Міністерство освіти і науки
України

**ДЕРЖАВНИЙ
БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет мехатроніки та інжинірингу

**Кафедра надійності та міцності машин і споруд
імені В.Я. Аніловича**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

**Методичні вказівки
до виконання практичних робіт**

**для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей
131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування
192 Будівництво та цивільна інженерія,
208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт**

**Харків
2023**

Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра надійності та міцності машин і споруд імені
В.Я. Аніловича

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної та заочної форм навчання зі спеціальностей
131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування,
192 Будівництво та цивільна інженерія,
208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт

Затверджено рішенням
Методичної ради
ФМІ ДБТУ
Протокол № 1
від 07.02.2023 р.

Харків
2023

УДК 531/534 (075.8)

Схвалено на засіданні кафедри надійності та міцності машин і споруд імені В.Я. Аніловича
протокол № 6 від 30.01.2023 р.

Теоретична механіка. Розв'язок оберненої задачі динаміки точки: методичні вказівки до виконання практичних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування, 192 Будівництво та цивільна інженерія, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт. Харків. ДБТУ; уклад.: М.В. Сліпченко, В.В. Бредихін, О.М. Шукаєва. – Харків: [б. в.], 2023. – 26 с.

Методичні вказівки призначені для підвищення ефективності самостійної роботи студентів у поза аудиторний час і при спілкуванні з викладачем.

Матеріали цих вказівок можуть бути використані викладачами кафедри при проведенні самостійних і контрольних робіт в аудиторії, під час захисту розрахунково-графічних робіт, комплектуванні задач в екзаменаційних білетах.

Розраховані методичні вказівки на студентів вищих учбових закладів технічних спеціальностей.

Рецензенти:
О. І. Завгородній, д-р техн. наук, проф., проф. фізики та вищої математики Державного біотехнологічного університету.
Р. В. Антощенков, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри мехатроніки, безпеки життєдіяльності та управління якістю Державного біотехнологічного університету

Відповідальний за випуск: М. В. Сліпченко, к.т.н., доцент, зав.каф.

1. Обернена задача динаміки.
2. Порядок розв'язування оберненої задачі динаміки.
3. Приклади розв'язування задач.
4. Задачі для самостійного розв'язку

1. Обернена задача динаміки

Обернена задача динаміки формулюється наступним чином:

знаючи сили, що діють на матеріальну точку, та її масу, треба одержати рівняння руху точки і кінематичні характеристики руху: координати, швидкість, прискорення.

Для розв'язування оберненої задачі динаміки необхідно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху, які відповідають вибраній системі відліку.

Якщо задача розв'язується у проекціях на осі системи декартових координат, то інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь руху:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\ . \tag{1}$$

У результаті інтегрування цієї системи визначається закон руху точки у декартових координатах.

Оскільки система (1) складається із 3-х диференціальних рівнянь другого порядку, то при її інтегруванні з'являються шість сталих: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, які визначаються за відомими характеристиками руху в певний момент часу або при певному положенні точки. У подальшому ці відомі характеристики руху будемо називати ***початковими умовами руху***.

Оскільки положення точки у просторі визначається трьома координатами $x, y, z,$ а швидкість точки – трьома проекціями вектора швидкості $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ на координатні осі, то при русі точки у просторі початкові умови при $t = t_0$ будуть мати вигляд:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0; \qquad \text{(положення точки)},$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0; \qquad \text{(швидкість точки)}.$$

У результаті підстановки початкових умов руху у перші і другі інтеграли системи (2.1) утворюється система шести рівнянь для визначення шести невідомих $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ сталих інтегрування.

При русі матеріальної точки у площині, наприклад xOy, будемо мати два диференціальних рівняння руху, а сталих інтегрування – чотири (C_1, C_2, C_3, C_4). Кількість початкових умов в цьому випадку при $t = t_0$ складає чотири:

$$x = x_0, \quad y = y_0; \qquad \text{(положення точки)},$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \qquad \text{(швидкість точки)}.$$

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно, наприклад, уздовж осі Ox, то будемо мати тільки одне диференціальне рівняння руху і дві сталі інтегрування (C_1, C_2), а початкові умови при $t = t_0$ будуть мати вигляд:

$$x = x_0, \qquad \text{(положення точки)},$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0. \qquad \text{(швидкість точки)}.$$

При русі матеріальної точки по криволінійній траєкторії розв’язувати обернену задачу динаміки часто простіше скориставшись рівняннями руху в природній формі:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}; \qquad ma_n = \sum F_{kn}; \qquad 0 = \sum F_{kb}. \tag{2}$$

В системі (2) $\sum F_{k\tau}$, $\sum F_{kn}$, $\sum F_{kb}$ – суми проекцій всіх сил, що діють на матеріальну точку, у тому числі і реакції в'язей, на дотичну вісь τ, нормальну вісь n і бінормальну вісь b природної системи координат.

Початковими умовами руху у цьому випадку при $t = t_0$ є значення дугової координати $S(t_0) = S_0$ і початкової швидкості $V(t_0) = V_0$.

Необхідно зауважити, що початкова швидкість в початкових умовах, ураховує вплив на рух матеріальної точки тих сил, які діяли на точку до початкового моменту часу.

2. Порядок розв'язування оберненої задачі динаміки

Обернену задачу динаміки матеріальної точки рекомендується розв'язувати у наступному порядку:

1. Зобразити матеріальну точку у поточному положенні.
2. Показати активні сили і реакції в'язей, що прикладені до матеріальної точки.
3. Обрати систему координат.
4. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
5. Записати рівняння руху у векторній формі.
6. Спроектувати рівняння руху на осі обраної системи координат (скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки).
7. Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху і, скориставшись початковими умовами руху, визначити сталі інтегрування.

8. Визначити величини, які треба відшукати за умовою задачі.

Зауваження. У випадку руху вільної матеріальної точки зручно розв’язувати задачу користуючись декартовою системою координат. При криволінійному ж русі невільної матеріальної точки простіше розв’язувати задачу в проекціях на осі природної системи координат. При цьому необхідно урахувати реакції в’язей.

Задачі, які розглядаються у цьому розділі, можна поділити на два основних типи:

1. Задачі, які відносяться до прямолінійного руху точки.
2. Задачі, які відносяться до криволінійного руху точки.

При розв’язуванні задач першого типу будемо розглядати випадки, коли на матеріальну точку діють сили, які є:

- сталими;
- залежать від часу;
- залежать від координат точки;
- залежать від швидкості точки.

При розв’язуванні задач другого типу будемо розглядати випадки, коли на матеріальну точку діють сили, які є:

- сталими;
- залежать від координат точки;
- залежать від швидкості точки.

3. Приклади розв'язування задач

Задача №1

Важке тіло ковзає по гладкій поверхні, яка нахилена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту.

Визначити, за який час T тіло пройде шлях $S = 9{,}6\ м$, якщо у початковий момент його швидкість дорівнювала $V_0 = 2\ м/с$.

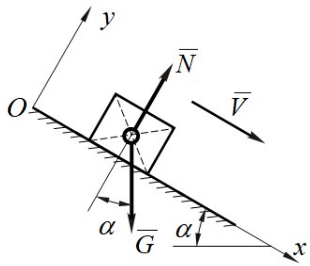

Рис. 1

Розв'язування. Зобразимо тіло у довільному положенні на похилій площині (рис.1). Оскільки рух тіла по площині є поступальним, а при поступальному русі прискорення всіх точок тіла однакові, то рух такого тіла будемо розглядати як рух матеріальної точки (дане допущення буде справедливим і для наступних задач цієї теми).

Покажемо сили, що діють на тіло: силу тяжіння $\overline{G}$ і нормальну реакцію похилої площини $\overline{N}$.

Вісь Ox спрямуємо у сторону руху тіла.

Початкові умови при $t = 0$ мають вигляд:

$$x_0 = 0; \quad V_{x0} = V_0 = 2\ м/с .$$

Запишемо рівняння руху тіла у векторній формі:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N}\ .$$

Проектуємо це рівняння на вісь Ox :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dV_x}{dt} = G\sin\alpha.$$

Враховуючи, що $G = mg$, одержимо

$$\frac{dV_x}{dt} = g\sin\alpha\ .$$

Знайдемо залежність швидкості V_x від часу t .

Для цього розділимо змінні в останньому рівнянні і проінтегруємо:

$$dV_x = g\sin\alpha dt,$$

$$\int dV_x = g\sin\alpha\int dt,$$

$$V_x = gt\sin\alpha + C_1\ .$$

Використовуючи початкові умови визначаємо сталу інтегрування C_1 . Для цього підставляємо їх в останнє рівняння. Оскільки при $t = 0 \quad V_{x0} = 2\ м/с$, то:

$$2 = g\sin\alpha\cdot 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2\ .$$

Таким чином, рівняння для зміни швидкості матеріальної точки буде мати вигляд:

$$V_x = gt\sin\alpha + 2\ .$$

Знаходимо залежність координати x від часу:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = gt\sin\alpha + 2;$$

$$dx = gt\sin\alpha\ dt + 2dt;$$

$$\int dx = g\sin\alpha \int tdt + 2\int dt;$$

$$x = g\frac{t^2}{2}\sin\alpha + 2t + C_2.$$

Сталу інтегрування C_2 визначимо скориставшись початковими умовами, підставивши їх в останнє рівняння. Оскільки при $t = 0$ $x_0 = 0$, то:

$$0 = g \cdot 0 \cdot \sin\alpha + 2 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Остаточно, для координати x будемо мати залежність:

$$x = g\frac{t^2}{2}\sin\alpha + 2t.$$

Визначимо час T, при якому $x = S = 9{,}6$ *м*:

$$9{,}6 = 9{,}81\frac{T^2}{2}\sin 30^\circ + 2T,$$

або

$$2{,}45T^2 + 2T - 9{,}6 = 0.$$

Звідси:

$$T_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2{,}45 \cdot 9{,}6}}{2{,}45} = \frac{-1 \pm 4{,}95}{2{,}45}.$$

Оскільки час може бути тільки додатним, то:

$$T = \frac{-1 + 4{,}95}{2{,}45} = 1{,}6 \ c.$$

Відповідь: $T = 1{,}6 \ c$.

Задача №2

Важке тіло піднімається по негладкій похилій площині, яка нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 30^\circ$. У початковий момент швидкість тіла дорівнювала $V_0 = 15\ м/с$. Коефіцієнт тертя тіла об площину $f = 0{,}1$.

Визначити, який шлях S пройде тіло до зупинки? За який час T тіло пройде цей шлях?

Розв'язування. Зобразимо тіло у вигляді матеріаль-ної точки в довільному положенні (рис.2).

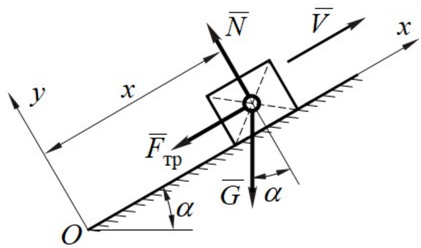

Рис. 2

Покажемо сили , що діють на матеріальну точку: силу тяжіння $\overline{G}$, реакцію похилої площини $\overline{N}$ і силу тертя $\overline{F}_{тр}$.

Вісь Ox спрямуємо вздовж похилої поверхні у сторону руху, а початок відліку (точку O) візьмемо у початковому положенні точки. Вісь Oy спрямуємо перпендикулярно до осі Ox. Початкові умови руху точки при $t = 0$ будуть мати вигляд:

$$x = 0;\ V_{x0} = V_0 = 15\ м/с .$$

Запишемо рівняння руху точки у векторній формі:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{G} + \overline{F}_{тр} + \overline{N} . \qquad (1)$$

Проектуємо векторне рівняння (1) на осі координат:

$$m\ddot{x} = -F_{тр} - G\sin\alpha ; \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} = N - G\cos\alpha . \qquad (3)$$

Оскільки точка в напрямі осі Oy не рухається $(\ddot{y} = 0)$, то із рівняння (3) випливає, що нормальна складова реакції похилої поверхні дорівнює $N = G\cos\alpha$.

Підставивши в рівняння (2) $m = G/g$, отримаємо:

$$\frac{G}{g}\ddot{x} = -F_{\text{тр}} - G\sin\alpha \,,$$

де $F_{\text{тр}} = f \cdot N = f \cdot G\cos\alpha$.

Тоді:

$$\frac{G}{g}\ddot{x} = -f \cdot G\cos\alpha - G\sin\alpha \,,$$

або

$$\ddot{x} = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right),$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right),$$

$$dV_x = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)dt.$$

Після інтегрування цього рівняння одержимо:

$$V_x = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t + C_1. \tag{4}$$

Співвідношення (4) є першим інтегралом диференціального рівняння (2). Для визначення сталої інтегрування C_1 підставимо в рівняння (4) початкову умову, а саме при $t = 0$ $V_{x0} = V_0$.

Тоді:

$$V_0 = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)\cdot 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = V_0 \,,$$

та

$$V_x = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t + V_0\,. \tag{5}$$

Для визначення закону руху точки запишемо отримане рівняння наступним чином:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t + V_0 .$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$dx = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)tdt + V_0 dt ;$$

$$\int dx = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)\int tdt + V_0\int dt;$$

$$x = -\frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t^2 + V_0 t + C_2 .$$

Стала інтегрування C_2 визначиться після підстановки початкових умов (при $t = 0 \quad x_0 = 0$) в останнє рівняння:

$$0 = -\frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)0 + V_0\cdot 0 + C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2 = 0 .$$

Таким чином, закон руху тіла має вигляд:

$$x = V_0 t - \frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t^2 . \qquad (6)$$

Отже, ми одержали закони зміни швидкості (5) та координати x (6) тіла в залежності від часу.

Визначимо час T руху тіла до повної зупинки, швидкість при цьому $V_x = 0$.

Таким чином, рівняння (5) буде мати вигляд:

$$0 = V_0 - g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)T,$$

звідкіля:

$$T = \frac{V_0}{g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} .$$

Через час T, згідно рівнянню (6), точка буде знаходитися від початку координат на відстані S, яка у нашому випадку чисельно дорівнює пройденому точкою шляху:

$$S = V_0 T - \frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)T^2.$$

Підставивши вираз для T, отримаємо:

$$S = \frac{V_0 \cdot V_0}{g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} - \frac{g}{2}\frac{\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)\cdot V_0^{\,2}}{g^2\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)^2},$$

$$S = \frac{V_0^2}{g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} - \frac{V_0^2}{2g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)},$$

$$S = \frac{V_0^2}{2g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)}.$$

З урахуванням числових значень отримаємо:

$$T = \frac{15}{9{,}81\left(0{,}1\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\right)} = 2{,}6 \ c,$$

$$S = \frac{15^2}{2\cdot 9{,}81\left(0{,}1\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\right)} = 19{,}6 \ м.$$

Відповідь: $T = 2{,}6 \ c$, $S = 19{,}6 \ м$.

Задача №3

Під час розгону вантажівки (рис.3) із стану спокою на прямолінійній горизонтальній ділянці сила тяги $\overline{F}_т$ перевищує силу опору $\overline{F}_о$, причому різниця між силою тяги і силою опору збільшується пропорційно часу, збільшуючись за кожну секунду на $F_т - F_о = 1{,}5 \ кН$, починаючи від початку руху автомобіля. Вага вантажівки $P = 70 \ кН$.

Визначити швидкість автомобіля V через $t = 10 \ c$ після початку руху і пройдений шлях S.

Розв'язування. Проведемо вісь Ox за напрямком руху автомобіля, приймаючи за початок координат початкове положення автомобіля у момент зрушування з місця (рис.3).

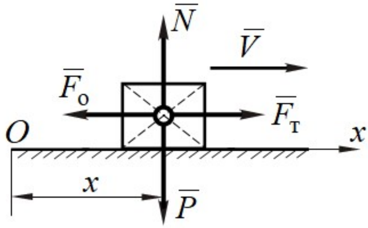

Рис. 3

Зобразимо автомобіль у довільному положенні і покажемо сили, які на нього діють: сила тяжіння $\overline{P}$; нормальна реакція поверхні $\overline{N}$; сила тяги $\overline{F}_т$; сила опору $\overline{F}_о$.

Початкові умови при $t = 0$ будуть мати вигляд:

$$x_0 = 0; \quad V_0 = 0.$$

Запишемо векторне рівняння руху автомобіля:

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{F}_т + \overline{F}_о + \overline{N}\,. \qquad (1)$$

Спроектуємо рівняння (1) на вісь Ox:

$$ma = F_т - F_о\,.$$

Оскільки $F_т - F_о = 1{,}5 \cdot t$, то $ma = 1{,}5t,$ або

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 1{,}5t.$$

Враховуючи, що $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dV}{dt}$, отримаємо:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = 1,5\ t\ .$$

Виконавши інтегрування цього рівняння, одержимо:

$$dV = \frac{1,5}{m} t dt;$$

$$\int dV = \frac{1,5}{m} \int t dt;$$

$$V = \frac{1,5}{m} \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Сталу інтегрування C_1 визначимо використовуючи початкові умови. Оскільки при $t = 0 \quad V = V_0 = 0$, то:

$$0 = \frac{1,5}{2m} \cdot 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0\ .$$

Таким чином, закон зміни швидкості автомобіля з часом має вигляд:

$$V = \frac{1,5}{2m} t^2\ . \tag{2}$$

Визначимо швидкість автомобіля через $t = 10\ c$ після початку руху:

$$V = \frac{1,5g}{2P} t^2 = \frac{1,5 \cdot 9,81}{2 \cdot 70} \cdot 10^2 = 10,51\ м/с = 37,8\ км/год\ .$$

Враховуючи, що $V = \dfrac{dx}{dt}$, одержимо наступне диференціальне рівняння руху автомобіля:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1,5}{2m} t^2\ .$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$dx = \frac{1,5}{2m} t^2 dt;$$

$$\int dx = \frac{1,5}{2m} \int t^2 dt;$$

$$x = \frac{1,5}{2m} \cdot \frac{t^2}{3} + C_2 .$$

Для визначення сталої інтегрування C_2 скористаємося початковими умовами. Оскільки при $t = 0$ $x = x_0 = 0$, то:

$$0 = \frac{1,5}{6m} \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 .$$

Таким чином, закон зміни відстані x від часу має вигляд:

$$x = \frac{1,5}{6m} t^3 .$$

Визначимо шлях, який проїде автомобіль за час $t = 10$ c, враховуючи, що $m = \frac{P}{g}$:

$$S = \frac{1,5g}{6P} t^3 = \frac{1,5 \cdot 9,81}{6 \cdot 70} \cdot 10^3 = 35 \text{ } м .$$

Відповідь: $V = 10,51$ $м/с$, $S = 35$ $м$.

Задача №4

Матеріальна точка M масою m рухається на горизонтальній поверхні прямолінійно по осі Ox (рис.4). Точку відштовхує від нерухомого центра O сила $\overline{P}$, яка пропорційна масі m і відстані x, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює $k = 4$.

Визначити: закон руху точки $x = f(t)$, якщо її початкове віддалення від центра O дорівнює $x_0 = 5\ м$, а початкова швидкість дорівнює $V_0 = 2\ м/с$.

Розв'язування. На точку M вздовж осі Ox діє одна сила – відштовхуюча сила $\overline{P}$.

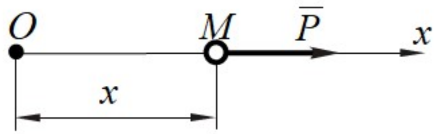

Рис. 4

Згідно до умови задачі $P = kmx$ і диференціальне рівняння руху точки у проекції на вісь Ox буде мати вигляд:

$$ma_x = P_x = kmx, \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = kx.$$

При $k = 4$ маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) – лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для нього початкові умови при $t = 0$ будуть мати вигляд:

$$x_0 = 5\ м, \quad V_0 = 2\ м/с.$$

Розв'язок диференціального рівняння будемо шукати у вигляді:

$$x = e^{\alpha t}. \qquad (2)$$

Тоді перша похідна рівняння (2) буде:

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}. \qquad (3)$$

Друга похідна:

$$\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}. \qquad (4)$$

Якщо підставити (2) і (4) у рівняння (1), одержимо:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} - 4e^{\alpha t} = 0, \quad \text{або} \quad \mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha^2 - 4) = 0.$$

Оскільки $e^{\alpha t} \neq 0$, то $\alpha^2 - 4 = 0$.

Розв'язками останнього рівняння є:

$$\alpha_{1,2} = \pm 2.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) запишеться так:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \qquad (5)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 знайдемо із початкових умов руху. Для цього спочатку продиференціювавши останнє рівняння за часом t визначимо швидкість точки:

$$V = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} \qquad (6)$$

Підставивши в рівняння (5) початкову умову, що при $t = 0 \quad x = x_0 = 5\ м$, а в рівняння (6) – початкову умову, що при $t = 0 \quad V = V_0 = 2\ м/с$, отримаємо:

$$\begin{cases} 5 = C_1 e^0 + C_2 e^0; \\ 2 = 2C_1 e^0 - 2C_2 e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2, \end{cases}$$

звідкіля:

$$C_1 = 3; \quad C_2 = 2.$$

Таким чином

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}.$$

Відповідь: $\quad x = f(t) = 3e^{2t} + 2e^{-2t}$.

Задача №5

Тіло M падає з деякої висоти без початкової швидкості (рис.5). На тіло діє сила опору повітря $R = \mu V^2$, де μ – коефіцієнт опору, а V – швидкість тіла.

Визначити швидкість тіла як функцію часу $V = f_1(t)$ і як функцію відстані y, що пролітає тіло $V = f_2(y)$.

Розв'язування. Зобразимо тіло M у довільному положенні на траєкторії і покажемо сили, які на нього діють: силу тяжіння $\overline{P}$ і силу опору повітря $\overline{R}$.

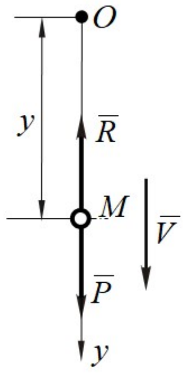

Рис. 5

Спрямуємо вісь Oy вертикально униз і виберемо початок координат у початковому положенні тіла.

Запишемо векторне рівняння руху тіла:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{R} .$$

Спроектуємо векторне рівняння руху тіла на вісь Oy:

$$ma = P - R, \quad \text{або} \quad ma = P - \mu V^2 = mg\left(1 - \frac{\mu}{mg}V^2\right).$$

Позначимо $\dfrac{\mu}{mg}$, як $1/k^2$ і, після скорочення на m, одержимо:

$$a = g\left(1 - \frac{V^2}{k^2}\right) = \frac{g}{k^2}\left(k^2 - V^2\right).$$

Остаточно:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{k^2}\left(k^2 - V^2\right). \qquad (1)$$

Початкові умови руху тіла при $t = 0$ будуть мати вигляд:

$$V = V_0 = 0; \quad y = y_0 = 0.$$

Рівняння (1) – диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, які можна розділити. Розділивши змінні, будемо мати:

$$\frac{dV}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2}dt .$$

Інтегруючи цей вираз, одержимо:

$$\int \frac{dV}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2}\int dt; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+V}{k-V}\right| = \frac{g}{k^2}t + C_1 .$$

За початковими умовами (при $t = 0$ $V = V_0 = 0$) визначимо сталу інтегрування C_1:

$$\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+0}{k-0}\right| = \frac{g}{k^2}\cdot 0 + C_1; \;\Rightarrow\; \frac{1}{2k}\ln 1 = C_1; \;\Rightarrow\; C_1 = 0.$$

Тоді:

$$\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+V}{k-V}\right| = \frac{g}{k^2}t \quad\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{k+V}{k-V}\right| = \frac{2g}{k}t,$$

або

$$\frac{k+V}{k-V} = e^{(2g/k)t}. \qquad (2)$$

Розв'язавши рівняння (2) відносно швидкості V, знаходимо:

$$k+V = (k-V)e^{(2g/k)t};$$

$$k+V = ke^{(2g/k)t} - Ve^{(2g/k)t};$$

$$V + Ve^{(2g/k)t} = ke^{(2g/k)t} - k;$$

$$V\left[1 + e^{(2g/k)t}\right] = k\left[e^{(2g/k)t} - 1\right].$$

Остаточно для залежності швидкості тіла від часу $V = f_1(t)$ одержимо:

$$V = k\,\frac{e^{(2g/k)t} - 1}{e^{(2g/k)t} + 1}. \qquad (3)$$

Щоб знайти швидкість тіла, як функцію від пройденої відстані y, виключимо із диференціального рівняння (1) змінну t, для чого похідну від швидкості за часом подамо у вигляді:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = V\frac{dV}{dy}. \quad (4)$$

Після підстановки в (1) одержимо диференціальне рівняння зі змінними, які можна розділити:

$$V\frac{dV}{dy} = \frac{g}{k^2}\left(k^2 - V^2\right). \quad (5)$$

Розділяємо змінні і інтегруємо:

$$\frac{VdV}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2}dy;$$

$$\int\frac{VdV}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2}\int dy;$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(k^2 - V^2\right)}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2}\int dy;$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(k^2 - V^2\right) = \frac{g}{k^2}y + C_2. \quad (6)$$

Для визначення C_2 скористаємося початковими умовами, а саме тим, що при $y = y_0 = 0 \quad V = V_0 = 0$:

$$-\frac{1}{2}\ln\left(k^2 - 0\right) = \frac{g}{k^2}\cdot 0 + C_2; \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{2}\ln k^2.$$

Тоді рівняння (6) буде мати вигляд:

$$-\frac{1}{2}\ln\left(k^2 - V^2\right) = \frac{g}{k^2}y - \frac{1}{2}\ln k^2;$$

$$\frac{1}{2}\ln k^2 - \frac{1}{2}\ln\left(k^2 - V^2\right) = \frac{g}{k^2}y;$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{k^2}{k^2-V^2}=\frac{g}{k^2}y;$$

$$\ln\frac{k^2}{k^2-V^2}=\frac{2g}{k^2}y. \qquad (7)$$

Потенціюємо рівняння (7) і знаходимо швидкість V тіла як функцію відстані y:

$$\frac{k^2}{k^2-V^2}=e^{\left(2g/k^2\right)y};$$

$$\frac{k^2}{e^{\left(2g/k^2\right)y}}=k^2-V^2;$$

$$V^2=k^2-\frac{k^2}{e^{\left(2g/k^2\right)y}};$$

$$V=k\sqrt{1-\frac{1}{e^{\left(2g/k^2\right)y}}},$$

$$V=k\sqrt{1-e^{-\left(2g/k^2\right)y}}.$$

Відповідь: $V=k\dfrac{e^{\left(2g/k\right)t}-1}{e^{\left(2g/k\right)t}+1}$; $V=k\sqrt{1-e^{-\left(2g/k^2\right)y}}$.

4. Задачі для самостійного розв’язку

Задачі взято з задачника Мещерського [4].

Задача 1

Камінь падає в шахту без початкової швидкості. Звук від удару каменя о дно шахти було почуто через 6,5 с від моменту його падіння. Швидкість звуку 330 м/с. Визначити глибину шахти.

Задача 2

При пострілі із гармати снаряд вилітає з горизонтальною швидкістю 570 м/с. Маса снаряду 6 кг. Чому дорівнює середній тиск порохових газів, якщо снаряд проходить всередині гармати 2 м? Який час снаряд рухається у стволі гармати, якщо тиск газів рахувати сталим?

Задача 3

Тіло масою m внаслідок отриманого поштовху пройшло по шорсткій горизонтальній поверхні за 5 с відстань 24,5 м і зупинилось. Визначити коефіцієнт тертя.

Задача 4

Тіло масою 2 кг кинуто вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с, відчуває спротив повітря, який при швидкості υ м/с дорівнює $0,4\upsilon$ Н. Визначити через скільки секунд тіло досягне найвищого положення.

Задача. 5

Вагон масою 9216 кг починає рухатись внаслідок діє вітру, що дме вздовж полотна залізничної колії. Ділянку залізничної колії вважати прямолінійною. Сила опору руху вагону дорівнює 1/200 ваги вагона. Сила тиску вітру $P = kSu^2$, де S площа задньої стінки вагону, на яку тисне вітер, $S = 6$ м^2; u – швидкість вітру відносно вагону; $k = 1,2$. Абсолютна швидкість вітру $\upsilon = 12$ м/с. Вважаючи початкову швидкість вагона рівною нулеві, визначити: 1) найбільшу швидкість вагона; 2) час за який вагон досягне найвищої швидкості; 3) відстань, на якій вагон матиме швидкість 3 м/с.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Курс лекцій. Харків, 2013. 544с.
2. Бурлака В.В., Сліпченко М.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка: Збірник задач для курсових робіт. Навчальний посібник. Харків: Міськдрук, 2016. 309 с.
3. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Навчальний посібник / за ред. С.І. Кучеренка. Харків, 2012. 568с.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.:Наука, 1973. 448с.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ
ДИНАМІКИ ТОЧКИ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

Укладачі

СЛІПЧЕНКО Максим Володимирович
БРЕДИХІН Вадим Вікторович
ШУКАЄВА Ольга Миколаївна

Формат 60х84\16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 1,6
Наклад 30 пр.
Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44