = \dfrac{1}{4}dt \end{array}\right| = \int \sin t\cdot\frac{1}{4}dt = -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

б) $$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = (t^2-1)'\,dt = 2t\,dt \end{array}\right| = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,dt = \int (2t^4 - 2t^2)dt =$$

$$= 2\cdot\frac{t^5}{5} - 2\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

У деяких випадках формулу (133) можна використовувати у зворотному порядку:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \text{ де } t = \varphi(x).$$

Наприклад:

$$\int \cos x\, e^{\sin x}dx = \left|\begin{array}{c} \sin x = t \\ dt = (\sin x)'\,dx = \cos x\,dx \end{array}\right| = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

Іноді буває так, що для обчислення невизначеного інтеграла необхідно зробити декілька замін змінної одна за одною.

Розглянемо інтеграл, в якому підінтегральна функція є дробом, в якому чисельник є похідною від знаменника:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx,$$

Зробимо заміну змінної $u(x) = t$, тоді $d\,t = u'(x)dx$ і цей інтеграл перетворюється на табличний:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \frac{d\,t}{t} = \ln|t| + C = \ln|u(x)| + C. \qquad (134)$$

Наприклад:

а) $$\int ctg\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$б)\ \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

3) *Метод інтегрування по-частинах*. Цей метод заснований на формулі похідної від добутку функцій:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

помножимо на dx

$$(u \cdot v)' \cdot dx = (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot dx.$$

За формулою для диференціала функції $dy = y' \cdot dx$ маємо:

$$d\,(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$$

Проінтегруємо останню рівність:

$$\int d\,(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv,$$

У лівій частині за властивістю 2 маємо $u \cdot v$, тоді:

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv,$$

остаточно одержимо формулу інтегрування по-частинах:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \qquad (135)$$

Як і в попередньому методі інтеграл не знайдено, але лівий інтеграл може бути більш простим, ніж правий. Здебільшого, цей метод використовується в двох випадках:

а) якщо підінтегральна функція є добутком однієї з функцій sin x, cos x або a^x на багаточлен. У цьому випадку обираємо функцію u як багаточлен.

Наприклад:

$$\int x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ d\,v = \cos x\,dx \\ d\,u = u' \cdot dx = dx \\ v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

б) якщо в підінтегральній функції присутні функції $log_a\,x$, arcsin x, arccos x, arctg x. У цьому випадку функцією u обираємо вищевказану функцію.

Наприклад:

$$\int x^2 \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ d\,v = x^2 dx \\ du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Контрольна робота № 8

Знайти невизначені інтеграли:

1. А) $\int 2^x \cdot 3^{x-1} dx$; Б) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$; В) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

2. А) $\int e^x \cdot \left(1 - e^{-x} + 2^x\right) dx$; Б) $\int \frac{x^2\,dx}{5x^3+1}$; В) $\int x e^{-3x} dx$.

3. А) $\int \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x^2} dx$; Б) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$; В) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$.

4. А) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{x} \right)$; Б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x}}$; В) $\int x^2 \sin x\, dx$.

5. А) $\int \left(4x^5 - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 3^x \right) dx$; Б) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; В) $\int x 3^{-x} dx$.

6. А) $\int \left(2x^7 + \frac{4x-5}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$; Б) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; В) $\int \arccos 2x\, dx$.

7. А) $\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{\sqrt{x^7}} dx$; Б) $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx$; В) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

8. А) $\int \left(\frac{4x^6 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^5}} + 2^x \right) dx$; Б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; В) $\int x e^{3x-5} dx$.

9. А) $\int \frac{3x^2 + 5x^5 - 2}{4\sqrt[7]{x^6}} dx$; Б) $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$; В) $\int x \cos 5x\, dx$.

10. А) $\int \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x} \right)^2 dx$; Б) $\int tg\, 2x\, dx$; В) $\int x\, arctg\, x\, dx$.

11. А) $\int \left(\frac{4x-5}{\sqrt[5]{x^6}} \right)^2 dx$; Б) $\int 5^{3x-2} dx$; В) $\int x \arcsin x\, dx$.

12. А) $\int \frac{(3x+1)^3}{x\sqrt{x}} dx$; Б) $\int \frac{\sqrt{tg\, x}}{\cos^2 x} dx$; В) $\int arcctg \frac{x}{2} dx$.

13. А) $\int \left(\frac{3\sqrt{x} + 2}{x} \right)^3 dx$; Б) $\int \frac{dx}{\ln^2(x+1) \cdot (x+1)}$; В) $\int (3x-2) \sin 2x\, dx$.

14. А) $\int \left(5x^4 + \frac{2x^3 - x^5}{x\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$; Б) $\int x^2 e^{-x^3} dx$; В) $\int x^2 e^{-x} dx$.

15. А) $\int \frac{2x^3 + 5x^5 - 1}{x^2\sqrt{x}} dx$; Б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; В) $\int \ln\left(x^2+1\right) dx$.

16. А) $\int \left(\frac{4\sqrt{x} + 5}{\sqrt[8]{x^5}} \right)^2 dx$; Б) $\int x \cos\left(x^2+1\right) dx$; В) $\int \ln\left(x^3 - 2\right) dx$.

17. А) $\int \frac{\left(3x^2 - 4\right)^3}{x^3\sqrt{x}} dx$; Б) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$; В) $\int \left(3x^2 - 2x\right) \sin x\, dx$.

18. А) $\int\left(\frac{2\sqrt[3]{x}+5}{x\sqrt{x}}\right)^2 dx$; Б) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}dx$; В) $\int arctg4x\,dx$.

19. А) $\int\frac{3x^3+2x\sqrt{x}-3}{\sqrt[5]{x^4}}dx$; Б) $\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$; В) $\int x\,arcctg3x\,dx$.

20. А) $\int\frac{\left(3x\sqrt{x}+2x\right)^2}{x^4}dx$; Б) $\int\frac{\sin x}{\cos x+3}dx$; В) $\int\arccos 4x dx$.

21. А) $\int\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$; Б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$; В) $\int(2x-3)\cdot 4^x dx$.

22. А) $\int\frac{2x^4+3x\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}dx$; Б) $\int x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$; В) $\int\left(-x^2+3x+1\right)\cos x\,dx$.

23. А) $\int\frac{\left(4\sqrt[3]{x}+3x\right)^3}{x^5}dx$; Б) $\int\frac{x^4dx}{1+x^{10}}$; В) $\int 2x\,arcctg\frac{x}{2}dx$.

24. А) $\int\left(\frac{2x+3}{x}\right)^3 dx$; Б) $\int\frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1}dx$; В) $\int e^{-3x}\left(2x^2-1\right)dx$.

25. А) $\int\frac{(3x-1)^3}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$; Б) $\int\frac{dx}{x\left(\ln^2 x+1\right)}$; В) $\int x^4\ln 2x\,dx$.

26. А) $\int\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^3 dx$; Б) $\int\frac{2x-3}{\sqrt[3]{x^2-3x+8}}dx$; В) $\int 3x\arccos x\,dx$.

5. Визначений інтеграл

Нехай $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, $F(x)$– деяка її первісна.

Визначення 3. Визначеним інтегралом від деякої неперервної функції $f(x)$ на деякому відрізку $[a,b]$ називається відповідний приріст її первісної, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{136}$$

Співвідношення (136) називається *формулою Ньютона-Лейбніця*.

У виразі (136) числа a і b називаються границями інтегрування, нижня та верхня відповідно, відрізок $[a,b]$ – проміжком інтегрування, функція $f(x)$ – підінтегральною функцією. Позначимо

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b,$$

де вертикальна риска має назву вставки, тоді формула (136) записується так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{137}$$

Наприклад:

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Теорема 2. Визначений інтеграл від неперервної функції не залежить від вибору первісної для підінтегральної функції.

Доведення: Нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – дві різні первісні функці ї $f(x)$, що неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді за теоремою 1 маємо:

$$F_1(x) = F_2(x) + C,$$

де C – деяка стала. Тоді:

$$F_1(x)\Big|_a^b = F_1(b) - F_1(a) = \big(F_2(b) + C\big) - \big(F_2(a) + C\big) = F_2(b) - F_2(a) = F_2(x)\Big|_a^b =$$

$$= \int_a^b f(x)dx.$$

Наслідок.

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b, \tag{138}$$

де під виразом $\int f(x)dx$ мається на увазі одна з первісних функції $f(x)$. Остання формула показує зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралами. Відмітимо, що різниця між інтегралами в тому, що визначений інтеграл – це число, а невизначений – функція.

Визначений інтеграл зі змінною верхнею границею

Нехай $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a,b]$ функція. Розглянемо інтеграл

$$\int_a^x f(t)dt,$$

де $t \in [a,x] \subset [a,b]$. Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$, і за формулою Ньютона-Лейбніця маємо:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a). \tag{139}$$

звідси

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = \left(F(x) - F(a)\right)' = f(x) - 0 = f(x), \tag{140}$$

тобто функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

є первісною для функції $f(x)$, тоді маємо інший, ніж формула (137), зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)\,dt + C. \tag{141}$$

Розглянемо визначений інтеграл зі змінною нижнею границею:

$$\int_x^b f(t)\,dt.$$

На підставі формули Ньютона-Лейбніця маємо:

$$\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' = \left(F(b) - F(x)\right)' = 0 - f(x) = -f(x). \tag{142}$$

На підставі формул (140) і (142) можна сформулювати правило диференціювання інтегралів зі змінними границями інтегрування:
Похідна визначеного інтеграла зі змінною границею інтегрування по цій границі дорівнює підінтегральній функції, взятій зі знаком „+”, якщо границя верхня і зі знаком „-”, якщо границя нижня.

Наприклад:

а) $\left(\int_3^x \left(t^2 - t\cdot\sin t\right)dt\right)' = x^2 - x\cdot\sin x$,

б) $\left(\int_x^2 \frac{\sin t}{t}\,dt\right)' = -\frac{\sin x}{x}$.

6. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Розглянемо площину $S(x)$ криволінійної трапеції, яка обмежена зверху графіком неперервної функції $Y = f(X)$, знизу віссю OX, зліва прямою $X = a$, справа − прямою $X = x$, яка рухається перпендикулярно до осі OX (рис. 111).

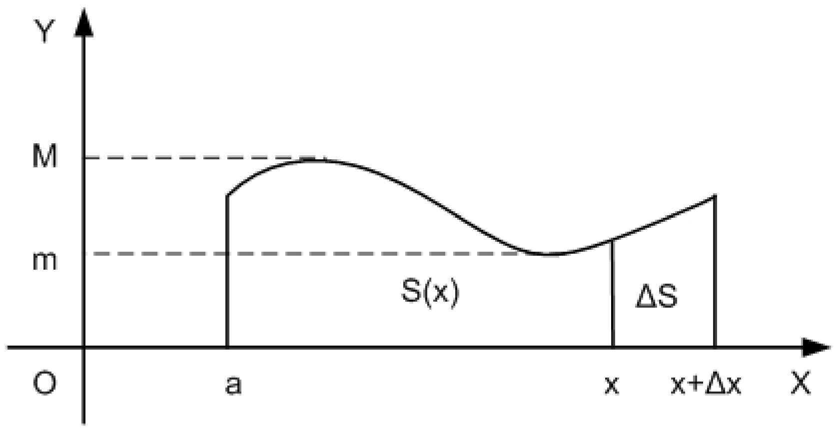


Рис. 111

Нехай Δx – приріст змінної x (припустимо для визначеності, що $\Delta x > 0$). Тоді права границю криволінійної трапеції пересунеться ще правіше, а площа $S(x)$ зміниться на величину ΔS. Позначимо M – максимальне, а m – мінімальне значення функції $f(x)$ на відрізку $[x, x+\Delta x]$. Очевидно, що площа ΔS більша, ніж площа прямокутника з основою Δx та висотою m і менша, ніж площа прямокутника з основою Δx і висотою M:

$$m\,\Delta x \le \Delta S \le M\,\Delta x,$$

звідки маємо

$$m \le \frac{\Delta S}{\Delta x} \le M\,.$$

Спрямуємо Δx до нуля ($\Delta x \to +0$). Тоді, оскільки функція $f(x)$ неперервна:

$m \to f(x)$ і $M \to f(x)$, отже $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$, аналогічно доводиться, що $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$, отже, існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$, тобто $S'(x) = f(x)$.

Ураховуючи, що $S(a) = 0$, маємо

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

тому для фіксованої правої границі криволінійної трапеції $X = b$ маємо:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{143}$$

Таким чином, визначений інтеграл від неперервної невід’ємної функції дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

Наприклад:

Знайти площу криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $xy = 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

Треба побудувати задані лінії та заштрихувати вказану криволінійну трапецію (рис. 112).

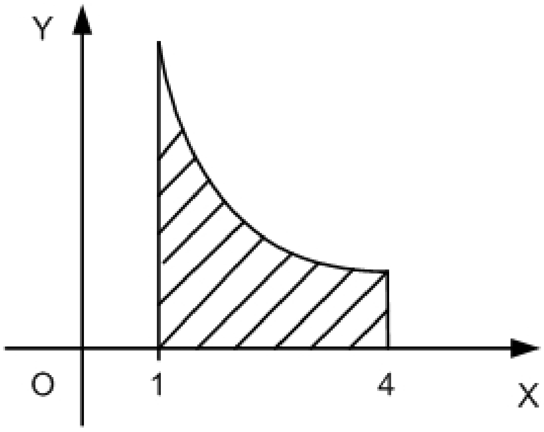


Рис. 112

За формулою (143) маємо:

$$S = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 .$$

7.Властивості визначеного інтеграла

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt . \qquad (144)$$

Ця властивість безпосередньо є наслідком формули Ньютона-Лейбніца і того факту, що визначений інтеграл є числом.

2. Визначений інтеграл з однаковими границями інтегрування дорівнює нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 . \qquad (145)$$

Доведення. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0 .$$

3. У разі перестановці границь інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx . \qquad (146)$$

Доведення.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. *Властивість адитивності.* Якщо точка c належить відрізку $[a,b]$, то визначений інтеграл у границях інтегрування від a до b дорівнює сумі визначених інтегралів від тієї ж функції в границях від a до c і від c до b.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (147)$$

Доведення.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

$$\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx. \quad (148)$$

6. Визначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від кожної функції в тих же самих границях інтегрування.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \quad (149)$$

Властивості 5 і 6 є наслідками аналогічних властивостей невизначеного інтеграла.

7. *Властивість монотонності.* Якщо підінтегральна функції визначеного інтегралу неперервна і невід’ємна, а верхня границя інтегрування більша за нижню, то такий визначений інтеграл невід’ємний.

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{ якщо } f(x) \geq 0 \text{ і } a \leq b. \quad (150)$$

Доведення.

За формулою Ньютона-Лейбніця маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

похідна від функції $F(x)$ є функція $f(x)$, отже за умовою властивості $F'(x) \geq 0$, тобто функція зростаюча. Тоді якщо $b \geq a$, то $F(b) \geq F(a)$ і $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0$.

8.Геометричне застосування визначеного інтеграла

Раніше було показано, що геометричний зміст визначеного інтегралу складається з того, що він дорівнює площі криволінійної трапеції, яка знаходиться під графіком підінтегральної функції. Але використання визначеного інтеграла не обмежується тільки знаходженням площ. Як буде показано нижче, за допомогою визначеного інтеграла можна знаходити інші важливі характеристики геометричних фігур (довжину дуги, об'єм тіла обертання та ін.), а також розв'язувати різноманітні фізичні та механічні задачі. Таким чином, визначений інтеграл є універсальним математичним апаратом, що пов'язує математику із реальним життям.

Обчислення площ у декартових координатах

Нагадаємо, що для знаходження площі криволінійної трапеції, яка обмежена зверху графіком невід'ємної функції $y = f(x)$, знизу віссю Ох, зліва та справа прямими $x = a$ і $x = b$ відповідно (рис. 113), необхідно обчислити визначений інтеграл:

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{151}$$

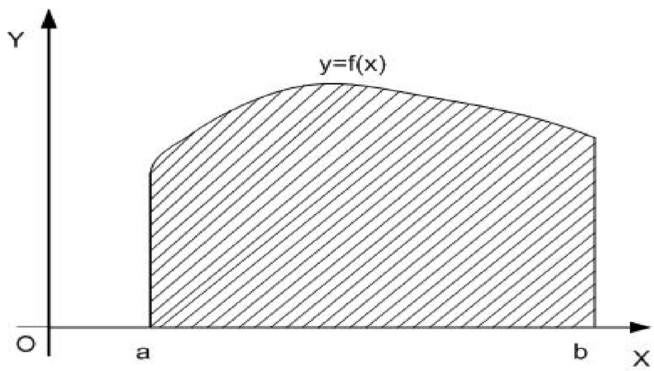


Рис. 113

В загальному випадку, якщо криволінійна трапеція обмежена зверху і знизу графіками функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ відповідно, а з боків – прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 114),

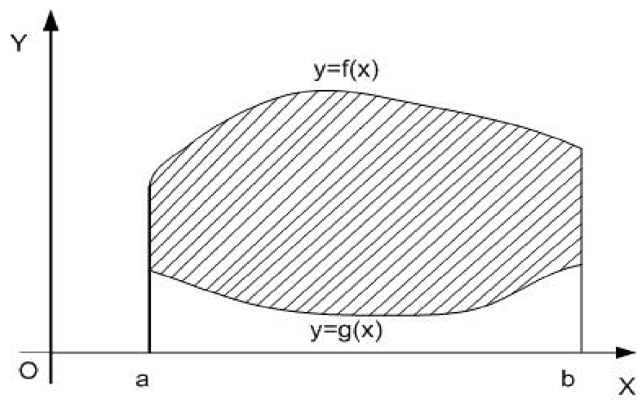


Рис. 114

Площу цієї фігури можна записати як різницю площ двох криволінійних трапецій. Перша з них обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – віссю Ох, друга обмежена графіком функції $y = g(x)$ і віссю Ох. Тоді за формулою (150) маємо:

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \qquad (152)$$

Зауваження. На рис. 114 зображено випадок, коли обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ додатні на відрізку $[a,b]$, але формула (152) виконується і для функцій довільного знака, тільки б нерівність $f(x) \geq g(x)$ виконувалась для всіх $x \in [a,b]$.

Наприклад.

1) Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = 2 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$ та віссю Ох.

Спочатку побудуємо шукану криволінійну трапецію (рис. 115).

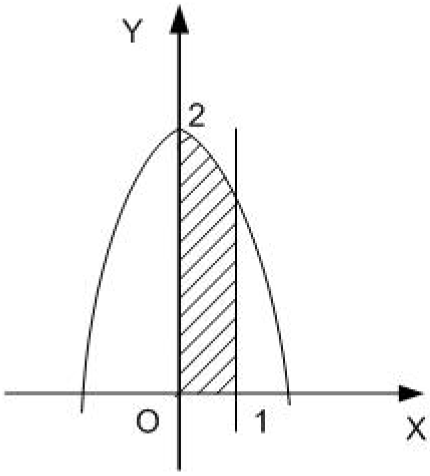


Рис. 115

За формулою (152) маємо:

$$S = \int_0^1 \left(2 - x^2\right)dx = \left.\left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = 2 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{3}.$$

2) Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = \frac{1}{x}$ та $y = \frac{5}{2} - x$ (рис. 116).

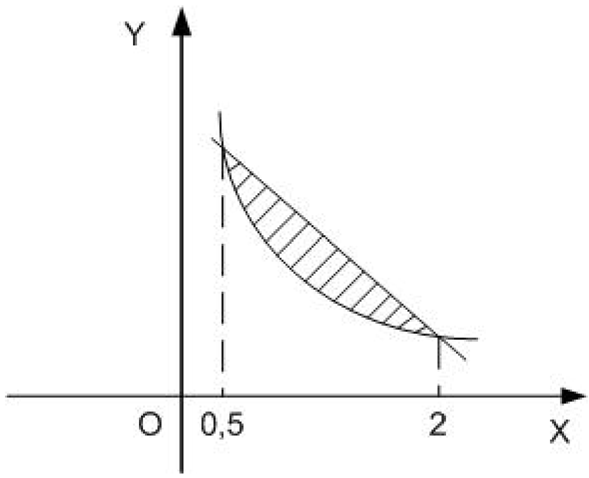


Рис. 116

Для визначення границь інтегрування знайдемо точки перетину ліній, якими задано цю фігуру:

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{2}-x, \text{ звідки } x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

На інтервалі $\left(\frac{1}{2},2\right)$ пряма знаходиться вище гіперболи, отже за формулою (152) знаходимо площу:

$$S=\int_{0,5}^{2}\left(\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\ln|x|\right)\Bigg|_{0,5}^{2}=5-2-\ln 2-\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{8}-\ln 0,5\right)=$$

$$=\frac{15}{8}-2\ln 2.$$

3) Знайти площу фігури, яка обмежена графіком функції $y=\cos x$, віссю Ox, прямими $x=0$ та $x=\frac{3}{2}\pi$.

На цьому прикладі зручно показати характерні помилки, які виникають під час розв’язання таких задач. Спочатку покажемо *неправильний розв’язок.* За формулою (152) маємо:

$$S=\int_{0}^{3\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{0}^{3\pi/2}=\sin\frac{3\pi}{2}-\sin 0=-1. \qquad \textbf{(???)}$$

Дуже часто після цього, побачивши від’ємну площу, результат „трошки” поправляють і пишуть $S=1$. Тут помилка виникла тому, що не було перевірено умову $f(x)>0$ при якій справедлива формула (152). Насправді ця умова не виконується.

Правильний розв’язок. Побудуємо графік функції $y=\cos x$ (рис. 117).

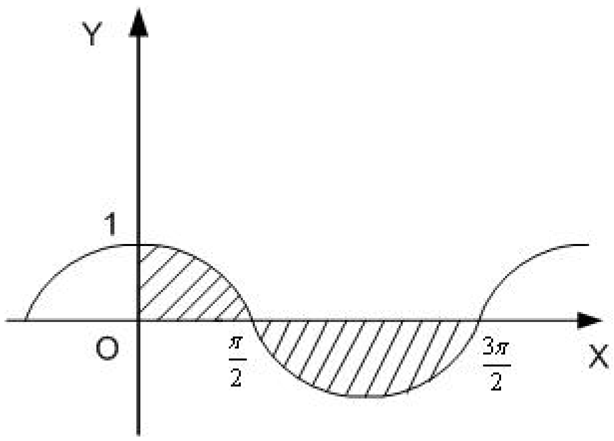


Рис. 117

На відрізку $\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$ є область у якій цей графік вище осі Ox (на інтервалі $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$). У той же час на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ графік функції $y=\cos x$ знаходиться нижче осі Ox. Тому для обчислення площі шукану фігуру необхідно розбити на дві частини $S=S_1+S_2$. Для першої частини, яка знаходиться над інтервалом $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, функція $f(x)$ додатна, тому виконується формула (152):

$$S_1=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1-0=1.$$

Для другої частини, яка знаходиться над інтервалом $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, функція $f(x)$ від'ємна, і для знаходження її площі необхідно використати формулу (152):

$$S_2=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(0-\cos x)dx=-\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}=-(-1-1)=2.$$

Остаточно, маємо площу цієї фігури:

$$S=S_1+S_2=1+2=3.$$

Цей приклад показує, яку важливу роль в геометричному застосуванні визначеного інтеграла відіграють попередній аналіз задачі і побудова графіків.

Об'єм тіла обертання

Припустимо, що криволінійна трапеція, яка обмежена графіком функції $y=f(x)$, віссю Ох, вертикальними прямими $x=a$ та $x=b$, обертається навколо осі Ох. При такому обертанні трапеція утворює об’ємну фігуру, яку будемо називати тілом обертання (при цьому сама трапеція є половиною осьового перерізу тіла обертання) (рис. 118).

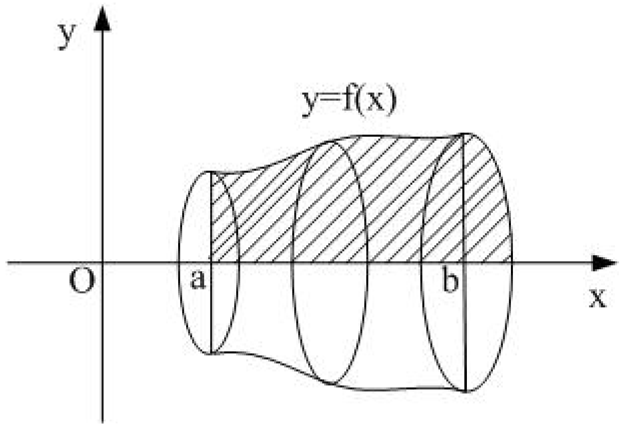


Рис. 118

Виведемо формулу для об’єму такого тіла, використовуючи стандартну процедуру розбиття його на малі елементи. Розглянемо елементарну трапецію, яка знаходиться над відрізком Δx_i осі Ох. У разі обертання такої фігури навколо осі Ох утворюється шар товщиною Δx_i. Як і раніше, замінимо „криву” сторону трапеції на горизонтальну пряму, тобто відріжемо криволінійну частину. Тоді замість трапеції буде обертатися прямокутник з основою Δx_i та висотою y_i (рис. 119).

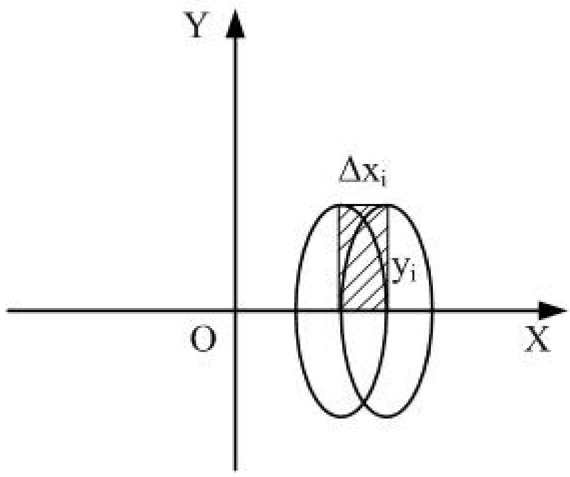


Рис. 119

У результаті отримаємо циліндр з висотою Δx_i та радіусом основи y_i. Якщо товщина шару Δx_i мала, то об’єм такого шару наближено дорівнює об’єму циліндра:

$$\Delta V_i \approx \pi y_i^2 \Delta x_i .$$

Об’єм всього тіла обертання є сумою об’ємів всіх елементарних шарів:

$$V = \sum_i \Delta V_i = \sum_i \pi y_i^2 \Delta x_i .$$

Виконуючи граничний перехід, маємо:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx, \text{ де } y = f(x). \qquad (153)$$

Наприклад. Знайти об'єм кулі радіуса R.
Будемо вважати, що куля утворена обертанням півкола з центром на початку координат і радіусом R навколо осі Ox (рис.120).

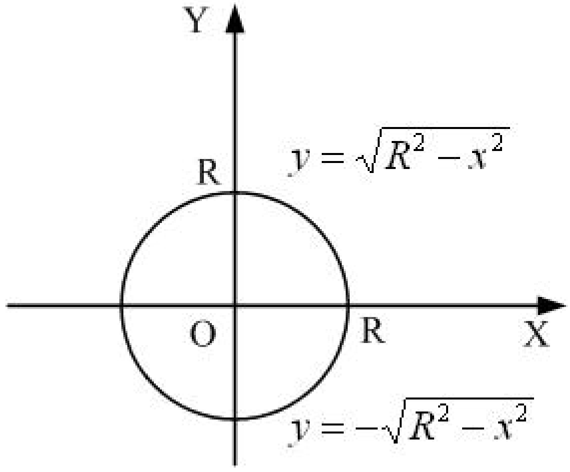


Рис. 120

Запишемо рівняння верхньої границі півкола:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\,.$$

Тоді за формулою (153) маємо відомий вираз для об'єму кулі:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^{R} = \pi R^2 \cdot 2R -$$

$$- \pi \cdot \frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

Контрольна робота № 9

I. Знайти площу криволінійної трапеції (А) і об'єм тіла обертання (Б)

1. А) $y = x^2 - x$, x+y-1=0 ; Б) xy=3, x+y-4=0 .
2. А) xy=6, 3x+y-9=0 ; Б) y=tgx, x= $\frac{\pi}{4}$, y=0 .
3. А) y=x^2+x, x-y+1=0 ; Б) y= x^2, y=9.
4. А) xy=8, 4x+y-12=0 ; Б) y=cos$\frac{x}{2}$, x= $\frac{\pi}{4}$, x= π .
5. А) y=x^2+5x, x-y+5=0 ; Б) y= x^2, y= x^3 .
6. А) xy=6, x+2y-8=0 ; Б) xy=1, y= x^2, x=0,5 .
7. А) y=x^2-5x, x+y-5=0 ; Б) y=e^x, y=e^{-x}, x=1.
8. А) xy=8, x+4y-12=0 ; Б) y=lnx, y=0, x=e.
9. А) y= x^2+2x ; x-y+2=0 Б) xy=2, x+y-3=0 .

10. А) $xy=6$, $x+3y-9=0$; Б) $y=tgx$, $x=0$, $y=1$.
11. А) $y= x^2-2x$, $x+y-2=0$; Б) $y=3^x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$.
12. А) $xy=8$, $x+2y-10=0$; Б) $y=3x^2$, $y=12$, $x=0$.
13. А) $y= x^2+3x$, $x-y+3=0$; Б) $y=\sin 2x$, $x=\frac{\pi}{8}$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$.
14. А) $xy=6$, $x+y=5$; Б) $y=x^2$, $y^2=x$.
15. А) $y= x^2-3x$, $x+y=3$; Б) $xy=8$, $y= x^2$, $x=1$.
16. А) $xy=8$, $x+y-9=0$; Б) $y=2^x$, $y=2^{-x}$, $x=1$.
17. А) $y= x^2+4x$, $x-y+4=0$; Б) $y=\ln x$, $y=2$, $x=1$.
18. А) $xy=6$, $x+y-7=0$; Б) $xy=4$, $x+y-5=0$.
19. А) $y= x^2-4x$, $x+y-4=0$; Б) $y=ctgx$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$.
20. А) $xy=8$, $x+y-6=0$; Б) $y=4^x$, $x=-0{,}5$, $x=0{,}5$, $y=0$.
21. А) $y= x^2+6x$, $x-y+6=0$; Б) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.
22. А) $xy=6$, $2x+y-8=0$; Б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.
23. А) $y= x^2+6x$, $x+y-6=0$; Б) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1, y=\pm 4$.
24. А) $xy=8$, $2x+y-10=0$; Б) $y=2x^2$, $y=7$.
25. А) $y= x^2-7x$, $x+y-7=0$; Б) $y=\cos 2x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.
26. А) $xy=5$, $x+y-6=0$; Б) $y^2=3x$, $x=3$.

2. Обчислити визначений інтеграл за допомогою формули Ньютона-Лейбніця.

1. а) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$;

в) $\int_2^5 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-3}}dx$; г) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$.

2.а) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$; б) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$;

в) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$; г) $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

3. а) $\int_{-1}^1 3x dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+1}$;

г) $\int\limits_0^{1/2} arctg 2x dx$.

4. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$;

б) $\int\limits_0^1 x e^{-2x^2} dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$;

г) $\int\limits_0^{3/2} \arcsin 2x dx$.

5. а) $\int\limits_{-\pi/2}^0 \cos x dx$;

б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{3-\sqrt{3x+1}}$;

в) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$.

6. а) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

г) $\int\limits_0^1 arcctg \frac{x}{2} dx$.

7. а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int\limits_1^4 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

г) $\int\limits_1^e x \ln x dx$.

8. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$;

б) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/4} e^{-tgx} \frac{dx}{cos^2 x}$;

г) $\int\limits_0^1 \arccos x dx$.

9. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$;

б) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5x+2}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^3 x dx$;

г) $\int\limits_0^1 arctg x dx$.

10. а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$;

б) $\int\limits_1^7 \frac{dx}{\sqrt{4x-1}}$;

в) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$;   г) $\int_0^2 x2^x dx$.

11. а) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;   б) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+1}$;

в) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$;   г) $\int_0^1 arcctgxdx$.

12. а) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;   б) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$;

в) $\int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$;   г) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

13. а) $\int_0^3 \frac{dx}{x+1}$;   б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$;

в) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$;   г) $\int_0^{1/2} x\arcsin xdx$.

14. а) $\int_{-1}^2 2^x dx$;   б) $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$;

в) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{3x^3+1}$;   г) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos\frac{x}{2}dx$.

15. а) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin xdx$;   б) $\int_1^5 \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$;

в) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos 2x}$;   г) $\int_0^1 x^2e^{3x}dx$.

16. а) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos xdx$;   б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}}$;

в) $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\cos^2 xdx$;   г) $\int_0^{1/2} \arcsin xdx$.

17. а) $\int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}$;   б) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$;

в) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin 2x}$;

г) $\int\limits_{0}^{1} arctgx dx$.

18. а) $\int\limits_{-\pi/4}^{-\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

б) $\int\limits_{-4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$;

в) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2 \sin\frac{x}{2} dx$.

19. а) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-9}$;

б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{5x-4}}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8+1}}$;

г) $\int\limits_{0}^{1} arcctgx dx$.

20. а) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$;

б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$;

в) $\int\limits_{0}^{3} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+7}} dx$;

г) $\int\limits_{1}^{e^2} x^2 \ln x dx$.

21. а) $\int\limits_{-4}^{4} \frac{dx}{x^2+16}$;

б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-3x+1}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/8} tg 2x dx$;

г) $\int\limits_{0}^{1/2} \arccos x dx$.

22. а) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

б) $\int\limits_{-6}^{1} \frac{dx}{\sqrt{6-5x}}$;

в) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

г) $\int\limits_{-1}^{1} xarctgx dx$.

23. а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x+2}$;

б) $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$;

в) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{\ln^4 x}{x} dx$;

г) $\int\limits_{0}^{3} x 3^x dx$.

24. а) $\int\limits_4^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{x^4+1}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$; г) $\int\limits_0^2 xarcctgxdx$.

25.а) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-25}$; б) $\int\limits_1^7 \frac{dx}{1+\sqrt{9x+1}}$;

в) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^4}dx$.

26. а) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$; б) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5x-4}}$;

в) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} ctg\frac{x}{2}dx$; г) $\int\limits_0^1 x\arcsin dx$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. – 647с.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике/ М.: Наука, 1987. – 336с.

3. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1985.– 471с.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1985, 576с.

5. Вища математика, навчально-методичний посібник/ В.Л. Сизоненко та ін. – Харків: ХНАУ ім. В.В. Докучаєва, 2009.

6. Математичний аналіз, навчально-методичний посібник/ В.Л. Сизоненко та ін. – Харків: ХНАУ ім. В.В. Докучаєва, 2010.

7. Аналітична геометрія, навчально-методичний посібник/ В.Л. Сизоненко та ін. – Харків: ХНАУ ім. В.В. Докучаєва, 2007.

8. Лінійна алгебра, навчально-методичний посібник/ В.Л. Сизоненко та ін. – Харків: ХНАУ ім. В.В. Докучаєва, 2005.

9. Вища математика (навчальний посібник) для здобувачів вищої освіти спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» першого (бакалаврського) рівня. Масленніков Д.І., Коваленко М.Й., Харків: ХНАУ ім. В.В. Докучаєва, 2019.

ЗМІСТ

зміст

Навчальне видання

МАСЛЕННІКОВ Дмитро Ігорович
МАСЛЕННІКОВА Вікторія Вікторівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА В АРХІТЕКТУРІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського рівня)
спеціальностей 191 «Архітектура та мастобудування»