Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра надійності та міцності машин і споруд імені В.Я. Аніловича

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗВ'ЯЗОК ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ В ПРИРОДНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Методичні вказівки до виконання практичних робіт

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування 192 Будівництво та цивільна інженерія, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт

Харків
2023

Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра надійності та міцності машин і споруд імені
В.Я. Аніловича

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗВ'ЯЗОК ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ В ПРИРОДНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної та заочної форм навчання зі спеціальностей
131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування,
192 Будівництво та цивільна інженерія,
208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт

Затверджено рішенням
Методичної ради
ФМІ ДБТУ
Протокол № 1
від 07.02.2023 р.

Харків
2023

УДК 531/534 (075.8)

Схвалено на засіданні кафедри надійності та міцності машин і споруд імені В.Я. Аніловича
протокол № 6 від 30.01.2023 р.

Теоретична механіка. Розв'язок прямої задачі динаміки точки в природній системі координат: методичні вказівки до виконання практичних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування, 192 Будівництво та цивільна інженерія, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт. Харків. ДБТУ; уклад.: М.В. Сліпченко, В.В. Бредихін, О.М. Шукаєва. – Харків: [б. в.], 2023.–26 с.

Методичні вказівки призначені для підвищення ефективності самостійної роботи студентів у поза аудиторний час і при спілкуванні з викладачем.

Матеріали цих вказівок можуть бути використані викладачами кафедри при проведенні самостійних і контрольних робіт в аудиторії, під час захисту розрахунково-графічних робіт, комплектуванні задач в екзаменаційних білетах.

Розраховані методичні вказівки на студентів вищих учбових закладів технічних спеціальностей.

Рецензенти:
О. І. Завгородній, д-р техн. наук, проф., проф.. фізики та вищої математики Державного біотехнологічного університету.
О. І. Алфьоров, д-р техн. наук, доц., проф. кафедри проектування технічних систем Сумського національного аграрного університету

Відповідальний за випуск: М. В. Сліпченко, к.т.н., доцент, зав.каф.

1. Основні закони динаміки
2. Рівняння руху матеріальної точки у природній системі відліку.
3. Пряма задача динаміки матеріальної точки в природній системі координат.
4. Порядок розв'язування прямої задачі динаміки невільної матеріальної точки.
5. Приклади розв'язування задач.
6. Задачі для самостійного розв'язку

1. Основні закони динаміки

В основі динаміки лежать три закони І.Ньютона, які уперше в найбільш повному й закінченому вигляді були сформульовані у книзі "Математичні начала натуральної філософії" (1686 р.).

1. ***Перший закон*** (закон інерції):

ізольована від зовнішніх дій матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія інших тіл не змінить цього стану.

2. ***Другий закон*** (основний закон динаміки):

сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює добутку маси точки на її прискорення, а напрямок сили співпадає з напрямком прискорення:

$$\overline{F} = m\overline{a}\ . \qquad (1)$$

Якщо на точку діє декілька сил , то їх можна замінити рівнодіючою:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k . \qquad (2)$$

Якщо точка рухається по якійсь поверхні, то на неї, крім активних сил діє і реакція в'язі $\overline{N}$.

Таким чином у загальному випадку у рівнянні (1.1):

$$\overline{F} = \overline{R} + \overline{N}\ .$$

3. ***Третій закон*** (закон рівності дії і протидії):

Сили взаємодії двох матеріальних точок рівні між собою за модулем і напрямлені вздовж однієї прямій, яка з'єднує ці точки, у протилежні сторони.

2. Рівняння руху матеріальної точки у природній системі відліку

У випадку природної форми означення руху точки її положення на траєкторії визначається залежністю:

$$S = S(t),$$

де S – дугова координата.

При цьому прискорення $\overline{a}$ точки M дорівнює:

$$\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_\tau .$$

Нехай точка під дією прикладених сил і реакцій в'язей рухається вздовж деякої траєкторії AB (рис. 1).

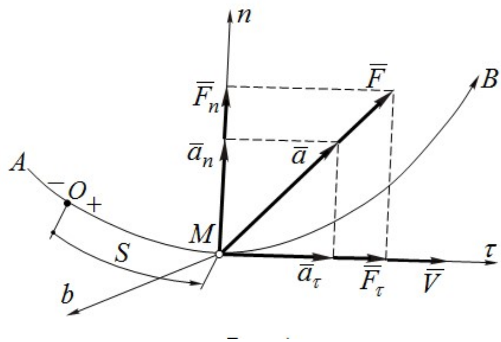

Рис. 1

Спроектуємо рівняння (1) на осі $M\tau nb$ натуральної системи координат:

$$ma_\tau = F_\tau ; \quad ma_n = F_n ; \quad ma_b = F_b . \qquad (3)$$

В системі (3) a_τ, a_n, a_b, F_τ, F_n, F_b відповідно, проекції прискорення $\overline{a}$ та рівнодіючої сили $\overline{F}$ на дотичну, головну нормаль та бінормаль до траєкторії AB в точці M.

Оскільки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} ; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} ; \quad a_b = 0 ,$$

то рівняння руху в проекціях на натуральні осі мають вигляд:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau ; \quad m\frac{V^2}{\rho} = F_n ; \quad 0 = F_b , \qquad (4)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії в точці M.

*Рівняння (4) називаються рівняннями руху матеріальної точки в **натуральній формі** або рівняннями Ейлера.*

У випадку руху точки на площині рівняння (5) набудуть вигляду:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau ; \quad m\frac{V^2}{\rho} = F_n .$$

Зауважимо, що багато задач динаміки точки розв’язуються більш просто, якщо скористатися диференціальними рівняннями руху в натуральній формі.

Очевидно, що диференціальні рівняння руху матеріальної точки можна записати в будь-якій системі координат. Для цього необхідно знати тільки вирази для проекцій прискорення та сили на ці координатні осі.

3. Пряма задача динаміки матеріальної точки в природній системі координат

Якщо задано рівняння руху матеріальної точки по траєкторії у вигляді $S = f(t)$, то для знаходження рівнодіючої прикладених до цієї точки сил, необхідно спочатку знайти проекції a_τ та a_n повного прискорення $\overline{a}$ точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};\ a_n = \frac{V^2}{\rho} \tag{5}$$

Далі, з рівнянь (3) знаходимо значення дотичної та нормальної проекції сили F:

$$F_\tau = ma_\tau;\ F_n = ma_n \tag{6}$$

Модуль прикладеної до матеріальної точки сили, при природному способі означення руху, буде дорівнювати

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{7}$$

4. Порядок розв'язування прямої задачі динаміки невільної матеріальної точки

1. Зобразити на рисунку матеріальну точку у проміжному положенні.
2. Показати активні сили і реакції в'язей, які на неї діють.
3. Вибрати систему відліку.
4. Записати векторне рівняння руху точки у формі другого закону динаміки (1).
5. Спроектувати векторне рівняння руху точки на вибрані осі координат.
6. Із одержаних рівнянь визначити необхідні величини.

5. Приклади розв'язування задач

Задача №1

Матеріальна точка масою m=1,2 $кг$ рухається по колу з радіусом $r = 0,6\ м$ згідно закону $S = 2,4t$.

Визначити модуль R рівнодіючої сил, що прикладені до матеріальної точки.

Розв'язування. У задачі рух матеріальної точки задано природним способом , тому для визначення рівнодіючої сил скористаємося залежностями:

$$R_\tau = ma_\tau = m\frac{dV}{dt};$$

$$R_n = ma_n = m\frac{V^2}{r}.$$

Визначимо дотичне і нормальне прискорення матеріальної точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(2,4t)}{dt} = 2,4\ м/c \Rightarrow a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0;$$

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{2,4^2}{0,6} = 9,6\ м/c^2.$$

Оскільки $a_\tau = 0$, то проекція R_τ рівнодіючої на дотичну вісь дорівнює нулю.

Знаходимо нормальну складову рівнодіючої сил:

$$R_n = m\frac{V^2}{r} = ma_n = 1{,}2 \cdot 9{,}6 = 11{,}5\,H.$$

Модуль рівнодіючої визначимо з виразу:

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2} = \sqrt{(11{,}5)^2 + 0} = 11{,}5\,H.$$

Таким чином, заданий рух матеріальної точки відбувається під дією сили, сталої за модулем і спрямованої вздовж радіуса до центра кола.

Відповідь: $R = 11{,}5\,H.$

Задача №2

Матеріальна точка масою $m = 18$ $кг$ рухається по колу з радіусом $R = 8$ $м$ згідно закону $S = e^{0,3t}$.

Визначити проекцію F_τ рівнодіючої сил, що прикладені до матеріальної точки, на дотичну до траєкторії в момент часу $t = 10$ c.

Розв'язування. Для визначення проекції F_τ скористаємося рівнянням:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{dV}{dt}. \qquad (1)$$

Спочатку знайдемо значення швидкості матеріальної точки:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dS}(e^{0,3t}) = 0{,}3e^{0,3t}.$$

При $t = 10\ \ c$: $\quad V = 0{,}3 \cdot e^{0{,}3 \cdot 10} = 0{,}3 \cdot 2{,}72^3 = 6{,}04\ \ м/с$.

Визначаємо величину дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{0{,}3t}) = 0{,}09e^{0{,}3t},$$

при $t = 10\ \ c$: $\quad a_\tau = 0{,}09 \cdot e^{0{,}3 \cdot 10} = 0{,}09 \cdot 2{,}72^3 = 1{,}81\ \ м/с^2$.

Підставивши в рівняння (1) значення a_τ і m, одержимо:

$$F_\tau = ma_\tau = 18 \cdot 1{,}8 = 32{,}4\,H.$$

Відповідь: $F_\tau = 32{,}4\,H.$

Задача №3

Матеріальна точка масою $m = 22\ \ кг$ рухається по колу з радіусом $R = 10 м$ згідно закону $S = 0{,}3t^2$.

Визначити модуль F рівнодіючої сил, що діють на точку, у момент часу $t = 5\ \ c$.

Розв'язування. Оскільки рух матеріальної точки задано природним способом, то модуль рівнодіючої сил, прикладених до точки, визначається за залежностями і:

$$F_\tau = ma_\tau; \quad F_n = ma_n; \quad F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}.$$

Величини дотичного і нормального прискорення матеріальної точки визначаються за рівняннями :

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \qquad a_n = \frac{V^2}{R}.$$

Враховуючи, що швидкість точки

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(0{,}3t^2)}{dt} = 0{,}6t,$$

то дотичне прискорення точки дорівнює:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}6t) = 0{,}6\ м/с^2.$$

Оскільки в момент часу $t = 5\ с$ швидкість точки:

$$V = 0{,}6t = 0{,}6 \cdot 5 = 3\ м/с,$$

то нормальне прискорення точки складе:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{3^2}{10} = 0{,}9\ м/с^2.$$

Визначаємо F_τ і F_n за рівняннями:

$$F_\tau = m \cdot a_\tau = 22 \cdot 0{,}6 = 13{,}2\,H;$$

$$F_n = m \cdot a_n = 22 \cdot 0{,}9 = 19{,}8\,H.$$

Тоді модуль рівнодіючої сил, що діють на матеріальну точку, дорівнює:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{13{,}2^2 + 19{,}8^2} = 23{,}8\,H.$$

***Відповідь*:** $F = 23{,}8\,H.$

Задача №4

На криволінійних ділянкам залізничної колії зовнішню рейку піднімають вище над внутрішньою (рис.2). При русі поїзда на цій ділянці його швидкість V підтримують такою, щоб тиск вагона на рейки був напрямлений перпендикулярно залізничному полотну.

Визначити величину h підвищення зовнішньої рейки над внутрішньою при наступних даних: радіус закруглення залізничної колії $R = 400\ м$, швидкість поїзда $V = 10\ м/с$, відстань між рейками $S = 1,6\ м$.

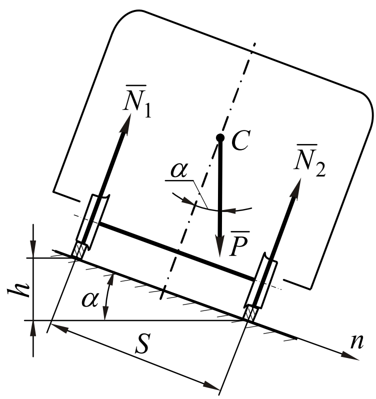

Рис. 2.

Розв'язування. На вагон діють: сила тяжіння $\overline{P}$, яка спрямована вертикально униз, та реакції рейок на колеса $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$, які напрямлені перпендикулярно до залізничного полотна.

Запишемо рівняння руху вагона у векторній формі:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{P} + \overline{N}_1 + \overline{N}_2 \ , \tag{1}$$

де $\overline{a}$ – прискорення вагона.

Оскільки рух відбувається по криволінійній траєкторії, то вибираємо природну систему координат: вісь n спрямуємо за нормаллю до центра кривини траєкторії, а вісь τ – за дотичною у бік руху вагона. Бінормаль, вісь b, на рис. 1.9 не показано.

Проектуємо рівняння руху (1) на вісь n:

$$ma_n = P\sin\alpha; \quad \text{або} \quad m\frac{V^2}{R} = P\sin\alpha .$$

З рис. 1.8 видно, що $\sin\alpha = h/S$.

Отже,

$$\frac{mV^2}{R} = P\frac{h}{S} = mg\frac{h}{S} \Rightarrow \frac{V^2}{R} = g\frac{h}{S} \Rightarrow h = \frac{SV^2}{g \cdot R}.$$

Підставивши числові значення відомих величин, отримуємо:

$$h = \frac{1,6 \cdot 10^2}{9,81 \cdot 400} = 0,0408 м = 4,08 \ см .$$

Відповідь: $h = 4,08 \ см$.

Задача № 5

Вантаж M вагою $P = 1H$, який підвішений до нитки довжиною $l = 0,3 \ м$ у нерухомій точці O, являє собою конічний маятник (рис. 3), тобто рухається по колу у горизонтальній площині, при цьому нитка з вертикаллю утворює кут $\alpha = 60^\circ$.

Визначити величину швидкості вантажу V і модуль сили натягу нитки T .

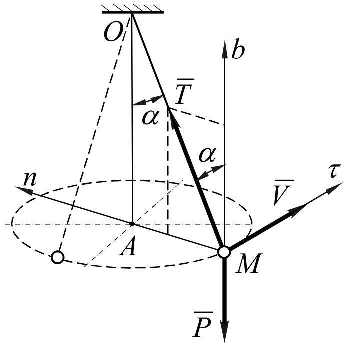

Рис. 3.

Розв'язування. Зобразимо вантаж M у будь якому положенні і покажемо сили, які на нього діють: силу тяжіння $\overline{P}$, яка спрямована вертикально униз, і натяг нитки $\overline{T}$, який спрямовано до точки підвісу O .

Для розв'язування задачі вибираємо природну систему координат: вісь τ спрямована по дотичній до кола в бік руху вантажу, вісь n – по нормалі до центру кривини і вісь b – вертикально уверх.

Запишемо рівняння руху вантажу в векторній формі:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{P} + \overline{T} \; .$$

Проектуємо це векторне рівняння на осі координат:

$$ma_\tau = 0; \quad ma_n = T\sin 60^\circ; \quad ma_b = T\cos 60^\circ - P \, . \qquad (1)$$

Модуль сили натягу нитки T знайдемо з третього із рівнянь (1), враховуючи, що $a_b = 0$:

$$0 = T\cos 60^\circ - P \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{0{,}5} = 2\, H.$$

З другого із рівнянь (1) знайдемо V , якщо врахувати, що

$$a_n = \frac{V^2}{R}; \qquad m = \frac{P}{g}; \qquad R = l\sin 60^\circ .$$

Тоді

$$\frac{P}{g}\frac{V^2}{l\sin 60^\circ} = T\sin 60^\circ .$$

Звідкіля

$$V = \sqrt{\frac{T \cdot g \cdot l \sin^2 60^\circ}{P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,3}{1}} \cdot 0,866 = 2,10 \quad м/с .$$

Відповідь: $V = 2,1\ м/с$; $T = 2\,H$.

Задача №6

Матеріальна точка вагою $G = 100H$ рухається по горизонтальній поверхні під дією сили $\overline{F}$. У період розгону точки шлях, який вона проходить, змінюється за законом $S = 0,1t^3$ (t – у секундах, S – у метрах). Траєкторією руху точки на площині (рис.4) є коло з радіусом $R = 100м$.

Визначити модуль сили F, яка діє, в момент, коли модуль швидкості точки дорівнює $V = 30\ м/с$.

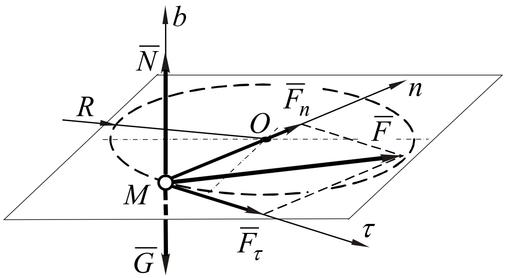

Рис. 4.

Розв'язування. Зобразимо точку M у будь-якому положенні на колі (рис.4). Покажемо сили, що діють на матеріальну точку: силу тяжіння $\overline{G}$; реакцію поверхні $\overline{N}$, яка перпендикулярна до поверхні, та задану силу

$\overline{F}$, яка лежить в площині руху точки і напрямлена в бік центра кривини траєкторії.

З точкою M пов'яжемо природну систему координат. Вісь $M\tau$ спрямуємо по дотичній до кола у сторону руху, а вісь Mn – перпендикулярно до неї у бік центра кривини кола.

Запишемо рівняння руху точки у вигляді другого закону Ньютона:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{F} + \overline{G} + \overline{N} .$$

Спроектуємо це векторне рівняння на осі обраної системи координат:

$$ma_\tau = m\frac{dV}{dt} = F_\tau ,$$

$$ma_n = m\frac{V^2}{R} = F_n .$$

Оскільки закон руху відомий, то:

$$V = \dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0,1t^3\right) = 0,3t^2 ,$$

$$a_\tau = \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0,3t^2\right) = 0,6t.$$

За умовами $V = 30\ м/с$. Знайдемо момент часу, коли ця умова виконується:

$$V = 0,3t^2 = 30 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{100} = 10\ с.$$

Тоді:

$$a_\tau = 0,6t = 6\ м/с^2 , \qquad a_n = \frac{30^2}{100} = 9\ м/с^2 .$$

Враховуючи, що маса точки дорівнює $m = G/g$, знаходимо:

$$F_\tau = ma_\tau = \frac{100}{9,81} \cdot 6 = 61,2\,H,$$

$$F_n = ma_n = \frac{100}{9,81} \cdot 9 = 91,8\,H.$$

Визначаємо модуль шуканої сили:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{61,2^2 + 91,8^2} = 110,1\,H.$$

Відповідь: $F = 110,1\,H.$

Задача №7

Радіус закруглення моста у точці A дорівнює $r = 50\,м$ (рис.5).

Визначити, з якою силою автомобіль тисне на міст у точці A, якщо його маса $m = 1000\ кг$, а модуль швидкості руху $V = 20\ м/с$.

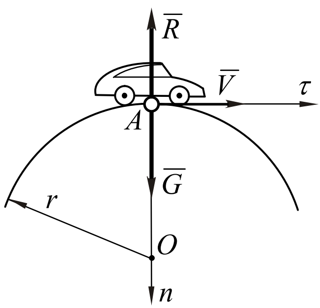

Рис. 5.

Розв'язування. Розглянемо автомобіль як матеріальну точку, оскільки його розмірами в порівнянні з розмірами моста можна знехтувати. Зобразимо автомобіль у точці A моста (рис.5) і покажемо сили, які діють на нього: $\overline{G}$ – силу тяжіння автомобіля і $\overline{R}$ – реакцію моста.

Оскільки автомобіль рухається по криволінійній траєкторії, то для розв'язування задачі скористуємося природною системою координат $A\tau n$.

Запишемо рівняння руху автомобіля у векторній формі:

$$m\overline{a} = \overline{G} + \overline{R}$$

і спроектуємо його на осі вибраної системи координат:

$$ma_\tau = 0 \text{ (оскільки } V = const, \text{ то } a_\tau = 0\text{)} \qquad (1)$$

$$ma_n = m\frac{V^2}{r} = G - R\,. \qquad (2)$$

Із рівняння (2) визначаємо реакцію моста R за модулем:

$$R = G - m\frac{V^2}{r} = mg - m\frac{V^2}{r} = m\left(g - \frac{V^2}{r}\right),$$

$$R = 1000\left(9{,}81 - \frac{20^2}{50}\right) = 1810\,H.$$

Сила тиску N автомобіля на міст дорівнює за модулем реакції моста, але спрямована донизу.

Оскільки вага автомобіля G дорівнює

$$G = mg = 1000 \cdot 9{,}81 = 9810\,H,$$

то, якщо міст опуклий, сила тиску автомобіля на нього зменшується порівняно з тим випадком, коли автомобіль рухається по горизонтальному мосту.

Поставимо додаткове питання: з якою швидкістю $V_{\max}$ повинен рухатись автомобіль, щоб сила тиску автомобіля на міст $\overline{R}$ дорівнювала нулю?

Оскільки $\overline{R} = 0$, то

$$0 = m\left(g - \frac{V^2_{\max}}{R}\right), \qquad \text{або} \qquad g - \frac{V^2_{\max}}{R} = 0.$$

Звідси

$$V_{\max} = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81 \cdot 50} = 22{,}2 \ \textit{м/с} \ \ (80 \ \textit{км/год}).$$

Відповідь: $N = 1810\,H$.

Задача №8

Камінь вагою $G = 3$ Н, який прив'язано до нитки довжиною $l = 1\ м$, описує коло у вертикальній площині (рис.6).

Визначити найменше значення кутової швидкості обертання ω, при якій нитка розірветься, якщо її опір розриву складає 9 Н.

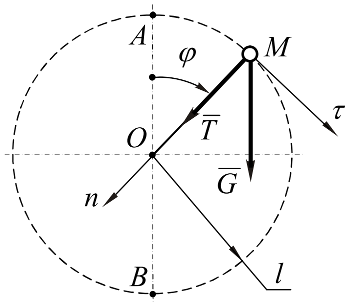

Рис. 6.

Розв'язування. Зобразимо камінь M у будь якому положенні на дузі кола. Положення точки M визначається кутом φ, який відраховується від вертикалі OA у напрямку кутової швидкості ω.

На камінь (точку M) діють сила тяжіння $\overline{G}$ та сила натягу нитки $\overline{T}$.

З точкою M пов’яжемо природну систему координат $M\tau n$ і запишемо рівняння руху точки M у векторній формі:

$$m\overline{a} = \overline{G} + \overline{T}.$$

Спроектуємо це рівняння на осі вибраної системи координат:

$$ma_\tau = G\sin\varphi; \tag{1}$$

$$ma_n = m\frac{V^2}{\rho} = T + G\cos\varphi. \tag{2}$$

Зауважимо, що $V = \omega l$, а $\rho = l$. Тобто рівняння (2) перетворюється до вигляду:

$$m\frac{\omega^2 l^2}{l} = m\omega^2 l = T + G\cos\varphi .$$

Звідси

$$\omega = \sqrt{\frac{T + G\cos\varphi}{ml}} = \sqrt{\frac{g\left(T + G\cos\varphi\right)}{Gl}}. \tag{3}$$

Із рівняння (3) витікає, що при $T = T_{\max} = 9\ H$ кутова швидкість ω є тільки функцією кута φ. Найменше значення ω, коли нитка розривається, буде при $\cos\varphi = -1$, тобто, коли $\varphi = 180^\circ$, що відповідає положенню каменя у точці B. Таким чином:

$$\omega = \sqrt{\frac{9{,}81\left(9 - 3\cdot 1\right)}{3\cdot 1}} = 4{,}43\ \ рад/c .$$

Відповідь: $\omega = 4{,}43\ \ рад/c$.

Задача №9

Трек для випробування автомобілів на кривих відрізках шляху має віражі, профіль яких (рис.7) у поперечному перетині є прямою, яка нахилена до горизонту так, що зовнішній край треку є вищим за внутрішній.

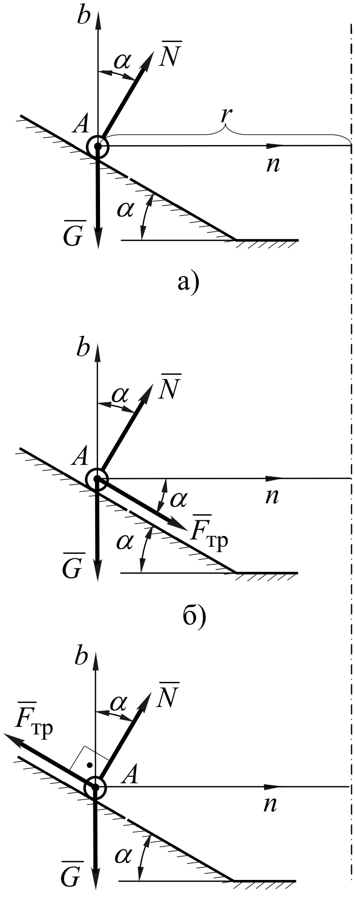

Рис. 7.

Визначити, з якими найменшою і найбільшою швидкостями можна їхати по віражу, що має радіус кривини r і кут нахилу до горизонту α? Коефіцієнт тертя шин f об поверхню треку вважати відомим.

Розв'язування. На автомобіль, який рухається по віражу, діють: сила тяжіння $\overline{G}$, сила нормального тиску з боку поверхні віражу $\overline{N}$ і сила тертя $\overline{F}_{тр}$, яка спрямована уздовж поверхні віражу у площині, яка перпендикулярна до напрямку швидкості. Виникнення сили тертя обумовлюється тертям коліс автомобіля об поверхню віражу.

Розглянемо рух центра тяжіння автомобіля (точка A), вважаючи, що всі сили прикладені до цієї точки. Першим розглянемо випадок руху автомобіля, коли сила тертя $\overline{F}_{тр} = 0$ (рис.7,а). З точкою A пов'яжемо природну систему координат Anb: нормаль An спрямуємо до центра кривини, Ab - перпендикулярно до An.

Запишемо рівняння руху автомобіля у векторній формі:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{G} + \bar{N},$$

і спроектуємо це рівняння на осі координат Ab і An:

$$ma_b = 0 = N\cos\alpha - G\,; \tag{1}$$

$$ma_n = m\frac{V^2}{r} = N\sin\alpha\,. \tag{2}$$

Із рівняння (1) знайдемо величину нормальної реакції N:

$$N = \frac{G}{\cos\alpha}\,.$$

Підставимо знайдене значення N у рівняння (2) і визначимо швидкість автомобіля, коли сила тертя об поверхню треку дорівнює нулю:

$$m\frac{V^2}{r} = \frac{G}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow\; V = \sqrt{g\cdot r\cdot tg\alpha} \tag{3}$$

При максимальній швидкості автомобіля $V_{\max}$ сила тертя $\bar{F}_{тр}$ спрямована до нижнього краю віражу (рис.7,б) і дорівнює $F_{тр} = f\cdot N$.

Векторне рівняння руху автомобіля у цьому випадку буде мати вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}. \tag{4}$$

Проектуємо рівняння (4) на осі Anb:

$$ma_b = 0 = N\cos\alpha - F_{\text{тр}}\sin\alpha - G; \tag{5}$$

$$ma_n = m\frac{V^2}{r} = N\sin\alpha + F_{\text{тр}}\cos\alpha. \tag{6}$$

Рівняння (5) перепишемо у вигляді:

$$N\cos\alpha - f\cdot N\sin\alpha = G,$$

відкіля

$$N = \frac{G}{\cos\alpha - f\sin\alpha}. \tag{7}$$

Підставимо значення N у рівняння (6) і визначимо максимальне значення швидкості $V_{\max}$:

$$m\frac{V_{\max}^2}{r} = \frac{G\sin\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} + \frac{f\cdot G\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha};$$

$$V_{\max}^2 = gr\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = gr\frac{tg\alpha + f}{1 - f\cdot tg\alpha}.$$

Звідси:

$$V_{\max} = \sqrt{gr\frac{tg\alpha + f}{1 - f\cdot tg\alpha}}\ .$$

Якщо швидкість автомобіля мінімальна $V_{\min}$ (рис.7,в), то тертя спрямоване до верхнього краю треку і проекції рівняння (4) на осі Anb будуть мати вигляд:

$$ma_b = 0 = N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha - G\ ; \tag{8}$$

$$ma_n = m\frac{V_{\min}^2}{r} = N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha. \tag{9}$$

Із рівнянь (8) та (9) одержуємо:

$$V_{\min} = \sqrt{gr\frac{tg\alpha - f}{1 + f \cdot tg\alpha}}\ .$$

Відповідь: $V_{\max} = \sqrt{gr\frac{tg\alpha + f}{1 - f \cdot tg\alpha}}$; $V_{\min} = \sqrt{gr\frac{tg\alpha - f}{1 + f \cdot tg\alpha}}$.

6. Задачі для самостійного розв'язку

Задачі взято з задачника Мещерського [4].

Задача 1

Камінь вагою 0,3 кг прив'язано до нитки довжиною 1 метр. При русі камінь описує у вертикальній площині окружність. Визначити найменшу кутову швидкість камня, при якій нитка порветься, якщо вона здатна витримувати зусилля 9 Н.

Задача 2

В вагоні поїзду, що рухався спочатку по прямолінійній ділянці шляху, а потім по закругленій зі швидкістю 20 м/с, відбувалося зважування вантажу на пружних вагах. На прямолінійній ділянці ваги показали вагу у 50 Н, а на закругленій ділянці – 51Н. Визначити радіус закруглення.

Задача 3

Літак, який пікірує відвісно, досяг швидкості 300 м/с, після чого пілот став виводити літак із піке, описуючи дугу окружності з радіусом $R = 600$ м в вертикальній площині.

Маса пілота 80 кг. Визначити найбільшу силу, що втискає пілота в крісло.

Задача 4

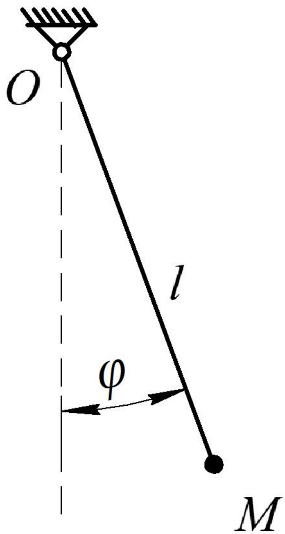

Рис.8

Вантаж вагою 10Н підвішено до тросу довжиною 2 м і здійснює разом з тросом коливання відповідно до рівняння $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi t$, де φ - кут відхилу троса від вертикалі в радіанах, t - час в секундах (рис. 8). Визначити натяг T_1 і T_2 тросу в верхньому та нижньому положеннях вантажу.

Задача. 5

Велосипедист рухається по кривій радіусом $R = 10$ м зі швидкістю 5 м/с. Обчислити кут нахилу серединної площини велосипеду до вертикалі, а також найменший коефіцієнт тертя між шинами велосипеда і полотном дороги, при якому буде забезпечена стійкість велосипеду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Курс лекцій. Харків, 2013. 544с.
2. Бурлака В.В., Сліпченко М.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка: Збірник задач для курсових робіт. Навчальний посібник. Харків: Міськдрук, 2016. 309 с.
3. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Навчальний посібник / за ред. С.І. Кучеренка. Харків, 2012. 568с.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.:Наука, 1973. 448с.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗВ'ЯЗОК ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ В ПРИРОДНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

Укладачі

СЛІПЧЕНКО Максим Володимирович
БРЕДИХІН Вадим Вікторович
ШУКАЄВА Ольга Миколаївна

Формат 60x84\16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 1,6
Наклад 30 пр.
Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44