



Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра фізики і математики

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Основи теорії та методика розв'язування задач

Харків
2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний біотехнологічний університет
ФАКУЛЬТЕТ МЕХАТРОНІКИ ТА ІНЖИНІРИНГУ

Кафедра фізики і математики

КРИВИ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Основи теорії та методика розв'язування задач

для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей

Затверджено
Рішенням Вченої ради факультету
мехатроніки та інженіренгу ДБТУ
Протокол № 1 від 07.02.2023 р.

Харків
2023

Схвалено
на засіданні кафедри фізики і математики
Протокол № 3 від 31.10.2022 р.

Криві та поверхні другого порядку: основи теорії та методика розв'язування задач для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец./ О.І.Завгородній, О.В.Соловиченко; Держ. біотехнол. ун-т.– Харків: ДБТУ, 2023. – 105 с.

У навчальному посібнику викладена аналітична геометрія з розділу “криві та поверхні другого порядку”. Для самостійної роботи і придбання практичних навичок розв'язку задач наведена необхідна теоретична інформація, а в кожному розділі показана достатня кількість розібраних прикладів. Для більш глибокого розуміння матеріалу разом з прикладами дається значна кількість ілюстрацій графічного характеру.

Розрахована на студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей.

Рецензенти:

А. О. Пак, доктор техн. наук, доцент кафедри фізики і математики Державного біотехнологічного університету

О. А. Макаров, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Відповідальний за випуск О. І. Завгородній, д-р техн. наук., проф.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА	7
I. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	8
1.1. Канонічні рівняння кривих другого порядку	8
1.2. Визначення еліпса, гіперболи і параболи на базі їх властивостей по відношенню до директриси	20
1.3. Параметричні рівняння кривих другого порядку	22
1.3.1. Про гіперболічні функції	22
1.3.2. Параметричні рівняння кривих	23
1.4. Криві другого порядку в полярних координатах	27
1.4.1. Рівняння кола в полярних координатах	29
1.4.2. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярних координатах	30
1.5. Дотичні та нормалі до кривих другого порядку	35
1.6. Фокальні властивості еліпса, гіперболи і параболи	39
1.7. Ще кілька прикладів	41
1.8. Криві другого порядку, як лінії перетину конуса	46
1.9. Перетворення координат на площині	48
1.9.1. Паралельне перенесення системи координат	48
1.9.2. Поворот системи координат	50
1.10. Загальне рівняння кривих другого порядку	51
II. ПРО КРИВІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	60
<i>(Декартів лист-60; Лемніската Бернуллі-60; Кардіоїда-61; Криві Гвідо Гранді-62; Астроїда-64; Циклоїда-64; Спіраль Архімеда-65; Гіперболічна спіраль-65; Логарифмічна спіраль-66)</i>	
III. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	67
3.1. Циліндри другого порядку	67
3.2. Поверхні обертання другого порядку	71
3.3. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку	79

3.4. Дослідження форми поверхонь методом перерізів	82
3.5. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку	88
3.6. Дотична площина та нормаль до поверхонь другого порядку.....	97
ЛІТЕРАТУРА.....	103

ПЕРЕДМОВА

Сьогодні інженерна освіта в багатьох галузях народного господарства не уявляється без вивчення аналітичної геометрії. Становлення основних понять цієї науки даються майбутнім інженерам ще в школі. Але шкільна програма не включає таких розділів аналітичної геометрії як “криві і поверхні другого порядку”. Не дивлячись на те, що з шкільного курсу елементарної математики знайомі такі поняття як коло, парабола, гіпербола, сфера, циліндр, конус – значна кількість понять вказаних розділів школярам залишаються невідомими. Більш того, вивчаючи криві і поверхні другого порядку у ВНЗ, студенти відкривають для себе не тільки нові геометричні образи кривих і поверхонь, але і нові співвідношення і властивості вже відомих. Чимало задач фізики, механіки, техніки розкрито завдяки наявності саме цих властивостей. Досить, наприклад, вказати, що виявлення прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда, та гіперболоїдного параболоїда привело до великих досягнень у будівництві таких споруд, як вежі різного призначення, будівлі з вишуканою архітектурою дахів, тощо. В механіці ця особливість вказаних поверхонь привела до широкого розповсюдження винайденої досконалої конструкції зубчатого зчеплення для передачі обертання непаралельним валам. Отже, оволодіння методами геометрії кривих і поверхонь другого порядку і уміння застосовувати їх в теоретичних і прикладних дослідженнях є досить важливим, а відповідна тематика міститься в тих розділах вищої математики, які є обов’язковими для вивчення студентами закладів вищої освіти технічних спеціальностей.

Метою посібника є прививання студентам навичок у розпізнаванні і побудові геометричних об’єктів, пов’язаних з кривими та поверхнями другого порядку, а також у розв’язуванні відповідних геометричних задач.

Перший розділ присвячено кривим другого порядку. Крім канонічних рівнянь вказаних кривих розглянуті параметричні та полярні. Знайшли місце такі питання, як фокальні властивості кривих, рівняння дотичних та нормалей. Розглянуто також загальне рівняння другого порядку і методика зведення його до канонічного виду.

У другому розділі наведені довідкові дані для найбільш популярних кривих вищих порядків.

Третій розділ присвячено поверхням другого порядку. Крім канонічних рівнянь розглянуто рівняння циліндричних поверхонь та поверхонь обертання. Велика увага приділена прямолінійним твірним, дотичній площині та нормалі.

Для кращого сприйняття матеріалу до кожного розділу додається достатня кількість прикладів та графічного матеріалу.

Посібник відповідає навчальній програмі з вищої математики і буде корисним для студентів денної і заочної форм навчання.

І. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.1. Канонічні рівняння кривих другого порядку

Під кривими другого порядку розуміють криві, які описуються алгебраїчними рівняннями другого порядку. Сюди відносяться: коло, еліпс, гіпербола і парабола. В різних системах прямокутних координат рівняння одних і тих же кривих приймають різний вигляд. В цьому параграфі будемо вибирати системи координат таким чином, щоб рівняння вказаних кривих були найпростішими. Такі рівняння називаються канонічними.

Коло

Коло – це геометричне місце точок площини рівновіддалених від деякої точки, яка називається центром кола. Відстань між будь-якою точкою кола і її центром називається **радіусом** кола.

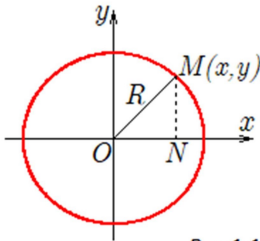


Рис.1.1

За теоремою Піфагора:

$$ON^2 + MN^2 = OM^2.$$

Але $ON = x$, $MN = y$, $OM = R$.

Звідси маємо:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} \quad (1.1)$$

Це і є канонічне рівняння кола.

Еліпс

Еліпсом називають геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох заданих точок – фокусів є стала величина.

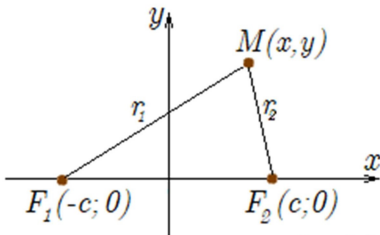


Рис.1.2

Нехай $M(x, y)$ – поточна точка еліпса, а $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ – фокуси. При цих позначеннях фокусна відстань $F_1F_2 = 2c$.

У відповідності до визначення еліпса запишемо:

$$r_1 + r_2 = 2a = \text{const.} \quad (1.2)$$

Величини r_1 , r_2 називаються фокальними радіусами точки $M(x, y)$.

За нерівністю трикутника $r_1 + r_2 > F_1F_2$, тобто $2a > 2c$, звідки:

$$\boxed{a > c} \quad (1.3)$$

При введених позначеннях маємо:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (1.4)$$

Оскільки $r_1 = 2a - r_2$, то:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Щоб звільнитися від квадратних коренів доведеться записану рівність двічі піднести до квадрату та провести відповідні перетворення.

$$\begin{aligned} \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \\ a^2\cancel{x^2} - \cancel{2ca^2x} + a^2\cancel{c^2} + a^2\cancel{y^2} &= a^4 - \cancel{2ca^2x} + \cancel{c^2x^2} \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Поділимо обидві частини одержаного співвідношення на $a^2(a^2 - c^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так як $a > c$ (1.3), то $a^2 - c^2 > 0$ і, значить, справджується позначення:

$$\boxed{a^2 - c^2 = b^2} \quad (1.5)$$

Враховуючи його, одержуємо канонічне рівняння еліпса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (1.6)$$

Це просте рівняння робить очевидними наступні властивості еліпса.

Еліпс має симетрію відносно координатних осей, так як разом з точкою $M(x, y)$ рівняння (1.6) задовольняють координати точок $M_1(-x, y)$ і $M_2(x, -y)$, які симетричні точці $M(x, y)$ відносно координатних осей Oy та Ox . Еліпс є симетричним також відносно початку координат, так як точки $M(x, y)$ і $M_3(-x, -y)$, симетричні відносно початку координат, належать еліпсу.

Рівняння (1.6) показує, що $x^2/a^2 \leq 1$, звідки $-a \leq x \leq a$, а також, що $y^2/b^2 \leq 1$, звідки $-b \leq y \leq b$. Це значить, що еліпс лежить всередині відповідного прямокутника зі сторонами, $2a$ і $2b$. При цьому сторону $2a$ називають великою віссю, а сторону $2b$ – малою віссю еліпса. Величини a і b називають півосями (відповідно великою і малою). Точки $A(-a; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; 0)$ і $D(0; -b)$, в яких еліпс перетинається з осями координат, називаються вершинами еліпса.

При введених назвах півосей вважається, що $a > b$, але в деяких випадках при розв'язку задач виникають ситуації, коли навпаки – $b > a$. Ці випадки відображені на рис.1.3.

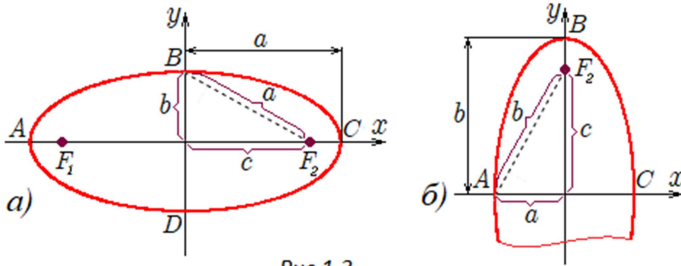


Рис.1.3

Форма еліпса характеризується параметром, який називають ексцентриситетом. Взагалі ексцентриситет визначається так:

$$\varepsilon = \frac{c}{\text{більша піввісь}}. \quad (1.7)$$

Оскільки параметр c завжди менший більшої піввісі, то для еліпса є справедливою нерівність:

$$0 < \varepsilon < 1. \quad (1.8)$$

Розглянемо окремо випадок, коли $a > b$ (рис.1.3, а). Очевидно, що в цьому разі

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (1.9)$$

Далі виконаємо очевидні перетворення з врахуванням співвідношення (1.5):

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2.$$

Звідси:

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (1.10)$$

Зафіксуємо параметр a , тобто будемо вважати його незмінним. Тоді з формули (1.10) витікає, що при збільшенні ексцентриситету піввісь b зменшується. Тобто, чим більший ексцентриситет, тим сплюснутіший еліпс і чим менший ексцентриситет, тим еліпс округліший. При $\varepsilon = 0$ півосі зрівнюються $a = b$ і еліпс вироджується в коло. Якщо позначити $a = b = R$, то в цьому разі вираз (1.6) перетвориться до рівняння (1.1).

Спираючись на співвідношення (1.4), запишемо:

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_2^2 &= (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 = (x+c - \\ &- (x+c))(x+c + x-c) = 2c \cdot 2x = 4cx \end{aligned} \quad (1.11)$$

Тоді разом з рівнянням (1.2) одержимо систему відносно фокальних радіусів:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_1^2 - r_2^2 = 4cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_1 - r_2 = 2\varepsilon x \end{cases}$$

При перетвореннях в останній системі враховано вираз (1.9). Розв'язуючи цю систему, знайдемо:

$$\boxed{r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x}. \quad (1.12)$$

Розглядаючи далі випадок, коли $b > a$ (рис.1.3, \bar{b}), відзначимо, що його відмінність від попереднього полягає в тому, що велика і мала півосі міняються місцями. В рівняннях (1.12) це стосується також і осей координат. Отже, враховуючи цю особливість і співвідношення (1.5), (1.9)-(1.12), одразу можемо визначити:

$$\boxed{\begin{aligned} b^2 - c^2 &= a^2, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad a = b\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \\ r_1 &= a + \varepsilon y, \quad r_2 = a - \varepsilon y, \quad \text{якщо } b > a. \end{aligned}} \quad (1.13)$$

П р и м і т к а. Співвідношення $a^2 - c^2 = b^2$ (1.5) між параметрами a , b і c легко встановлюється за теоремою Піфагора з прямокутного трикутника зі сторонами a , b і c на рис.1.3(а). Це стосується і співвідношення $b^2 - c^2 = a^2$ (1.13), але з використанням рис.1.3(б).

Приклади 1. Відома піввісь $a = 3$ і фокусна відстань $2c = 8$ еліпса. Знайти його ексцентриситет.

Оскільки $c = 4$, а більша піввісь еліпса завжди повинна бути більшою параметра c , то $b > a$ і значить треба скористатися формулами (1.13).

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Отже, ексцентриситет еліпса дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0,8$$

2. Знайти точки перетину кола і еліпса, які задані рівняннями:

$$x^2 + y^2 = 25, \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Приведемо рівняння еліпса до вигляду $3x^2 + 16y^2 = 192$ і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 16y^2 = 192 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 16y^2 = 192 \\ 3x^2 + 3y^2 = 75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13y^2 = 117 \\ x^2 = 25 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 9 \\ x^2 = 16 \end{cases}$$

Очевидно, що точка перетину, яка лежить в першій чверті координатної площини ($x > 0$, $y > 0$) має координати $(4; 3)$. Так як канонічні рівняння кола і еліпса задають множини точок, симетричних відносно осей і початку координат, то за відомою точкою перетину інші три точки знайдемо з умов вказаної симетрії. Отже, точками перетину кола і еліпса є:

$$M(4; 3), \quad N(4; -3), \quad P(-4; 3), \quad Q(-4; -3).$$

3. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точку $M(5; 4)$, а мала піввісь еліпса дорівнює $4\sqrt{2}$.

Запишемо канонічне рівняння еліпса (1.6) враховуючи, що $b^2 = 32$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

За умовою задачі це рівняння задовольняють координати точки $M(5; 4)$, тобто:

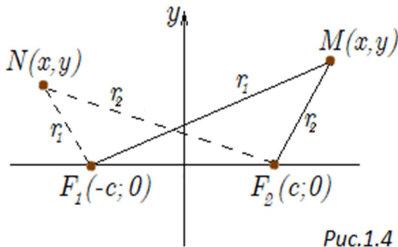
$$\frac{5^2}{a^2} + \frac{4^2}{32} = 1, \text{ звідки: } a^2 = 50.$$

Отже, шукане рівняння еліпса має вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1.}$$

Гіпербола

Гіперболою називають геометричне місце точок площини, різниця відстаней від яких до двох заданих точок – фокусів є стала величина.



Очевидно, що даному визначенню задовольняють як точки $M(x, y)$, що лежать у правій півплощині ($x > 0$), так і точки $N(x, y)$ – в лівій півплощині ($x < 0$). При цьому для точок $M(x, y)$ повинна виконуватися умова $r_1 - r_2 = 2a$,

а для точок $N(x, y)$ – умова $r_2 - r_1 = 2a$, де $a = \text{const}$. Взагалі:

$$r_1 - r_2 = \pm 2a, \quad (1.14)$$

де верхній знак береться коли $x > 0$, а нижній – коли $x < 0$. Отже, можна записати $r_1 = \pm 2a + r_2$ або:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Нижче проведемо перетворення, аналогічні виконаним для еліпса (стор.9).

$$\begin{aligned}
\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} \\
\mp a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} &= a^2 - cx \\
a^2x^2 - \cancel{2ca^2x} + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - \cancel{2ca^2x} + c^2x^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1
\end{aligned}$$

Використаємо тепер нерівність трикутника, яка полягає в тому, що різниця двох його сторін завжди менша третьої сторони, тобто $|r_1 - r_2| < F_1F_2$ або $2a < 2c$ (рис.1.4). Звідси маємо:

$$\boxed{a < c.} \quad (1.15)$$

Тоді $c^2 - a^2 > 0$ і можна виконати заміну

$$\boxed{c^2 - a^2 = b^2,} \quad (1.16)$$

в результаті чого дістанемо канонічне рівняння гіперболи:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \quad (1.17)$$

Як бачимо, гіпербола має ті ж самі симетрії (відносно осей та початку координат), що і еліпс. Але разом з цим вона має і ряд відмінних властивостей. З рівняння (1.17) випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ або } x \leq -a.$$

Це значить, що гіпербола має дві вітки, одна з яких лежить лівіше точки $x = -a$, а інша – правіше точки $x = a$. Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ називають вершинами гіперболи – в цих точках вона перетинає вісь абсцис. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називають дійсною віссю, а параметр a – дійсною піввіссю. Гіпербола не перетинає вісь ординат, тому відрізок довжиною $2b$, побудований так само, як і для еліпса на цій осі, називають уявною віссю, а параметр b – уявною піввіссю. Якщо побудувати прямокутник $2a \times 2b$ і провести дві діагональні прямі, то їх рівняннями будуть:

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}x.} \quad (1.18)$$

Покажемо, що ці прямі є асимптотами гіперболи. Для цього достатньо переконатися, що вітки гіперболи при $x \rightarrow \pm\infty$ наближаються до вказаних прямих так, що відстань між ними прямує до нуля.

Для першої чверті ($x > 0, y > 0$) рівняння (1.17), (1.18) дають:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y = \frac{b}{a} x.$$

Отже, треба довести, що різниця ординат цих ліній при $x \rightarrow \infty$ прямує до нуля.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right) &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right] = \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0. \end{aligned}$$

З міркувань симетрії можна стверджувати, що цей результат має місце для кожної вітки. Таким чином, рівняння (1.18) відображають двосторонні асимптоти гіперболи. При її побудові рекомендується спочатку наносити осі координат і, допоміжно, прямокутник $2a \times 2b$ та асимптоти, які проходять через вершини прямокутника. Після цього схематично зобразити обидві вітки гіперболи досить просто.

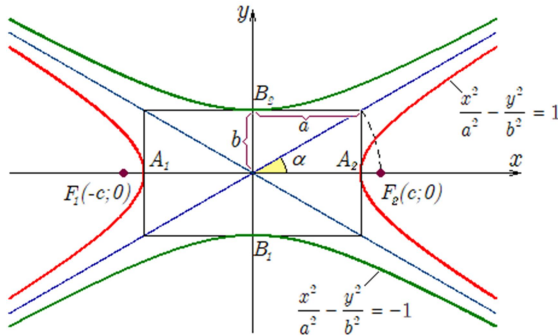


Рис.1.5

На рис.1.5 зображена гіпербола (1.17) (червоний колір). Для неї відрізок $A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь, яка лежить на осі Ox , а

відрізок $B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь. Всередині прямокутника виділено прямокутний трикутник зі сторонами a, b і c . Оскільки діагональ цього трикутника має довжину c , то співвідношення (1.16) може бути записане, як наслідок теореми Піфагора.

Для оцінювання форми гіперболи, як і для еліпса, застосовують ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{\text{дійсна піввісь}}. \quad (1.19)$$

Оскільки $c > a$ (1.15) і $c > b$ (1.16), то для гіперболи: $\varepsilon > 1$. Якщо дійсна вісь гіперболи $A_1A_2 = 2a$ лежить на осі абсцис, то маємо співвідношення:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1. \quad (1.20)$$

Тепер послідовно одержимо:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2};$$

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \quad (1.21)$$

З останнього виразу знайдемо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

де 2α – кут розхилу асимптот. Як бачимо, **чим більший ексцентриситет, тим більший кут розхилу асимптот.**

Враховуючи вирази (1.11), (1.14), (1.20) складемо систему рівнянь відносно фокальних радіусів (рис.1.4) та проведемо елементарні перетворення:

$$\begin{cases} r_1 - r_2 = \pm 2a \\ r_1^2 - r_2^2 = 4cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = \pm 2a \\ (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = \pm 2a \\ r_1 + r_2 = \pm 2\varepsilon x \end{cases}$$

Система має очевидний розв'язок:

$$r_1 = \pm a \pm \varepsilon x; \quad r_2 = \mp a \pm \varepsilon x.$$

Смисл верхніх та нижніх знаків вказано вище у коментарі до формули (1.14). Отже, для фокальних радіусів маємо:

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, & r_2 = -a + \varepsilon x, & \text{якщо } x > 0; \\ r_1 = -a - \varepsilon x, & r_2 = a - \varepsilon x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Дві гіперболи, у яких вісі співпадають, але дійсна вісь однієї служить уявною для другої і навпаки, називають спряженими.

Зрозуміло, що прямокутник для спряженої гіперболи не змінюється, а значить, обидві гіперболи мають спільні асимптоти. Очевидно також, що рівняння гіпербол відрізняються між собою тільки положенням “мінуса” в лівій їх частині (мінус завжди стоїть перед тією координатою, вісь якої гіперболою не перетинається). Таким чином, рівняння спряженої до (1.17) гіперболи має вид:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (1.23)$$

На рис.1.5 ця гіпербола зображена зеленим кольором. Зрозуміло, що для неї відрізок $B_1B_2 = 2b$ – дійсна вісь, яка лежить на осі Oy , а відрізок $A_1A_2 = 2a$ – уявна вісь.

Порівнюючи між собою рівняння спряжених гіпербол, пересвідчуємось, що рівняння гіперболи (1.23) можна одержати з рівняння (1.17), якщо поміняти місцями півосі a і b та координати x і y . В цьому сенсі деякі формули, які стосуються спряженої гіперболи (1.23), зміняться, але матимуть ту ж саму структуру:

$$\begin{cases} \text{Якщо дійсною віссю гіперболи є відрізок } 2b, \text{ то:} \\ \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad \varepsilon > 1; \quad a = b\sqrt{\varepsilon^2 - 1}; \\ r_1 = b + \varepsilon y, \quad r_2 = -b + \varepsilon y, \quad \text{якщо } y > 0; \\ r_1 = -b - \varepsilon y, \quad r_2 = b - \varepsilon y, \quad \text{якщо } y < 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Приклад 4. Фокуси гіперболи лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат і відстань між ними $2c = 20$, а рівняння асимптот $y = \pm(4/3)x$. Знайти ексцентриситет гіперболи.

З рівняння (1.18) маємо $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ або $b = \frac{4}{3}a$. Крім того (1.16)

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 100.$$

Виключивши b з цієї рівності, одержимо:

$$a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = 100 \Rightarrow a^2\left(1 + \frac{16}{9}\right) = 100 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{25}100 = 36 \Rightarrow a = 6.$$

Ексцентриситет гіперболи знаходимо за формулою (1.20):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Парабола

Параболою називають геометричне місце точок площини, відстані від яких до заданої точки – фокуса і заданої прямої – директриси рівні між собою.

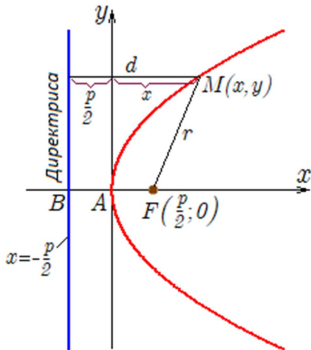


Рис.1.6

Нехай $A(0;0)$ – вершина, $BF = p$ – фокальний параметр, $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус, $M(x, y)$ – поточна точка параболи, d – відстань між точкою $M(x, y)$ та директрисою, $FM = r$ – фокальний радіус. За визначенням $r = d$ при цьому:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \frac{p}{2} + x.$$

Отже: $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x.$

Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрату:

$$\cancel{x^2} - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + \cancel{x^2}.$$

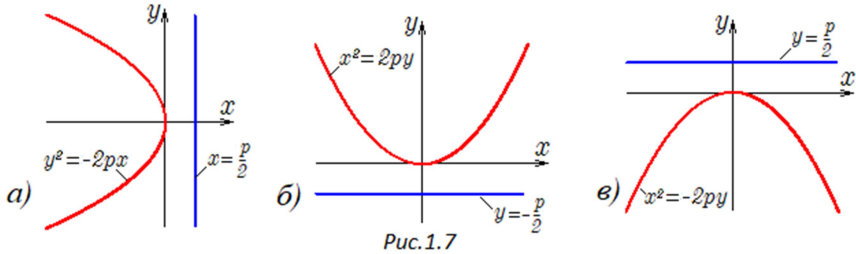
Наслідком одержаного співвідношення є канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px. \quad (1.25)$$

Рівняння показує, що парабола симетрична відносно вісі абсцис, так як разом з точкою $M(x, y)$ йому задовольняє точка $N(x, -y)$, симетрична цій осі. Вісь симетрії називають також віссю

самої параболи. Так як $x \geq 0$, то парабола (1.25) лежить повністю в правій півплощині.

Наступний рисунок показує вплив форми запису рівняння параболи на її зображення і положення директриси.

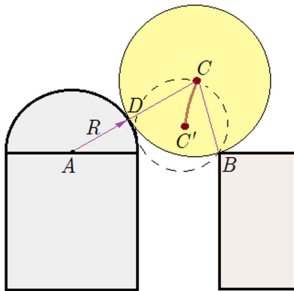


Приклади 5. Знайти рівняння директриси квадратної параболи $y = x^2$.

Запишемо рівняння заданої параболи в канонічному вигляді: $x^2 = 2py$. Прирівнюючи в рівняннях коефіцієнти при y , знайдемо значення параметра p : $2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$. При відомому фокальному параметрі одержимо шукане рівняння (рис. 1.7, б):

$$y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}.$$

6. Повітряна кулька залетіла між двох шкатулок. Форма їх профілів зрозуміла з рисунку. З часом повітря витікає із кульки і її розміри зменшуються (пунктирна лінія). По якій траєкторії рухається при цьому геометричний центр кульки?



Нехай $r = CD$ – поточний радіус кульки, а CC' – траєкторія руху її центра. Для усіх точок C лінії CC' виконується рівність: $AC - BC = (R + r) - r = R = \text{const}$, тобто, різниця відстаней від них до двох фіксованих точок A і B є стала величина. Ми прийшли до визначення гіперболи з фокусами A і B (стор.13) – геометричний центр кульки рухається по гіперболі.

1.2. Визначення еліпса, гіперболи і параболи на базі їх властивостей по відношенню до директриси

Вище було встановлено, що для параболи існує лінія (директриса), відносно якої є справедливим ствердження: $r/d = \text{const}$.

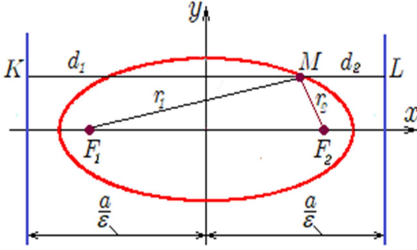


Рис.1.8

Покажемо, що для еліпса існують прямі з цією ж властивістю. Проведемо дві прямі $y = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, як показано на рис.1.8. Для еліпса $0 < \varepsilon < 1$, тому $\frac{a}{\varepsilon} > a$ і вказані прямі лежать зовні еліпса. Нехай $M(x, y)$ – поточна точка еліпса, а $d_1 = KM$ і $d_2 = LM$ –

відстані від точки $M(x, y)$ до введених прямих. Інші позначення відповідають розглянутим вище.

З рис.1.8 витікає:

$$d_1 = \frac{a}{\varepsilon} + x = \frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}; \quad d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}.$$

Крім того (1.12):

$$r_1 = a + \varepsilon x; \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Звідси маємо:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{(a + \varepsilon x)/\varepsilon} = \varepsilon = \text{const}; \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{(a - \varepsilon x)/\varepsilon} = \varepsilon = \text{const}.$$

Тобто:

$$\boxed{\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.} \quad (1.26)$$

Таким чином, для еліпса обидві введені лінії $y = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ мають ту ж властивість, що і директриса параболи, тому **ці лінії теж названі директрисами**.

Розглянемо тепер гіперболу (рис.1.9). Побудуємо так само, як і для еліпса дві прямі $y = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. Але, на відміну від еліпса, для гіперболи $\varepsilon > 1$, тому $\frac{a}{\varepsilon} < a$ і ці прямі лежать між вершинами гіперболи. З кожного фокуса направлено по два фокальних радіуса в різні точки кривої, розміщені на різних вітках. Наприклад, з фокуса F_2 виходять

фокальні радіуси r_2 та r_2^* , які спираються, на точки $M_2(x, y)$ і $N_2(x, y)$

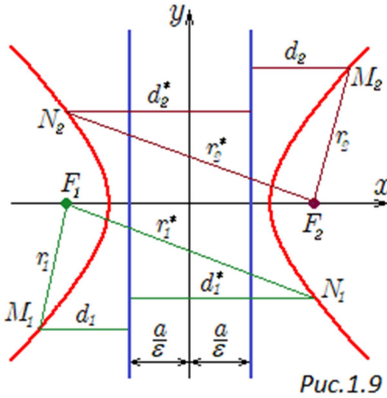


Рис.1.9

правої та лівої віток гіперболи. Ці точки знаходяться, відповідно, на відстані d_2 та d_2^* від прямої $y = \frac{a}{\epsilon}$, яка лежить в тій же півплощині, що і фокус F_2 . Аналогічні побудови виконані також і по відношенню фокуса F_1 та прямої $y = -\frac{a}{\epsilon}$, яка лежить в лівій півплощині. Позначення r_1 , r_1^* , d_1 , d_1^* зрозумілі з рисунка.

Розглянемо спочатку співвідношення між величинами r_2 , r_2^* , d_2 , d_2^* . Очевидно, що:

$$d_2 = x - \frac{a}{\epsilon} = \frac{-a + \epsilon x}{\epsilon}; \quad d_2^* = \frac{a}{\epsilon} - x = \frac{a - \epsilon x}{\epsilon}.$$

Вирази для фокальних радіусів r_2 , r_2^* вже відомі (1.22):

$$r_2 = -a + \epsilon x; \quad r_2^* = a - \epsilon x.$$

Далі знаходимо:

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{-a + \epsilon x}{(-a + \epsilon x)/\epsilon} = \epsilon; \quad \frac{r_2^*}{d_2^*} = \frac{a - \epsilon x}{(a - \epsilon x)/\epsilon} = \epsilon.$$

Аналогічні співвідношення для величин r_1 , r_1^* , d_1 , d_1^* можна знайти з міркувань симетрії. Таким чином:

$$\boxed{\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_1^*}{d_1^*} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_2^*}{d_2^*} = \epsilon.} \quad (1.27)$$

Як бачимо, для гіперболи маємо дві паралельні прямі з тими ж властивостями, що і для еліпса. Крім того вони мають ті ж рівняння, що і для еліпса:

$$\boxed{y = \pm \frac{a}{\epsilon}.} \quad (1.28)$$

Цілком природно, що ці лінії теж названі директрисами.

Нагадаємо, що для параболи $r = d$ і $\frac{r}{d} = 1$. Це відношення по аналогії з еліпсом і параболою приймається за ексцентриситет. Отже, **ексцентриситет параболи дорівнює одиниці:**

$$\boxed{\varepsilon = \frac{r}{d} = 1.} \quad (1.29)$$

Одержані результати дозволяють ввести єдине визначення для еліпса, гіперболи і параболи.

Геометричне місце точок площини, для яких відношення $\frac{r}{d} = \varepsilon$ відстаней, відповідно, до деякої точки F і до деякої прямої ϵ стала величина називається: **еліпсом, якщо $0 < \varepsilon < 1$, параболою, якщо $\varepsilon = 1$ і гіперболою, якщо $\varepsilon > 1$.**

При цьому точку F називають фокусом, пряму – директрисою, ε – ексцентриситетом.

1.3. Параметричні рівняння кривих другого порядку

1.3.1. Про гіперболічні функції

Параметричне представлення кривих другого порядку передбачає застосування деяких гіперболічних функцій. Вони можуть бути введені по аналогії з тригонометричними, які ще називають круговими. Гіперболічний синус, косинус, тангенс і котангенс визначені таким чином:

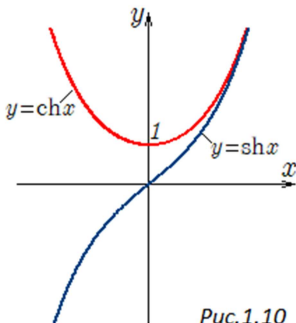


Рис. 1.10

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad (1.30)$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Далі будемо використовувати перші дві з цих функцій, тому приводимо їх графіки. Вкажемо також на деякі властивості, притаманні цим функціям.

$$\operatorname{sh}(0) = 0; \quad \operatorname{ch}(0) = 1.$$

Синус гіперболічний – непарна функція: $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$.

Косинус гіперболічний – парна функція: $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$.

Гіперболічною одиницею називають вираз:

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.} \quad (1.31)$$

Цей вираз легко випливає з визначення відповідних функцій (1.30):

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1.$$

Як бачимо, деякі властивості гіперболічних функцій співпадають з аналогічними властивостями тригонометричних. Те ж саме має місце і для гіперболічних тотожностей. Вони, як і в тригонометрії, дають можливість спростувати розв'язування задач, доведення теорем тощо. Деякі з таких залежностей показані нижче.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} &= 1 - \operatorname{th}^2 x; & \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{cth}^2 x - 1; \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x; & \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \\ \operatorname{sh}(x_1 + x_2) &= \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2; \\ \operatorname{sh}(x_1 - x_2) &= \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 - \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2; \\ \operatorname{ch}(x_1 + x_2) &= \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2; \\ \operatorname{ch}(x_1 - x_2) &= \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 - \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2. \end{aligned}$$

1.3.2. Параметричні рівняння кривих

Розв'язування певного типу задач виконується значно простіше, якщо замість канонічних рівнянь кривих другого порядку використовувати параметричні. Вони є досить простими, але включають деякі тригонометричні та гіперболічні функції.

Далі приводимо параметричні рівняння кривих другого порядку: кола, еліпса, гіперболи і параболи.

Коло

$$\begin{cases} x = R \cos t; \\ y = R \sin t, \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases} \quad (1.32)$$

Еліпс

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases} \quad (1.33)$$

Гіпербола

$$a) \begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t; \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad б) \begin{cases} x = a \operatorname{sh} t; \\ y = \pm b \operatorname{ch} t, \end{cases} \quad t \in (-\infty; \infty). \quad (1.34)$$

Парабола

$$a) \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}; \\ y = t, \end{cases} \quad б) \begin{cases} x = t; \\ y = \frac{t^2}{2p}, \end{cases} \quad t \in (-\infty; \infty). \quad (1.35)$$

В рівняннях (1.32)-(1.35) t – параметр, а інші позначення мають такий же смисл, як і раніше: R – радіус кола; a, b – півосі еліпса чи гіперболи; p – відстань між фокусом і директрисою.

Для виявлення виду кривої по її параметричних рівняннях треба виключити з них параметр t і привести одержаний вираз до канонічного виду.

Розглянемо, наприклад, співвідношення (1.33). Маємо:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Приводимо одержане рівняння до канонічного виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Воно співпадає з канонічним рівнянням еліпса (1.6). Отже, параметричні рівняння (1.33) описують еліпс.

Для параметричних рівнянь гіперболи (1.34) виконаємо аналогічні перетворення. Розглянемо, спочатку, випадок (а):

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \pm \operatorname{ch} t \\ \frac{y}{b} = \operatorname{sh} t \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

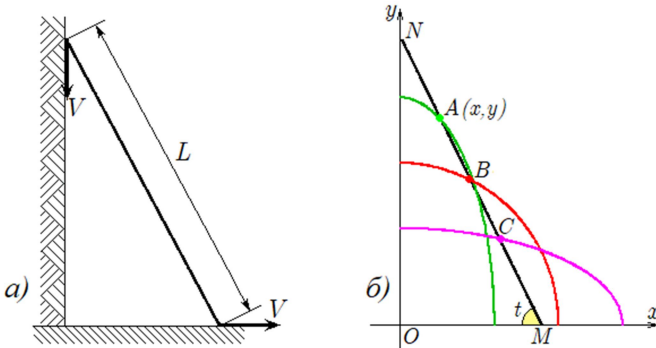
Після аналогічних перетворень для випадку (б) знайдемо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Одержано канонічні рівняння гіпербол (1.17) та (1.23). Тобто, рівняння 1.34(*a*) описує гіперболу, дійсна вісь $2a$ якої лежить на осі Ox , а рівняння 1.34(*б*) – спряжену до неї гіперболу, дійсна вісь $2b$ якої лежить на осі Oy .

Ще треба з'ясувати, що рівняння (1.32) дійсно описує коло, а рівняння (1.35) – параболу. Ці рівняння досить прості, тому залишаємо читачеві пересвідчитися в цьому самостійно.

Приклад 7. Драбина довжиною L встановлена так, що один її кінець спирається на підлогу, а другий – на стіну будівлі. При втраті рівноваги драбина розпочинає рухатися (падати), не втрачаючи контактів в опорах (на рис.(*a*) напрямки швидкості руху кінців драбини показано стрілками). Дослідити траєкторію руху сходинок драбини при її падінні.



Для проведення необхідного дослідження введем систему координат, вісь абсцис якої лежить на поверхні підлоги, а вісь ординат – вертикально на поверхні стіни, а також кут t нахилу драбини MN відносно вісі абсцис - рис.(*б*).

Розглянемо, спочатку, рух сходинки, яка знаходиться, наприклад, в точці A , яка лежить вище точки B – середини драбини. Нехай: $AN = a$; $AM = b = L - a$. Використовуючи ці позначення, знайдемо координати точки $A(x, y)$:

$$x = AN \cos t = a \cos t; \quad y = AM \sin t = b \sin t,$$

що можна записати так :

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t, \quad t \in (0; t_0]. \end{cases}$$

Тут t_0 – значення параметра t при початковому положенні драбини, а одержана система – параметричні рівняння еліпса (1.33) з півосями a і b при цьому $a < b$ (рис.1.3, б).

Отже, траєкторією всіх сходинок драбини, що знаходяться вище середньої (зелений колір), є еліпс, в якому більша піввісь b вертикальна і співпадає з віссю ординат.

Тепер розглянемо сходинку, яка розміщена посередині драбини – в точці B . Для цієї точки $a = b = 0,5L$ і тоді:

$$\begin{cases} x = 0,5L \cos t; \\ y = 0,5L \sin t, \quad t \in (0; t_0]. \end{cases}$$

Це параметричні рівняння кола – таку траєкторію описує центральна сходинка драбини (червоний колір).

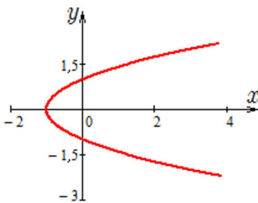
Нарешті, при розташуванні сходинок нижче середини драбини (наприклад в точці C) матимемо ті ж рівняння (*), але $a = CN$, $b = CM$ і, значить, $a > b$. Тобто, траєкторією сходинок буде еліпс, в якому більша піввісь a горизонтальна і співпадає з віссю абсцис (рожевий колір).

Приклад 8. Назвати та побудувати криву, задану параметрично:

$$\begin{cases} x = -2t + t^2; \\ y = -t + 1. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення:

$$\begin{cases} x = -2t + t^2 \\ y = -t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 1 - 2t + t^2 \\ y = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + (1 - t)^2 \\ y = 1 - t \end{cases}$$



Виключаємо з цих рівнянь параметр t :

$$x = -1 + y^2.$$

Маємо рівняння параболи виду (1.25), яка зсунута вліво вздовж вісі абсцис на одиницю.

1.4. Криві другого порядку в полярних координатах

Згадаємо полярну систему координат і зв'язок полярних координат точки на площині з декартовими.

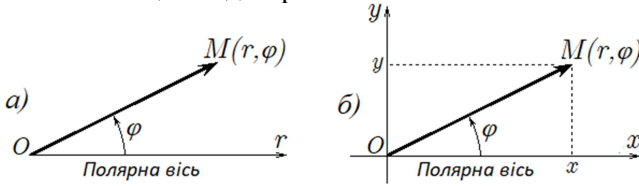


Рис.1.11

Полярна система координат визначається точкою O на площині, яка називається полюсом і променем, який виходить із полюса і називаються полярною віссю, а також масштабом для вимірювання довжини. Полярними координатами точки M є число $r = OM$ (відстань від полюса до точки), яке називається полярним радіусом точки M , і полярний кут φ – це кут між полярною віссю і полярним радіусом r . Кут φ вимірюється в радіанах від полярної осі проти стрілки годинника. Для однієї і тієї ж точки M існує багато полярних кутів, які відрізняються між собою на ціле число обертів $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (один оборот – 2π радіан, рис.1.11, а).

Розглянемо зв'язок між декартовими і полярними координатами. Нехай полюс співпадає з початком O декартової системи координат xOy , а полярна вісь з віссю Ox (рис.1.11, б). Як бачимо:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.36)$$

Очевидно, що зворотній зв'язок можна зобразити так:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.37)$$

Рівняння кривої в полярних координатах має вид: $r = r(\varphi)$. Воно дозволяє побудувати графік кривої в полярних координатах на заданому проміжку зміни аргумента $\varphi \in [\varphi_0; \varphi_n]$. Для цього вказаний проміжок розбивають з певним кроком h на n частин і обчислюють значення аргумента в точках поділу: $\varphi_i = h \cdot i$, $i = 0, 1, \dots, n$. По відомим величинам φ_i обчислюють значення $r_i = r(\varphi_i)$ полярного радіуса і складають таблицю значень кута φ_i і радіуса r_i . Для кожної табличної пари φ_i, r_i , $i = 0, 1, \dots, n$ в площині полярних координат відмічають точки, які з'єднують плавною кривою.

Приклад 9. Задано рівняння кривої в полярних координатах на відрізку $\varphi \in [0; \pi/2]$: $r = \sin \varphi \cos^2 \varphi$. Записати рівняння в декартових координатах та побудувати криву.

Використаємо, спочатку, співвідношення (1.37):

$$r = \sin \varphi \cos^2 \varphi \Rightarrow r = \frac{y}{r} \cdot \frac{x^2}{r^2} \Rightarrow r^4 = x^2 y.$$

Отже, рівняння кривої в декартових координатах має вид:

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 = x^2 y.}$$

Для побудови кривої заданий проміжок $[0; 90^\circ]$ розділимо з інтервалом 10° на 9 рівних частин, тоді $\varphi_i^\circ = 10i$, $i = 0, 1, \dots, 9$.

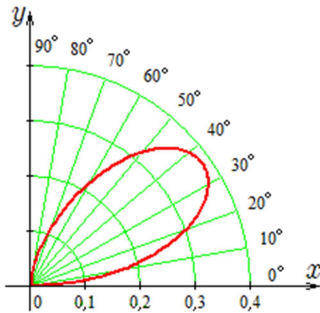
Значення полярного радіуса знаходимо за формулою:

$$r_i = \sin \varphi_i \cos^2 \varphi_i .$$

Результати розрахунків представимо таблицею:

φ_i°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
r_i	0	0,168	0,302	0,375	0,377	0,317	0,217	0,11	0,03	0

За даними таблиці будемо графік.



П р и м і т к а. Існуючі програмні засоби дозволяють виконувати не тільки числові і символічні розрахунки, а і рисунки високої складності. Це спрощує розв'язання задач, зменшує затрати часу, поліпшує графічну частину робіт, тому рекомендується для застосування. В цьому посібнику обчислення, та значна кількість графіків виконана в середовищі «Mathcad» [10, 11].

1.4.1. Рівняння кола в полярних координатах

Використаємо рівняння кола в декартовій системі координат $x^2 + y^2 = R^2$ (1.1) і підставимо туди формули (1.36) переходу до полярних координат. В результаті знайдемо:

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = R^2 \Rightarrow r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2$$

Звідси одержимо рівняння кола в полярній системі координат:

$$r = R \quad (1.38)$$

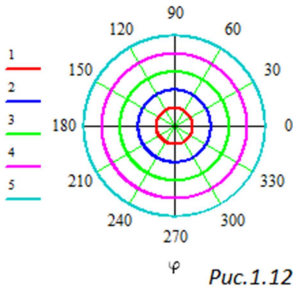


Рис.1.12

На рис.1.12 рівняння (1.38) застосоване для зображення кіл радіусом 1, 2, 3, 4 і 5. Рисунок виконано за допомогою системи «Mathcad». Як бачимо, завдяки надзвичайній простоті цього рівняння в шаблоні рисунка розрахункового листа «Mathcad» достатньо (зліва) вставити числові значення радіуса від одного до п'яти.

Розглянемо ще полярні рівняння деяких кіл, які часто зустрічаються в прикладних задачах. Це кола радіусом R , в яких центр зміщено в точку $A(R; 0)$ або в точку $A(0; R)$ (рис.1.13).

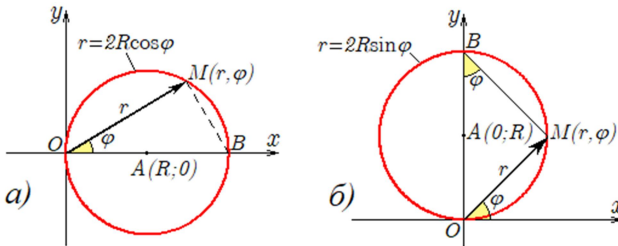


Рис.1.13

Якщо центр кола радіусом R зміщено вправо по осі Ox на величину радіуса (рис.1.13, а), то з $\triangle OBM$: $OM = OB \cos \varphi$ або

$$r = 2R \cos \varphi. \quad (1.39)$$

Для іншого випадку (рис.1.13, б) з $\triangle OBM$: маємо $OM = OB \sin \varphi$ або

$$r = 2R \sin \varphi. \quad (1.40)$$

1.4.2. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярних координатах

Покажемо, що в полярних координатах і еліпс, і гіпербола, і парабола можуть бути описані одним і тим же рівнянням. Для цього полюс системи слід сумістити з одним із фокусів і прийняти до уваги директрису, яка лежить найближче до цього фокуса.

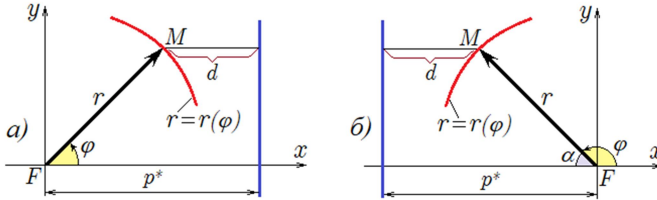


Рис.1.14

На рис.1.14 прийнято такі позначення: F – фокус; r, φ – полярні координати; $r = r(\varphi)$ – рівняння кривої (еліпса, гіперболи чи параболи); $M(r, \varphi)$ – поточна точка кривої; d – відстань між точкою $M(r, \varphi)$ та директрисою (синій колір); p^* – відстань між фокусом та директрисою.

Розглянемо спочатку випадок, коли найближча до фокуса директриса лежить справа від фокуса (рис.1.14, а). Очевидно, що для еліпса це може бути тільки права директриса і фокус F_2 (рис.1.8). Оскільки директриси гіперболи знаходяться між її вершинами, то в цьому випадку береться ліва директриса і фокус F_1 (рис.1.9). Парабола має лише один фокус і одну директрису і, якщо директриса лежить справа від фокуса, то вітки параболи направлені протилежно осі Ox (рис.1.7, а).

З рисунка витікає:

$$d = p^* - r \cos \varphi.$$

Крім того, відомо, що $r = \varepsilon d$ (1.27). Підставимо сюди замість d одержаний вираз і виконаємо належні перетворення:

$$r = \varepsilon(p^* - r \cos \varphi) \Rightarrow r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = \varepsilon p^*.$$

Звідси знаходимо полярне рівняння кривих:

$$r = \frac{\varepsilon p^*}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (1.41)$$

Далі розглянемо випадок, коли в якості полюса вибрано інший фокус так, що найближча до фокуса директриса лежить зліва від фокуса (рис.1.14, б). Для еліпса це фокус F_1 і ліва директриса (рис.1.8). Для гіперболи – фокус F_2 і права директриса (рис.1.9). Парабола ж буде розміщена вітками в сторону вісі Ox (рис.1.6).

Виходячи з симетрії схем (а) і (б) на рис.1.14 та позначень відповідних кутів α і φ , з рівняння (1.41) можна зразу записати:

$$r = \frac{\varepsilon p^*}{1 + \varepsilon \cos \alpha}.$$

Враховуючи, що $\cos \alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$, з записаного рівняння остаточно одержимо:

$$\boxed{r = \frac{\varepsilon p^*}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.} \quad (1.42)$$

Очевидно, що для параболи параметр p^* є фокальним параметром: $p^* = p$ (див. рис.1.6 та рис.1.14). З'ясуємо чому дорівнює цей параметр для еліпса і гіперболи.

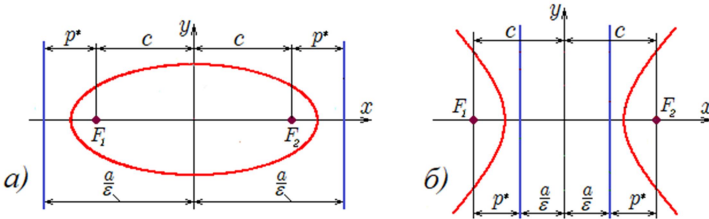


Рис.1.15

Для еліпса (рис.1.15, а):

$$p^* = \frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

Тут використані співвідношення (1.9) і (1.5).

Для гіперболи (рис.1.5, б), враховуючи (1.20), (1.16):

$$p^* = c - \frac{a}{\varepsilon} = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

Таким чином, і для еліпса, і для гіперболи:

$$\boxed{p^* = \frac{b^2}{c}.} \quad (1.43)$$

Підсумовуючи отримані вище результати, зазначимо, що рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат можна записати єдиним рівнянням, якщо полюс системи сумістити з фокусом кривої, а полярну вісь – з віссю абсцис. Вибір фокуса кривої та її директриси ототожнюється з вибором в цьому рівнянні знаку “плюс” (1.41) чи “мінус” (1.42):

$$r = \frac{\varepsilon p^*}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi}. \quad (1.44)$$

Знак “плюс” приймається тоді, коли найближча до фокуса директриса кривої лежить справа від фокуса, а знак “мінус” – коли зліва. При цьому

$$- \text{ для еліпса: } 0 < \varepsilon < 1, \quad p^* = \frac{b^2}{c}; \quad (1.45)$$

$$- \text{ для параболи: } \varepsilon = 1, \quad p^* = p; \quad (1.46)$$

$$- \text{ для гіперболи: } \varepsilon > 1, \quad p^* = \frac{b^2}{c}. \quad (1.47)$$

На рис.1.16 показано застосування рівняння (1.44) для побудови еліпса, параболи і гіперболи. Прийнято варіант рівняння зі знаком “плюс” і значенням параметра $p^* = 1$. Значення ексцентриситета показані на рисунку.

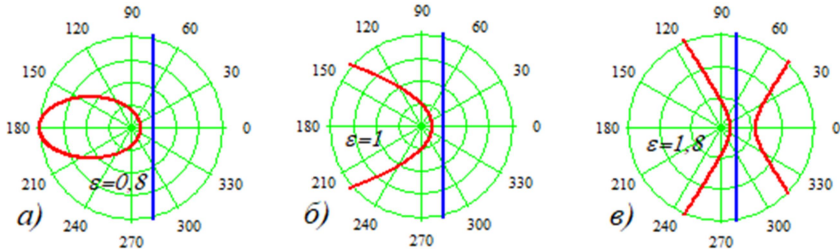


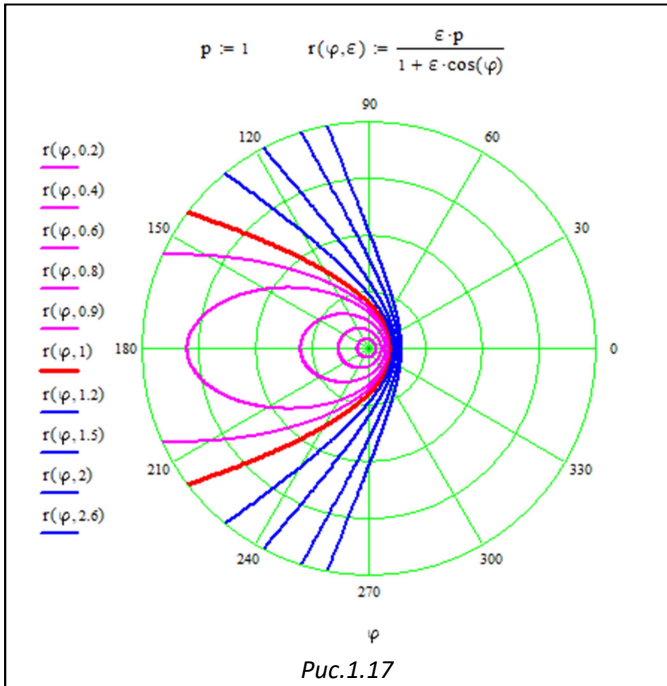
Рис.1.16

Разом з кривими (червоний колір) на рисунку зображені їх директриси (синій колір), які задавалися полярним рівнянням:

$$r = \frac{p^*}{\cos \varphi}. \quad (1.48)$$

П р и м і т к а. Геометрично полярний радіус є додатна величина, але елементарний аналіз рівняння (1.44) показує, що існують області зміни кута φ , де полярний радіус прийме від'ємні значення. Як правило, ці значення ігноруються і тоді згадане рівняння відображає лише одну вітку гіперболи. Якщо розрахунки і побудова графіка виконуються машинним способом, то є можливість автоматично врахувати вказані від'ємні значення, які графічно будуть відмічатися в напрямку, протилежному радіусу. Для цього треба активізувати опцію "від'ємні радіуси" і гіпербола буде зображена повністю – з двома вітками, що і показано на рис.1.16, в.

На наступному рисунку суміщені всі три згадані криві, побудовані за рівнянням (1.41). Рисунок подано у вигляді розрахункового листа «Mathcad», в якому це рівняння представлено функцією $r(\varphi, \varepsilon)$ двох аргументів. В розрахунках ексцентриситет ε змінювався дискретно в межах від 0,2 до 2,6. Значення параметра p^* прийнято однаковим для всіх кривих $p^* = p = 1$.



Як бачимо, при збільшенні ексцентриситету (в нашому випадку у межах від 0,2 до 0,9) і сталому значенні параметра p^* криві є еліпсами, які стають більш видовженими і більшими в розмірах (рожевий колір). Коли $\varepsilon = 1$ – кривою є парабола (червоний колір). Якщо ексцентриситет продовжує збільшуватися в межах від 1,2 до 2,6 і більше, то кривими є гіперболи, які стають при цьому більш “розкритими” (синій колір). Отже, парабола є граничною лінією між замкнутими (еліпсами) і незамкнутими (гіперболами) лініями. Сама ж парабола є лінією незамкнутою.

Фізичні дослідження показують, що траєкторіями ракет, що запуснені з поверхні Землі, є криві другого порядку. Припустимо, що центр нашої планети розміщено в полюсі деякої полярної системи координат (рис.1.17). Якщо швидкість запусненої ракети рівна $\sqrt{gR_3} \approx 8 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ (перша космічна швидкість), то траєкторією ракети буде коло, що має розміри, сумірні з розмірами Землі (g – прискорення вільного падіння, R_3 – радіус Землі). При подальшому збільшенні згаданої швидкості траєкторіями ракети стають еліпси, розміри і ексцентриситет яких теж збільшується. При русі ракети по цим траєкторіям вона все більше віддаляється від центра планети, досягаючи області фокуса, протилежного Землі. Нарешті, при досягненні швидкості запуску ракети величини $\sqrt{2gR_3} \approx 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ (друга космічна швидкість), траєкторією ракети стане парабола. Це гранична незамкнута траєкторія, яка показує, що ракета подолає сили тяжіння Землі і вирушить у відкритий космос. Те ж саме буде спостерігатися, якщо швидкість запуску ракети перевищить першу космічну, але траєкторіями польоту в цьому випадку будуть гіперболи.

Приклад 10. Відоме рівняння кривої другого порядку в полярних координатах. Назвати криву і записати її канонічне рівняння.

$$r = \frac{9}{4 + 5 \cos \varphi}$$

Перетворимо задане рівняння до виду:

$$r = \frac{\frac{9}{4}}{1 + \frac{5}{4} \cos \varphi}.$$

Порівнюючи його з рівнянням (1.44), знаходимо:

$$\varepsilon = \frac{5}{4}; \quad \varepsilon p^* = \frac{9}{4}.$$

Оскільки $\varepsilon > 1$, маємо гіперболу.

Далі використаємо співвідношення (1.20) та (1.47):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{5}{4}a;$$

$$p^* = \frac{9}{4\varepsilon} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{4b^2}{5a} = \frac{9}{5} \Rightarrow a = \frac{4}{9}b^2.$$

З іншого боку (1.21):

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = a\sqrt{\frac{25}{16} - 1} \Rightarrow b = \frac{3}{4}a.$$

В результаті одержимо:

$$a = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}a\right)^2 \Rightarrow a = \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = 4; \quad b = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3.$$

Отже, канонічне рівняння гіперболи має вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.}$$

1.5. Дотичні та нормалі до кривих другого порядку

Рівняння дотичних до кривих другого порядку в точці $A(x_0; y_0)$ та нормалей, що проходять через точку дотику, зручно подати у вигляді таблиці.

Таблиця 1

Назва кривої	Рівняння кривої	Рівняння дотичної	Рівняння нормалі
<i>Коло</i>	$x^2 + y^2 = R^2$	$x_0x + y_0y = R^2$	$\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} = 0$
<i>Еліпс</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$	$a^2 \frac{x}{x_0} - b^2 \frac{y}{y_0} = c^2$
<i>Гіпербола</i>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$	$a^2 \frac{x}{x_0} + b^2 \frac{y}{y_0} = c^2$
<i>Парабола</i>	$y^2 = 2px$	$y_0y = p(x + x_0)$	$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{-y_0}$

Розглянемо спочатку рівняння дотичної та нормалі для еліпса. Загальне рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ має вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Обчислимо похідну диференціюванням рівняння еліпса:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Підставимо цей результат в загальне рівняння дотичної:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0) \Rightarrow \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0 x}{a^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \end{aligned}$$

Права частина одержаної рівності може розглядатися як результат підстановки координат x_0, y_0 в рівняння еліпса, тому вона дорівнює одиниці. Цим самим рівняння дотичної до еліпса доведено.

Нагадаємо, що нормаль – це пряма, яка проходить через точку дотику $A(x_0; y_0)$ перпендикулярно дотичній. Дві прямі $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ та $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ взаємно перпендикулярні, якщо виконується умова $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$. Запишемо рівняння прямої у вигляді:

$$\frac{a^2}{x_0} x - \frac{b^2}{y_0} y = C.$$

Очевидно, що ця пряма перпендикулярна до дотичної, так як умова перпендикулярності виконана.

Нехай ця пряма і є нормаль. Тоді координати x_0, y_0 задовольняють рівнянню:

$$\frac{a^2}{x_0} x_0 - \frac{b^2}{y_0} y_0 = C \Rightarrow C = a^2 - b^2 = c^2.$$

Підставивши цей результат у верхнє рівняння, одержимо табличний вид нормалі для еліпса.

Зауважимо, що рівняння дотичної та нормалі для кола витікають з одержаних рівнянь, якщо замінити в них кожен з півосей a, b еліпса радіусом кола R ($a = b = R$).

Зрозуміло, що доведення для гіперболи виконується аналогічно і відрізняється від приведенного тільки знаками.

Доведення для параболи проведемо по тій же схемі. Обчислимо похідну:

$$2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{p}{y_0}.$$

Підставляємо похідну в загальне рівняння дотичної:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Rightarrow y_0y - y_0^2 = px - px_0.$$

Враховуючи, що $y_0^2 = 2px_0$ і виконавши елементарні перетворення, знайдемо рівняння дотичної: $y_0y = p(x + x_0)$.

Запишемо, тепер, рівняння двох прямих:

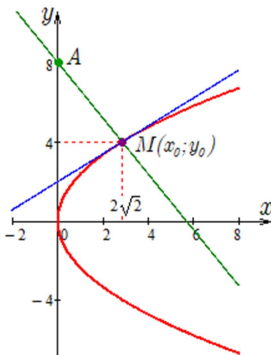
$$-px + y_0y - x_0p = 0; \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{y_0} = C.$$

Для них виконується умова перпендикулярності, а перша з них є дотичною до параболи в точці $A(x_0; y_0)$. Тоді друге з них буде рівнянням нормалі, якщо йому будуть задовольняти координати точки дотику:

$$\frac{x_0}{p} + \frac{y_0}{y_0} = C \Rightarrow C = \frac{x_0}{p} + 1.$$

Підставляючи значення C у вираз другої прямої, одержимо рівняння нормалі до параболи (табл. 1).

Приклад 11. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 4\sqrt{2}x$ в деякій точці M і нормалі, яка проходить через точки M і $A(0; 8)$.



Знайдемо спочатку координати точки $M(x_0; y_0)$. В зв'язку з цим зазначимо, що ці координати задовольняють рівнянню параболи, а координати точки $A(0; 8)$ рівнянню нормалі. Отже, для знаходження координат точки $M(x_0; y_0)$ маємо систему:

$$\begin{cases} y_0^2 = 4\sqrt{2}x_0 \\ \frac{-x_0}{2\sqrt{2}} = \frac{8 - y_0}{-y_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{16\sqrt{2}}{y_0} - 2\sqrt{2} \\ y_0^2 = \frac{128}{y_0} - 16 \end{cases}.$$

З нижнього рівняння:

$$y_0^3 + 16y_0 - 128 = 0.$$

Очевидно, що одним з коренів цього рівняння є $y_0 = 4$. Це дає можливість розкласти записаний вираз на множники:

$$\begin{aligned} y_0^3 + 16y_0 - 128 &= y_0^2(y_0 - 4) + 4y_0(y_0 - 4) + 32(y_0 - 4) = \\ &= (y_0 - 4)(y_0^2 + 4y_0 + 32) = 0. \end{aligned}$$

Дискримінант квадратного тричлена в других дужках від'ємний ($D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = -112 < 0$), тому, вказаний вище, корінь єдиний.

Абсцису точки $M(x_0; y_0)$ знайдемо з першого рівняння системи:

$$x_0 = \frac{16\sqrt{2}}{4} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

При відомих значеннях координат x_0, y_0 можна використати відомі рівняння дотичної та нормалі до параболи в точці $M(x_0; y_0)$ (табл. 1):

– рівняння дотичної

$$y_0 y = p(x + x_0) \Rightarrow 4y = 2\sqrt{2}(x + 2\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2};$$

– рівняння нормалі

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{p} &= \frac{y - y_0}{-y_0} \Rightarrow \frac{x - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y - 4}{-4} \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 4 &= -\frac{2}{\sqrt{2}}x + 4 \Rightarrow \boxed{y = 8 - \sqrt{2}x} \end{aligned}$$

Положення дотичної і нормалі до параболи показано на рисунку.

1.6. Фокальні властивості еліпса, гіперболи і параболи

Фокальні властивості названих кривих засновані на особливостях “поводження” променів світла, випущених з фокусів цих кривих. Ці властивості широко використовуються в практиці.

Фокальні властивості еліпса і гіперболи приведемо без доведення.

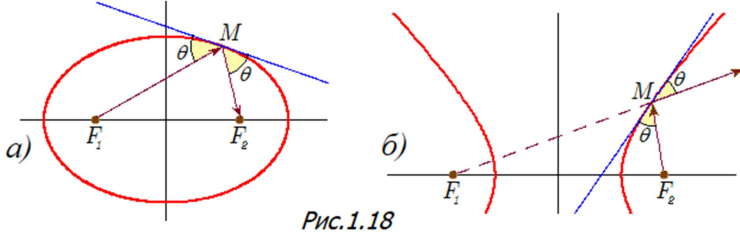


Рис.1.18

Для еліпса: промені світла, що виходять з одного фокуса (F_1) після дзеркального відбивання від еліпса, проходять також і через другий фокус (F_2) (рис.1.18, а).

Для гіперболи: промені світла, які виходять з одного фокуса (F_2) після дзеркального відбивання від гіперболи проходять так, ніби вони випущені з іншого фокуса (F_1) (рис.1.18, б).

Фокальні властивості параболи ілюструються рисунком 1.19.

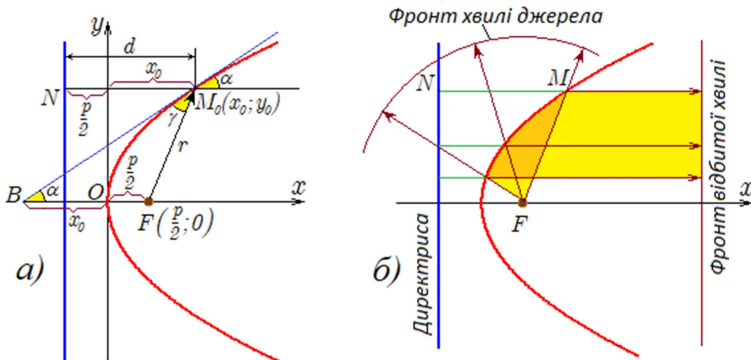


Рис.1.19

Проведемо через деяку точку $M_0(x_0; y_0)$ параболи лінію NM_0 паралельно осі симетрії Ox . Дотична BM_0 перетинає цю лінію та вісь Ox під одним і тим же кутом α . Якщо кут γ буде дорівнювати куту α , то промінь світла, направлений вздовж полярного радіуса,

після відбивання від параболи пройде по прямій NM_0 , так як при цьому кут падіння буде дорівнювати куту відбивання. Щоб довести, що $\gamma = \alpha$ достатньо переконатися, що трикутник BFM_0 рівнобедрений.

З рівняння дотичної $y_0 y = p(x + x_0)$ (табл. 1) при $y = 0$ знайдемо абсцису точки B : $x_B = -x_0$, тобто $BO = x_0$, а сторона BF трикутника BFM_0 дорівнює $BF = x_0 + p/2$ (рис.1.19, а).

Інша бічна сторона FM_0 співпадає з полярним радіусом, який дорівнює відстані d від точки M_0 до директриси (1.29). Таким чином $FM_0 = r = d = x_0 + p/2$, а, значить $BF = FM_0$ і $\gamma = \alpha$.

При вільному виході пучка променів з фокуса (без зіткнення з параболою) вони пройдуть за певний проміжок часу одну й ту ж відстань і тоді їх позиція буде обмежена лінією кола (фронт хвилі джерела – рис.1.19, б).

Зважимо далі на те, що промені, випущені з фокуса, досягають поверхні параболи за той же час, що і промені, випущені від директриси. Наприклад, промінь, випущений з фокуса F і промінь, випущений з точки N директриси прийдуть в точку M параболи одночасно, так як $MN = FM$. Отже, після відбивання, промені будуть проходити так, ніби вони випущені від директриси, тому фронтом відбитої хвилі буде пряма, паралельна директрисі. Всі ці міркування приводять до наступних фокальних властивостей.

Для параболи: промені світла, що виходять із фокуса, після дзеркального відбивання від параболи утворюють пучок, паралельний її вісі симетрії. При цьому фронт відбитої хвилі є пряма, паралельна директрисі.

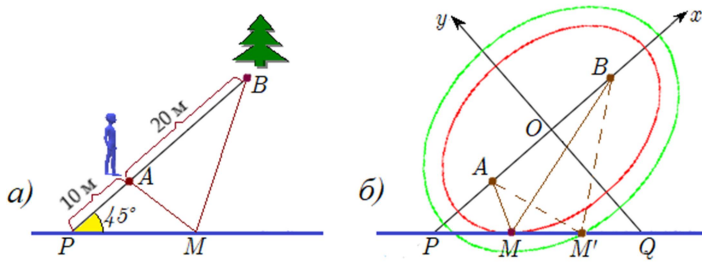
Саме ця фокальна властивість параболи набула найбільшого розповсюдження в практиці. Рефлектори освітлювальних приладів виконані у формі поверхні, яка утворена обертанням параболи навколо своєї осі симетрії (параболоїд). Джерело світла встановлюють у фокусі параболоїда. Очевидно, що це створює направлений пучок променів вздовж осі симетрії параболоїда і запобігає втратам світла на розсіювання.

Поверхні другого порядку, в тому числі і параболоїд обертання, розглянемо далі.

1.7. Ще кілька прикладів

Наведені нижче приклади показують доцільність залучення кривих другого порядку до рішення різноманітних задач в різних галузях знань.

Приклад 12. Лісник, знаходячись неподалік від лісного масиву, замітив під сосною дим від тління сухої трави. Щоб уникнути пожегу він повинен добігти до прямолінійного берега річки, набрати відро води, потім дістатися до джерела задимлення і ліквідувати небезпеку займання. Яким повинен бути його найкоротший шлях?



Нехай джерело задимлення знаходиться в точці B , а лісник – в точці A . Берегом річки є пряма (синій колір), а ламана AMB – шлях лісника. Проведем лінію, яка проходить через точки A і B та перетинається з береговою лінією в точці P (рис. a). Прийнемо для визначеності, що $AB = 20\text{ м}$, $AP = 10\text{ м}$, $\angle BPM = 45^\circ$.

Далі введемо систему координат xOy , центр якої лежить посередині між точками A і B (рис. b). В цій системі можна задавати еліпси, для яких фокуси суміщені з точками A і B , тобто, їх фокусна відстань $2c = AB = 20$. Маємо зв'язок (1.5): $a^2 - b^2 = 10^2 = \text{const}$. Цей вираз показує, що обидві півосі еліпса a і b можуть збільшуватися, або зменшуватися одночасно, а еліпси з одними й тими ж фокусами будуть розміщені концентрично – один в другому. При цьому більший за розмірами еліпс буде мати більшу суму фокальних радіусів $r_1 + r_2 = 2a$.

Візьмемо еліпс (червоний колір), який дотикається до лінії PQ (берега річки) в точці M . Тоді одним із шляхів лісника буде ламана AMB довжиною $AM + BM = r_1 + r_2 = 2a$. Виберемо тепер на лінії PQ будь-яку точку M' , яка не співпадає з точкою M . Через цю точку можна провести еліпс лише більшого розміру (зелений колір), з більшою сумою фокальних радіусів $AM' + BM'$ (пунктирна), що означає також більшу довжину шляху лісника. Отже, найкоротшим є шлях лісника, який проходить через точку M дотику еліпса з прямою PQ .

Трикутник $\triangle OPQ$ рівнобедрений, тому відомі відрізки, що відтинаються прямою PQ на осях координат ($OP = OQ = -20$) і рівняння цієї прямої у відрізках:

$$\frac{x}{-20} = \frac{y}{-20} = 1.$$

Пряма PQ є дотичною до еліпса, тому вона описується рівнянням дотичної (табл. 1):

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

де x_0, y_0 – координати точки дотику $M(x_0, y_0)$.

Прирівнюючи коефіцієнти при x і y , дістанемо:

$$\frac{x_0}{a^2} = -\frac{1}{20} \Rightarrow x_0 = -\frac{a^2}{20}; \quad \frac{y_0}{b^2} = -\frac{1}{20} \Rightarrow y_0 = -\frac{b^2}{20}.$$

Підставимо координати x_0, y_0 в рівняння еліпса:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{400} + \frac{b^2}{400} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 400.$$

Маємо систему, з якої знайдемо:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 400 \\ a^2 - b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 250 \\ b^2 = 150 \end{cases}.$$

Координати точки M :

$$x_0 = -\frac{250}{20} = -12,5; \quad y_0 = -\frac{150}{20} = -7,5.$$

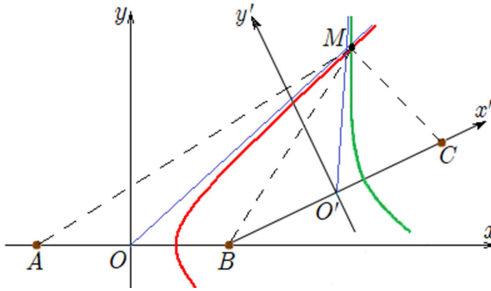
Найкоротший шлях лісника:

$$S = 2a = 2\sqrt{250} = 10\sqrt{10} \text{ м.}$$

Приклад 13. Прийнято звуковий сигнал в трьох фіксованих точках:

A , B і C . Відомо, що в точку A він прийшов на t секунд пізніше, ніж в точку B , а в точку B на τ секунд пізніше, ніж в точку C . Звідки прийшов сигнал?

За умовою задачі можлива точка M подачі сигналу знаходиться найдалі від точки A і найближче від точки C . На



рисунку точка M зображена таким чином, щоб виконувалась ця умова:

$$CM < BM < AM.$$

Введемо систему координат xOy таким чином, щоб вісь абсцис проходила через

точки A і B , а початок координат знаходився посередині між цими точками. Будемо вважати, що координати точок A , B і C в цій системі відомі.

Нехай V – швидкість звуку в повітряному середовищі ($V \approx 332 \frac{m}{c} = \text{const}$). З умови задачі витікає:

$$\frac{AM}{V} - \frac{BM}{V} = t \quad \text{або} \quad AM - BM = Vt = \text{const}.$$

Як бачимо, різниця відстаней від точки M до двох заданих точок A і B – величина стала. Це справджується лише тоді, коли точка M буде належати правій вітці гіперболи, фокусами якої є точки A і B (червоний колір). При цьому $AM = r_1$, $BM = r_2$, $Vt = 2a$ (рис.1.4). Очевидно, що для цієї гіперболи досить просто визначається також фокусна відстань і мала піввісь: $2c = AB$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

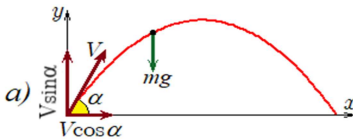
Слід відмітити, що умови задачі будуть виконані, якщо точка M буде знаходитись будь-де на “червоній” гіперболі. Це значить, що знайти джерело звукового сигналу по фіксованим двом точкам неможливо.

Розглянемо далі точки B і C . Аналогічно попередньому введемо систему $x'O'y'$, вісь абсцис якої проходить через ці точки. Початок координат O' розмістимо посередині між точками B і C . Тоді за умовою задачі буде виконуватися рівність: $BM - CM = V\tau = \text{const}$. Тобто, шукана точка M лежить також і на гіперболі з фокусами B і C (зелений колір) а її велика піввісь і фокусна відстань, відповідно, рівні: $2a' = V\tau$; $2c' = BC$.

Викладене показує, що по фіксованим трьом точкам є цілком можливим виявлення точки відправлення звукового сигналу, яка, очевидно, знаходиться в точці перетину відмічених гіпербол. Для визначення координат точки M необхідно задати координати точок A , B , C . Якщо відомо, що точка M є досить віддаленою, то точку перетину гіпербол можна з прийнятною точністю замінити точкою перетину їх асимптот (синій колір), що технічно спрощує задачу.

Приклад 14. Знайти траєкторію снаряда, запущеного з поверхні Землі під кутом α до горизонту. Силою опору повітря знехтувати.

Схема польоту снаряда показана на рисунку (а), де позначено:



V – швидкість запуску снаряда;
 $V \cos \alpha$, $V \sin \alpha$ – проєкції швидкості V на осі координат;
 mg – сила ваги снаряда.

На снаряд в процесі польоту діє сила ваги. В напрямку горизонтальної вісі абсцис ця сила не діє, тому снаряд рухається вздовж цієї осі зі сталою швидкістю $V \cos \alpha$. Тоді:

$$x = Vt \cos \alpha.$$

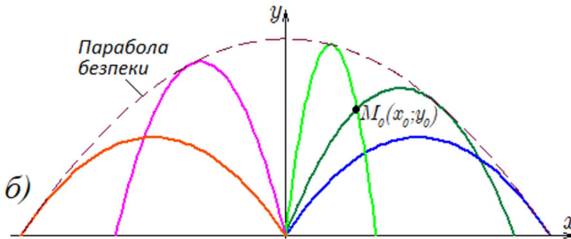
Сила ваги діє протилежно вісі ординат, тому, виходячи з принципу незалежності дій, можна стверджувати, що снаряд рухається зі сталою швидкістю $V \sin \alpha$ вздовж цієї осі і одночасно – з прискоренням g в протилежному напрямку:

$$y = Vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Записані співвідношення можна розглядати, як параметричні рівняння траєкторії польоту. Виключивши параметр t з цих рівнянь, одержимо рівняння траєкторії в явному вигляді. З верхнього рівняння маємо: $t = x/(V \cos \alpha)$. Підставивши цей вираз в нижнє рівняння, після належних спрощень дістанемо:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Отже, траєкторією польоту снаряда є парабола, розміщена вітками вниз (рис. а). Як бачимо, вона залежить від кута пострілу α . Траєкторії при різних значеннях цього кута показані на рис. (б).



Нехай у просторі координат x, y відмічена точка $M_0(x_0, y_0)$. Під яким кутом треба випустити снаряд, щоб він влучив у названу точку?

Траєкторія снаряда пройде через точку $M_0(x_0, y_0)$, якщо координати x_0, y_0 задовольнятимуть останнє рівняння. В результаті підстановки одержимо:

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx_0^2}{2V^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Тут використана тригонометрична тотожність: $\cos^{-2} \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$. Після очевидних перетворень, приведемо записану рівність до квадратного рівняння відносно $\operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2V^2}{gx_0} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2V^2 y_0}{gx_0^2} + 1 = 0,$$

яке має розв'язок:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V^2}{gx_0} \pm \sqrt{\frac{V^4}{g^2 x_0^2} - \frac{2V^2 y_0}{gx_0^2} - 1}.$$

Наявність двох коренів для кута α показує, що снаряд може досягнути точки $M_0(x_0, y_0)$ або на підйомі по траєкторії (темно-зелений колір), або при спуску (світло-зелений). Можливий також варіант, що квадратне рівняння матиме лише один корінь. Це варіант, коли точка $M_0(x_0, y_0)$ буде лежати на охоплюючій кривій (пунктирна), яка дотикається до кожної траєкторії польоту снаряда тільки в одній точці. Очевидно, що в цьому разі дискримінант вказаного рівняння дорівнює нулю:

$$\frac{V^4}{g^2 x_0^2} - \frac{2V^2 y_0}{gx_0^2} - 1 = 0 \quad \text{або} \quad y_0 = \frac{V^2}{2g} - \frac{gx_0^2}{2V^2}.$$

Координати x_0, y_0 в розглянутому випадку належать охоплюючій кривій. Їх можна переозначити, або записати без нижніх індексів. Отже, в прийнятій системі координат xOy , рівнянням охоплюючої кривої є:

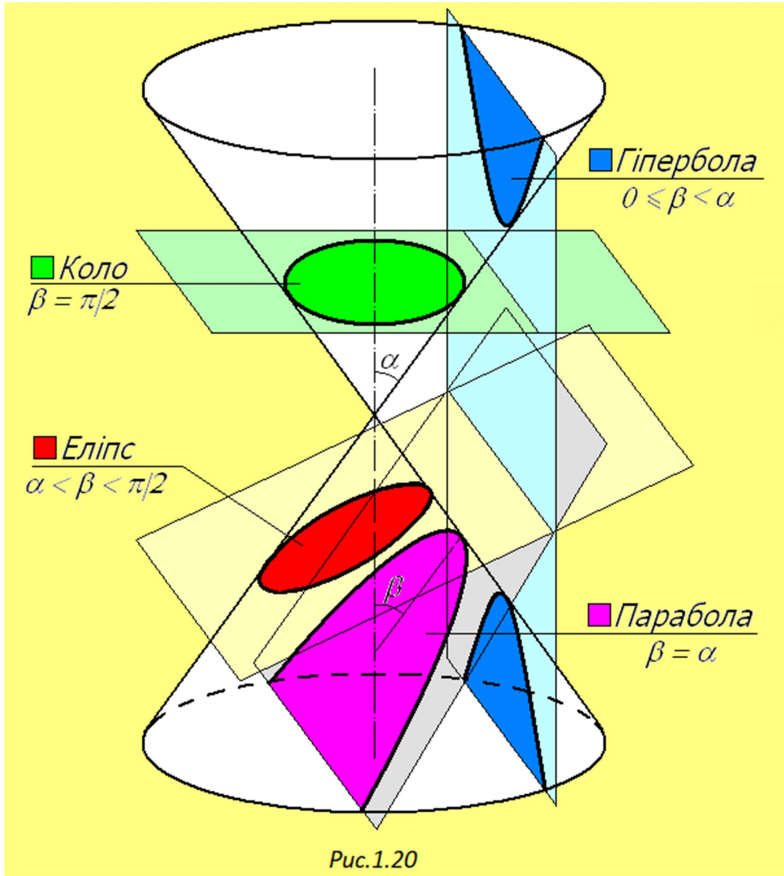
$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V^2}.$$

Як бачимо, цією кривою теж виявилась парабола. Оскільки за межами кривої вразити ціль пострілом із гармати неможливо – її назвали “параболою безпеки”.

1.8. Криві другого порядку, як лінії перетину конуса

Якщо деяку вісь перетнути прямою і обернути її навколо осі, то поверхня, яку опише пряма буде конусом. В цьому випадку вказана пряма називається твірною конуса. Виявляється, що при перетині конуса площиною під кутом до осі утворюються лінії перетину, які є кривими другого порядку. Вид кривої залежить від кута β нахилу січної площини (рис.1.20).

Нехай α – кут нахилу твірної конуса по відношенню до його осі. Простежимо за впливом кута β ($0 \leq \beta \leq \pi/2$) на вид лінії перетину конуса площиною при деякому сталому значенні кута α .



Якщо перетнути конус площиною, перпендикулярно до його осі ($\beta = \pi/2$), то лінією перетину є коло. Це впливає з методу побудови конуса обертанням.

Якщо кут β нахилу січної площини більший кута α нахилу твірної ($\alpha < \beta < \pi/2$), то перетином є еліпс.

Якщо кут β нахилу січної площини співпадає з кутом нахилу твірної α , то лінія перетину – парабола.

Якщо кут β нахилу січної площини менший кута α нахилу твірної ($0 \leq \beta < \alpha$), то лінія перетину – гіпербола.

Всі ці ствердження досить наглядні, тому в обмеженому об'ємі цього посібника вони не доводяться. Можна подивитися ці доведення в більш повних виданнях [4, 7].

1.9. Перетворення координат на площині

1.9.1. Паралельне перенесення системи координат

Візьмемо в системі координат xOy деяку точку $O'(a';b')$. Прийmemo її за початок нової системи координат XOY , осі якої OX та OY паралельні відповідним осям Ox та Oy системи xOy (рис.1.21). Така побудова нової системи називається паралельним переносом осей координат в точку $O'(a';b')$.

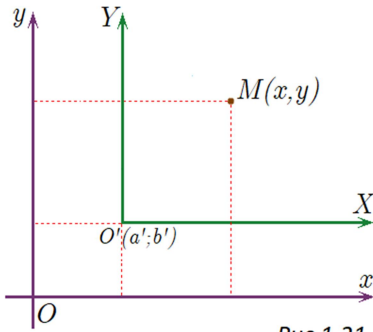


Рис.1.21

Нехай в системі координат xOy відома точка $M(x, y)$. Треба знайти координати цієї точки в новій системі координат. Як маємо з рис.1.21:

$$\begin{aligned} x &= a' + X; \\ y &= b' + Y. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Ці співвідношення задають зв'язок між старими (x, y) та новими (X, Y) координатами точки M і називаються формулами перетворення координат при паралельному переносі осей. Їх можна записати в оберненому вигляді:

$$\begin{aligned} X &= x - a'; \\ Y &= y - b'. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Нехай, наприклад, початок $O'(a';b')$ системи XOY співпадає з центром симетрії кола радіусом R . Тоді рівняння кола в цій системі буде мати канонічний вид: $X^2 + Y^2 = R^2$. Щоб записати рівняння цього ж кола в системі xOy слід скористатися формулами (1.50): $(x - a')^2 + (y - b')^2 = R^2$. Нижче це ілюструється рисунком, в тому числі і для інших кривих другого порядку.

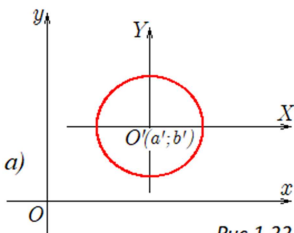


Рис.1.22

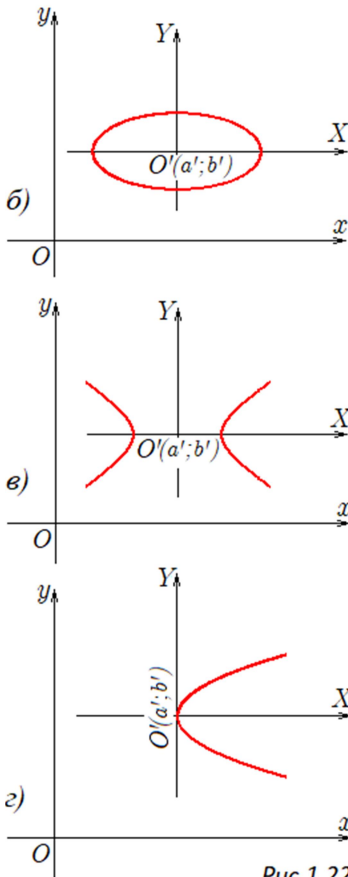
Коло

В системі XOY :

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

В системі xOy :

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = R^2.$$

ЕліпсВ системі XOY :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

В системі xOy :

$$\frac{(x - a')^2}{a^2} + \frac{(y - b')^2}{b^2} = 1.$$

ГіперболаВ системі XOY :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

В системі xOy :

$$\frac{(x - a')^2}{a^2} - \frac{(y - b')^2}{b^2} = 1.$$

ПараболаВ системі XOY :

$$Y^2 = 2pX.$$

В системі xOy :

$$(y - b')^2 = 2p(x - a').$$

Рис.1.22

Приклад 15. Задано рівняння кривої другого порядку у вигляді:
 $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0$. Довести, що воно є рівнянням параболи,
 знайти її директрису, побудувати рисунок.

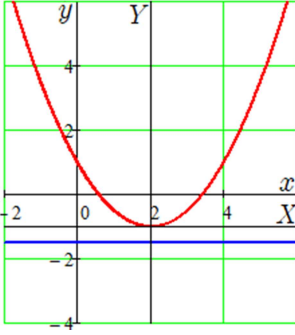
Виділимо в заданому виразі повний квадрат по x і виконаємо
 супутні перетворення.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 2y + 2 = 0 &\Rightarrow \underline{x^2 - 2x \cdot 2 + 4} - 4 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 = 2y + 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2(y + 1). \end{aligned}$$

Проведем перенесення початку координат в точку $O'(2; -1)$
 за формулами (1.50) паралельного перенесення осей:

$$x - 2 = X, \quad y + 1 = Y \Rightarrow \boxed{X^2 = 2Y}.$$

В системі координат XOY одержаний вираз є канонічним рівнянням параболи з фокальним параметром $p = 1$. В цій системі рівняння директриси має вигляд (рис.1.7, б):



$$Y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Щоб знайти рівняння директриси в системі координат xOy використаємо нижче з рівнянь (1.49) при $b' = -1$:

$$y = Y + b' = -\frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}}$$

Побудову параболи легше виконувати по знайденому канонічному рівнянню в системі координат XOY (червоний колір). Директриса має вид горизонтальної прямої (синій колір).

1.9.2. Поворот системи координат

При такому перетворенні осі координат Ox і Oy шляхом повороту на кут α , переходять в "нові" осі Ox' і Oy' . При цьому початок координат O не змінюється (є нерухомим), а кут повороту відраховується в напрямі проти руху стрілки годинника (рис.1.23).

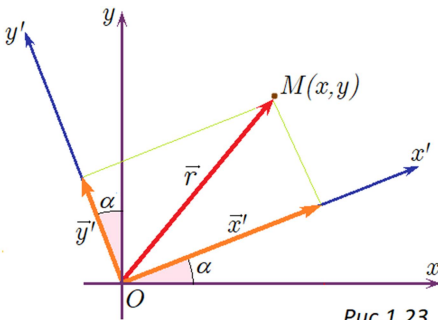


Рис.1.23

Візьмемо на площині xOy довільну точку $M(x, y)$ з радіусом-вектором:

$$\vec{r} = (x; y). \quad (1.51)$$

Розкладемо вектор \vec{r} по напрямкам осей Ox' і Oy' :

$$\vec{r} = \vec{x}' + \vec{y}'. \quad (1.52)$$

Очевидно, що $|\vec{x}'| = x'$, $|\vec{y}'| = y'$ і вектори \vec{x}' та \vec{y}' можна запи-

сати в проекціях на осі Ox і Oy таким чином:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= (x' \cos \alpha; x' \sin \alpha), \\ \vec{y}' &= (-y' \sin \alpha; y' \cos \alpha). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Спроектуємо тепер векторну рівність (1.52) на осі Ox і Oy з врахуванням співвідношень (1.51), (1.53):

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.\end{aligned}\tag{1.54}$$

Одержані вирази називаються формулами перетворення координат при повертанні осей.

Приклад 16. Записати формули перетворення координат, якщо вісі повернули на кут $\alpha = 135^\circ$.

Для встановлення формул перетворення координат достатньо в співвідношення (1.54) підставити значення синуса і косинуса заданого кута. Послідовно одержимо:

$$\begin{aligned}\sin 135^\circ &= \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos 135^\circ &= \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'; & \text{або} & & x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y'); \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'; & & & y &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y').\end{aligned}$$

Розглядаючи останні рівності, як систему, легко знаходимо і обернені формули перетворення:

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (x - y); \\ y' &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (x + y).\end{aligned}$$

1.10. Загальне рівняння кривих другого порядку

В прикладі 15 задане неканонічне алгебраїчне рівняння другого порядку, шляхом виділення повного квадрату, відповідних тотожних перетворень та паралельного перенесення системи координат, було приведене до канонічного рівняння параболи. На фоні цього конкретного прикладу цілком природно з'являються деякі запитання: чи може алгебраїчне рівняння аналогічного вигляду привести також до канонічного рівняння кола, еліпса, гіперболи

або, взагалі, до іншої кривої; чи буде при цьому необхідним перетворення координат шляхом повороту осей; чи можна заздалегідь по виду заданого рівняння дізнатися до якої лінії приведуть вказані перетворення і які ознаки рівняння несуть цю інформацію?

Щоб відповісти на всі ці запитання будемо розглядати алгебраїчне рівняння другого порядку найбільш загального виду:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \quad (1.55)$$

Треба перетворити це рівняння так, щоб воно виглядало, як канонічне того ж порядку, або задавало іншу, але відомого виду лінію. Отже, належить пройти по шляху максимального спрощення цього рівняння. Ми вже бачили, що досить ефективним є виділення повного квадрату та паралельне перенесення осей. Але таких перетворень не достатньо, тому що вони повністю обходять добуток координат (xy) . Цей добуток можна змінити поворотом осей, записуючи рівняння (1.55) в штрихованій системі координат (рис.1.23). Для цього підставимо туди формули (1.54):

$$\begin{aligned} a_{11}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2a_{12}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ + a_{22}(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2a_1(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2a_2(x' \sin \alpha + \\ + y' \cos \alpha) + a = 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

З'ясуємо, тепер, яким буде коефіцієнт при добутку $x'y'$ після розкривання дужок і зведення подібних.

Піднесення до квадратів (підкреслено рискою) дасть “подвоєний добуток першого числа на друге”, а саме: $(-2a_{11} \sin \alpha \cos \alpha)x'y'$ та $(2a_{22} \sin \alpha \cos \alpha)x'y'$. Результатом розкриття дужок (підкреслено двома рисками) буде: $2a_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)x'y'$. Тоді, після зведення подібних одержимо:

$$[-2a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + 2a_{22} \sin \alpha \cos \alpha + 2a_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]x'y' \quad (1.57)$$

При спрощенні рівняння (1.55) найбільш бажаним є випадок, коли коефіцієнт при добутку $x'y'$ дорівнює нулю:

$$-2a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + 2a_{22} \sin \alpha \cos \alpha + 2a_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0. \quad (1.58)$$

Це співвідношення можна розглядати, як рівняння відносно кута α повороту осей. Введемо сюди функції подвоєного аргумента $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ і $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$, що дає:

$$2a_{12} \cos 2\alpha - (a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha = 0 \quad (1.59)$$

Звідси витікає:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{11}}{a_{11} - a_{22}}}. \quad (1.60)$$

За формулою (1.60) обчислюється значення кута α , при якому рівняння (1.55), записане в штрихованій системі координат, не буде включати добутку $x'y'$, тобто стане більш простим.

П р и м і т к а. Доцільно окремо виділити випадок, коли $a_{11} = a_{22}$. Очевидно, що в цьому випадку визначити кут α за формулою (1.60) неможливо, так як дріб справа, як і функція $\operatorname{tg} 2\alpha$, не існують. Для тангенса це спостерігається, коли його аргумент (в межах геометричних обмежень задачі) дорівнює 90° . **Отже, при умові $a_{11} = a_{22}$ слід вважати, що $\alpha = 45^\circ$ ($\alpha = \pi/4$).**

Вище з'ясовано, що, на першому етапі перетворень заданого рівняння (1.55), за рахунок повороту осей на кут α можна виключити з нього добуток координат xy . При цьому кут α повинен визначатися за формулою (1.60). Можливий, також, варіант, коли задане рівняння з самого початку не матиме добутку xy . Очевидно, що обидва варіанти мають в подальшому одне й те ж продовження досліджень. Тому далі можна розглядати рівняння в спрощеному вигляді без добутку xy і штрихування координат:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \quad (1.61)$$

Виділимо повні квадрати по змінним x та y .

$$a_{11} \left(x^2 + 2 \frac{a_1}{a_{11}} x + \frac{a_1^2}{a_{11}^2} \right) + a_{22} \left(y^2 + 2 \frac{a_2}{a_{22}} y + \frac{a_2^2}{a_{22}^2} \right) + a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} = 0,$$

$$a_{11} \left(x + \frac{a_1}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(y + \frac{a_2}{a_{22}} \right)^2 + a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} = 0. \quad (1.62)$$

Виконавши паралельне перенесення осей

$$X = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \quad Y = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \quad (1.63)$$

одержимо рівняння:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + C = 0. \quad (1.64)$$

В ньому: $C = a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}}$.

Аналіз рівняння (1.64) показує наступне.

1. Якщо a_{11} і a_{22} мають однакові знаки, протилежні C , то рівняння задає еліпс при $a_{11} \neq a_{22}$, або коло при $a_{11} = a_{22} = A$:

$$\frac{X^2}{C/a_{11}} + \frac{Y^2}{C/a_{22}} = 1 - \text{еліпс}; \quad X^2 + Y^2 = -\frac{C}{A} - \text{коло}; \quad R = \sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

2. Якщо a_{11} і a_{22} мають протилежні знаки ($a_{11}a_{22} < 0$), то рівняння задає гіперболу:

$$\frac{X^2}{C/a_{11}} - \frac{Y^2}{C/a_{22}} = \pm 1.$$

3. Якщо один з коефіцієнтів a_{11} чи a_{22} дорівнює нулю, то така ж послідовність перетворень¹ приводить рівняння (1.61) до одного з указаних нижче:

$$2a_1X + a_{22}Y^2 + a - \frac{a_2^2}{a_{22}} = 0 \quad \text{при } a_{11} = 0;$$

$$2a_2Y + a_{11}X^2 + a - \frac{a_1^2}{a_{11}} = 0 \quad \text{при } a_{22} = 0.$$

Ці рівняння, очевидно, задають параболу.

4. При деяких співвідношеннях значень коефіцієнтів загального рівняння (1.61) воно може задавати пару прямих, точку, або взагалі не задавати жодної лінії. Як приклади:

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \quad - \text{пара прямих, що перетинаються};$$

$$x^2 = a^2, y^2 = b^2 \quad - \text{пара паралельних прямих};$$

$$x^2 + y^2 = 0 \quad - \text{точка з координатами } x = 0, y = 0;$$

$$x^2 + y^2 = -R^2 \quad - \text{жодної точки (уявне коло)}.$$

¹ Вказана послідовність перетворень буде включати виділення повного квадрату лише по одній змінній (x або y)

Як бачимо, тотожні перетворення, перехід до різних систем координат суттєво впливає на вид рівняння, але не впливає на вид кривої, яку воно відображає. Це наводить на думку, що кожне таке рівняння повинно мати певні ознаки, за якими можна розпізнати криву, не проводячи повної послідовності його обстеження до максимального спрощення. Дійсно, виявляється, що існує інваріант по відношенню до перетворення координат – величина, яка не залежить від вибору тієї чи іншої системи, а залежить лише від виду кривої [1]. Інваріант зручно записувати у вигляді визначника другого порядку:

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (a_{21} = a_{12}). \quad (1.65)$$

В цьому визначнику елементами служать коефіцієнти загального рівняння (1.55), але нижніми індексами елементів, як прийнято, можна вважати номери рядка та стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Знаки інваріанта визначають вид кривої, завдяки чому можна провести класифікацію кривих, виходячи тільки з загального виду рівняння:

- 1) $I > 0$ – крива еліптичного типу (еліпс, коло, точка);
- 2) $I = 0$ – крива параболічного типу (парабола, пара паралельних прямих);
- 3) $I < 0$ – крива гіперболічного типу (гіпербола, дві прямі, що перетинаються).

Отже, щоб дізнатися яку криву відображає задане рівняння треба знайти значення інваріанта (1.65) і скористатися приведеною класифікацією.

Приклад 17. Привести до канонічного вигляду і побудувати криву:

$$xy = 1.$$

Порівнюючи задане рівняння з загальним (1.55), запишемо:

$$a_{11} = 0, \quad 2a_{12} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a = -1.$$

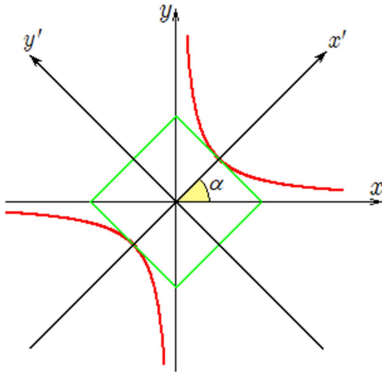
$$\text{Отже: } a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}, \quad I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Так як $I < 0$, то задане рівняння задає криву гіперболічного типу.

Рівняння включає добуток xy , тому переходимо до повернутої системи координат. Оскільки $a_{11} = a_{22}$, то кут повороту системи має значення $\alpha = \pi/4$. Формули перетворення координат (1.54):

$$x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y');$$

$$y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y').$$



Підстановка цих формул в задане рівняння дає:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' - y')(x' + y') = 1$$

або

$$\boxed{\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.}$$

Таким чином, маємо рівняння рівнобічної гіперболи з пів-осями $a = b = \sqrt{2}$.

Порівняємо його з загальним рівнянням (1.55). Одержимо:

$$a_{11} = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a = -1.$$

По відомим коефіцієнтам рівняння кривої в штрихованій системі координат обчислюємо значення інваріанта:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Як і очікувалось, для рівняння, записаного в повернутих осях, значення інваріанта не змінилось.

Допоміжно відмітимо, що цей приклад носить чисто ілюстративний характер. Задане рівняння можна переписати у виді $y = 1/x$. Це, відома з шкільного курсу елементарної математики, функція оберненої пропорційності, графіком якої і є гіпербола.

Приклад 18. Привести до канонічного вигляду і побудувати криву:

$$48x^2 + 48\sqrt{3}xy + 96y^2 + 12\sqrt{3}x + 10\sqrt{3}y - 6 = 0.$$

1. Визначаємо тип кривої. З виду загального рівняння (1.55) витікає:

$$a_{11} = 48; \quad a_{12} = 24\sqrt{3}; \quad a_{22} = 96; \quad a_1 = 6\sqrt{3}; \quad a_2 = 5\sqrt{3}; \quad a = 6.$$

Обчислюємо інваріант (1.65).

$$I = \begin{vmatrix} 48 & 24\sqrt{3} \\ 24\sqrt{3} & 96 \end{vmatrix} = 48 \cdot 96 - (24\sqrt{3})^2 = 2880.$$

Так як $I > 0$, маємо криву еліптичного типу.

2. Оскільки рівняння включає добуток xy , необхідно провести поворот осей координат. Знаходимо кут повороту (1.60) та формули перетворення координат (1.54).

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{11}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{48\sqrt{3}}{48 - 96} = -\sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\sin \alpha = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y';$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = -\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'.$$

2. Записуємо задане рівняння в штрихованій системі координат і виконуємо належні перетворення.

$$\begin{aligned} & 48\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'\right)^2 + 48\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'\right)\left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right) \\ & + 96\left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)^2 + 12\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'\right) + \\ & + 10\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right) - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 48\left(\frac{3}{4} x'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} x'y' + \frac{1}{4} y'^2\right) + 48\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} x'^2 + \frac{1}{2} x'y' + \frac{\sqrt{3}}{4} y'^2\right) + \\ & + 96\left(\frac{1}{4} x'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x'y' + \frac{3}{4} y'^2\right) + 12\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'\right) + \\ & + 10\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right) - 6 = 0. \end{aligned}$$

З останнього рівняння дістаємо коефіцієнти при:

x'^2 ; $x'y'$; y'^2 ; x' ; y' .

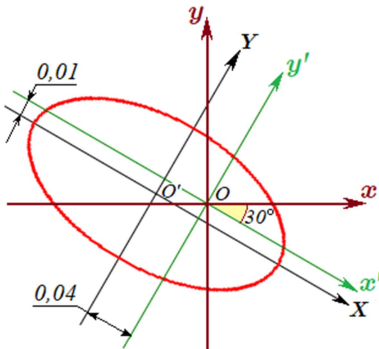
$$\begin{array}{l|l} x'^2 & 48 \cdot \frac{3}{4} - 48\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 96 \cdot \frac{1}{4} = 36 - 36 + 24 = 24 \\ x'y' & 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 48\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - 96 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ y'^2 & 48 \cdot \frac{1}{4} + 48\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 96 \cdot \frac{3}{4} = 12 + 36 + 72 = 120 \\ x' & 12\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 18 - 5\sqrt{3} \approx 9,35 \\ y' & 12\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} + 15 \approx 25,38 \end{array}$$

Як бачимо, коефіцієнт при $x'y'$ дорівнює нулю, тому досліджуване рівняння в штрихованій системі координат запишеться без цього добутку:

$$24x'^2 + 120y'^2 + 9,35x' + 25,38y' - 6 = 0.$$

3. В останньому рівнянні виділяємо повні квадрати по обом змінним.

$$\begin{aligned} & 24 \left[x'^2 + 2 \cdot x' \cdot \frac{9,35}{48} + \left(\frac{9,35}{48} \right)^2 - \left(\frac{9,35}{48} \right)^2 \right] + \\ & + 120 \left[y'^2 + 2 \cdot y' \cdot \frac{25,38}{240} + \left(\frac{25,38}{240} \right)^2 - \left(\frac{25,38}{240} \right)^2 \right] - 6 = 0. \end{aligned}$$



Після обчислень одержуємо

$$24(x' + 0,04)^2 + 120(y' + 0,01)^2 = 8,24,$$

що можна записати так:

$$\frac{(x' + 0,04)^2}{0,34} + \frac{(y' + 0,01)^2}{0,07} = 1.$$

4. Виконуємо паралельне перенесення осей:

$$X = x' + 0,04;$$

$$Y = y' + 0,01.$$

В новій системі координат $XO'Y$ рівняння приймає вигляд:

$$\boxed{\frac{X^2}{0,58^2} + \frac{Y^2}{0,36^2} = 1} \quad \text{— канонічне рівняння еліпса з півосями } 0,58 \text{ та } 0,36.$$

Приклад 19 (розв'язання задачі в середовищі «Mathcad»[11])

Привести задане рівняння до канонічного виду та побудувати криву

$$9 \cdot x^2 - 6 \cdot \sqrt{3} x \cdot y + 3 \cdot y^2 + 12 \cdot x - 8 \cdot y + 3 = 0$$

$$I := \begin{vmatrix} 9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Оскільки інваріант "I" дорівнює нулю - рівняння відображає криву параболічного типу.

Знаходимо кут α повороту осей, при якому зникає добуток координат - $x \cdot y$

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{-6 \cdot \sqrt{3}}{9 - 3} \quad \text{solve, } \alpha \rightarrow \frac{\pi}{3} \quad \alpha := \frac{\pi}{3} \quad \sin(\alpha) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos(\alpha) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Переходимо до нової системи координат: $x = \frac{1}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y'$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x' + \frac{1}{2} \cdot y'$

Виконуємо вказану підстановку (оператор "substitute"), приводимо подібні члени зі змінними y' та x' (оператор "collect") і обчислюємо значення всіх коефіцієнтів з точністю до трьох значащих цифр (оператор "float"):

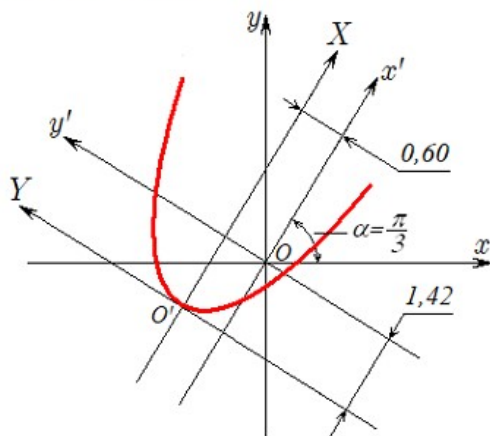
$$9 \cdot x^2 - 6 \cdot \sqrt{3} x \cdot y + 3 \cdot y^2 + 12 \cdot x - 8 \cdot y + 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{substitute, } x = \frac{1}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y', y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x' + \frac{1}{2} \cdot y' \\ \text{collect, } x', y', \text{float, } 3 \rightarrow -0.928 \cdot x' + -14.4 \cdot y' + 12.0 \cdot y'^2 + 3.0 \end{array} \right.$$

Виділяємо повний квадрат по змінній y' і приводимо рівняння до стандартного виду:

$$12 \cdot (y' - h)^2 - 0.9282 \cdot (x' - d) \quad \text{expand} \rightarrow 0.9282 \cdot d + 12 \cdot h^2 + -0.9282 \cdot x' + 12 \cdot y'^2 - 24 \cdot h \cdot y'$$

$$-24 \cdot h = -14.4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{solve, } h \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 0.6 \quad h := 0.6 \quad 12 \cdot h^2 + 0.928 \cdot d = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{solve, } d \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow -1.42 \quad d := -1.42$$

$$(y' - 0.6)^2 = 2 \cdot 0.039 \cdot (x' + 1.42)$$



Виконуємо паралельне перенесення осей:

$$y' - 0.6 = Y, \quad x' + 1.42 = X$$

$$Y^2 = 2 \cdot 0.039 \cdot X$$

Одержано канонічне рівняння параболи з фокальним параметром $p := 0.039$.

II. ПРО КРИВІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Під кривими вищих порядків розуміють криві, які описуються алгебраїчними рівняннями більш, ніж другого порядку. Вони часто виникають в прикладних задачах на знаходження площі, довжини дуги, центра ваги, момента інерції і т. п. Тому видається доцільним привести довідкову інформацію по вказаним кривим.

Декартів лист

Декартів лист відноситься до кривих третього порядку. В системі координат xOy декартів лист задається рівнянням:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad (2.1)$$

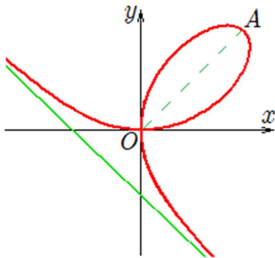


Рис.2.1

В першому квадранті крива має форму петлі, вершина якої – точка $A\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right)$.

Крива (2.1) симетрична відносно бісектриси $y = x$ (прямої OA). Ліва і права вітки наближаються до асимптоти $x + y + a = 0$ (зелений колір). Початок координат $O(0; 0)$ називається вузловою точкою. В цій точці вісі Ox та Oy є дотичними до кривої.

Параметричні рівняння декартового листа мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}; \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases} \quad (2.2)$$

В полярній системі, коли полюс співпадає з початком координат, а полярна вісь – з віссю Ox , рівнянням кривої буде:

$$r = \frac{3}{2} \cdot \frac{a \sin 2\varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}. \quad (2.3)$$

Лемніската Бернуллі

Лемніската Бернуллі належить до кривих четвертого порядку. В системі координат xOy вона задається рівнянням:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2). \quad (2.4)$$

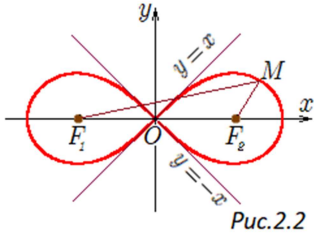


Рис.2.2

Вісі координат є осями симетрії лемніскати. Бісектриси $y = \pm x$ є дотичними в точці $O(0; 0)$, яка називається вузловою. Точки F_1 і F_2 – фокуси, при цьому фокусна відстань дорівнює: $F_1F_2 = 2c$.

Параметричні рівняння лемніскати Бернуллі:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2c} \frac{t + t^3}{1 + t^4}; \\ y = \sqrt{2c} \frac{t - t^3}{1 + t^4}, t \in (-\infty; \infty). \end{cases} \quad (2.5)$$

Рівняння лемніскати в полярній системі координат, де початок – точка $O(0; 0)$, є полюс, а вісь Ox є полярною віссю, має вид:

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi. \quad (2.6)$$

Полярний кут φ належить інтервалам:

$$\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right). \quad (2.7)$$

Параметр t (2.5) і полярний кут φ (2.6) пов'язані формулою:

$$t^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right). \quad (2.8)$$

Кардіоида

Нехай коло діаметром a котиться без ковзання по нерухомому колу того ж діаметра (рис.2.3). Тоді будь-яка точка, рухомого кола описує лінію, яка називається кардіоїдою. На рисунку центр нерухомого кола O' лежить на вісі абсцис, а за точку рухомого кола, яка описує кардіоїду вибрана точка M . Рівняння кардіоїди в прямокутній декартовій системі координат:

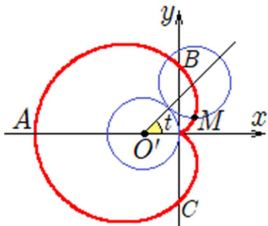


Рис.2.3

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2. \quad (2.9)$$

Вершина кардіоїди є точка $A(-2a; 0)$. Віссю симетрії кривої є вісь абсцис.

Якщо за параметр t вибрати кут нахилу до осі Ox радіуса нерухомого кола, проведеного в точку дотику з рухомим колом, то

параметричними рівняннями кривої будуть:

$$\begin{cases} x = a \cos t(1 - \cos t); \\ y = a \sin t(1 - \cos t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Якщо в рівняннях (2.10) замінити знаки “мінус” при косинусах на “плюс” – одержимо:

$$\begin{cases} x = a \cos t(1 + \cos t); \\ y = a \sin t(1 + \cos t). \end{cases} \quad (2.11)$$

Це рівняння кардіоїди, розміщеної в тих же координатах симетрично вісі ординат (рис.2.4, б).

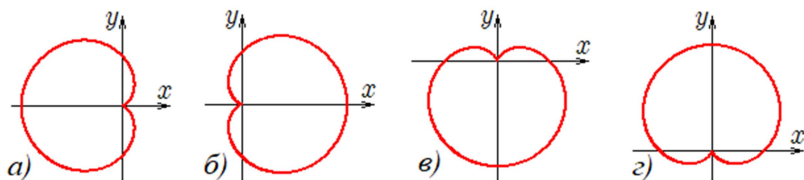


Рис.2.4

В полярних координатах кардіоїда має чотири варіанти рівнянь:

$$\begin{aligned} a) \quad r &= a(1 - \cos \varphi); & б) \quad r &= a(1 + \cos \varphi); \\ в) \quad r &= a(1 - \sin \varphi); & г) \quad r &= a(1 + \sin \varphi). \end{aligned} \quad (2.12)$$

При цьому полюс співпадає з початком координат $O(0; 0)$, а полярна вісь – з віссю абсцис.

Відповідні графіки показані на рис.2.4. У варіантах (в), (г) віссю симетрії кардіоїди є вісь ординат.

Криві Гвідо Гранді – рози

Рівняння цих кривих в полярних координатах має вигляд:

$$r = a \sin k\varphi \quad (2.13)$$

або

$$r = a \cos k\varphi, \quad (2.14)$$

де a – деяке дійсне додатне число, а $k = 1, 2, 3, \dots$ – натуральне число.

На рис.2.5 рівняння (2.13) проілюстровано графіками при різних значеннях числа k .

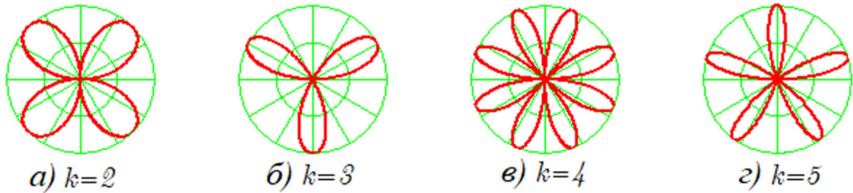


Рис.2.5

На рис.2.6 графіки побудовані за рівнянням (2.14) при тих же значеннях цього числа.

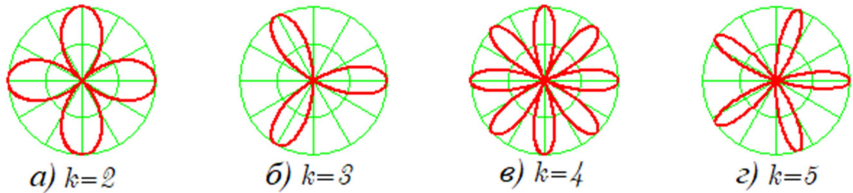


Рис.2.6

Як бачимо, при непарному значенні числа k роза складається з k пелюстків, а при парному значенні – з $2k$ пелюстків.

Параметричні рівняння кривих можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x = a \sin kt \cos t \\ y = a \sin kt \sin t \end{cases} \quad (2.15)$$

або

$$\begin{cases} x = a \cos kt \cos t \\ y = a \cos kt \sin t \end{cases} \quad (2.16)$$

Рівняння кривих в декартових координатах при різних значеннях числа k буде різним. При $k = 1$, наприклад, вони відображають коло (1.39), (1.40), тобто будуть рівняннями другого порядку. При $k = 2$ чотирьохпелюсткова роза $r = a \sin 2\varphi$ (рис.2.5, а) буде кривою шостого порядку. Якщо початок декартової системи координат сумістити з полюсом, а вісь Ox – з полярною віссю то її рівняння буде таким:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2. \quad (2.17)$$

Астроїда

Нехай маємо відрізок PL , довжина якого дорівнює a . Цей відрізок рухається так, що його кінці (точки P і L) весь час залишаються на осях координат.

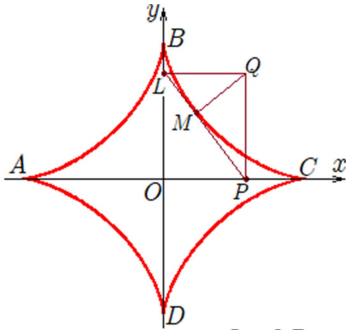


Рис.2.7

Точка Q знаходиться на перетині перпендикулярів, проведених із кінців відрізка PL до відповідних осей. Точка M є основою перпендикуляра, опущеного із точки Q на PL . Коли відрізок PL рухається – точка M описує лінію, яка називається астроїдою.

Рівняння астроїди в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t. \end{cases} \quad (2.18)$$

Точки $A(-a; 0)$, $B(0; a)$, $C(a; 0)$ і $D(0; -a)$ є вершинами астроїди.

Рівняння кривої в декартовій системі координат:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \quad (2.19)$$

Воно одержано вилученням параметра t з рівнянь (2.18).

Циклоїда

Нехай маємо коло радіусом $R = a$, центр якого знаходиться на осі Oy в точці $O'(0; a)$ (рис.2.8). Зафіксуємо на колі точку M ,

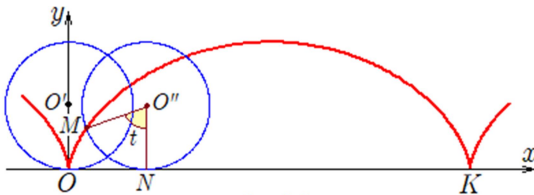


Рис.2.8

яка співпадає з початком координат. Коли коло буде котитись без ковзання вздовж вісі Ox , точка M опише лінію, яка називається циклоїдою.

В процесі руху радіус кола OO' займе нове положення MO'' .

Кут між вертикаллю NO'' та радіусом MO'' в поточному положенні приймається за параметр: $\angle MO''N = t$. Тоді параметричні рівняння циклоїди запишуться так:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in (-\infty; \infty). \end{cases} \quad (2.20)$$

Рівняння циклоїди в декартових координатах:

$$x + \sqrt{y(2a - y)} = a \operatorname{Arccos} \frac{a - y}{a}. \quad (2.21)$$

Циклоїда є періодична крива, $OK = 2\pi a$ – період, або базис циклоїди. Крива OMK називається першою аркою циклоїди, де параметр t змінюється від 0 до 2π .

Спіраль Архімеда

Розглянемо полярну систему координат та промінь, який виходить із полюса і рівномірно обертається навколо нього проти руху стрілки годинника. Довільна точка $M(r, \varphi)$, що лежить на промені і рівномірно рухається по ньому, описує лінію, яка називається спіраллю Архімеда (рис.2.9). Якщо промінь рухається проти руху стрілки годинника, то спіраль називається правою, за стрілкою годинника – лівою.

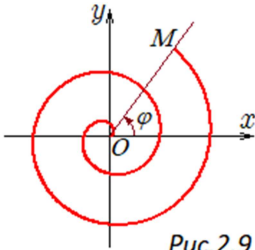


Рис.2.9

Рівняння спіралі Архімеда в полярних координатах:

$$r = a\varphi. \quad (2.22)$$

Тут a – параметр спіралі (переміщення точки $M(r, \varphi)$, вздовж променю при його обертанні на кут $\varphi = 1$ рад).

Гіперболічна спіраль

Рівняння гіперболічної спіралі в полярній системі координат має вигляд:

$$r = \frac{a}{\varphi}. \quad (2.23)$$

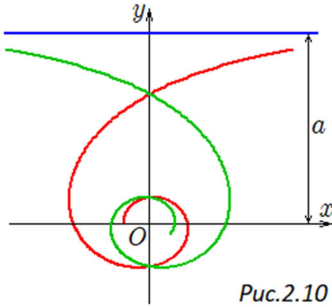


Рис.2.10

Гіперболічна спіраль має дві вітки, які симетрично розміщені відносно перпендикуляра опущеного на полярну вісь, основою якого є полюс. Пряма $y = a$ є асимптотою для кожної вітки, полюс називається асимптотичною точкою (рис.2.10).

Логарифмічна спіраль

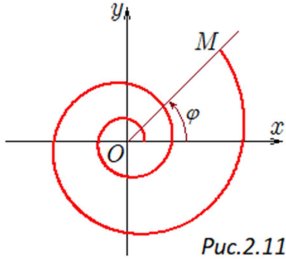


Рис.2.11

В полярній системі координат промінь OM рівномірно обертається навколо полюса (точка O – полюс). Точка $M(r, \varphi)$ рухається по променю, віддаляючись від полюса із швидкістю, яка пропорційна відстані OM . В цих умовах точка $M(r, \varphi)$ описує лінію, яка називається логарифмічною спіраллю (рис.2.11). Рівняння логарифмічної спіралі в полярній системі координат:

$$r = r_0 e^{\kappa \varphi}. \quad (2.24)$$

В цьому рівнянні κ – параметр спіралі, який дорівнює:

$$\kappa = \frac{\ln q}{2\pi}. \quad (2.25)$$

Величина q називається коефіцієнтом росту. Якщо $q > 1$ – спіраль називається правою. Коли $q = 1$ спіраль вироджується в коло.

III. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поверхні другого порядку – це ті, які описуються алгебраїчним рівнянням другого порядку. Найбільш загальним видом такого рівняння є:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a = 0. \quad (3.1)$$

По своїй структурі воно нагадує загальне рівняння кривої другого порядку (1.55) і відрізняється від нього лише наявністю додаткової змінної – z . Відмітимо зразу, що рівняння поверхонь другого порядку не обов'язково повинні включати змінну z . Розглянемо, наприклад, рівняння: 1) $Ax + By + C = 0$; 2) $Ax + By + Cz + D = 0$. Перше з них є загальним рівнянням прямої на площині, а друге – загальним рівнянням площини у просторі. Але, якщо віднести перше рівняння до просторових координат, то воно буде відображати не пряму, а частинний вид площини, паралельної вісі аплікату (Oz). Таким чином, щоб рівняння (3.1) відображало поверхню другого порядку, необхідно виконання такої умови: принаймні один з коефіцієнтів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ повинен бути відмінним від нуля. Очевидно, що вид поверхні буде залежати від значень вказаних коефіцієнтів. В цьому розділі розглянемо циліндричні поверхні, поверхні обертання та поверхні, які описуються рівняннями в канонічній формі.

3.1. Циліндри другого порядку

Нехай задана лінія L і пряма ℓ . Поверхня, що утворена із прямих, які перетинають дану лінію L і паралельні даній прямій ℓ , називається **циліндричною поверхнею**. Лінія L називається **напрямною** циліндричної поверхні, а прямі, з яких утворена циліндрична поверхня, називаються **твірними**.

Розглянемо циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в координатних площинах, а роль твірних грають вісі координат. Нехай лінія L лежить в координатній площині xOy і задається в цій площині рівнянням:

$$F(x, y) = 0, \quad (3.2)$$

а твірні – паралельні вісі Oz (рис.3.1).

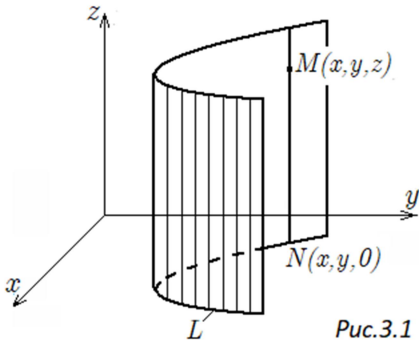


Рис.3.1

Точка $M(x, y, z)$ лежить на циліндричній поверхні, а MN – твірна. Точка $N(x, y, 0)$ лежить на напрямній L , тому її координати задовольняють рівняння (3.2). Але абсциса x і ордината y точки $M(x, y, z)$ такі ж, як і точки $N(x, y, 0)$, тому і координати точки $M(x, y, z)$ задовольняють це рівняння. Оскільки ж

точка $M(x, y, z)$ вибрана довільно на циліндричній поверхні, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки поверхні задовольняють рівняння (3.2). Це значить, що рівняння (3.2) і є рівнянням циліндричної поверхні (рис.3.1).

Отже, якщо в деякій координатній площині маємо рівняння напрямної, то воно в просторовій системі координат xuz описує циліндричну поверхню з твірною, паралельною тій осі, координата якої не входить в рівнянні напрямної.

Виходячи з цього, можемо легко записати рівняння циліндричної поверхні з твірною, паралельною вісі Oy

$$F(x, z) = 0 \quad (3.3)$$

та рівняння циліндричної поверхні з твірною, паралельною вісі Ox

$$F(y, z) = 0. \quad (3.4)$$

Далі розглянемо циліндричні поверхні (3.2), напрямними яких є криві другого порядку, а твірними – прямі паралельні вісі Oz .

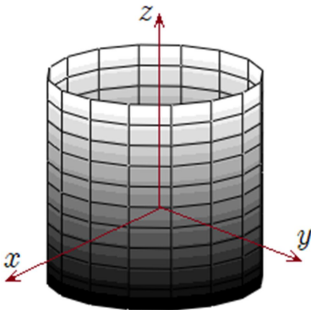


Рис.3.2

Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.5)$$

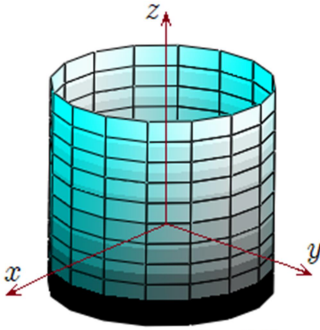


Рис.3.3

Круговий циліндр

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3.6)$$

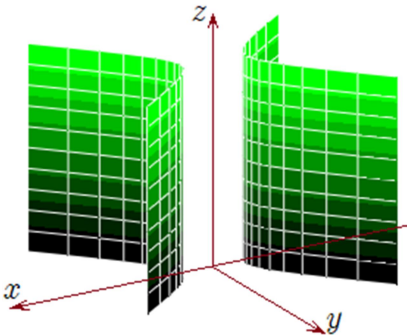


Рис.3.4

Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.7)$$

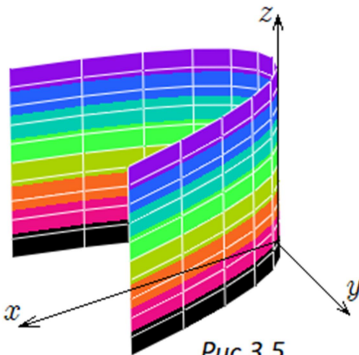


Рис.3.5

Параболічний циліндр

$$y^2 = 2px \quad (3.8)$$

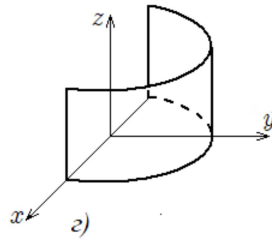
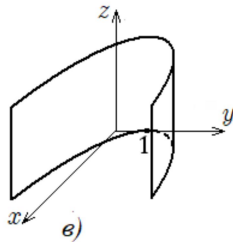
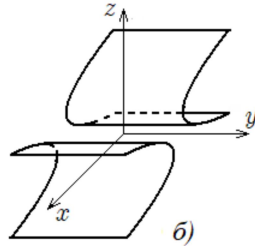
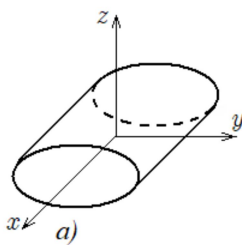
Циліндричні поверхні другого порядку з твірними паралельними осям Oy (3.3) і Ox (3.4) записуються аналогічно.

Приклад 20. Визначити, які поверхні (в системі координат xyz) задаються рівняннями:

$$a) \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad б) \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad з) y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$в) 4x - y^2 + 2y - 1 = 0;$$

Рівняння (а) має вид (3.4) і задає еліптичний циліндр з твірними, паралельними осі Ox . Напрямною є еліпс з півосями b і c (рис., а).



Рівняння (б) має вид (3.3) і задає гіперболічний циліндр, твірні якого паралельні осі Oy (рис., б). Напрямною є вітки гіперболи з дійсною піввіссю a і уявною $-c$.

Рівняння (в) задає у системі координат xyz параболічний циліндр. Щоб переконатися в цьому виконаємо деякі перетворення цього рівняння.

$$4x - y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 4x \Rightarrow (y - 1)^2 = 4x.$$

Отже, напрямною циліндра є парабола, вершина якої зсунута по осі Oy на одиницю і знаходиться в точці $O_1(0;1)$. Твірні цієї поверхні паралельні осі Oz (3.2).

Рівняння (з) записане не в канонічній формі. Тому для з'ясування виду поверхні треба по заданому рівнянню встановити область допустимих значень змінних (x, y) та

перетворити це рівняння до канонічного виду. Як показує рівняння (2), змінна y є невід'ємною величиною ($y \geq 0$), а максимального значення ($y = b$) вона набуває при $x = 0$, тобто: $0 \leq y \leq b$. Для змінної x з умови $a^2 - x^2 \geq 0$ випливає: $|x| \leq a$. Піднесемо тепер в рівнянні (2) ліву і праву частини до квадрата. Тоді, після простих перетворень, одержимо рівняння поверхні в канонічному виді:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння задає в області допустимих значень змінних (x, y) еліптичний циліндр, твірні якого паралельні осі Oz (3.2). Очевидно, що умові задачі відповідає лише та частина поверхні циліндра, для якої змінна y знаходиться в межах $0 \leq y \leq b$ (рис., 2).

3.2. Поверхні обертання другого порядку

Розглянемо в площині yOz деяку лінію l , яка задається рівнянням:

$$\begin{cases} F(Y, Z) = 0; \\ X = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

В формулі (3.9) змінні координати лінії l позначено великими літерами (X, Y, Z) .

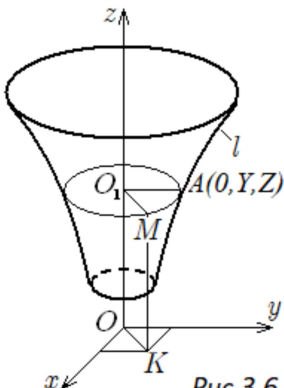


Рис.3.6

Знайдемо рівняння поверхні, яка утворена обертанням лінії l навколо осі Oz . Координати довільної точки, яка лежить на цій поверхні позначимо малими літерами x, y, z .

При обертанні лінії l навколо осі Oz кожна її точка описує коло (рис.3.6). Нехай точка $M(x, y, z)$ лежить на поверхні. Проведемо через точку $M(x, y, z)$ площину перпендикулярну осі Oz . Ця площина перетинає лінію l в точці $A(0, Y, Z)$, а вісь

Oz – в точці O_1 . Аплікати Z точок A і M однакові, отже $Z = z$.

Виразимо Y і Z через координати точки $M(x, y, z)$. Радіус кола, яке описується цією точкою дорівнює відстані від точки $M(x, y, z)$ до точки O_1 : $R = |O_1M| = \sqrt{x^2 + y^2}$. З іншого боку $R = |O_1A| = |Y|$, а значить $|Y| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Координати точки A задовольняють рівнянню лінії l : $F(Y, Z) = 0$. Підставляючи в це рівняння $Z = z$, $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, одержимо:

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (3.10)$$

Рівнянню (3.10) задовольняють координати довільної точки $M(x, y, z)$, що лежить на поверхні обертання, отже воно є рівнянням поверхні обертання лінії l навколо осі Oz .

З викладеного витікає наступне просте правило одержання рівняння поверхні обертання: в рівнянні лінії l залишається координата, навколо осі якої обертається лінія l , а друга координата замінюється на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.

Користуючись цим правилом можна легко одержати рівняння поверхонь при обертанні деякої лінії $F(x, y) = 0$, $Z = 0$, відповідно, навколо осі Ox або навколо осі Oy :

$$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \quad (3.11)$$

$$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (3.12)$$

П р и м і т к и. 1. Оскільки $x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$, то наявність, в рівнянні заданої поверхні, суми квадратів двох координат рівнозначно наявності в ньому квадратного кореня із цієї суми. Отже, щоб розпізнати поверхню обертання достатньо виявити у відповідному рівнянні вказану суму квадратів двох координат. Очевидно, що при цьому обертання має місце навколо тієї осі, координата якої не входить в цю суму. Таким чином, маємо рівняння поверхонь обертання

$$a) \Phi(x, y^2 + z^2) = 0; \quad б) \Phi(y, x^2 + z^2) = 0; \quad в) \Phi(z, x^2 + y^2) = 0 \quad (3.13)$$

навколо осі Ox – (а), осі Oy – (б) та осі Oz – (в). Така форма рівнянь використовується для поверхонь обертання другого порядку.

2. Для спрощення рівняння поверхонь другого порядку може знадобитися паралельне перенесення осей координат з точки $O(0;0;0)$ в точку $O'(a';b';c')$. При цьому, по аналогії зі співвідношеннями (1.50) формули перетворення просторових координат запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} X &= x - a'; \\ Y &= y - b'; \\ Z &= z - c'. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3. Поверхні обертання другого порядку утворюються при обертанні навколо координатних осей кривих другого порядку – кола, еліпса, гіперболи і параболи. Тому в назвах поверхонь відображаються назви цих кривих.

Побудову поверхонь обертання покажемо на прикладах, коли обертання відбувається навколо осі Oz . Як показано вище, координати кривої, яка обертається, зручно позначати великими літерами X, Y, Z , а поверхні обертання – малими: x, y, z .

Для одержання поверхні обертання слід до рівняння кривої в площині yOz ($F(Y, Z) = 0$) застосувати підстановку: $Y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Z = z$. Таким чином, послідовність побудови поверхонь обертання одна й та ж і може бути представлена наступною схемою.

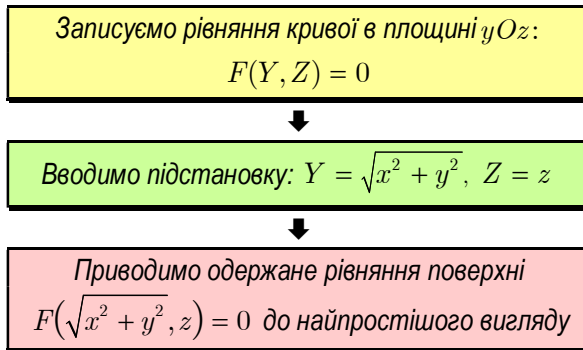


Рис.3.7

Скористаємося далі цією схемою, обираючи для обертання криві другого порядку.

Еліпсоїд обертання

В якості фігури обертання виберемо еліпс. Виконаємо перетворення за схемою на рис.3.7:

$$\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (3.15)$$

Одержано **рівняння (3.15) еліпсоїда обертання** (навколо осі Oz). Геометрична інтерпретація цих перетворень показана на рис.3.8.

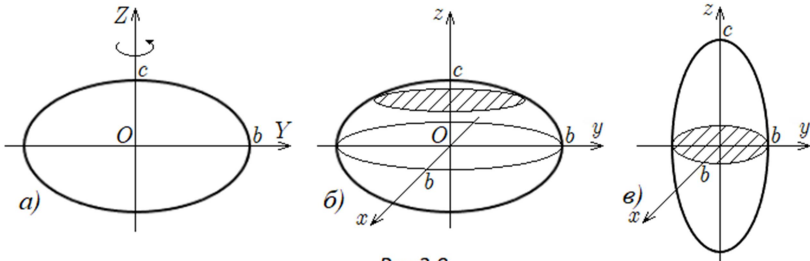


Рис.3.8

При $b > c$ еліпсоїд називається стиснутим (рис.3.8, б), а при $b < c$ (рис.3.8, в) – видовженим.

Однопорожнинний гіперboloїд обертання

Тут в якості фігури обертання приймається гіпербола.

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$Y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Z = z$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (3.16)$$

Рис.3.9

Одержано **рівняння (3.16) однопорожнинного гіперboloїда обертання** (навколо осі Oz).

Частина простору, яка охоплюється поверхнею, називають порожниною. Звідси доповнення назви поверхні обертання ознакою “однопорожнинний”.

Переріз гіперboloїда площиною xOy ($z = 0$) називається горловим перерізом гіперboloїда. Очевидно, що для цієї поверхні горловим перерізом є коло радіусом $R = b$.

Двохпорожнинний гіперboloїд обертання

В якості фігури обертання приймається гіпербола, спряжена до попередньої (рис.3.9).

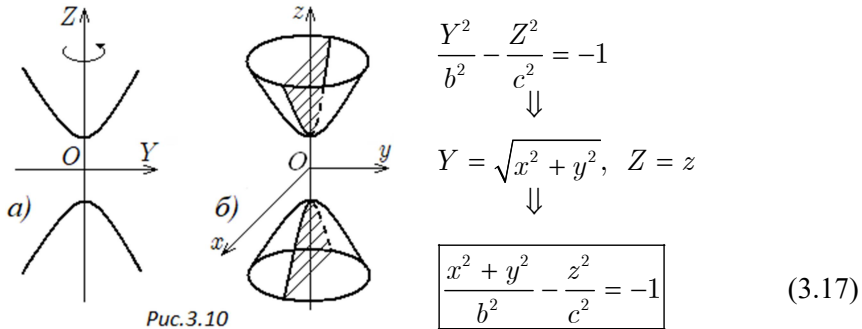


Рис.3.10

Одержано **рівняння (3.17) двухпорожнинного гіперboloїда обертання** (навколо осі Oz). Ця поверхня охоплює дві порожнини, що враховано в його назві.

Конус обертання

Дві асимптоти гіперболи можна записати одним рівнянням:

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow Z = \pm \frac{c}{b} Y.$$

Виберемо ці асимптоти в якості фігури обертання.

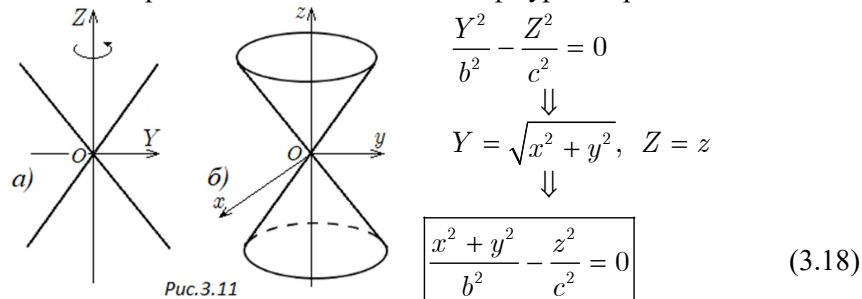


Рис.3.11

Одержано **рівняння (3.18) конуса обертання** (навколо осі Oz). Його ще називають **круговим конусом**.

Параболоїд обертання

Для побудови цієї поверхні використовується парабола.

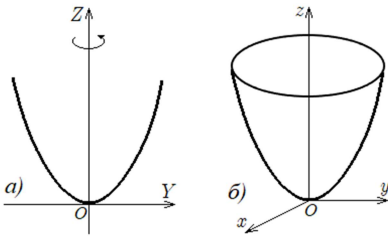


Рис.3.12

$$Y^2 = 2pZ$$

↓

$$Y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Z = z$$

↓

$$\boxed{x^2 + y^2 = 2pz} \quad (3.19)$$

Рівняння (3.19) і є **рівнянням параболоїда обертання** (навколо осі Oz).

Сфера

При $b=c=R$ еліпсоїд обертання (3.15) вироджується в сферу:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2} \quad (3.20)$$

Оскільки в цьому рівнянні є суми $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$, $y^2 + z^2$, то сферу можна розглядати як поверхню обертання і навколо осі Oz , і навколо осі Oy , і навколо осі Ox (3.13).

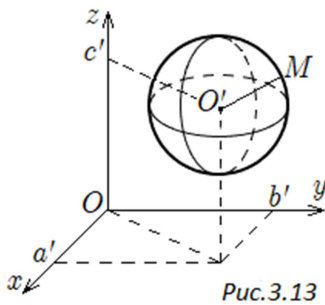


Рис.3.13

Рівняння (3.20) є **рівнянням сфери з центром на початку координат**.

Сферу природно визначити за основною її властивістю. Отже, **сфера** – це геометричне місце точок простору рівновіддалених від деякої точки, яка називається центром сфери. Відстань між будь-якою точкою сфери і її центром

називається радіусом сфери.

Нехай, тепер, центр сфери розташовано в точці $O'(a', b', c')$, а $M(x, y, z)$ – довільна точка поверхні сфери (рис.3.13). Тоді $(OM)^2 = R^2$. Використовуючи формулу для відстані між двома точками, одержимо:

$$\boxed{(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 = R^2} \quad (3.21)$$

Це є **рівняння сфери з центром в точці $O'(a', b', c')$** .

Примітки. 1. Рівняння (3.21) можна легко одержати з найпростішого рівняння сфери (3.20), залучаючи формули перетворення координат (3.14). Це стосується також і всіх інших рівнянь поверхонь обертання, розглянутих вище. Тому рівняння вказаних поверхонь для випадку, коли початок координат перенесено в точку $O'(a', b', c')$ не приводимо.

2. Розкривши дужки в рівнянні (3.21), запишемо його у вигляді: $x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + a'^2 + b'^2 + c'^2 - R^2 = 0$. Отже, якщо в алгебраїчному рівнянні другого порядку відсутні доданки виду xy, xz, yz , а коефіцієнти при x^2, y^2, z^2 однакові, то воно може відображати сферу. Незавжди зрозуміти, що, коли коефіцієнти при x^2, y^2, z^2 різні, але з однаковими знаками – то це є еліпсоїд, а якщо з різними знаками – то гіперолоїд чи конус. В залежності від значень інших коефіцієнтів рівняння може відображати пару площин, точку або уявні геометричні об'єкти.

3. Будь-яка площина, проведена через вісь обертання, є площиною симетрії поверхні. Якщо, наприклад, віссю обертання є вісь аплікату (Oz), то площина $Ax + By = 0$ буде віссю симетрії при довільних значеннях коефіцієнтів A, B , які не дорівнюють одночасно нулю. Наприклад, якщо $A=0$, то це буде координатна площина $xOz (y=0)$, а якщо $B=0$ – то площина $yOz (x=0)$. Для, розглянутих вище, еліпсоїда, гіперолоїдів і конуса площина $xOy (z=0)$ теж є площиною симетрії. Для сфери будь-яка діаметральна площина є площиною симетрії. Наприклад, для сфери з центром на початку координат площина виду $Ax + By + Cz = 0$ буде площиною симетрії, якщо не всі коефіцієнти A, B, C дорівнюють одночасно нулю.

Приклад 21. Знайти центр та радіус сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 7y + 2,5 = 0.$$

Виділимо в заданому рівнянні повні квадрати по x та по y .

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 7y + 2,5 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \\ + y^2 - 2y \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + z^2 + 2,5 = 0$$

Підкреслені вирази є повними квадратами, що дозволяє записати:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + z^2 - \frac{9}{4} - \frac{49}{4} + \frac{10}{4} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + z^2 &= 12. \end{aligned}$$

Остаточнo маємо:

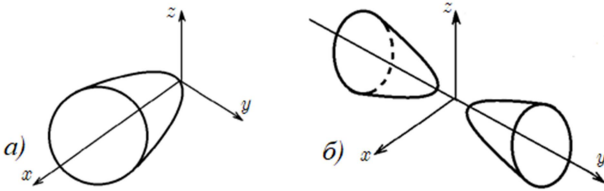
$$\boxed{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + z^2 = (2\sqrt{3})^2}$$

Порівнюючи цей результат з рівнянням (3.21), приходимо до висновку: центр сфери лежить в точці $O'(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 0)$, а її радіус дорівнює $R = 2\sqrt{3}$.

Приклад 22. Назвати та побудувати поверхні, які задані рівняннями:

a) $x = y^2 + z^2$; б) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{5^2} = -1$.

Рівняння (a) включає вираз $y^2 + z^2$, отже це рівняння поверхні обертання навколо осі Ox (3.13). Рівняння (3.19) показує, що це є параболоїд обертання з фокальним параметром $p = \frac{1}{2}$ (рис. a).



Рівняння (б) перепишемо у вигляді:

$$\frac{x^2 + z^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1.$$

Оскільки рівняння включає суму $x^2 + z^2$ – воно відображає поверхню обертання навколо осі Oy (3.13). Порівнюючи його зі співвідношенням (3.17), бачимо, що це є рівняння двохповерхнинного гіперболоїда обертання.

3.3. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Поверхні обертання, які, як відомо, при перетині площинами, перпендикулярними вісі обертання, дають коло, є частинними випадками поверхонь більш загального виду, при перетині яких відповідними площинами виникають еліпси. Рівняння таких поверхонь називають канонічними.

Візьмемо, наприклад, еліпсоїд обертання (3.15). З його побудови витікає, що перетин вертикальними координатними площинами xOz і yOz дає, відповідно, еліпси

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + z^2}{b^2 + c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2 + z^2}{b^2 + c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases},$$

а перетин горизонтальною координатною площиною xOy – коло:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Щоб рівняння еліпсоїда було канонічним, треба щоб його перетин площиною xOy теж давав еліпс. Легко бачити, що цього можна досягти, якщо в еліпсоїді (3.15) замінити

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} \quad \text{на} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (3.22)$$

$$\text{Дійсно:} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

тобто в перетині такого еліпсоїда всіма координатними площинами (в тому числі і площиною xOy) маємо еліпси. Отже, канонічне рівняння еліпсоїда має вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

На основі аналогічних міркувань, з використанням замін (3.22) можна записати канонічні рівняння гіперболоїдів (3.16), (3.17) і конуса (3.18).

Легко бачити, що від рівняння параболоїда обертання (3.19) до канонічного рівняння можна перейти наступною заміною:

$$\frac{x^2 + y^2}{p} \text{ на } \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \text{ що дає } \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (3.23)$$

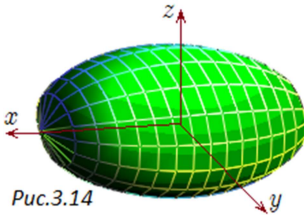
Тоді перетин параболоїда (3.23) площиною, паралельною xOy дає еліпс. Наприклад:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Отже, при перетині параболоїда (3.23) площиною $z = 1/2$ замість кола одержано еліпс з півосями \sqrt{p} та \sqrt{q} . Такий параболоїд називають еліптичним.

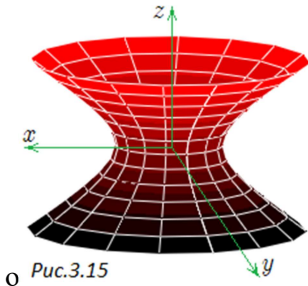
Ще одне канонічне рівняння параболоїда одержують заміною знака «+» на «-» у виразі (3.23). Такий параболоїд називають гіперболічним.

Далі приведемо канонічні рівняння, вказаних вище поверхонь, разом з їх графіками.



Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.24)$$



Однорожнинний гіперолоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.25)$$

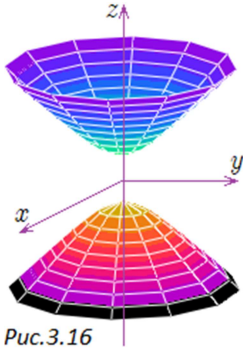


Рис.3.16

Двохпорожнинний гіперолоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3.26)$$

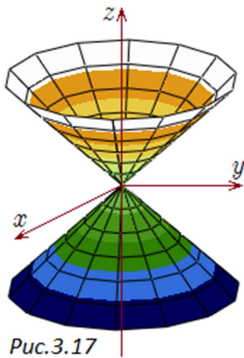


Рис.3.17

Еліптичний конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.27)$$

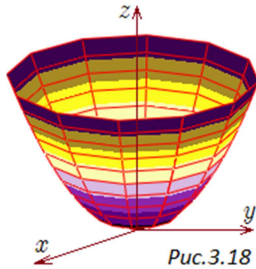


Рис.3.18

Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (3.28)$$

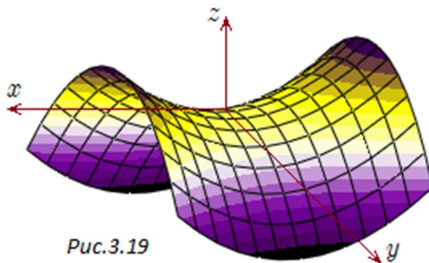


Рис.3.19

Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (3.29)$$

3.4. Дослідження форми поверхонь методом перерізів

Майже всі наведені поверхні, а саме: еліпсоїд, однопорожнинний та двохпорожнинний гіперболоїди, еліптичний конус та еліптичний параболоїд одержані, як наслідок поверхонь обертання. В результаті цього форми відповідних типів поверхонь дуже близькі. Але з цього списку випадає остання з розглянутих поверхонь – гіперболічний параболоїд, який ніяк не зв'язаний з поверхнями обертання. Тому уявити форму цієї поверхні без допоміжних досліджень досить непросто. Ці дослідження можна проводити методом перерізів, елементи якого зустрічалися в попередньому п.3.3. Метод полягає в тому, що досліджувану поверхню перетинають площинами, перпендикулярними осям координат. Далі по одержаним лініям перетину складають уявлення про форму поверхні.

Для кращого оволодіння методом перерізів спочатку застосуємо його до більш простішої поверхні – еліптичного параболоїда, зображеного на рис.3.18.

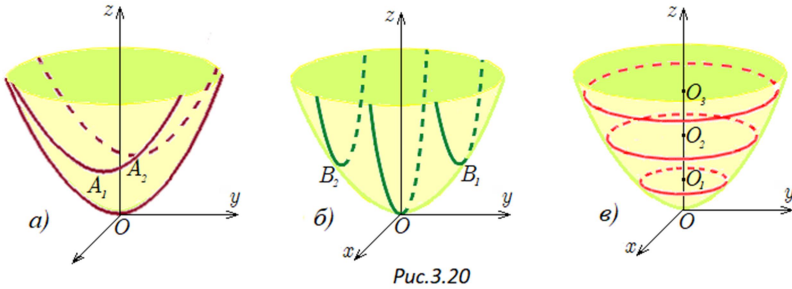


Рис.3.20

1. Перетин еліптичного параболоїда (3.28) площиною, перпендикулярною вісі Ox : $x = a$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{q} = 2z - \frac{a^2}{p} \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2q \left(z - \frac{a^2}{2p} \right) \\ x = a \end{cases}$$

В перерізі одержано параболи з вершинами в точках $A(a; 0; \frac{a^2}{2p})$, піднятих вгору вздовж осі Oz на величину $\frac{a^2}{2p}$. Знак “+” перед змінною z в правій частині рівняння вказує на те, що вітки параболи направлені в додатному напрямку осі Oz . На рис.3.20(а) вершини A_1 відповідають додатному значенні параметра a ($a > 0$), а вершини A_2 – від'ємному ($a < 0$).

В координатній площині yOz коли $x = a = 0$ маємо параболу $y^2 = 2qz$, вершина якої співпадає з початком координат $O(0; 0; 0)$.

2. Перетин еліптичного параболоїда площиною, перпендикулярною вісі Oy : $y = b$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} = 2z - \frac{b^2}{q} \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2p \left(z - \frac{b^2}{2q} \right) \\ y = b \end{cases}$$

В перерізі одержано параболу з вершинами в точках $B(0; b; \frac{b^2}{2q})$, піднятих вгору вздовж осі Oz на величину $\frac{b^2}{2q}$ і вітками направленими в додатному напрямку осі Oz . На рис.3.20(б) вершини B_1 відповідають додатному значенні параметра b , а вершини B_2 – від'ємному. В координатній площині xOz коли $y = b = 0$ маємо параболу $x^2 = 2pz$, вершина якої співпадає з початком координат.

3. Перетин еліптичного параболоїда площиною, перпендикулярною вісі Oz : $z = c$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2c \\ z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2pc} + \frac{y^2}{2qc} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

При $c > 0$ в перерізі маємо еліпс з півосями $\sqrt{2pc}$ і $\sqrt{2qc}$. Із збільшенням висоти c перерізу півосі еліпса теж збільшуються. На рис.3.20(в) зображені еліпси з центрами в точках $O_1(0; 0; c_1)$, $O_2(0; 0; c_2)$, $O_3(0; 0; c_3)$ при умові, що $0 < c_1 < c_2 < c_3$.

При перерізі параболоїда (3.28) координатною площиною xOy ($z = c = 0$) одержуємо:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Отже, в цьому випадку в перерізі маємо лише одну точку $O(0; 0; 0)$ – початок координат, так як одержаній системі задовольняють лише значення: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

При $c < 0$ ($z = c < 0$), враховуючи, що $c = -|c|$, можна записати:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2p|c|} + \frac{y^2}{2q|c|} = -1 \\ z = c \end{cases}.$$

Одержано рівняння уявного еліпса, тобто в перерізі еліпсоїда в цьому випадку немає жодної дійсної точки.

Якщо сумістити одержані криві (рис.3.20 *a, б, в*) в одній і тій же системі координат, одержимо каркас поверхні еліптичного параболоїда, який дає достатньо повне уявлення про цю поверхню.

П р и м і т к а. Вище було встановлено, що лініями перетину поверхні площинами, перпендикулярними двом координатним осям Ox і Oy , є параболи, а в перетині поверхні площиною, перпендикулярною третій осі Oz , виявлено еліпс. Тобто, при одному й тому ж числі перетинів відносно кожної осі виникає вдвічі більше парабол, ніж еліпсів. Тому цю поверхню назвали параболоїдом. Підкреслюючи, що в перетині є також і еліпси, назву поверхні доповнили до: "еліптичний параболоїд". Цей принцип складання назви застосовується і до інших поверхонь другого порядку.

Застосуємо тепер метод перерізів для дослідження форми гіперболічного параболоїда (рис.3.21). В цьому дослідженні, виходячи з назви поверхні, логічно очікувати багато збігів з попереднім, тому деякі схожі позначення на вказаному рисунку можна опустити.

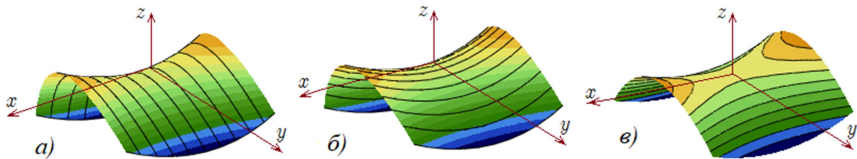


Рис.3.21

1. Перетин гіперболічного параболоїда (3.29) площиною, перпендикулярною вісі Ox : $x = a$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -2q \left(z - \frac{a^2}{2p} \right) \\ x = a \end{cases}.$$

В перерізі одержано параболи з вершинами в точках з координатами $(a; 0; \frac{a^2}{2p})$. Вершини підняті вгору вздовж осі Oz на величину $\frac{a^2}{2p}$. Для параболи $y^2 = -2qz$, яка розміщена в координатній площині yOz ($x = a = 0$), вершиною служить початок координат. Знак “-” перед змінною z в правій частині рівняння вказує на те, що вітки параболи направлені у від’ємному напрямку осі Oz (рис.3.21, а).

2. Перетин гіперболічного параболоїда площиною, перпендикулярною вісі Oy : $y = b$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2p \left(z + \frac{b^2}{2q} \right) \\ y = b \end{cases}$$

В перерізі одержано параболи з вершинами в точках з координатами $(0; b; -\frac{b^2}{2q})$. Вершини опущені вздовж осі Oz на величину $\frac{b^2}{2q}$, а їх вітки направлені в додатному напрямку цієї осі. В координатній площині xOz , коли $y = b = 0$, маємо параболу $x^2 = 2pz$, вершина якої співпадає з початком координат (рис.3.21, б).

3. Перетин гіперболічного параболоїда площиною, перпендикулярною вісі Oz ($z = c$ при $c > 0$).

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2pc} - \frac{y^2}{2qc} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

В перетині – гіперболи з вершинами в точках $(\sqrt{2pc}; 0; c)$ та $(-\sqrt{2pc}; 0; c)$ і півосями $\sqrt{2pc}$, $\sqrt{2qc}$. При цьому вісь Ox для гіпербол – дійсна, а вісь Oy – уявна (на рис.3.21(в) ці гіперболи зображені на світлокоричневому фоні).

Перетин площиною $z = c$ при $c < 0$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2p|c|} - \frac{y^2}{2q|c|} = -1 \\ z = c < 0 \end{cases}$$

Це спряжені с попередніми гіперболи з вершинами в точках $(0; \sqrt{2qc}; -|c|)$ та $(0; -\sqrt{2qc}; -|c|)$ і півосями $\sqrt{2p|c|}$, $\sqrt{2q|c|}$. Вісь Ox для гіпербол – уявна, а вісь Oy – дійсна (рис.3.21(г) – зелений фон).

Перетин координатною площиною xOy ($z = 0$).

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \sqrt{\frac{q}{p}}x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Як бачимо, перетин гіперболічного параболоїда координатною площиною xOy дає дві прямі, що перетинаються і проходять через початок координат. Вони є асимптотами для, виявлених вище, гіпербол.

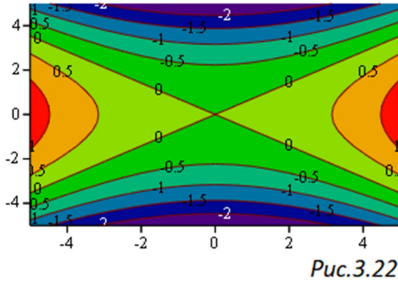


Рис.3.22

На рис.3.22 показані лінії рівня для гіперболічного параболоїда з параметрами: $p = 10$; $q = 5$. Це ті ж лінії перетину параболоїда площинами $z = c$, але спроектовані на координатну площину xOy .

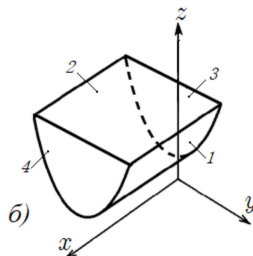
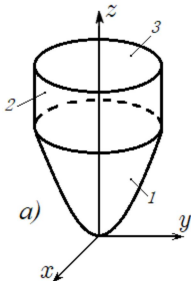
Для зміни параметра c вибрано крок $\Delta c = 0,5$.

Рисунок наглядно показує, що в перетині гіперболічного параболоїда площиною xOy містяться дві прямі, а в перетині іншими паралельними площинами – гіперболи.

Проведені дослідження детально розкривають форму поверхні гіперболічного параболоїда. Через схожість цієї поверхні з сідлом їздових коней (рис.3.19) її також називають "сідлом".

Приклад 23. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

- а) 1. $z = x^2 + y^2$, 2. $x^2 + y^2 = 16$, 3. $z = 18$;
 б) 1. $z = y^2 + 2$, 2. $z = 8$, 3. $x = 0$, 4. $x = 9$.



В прикладі (а): $z = x^2 + y^2$ – параболоїд обертання, вісь симетрії якого співпадає з віссю Oz ; $x^2 + y^2 = 16$ – круговий циліндр з тією ж віссю симетрії; $z = 18$ – площина, перпендикулярна вісі Oz . Очевидно, що параболоїд і циліндр перетинаються по колу такого ж радіуса, як і у циліндра: $R = 4$. Але, перш ніж будувати тіло, треба встановити на якій висоті знаходиться вказане коло. Розглядаючи рівняння параболоїда (1) і циліндра (2), як систему, легко знаходимо: $z = 16$. Перетин площини (3) з циліндром – таке ж коло тільки розміщене на висоті $z = 18$. Тіло побудовано на рисунку (а).

В прикладі (б): $z = y^2 + 2$ – параболічний циліндр (1) з твірними, паралельними вісі Ox , який піднятий вгору вздовж вісі Oz на дві одиниці (рис. б); $z = 8$ – площина (2), перпендикулярна вісі Oz ; $x = 0$ – координатна площина (3) yOz , а $x = 9$ – паралельна їй площина (4), розташована від неї на відстані 9 одиниць.

Приклад 24. Знайти точки перетину еліпсоїда і прямої:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}.$$

Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 3(t+1) \\ y = -2(3t-2) \\ z = 2(2t-1) \end{cases}.$$

Підставимо записані вирази в рівняння еліпсоїда і знайдемо параметр t :

$$(t+1)^2 + (3t-2)^2 + 4(2t-1)^2 = 9 \Rightarrow 26t^2 - 26t = 0 \Rightarrow 26t(t-1) = 0.$$

Таким чином: $t_1 = 0$; $t_2 = 1$.

Підставивши значення t в параметричні рівняння прямої, послідовно одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = 3(t_1+1) \\ y_1 = -2(3t_1-2) \\ z_1 = 2(2t_1-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \\ z_1 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 3(t_2+1) \\ y_2 = -2(3t_2-2) \\ z_2 = 2(2t_2-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = -2 \\ z_2 = 2 \end{cases}.$$

Отже, маємо дві точки перетину: $A(3; 4; -2)$ і $B(6; -2; 2)$.

Приклад 25. Визначити, яка поверхня представлена заданим рівнянням та знайти її центр:

$$4x^2 + 16y^2 - z^2 + 16x + 96y - 2z + 175 = 0$$

Виділимо повні квадрати по x , y , z :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 16x + 16y^2 + 96y - z^2 - 2z + 175 = 0 &\Rightarrow 4(\underline{x^2 + 4x + 4} - 4) + \\ + 16(\underline{y^2 + 6y + 9} - 9) - (\underline{z^2 + 2z + 1} - 1) + 175 = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 4(x + 2)^2 - 16 + 16(y + 3)^2 - 144 - (z + 1)^2 + 1 + 175 = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 4(x + 2)^2 + 16(y + 3)^2 - (z + 1)^2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

Останнє рівняння перепишемо у вигляді:

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{1} - \frac{(z + 1)^2}{16} = -1$$

Поверхнею є двохпорожнинний гіперболоїд, центр якого знаходиться в точці з координатами $(-2; -3; -1)$.

3.5. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Як виявилось, на криволінійній поверхні гіперболоїчного параболоїда розміщені дві прямі (рис.3.22). В зв'язку з цим виникають наступні запитання. По-перше: чи знайдуться інші поверхні другого порядку, які включають прямі лінії? По-друге: скільки прямих можна розмістити на цих поверхнях?

Можна вважати, що одна з таких поверхонь нам вже відома – круговий конус. Нагадаємо, що круговий конус можна одержати обертанням навколо однієї з координатних осей саме прямих ліній – асимптот гіперболи (рис.3.11). Таким чином, якщо з'єднати прямою лінією будь-яку точку $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхні кругового конуса з початком координат $O(0; 0; 0)$, то вона буде цілком належати цій поверхні.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, має вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.30)$$

Підставимо сюди координати точок $O(0; 0; 0)$ і $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - 0}{x_0 - 0} = \frac{y - 0}{y_0 - 0} = \frac{z - 0}{z_0 - 0}.$$

Враховуючи, що точка M вибрана довільно, знайдено рівняння сімейства прямих, які лежать на поверхні кругового конуса:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \quad (3.31)$$

Нехай тепер точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежить на поверхні еліптичного конуса (3.27). Тоді має місце співвідношення:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0. \quad (3.32)$$

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і початок координат $O(0; 0; 0)$ в параметричному виді:

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases} \quad (3.33)$$

Координати будь-якої точки цієї прямої задаються рівнянням (3.33) при певному значенні параметра t . Покажемо, що всі точки вказаної прямої задовольняють рівнянню еліптичного конуса. Для цього підставимо рівняння (3.33) в рівняння еліптичного конуса:

$$\frac{(x_0 t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 t)^2}{b^2} - \frac{(z_0 t)^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{x_0^2 t^2}{a^2} + \frac{y_0^2 t^2}{b^2} - \frac{z_0^2 t^2}{c^2} = 0. \quad (3.34)$$

Скоротивши одержаний вираз на t^2 , одержимо співвідношення (3.32), яке є вірним. Отже, координати всіх точок прямої задовольняють рівнянню еліптичного конуса (лежать на його поверхні), а рівняння (3.31) або (3.33) описують сімейство прямих на поверхні кругового чи еліптичного конуса, якщо точка $M(x_0, y_0, z_0)$ довільно вибирається на цій поверхні.

Розглянемо детальніше поверхню гіперболічного параболоїда (3.29). Прийемо, що $2p = a^2$ і $2q = b^2$. Тоді рівняння (3.29) прийме вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \quad (3.35)$$

Ліва частина цього рівняння є різницею квадратів двох чисел. На основі відомої формули скороченого множення будемо мати:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z. \quad (3.36)$$

Наслідком цього співвідношення є дві системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = z \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \end{cases}. \quad (3.37)$$

Дійсно, перемноживши верхнє і нижнє рівняння кожної системи, одержимо вираз (3.36), який рівносильний рівнянню (3.35). Отже, якщо системі (одній чи другій) задовольняють координати деяких точок, то вони задовольняють, також, і рівнянню гіперболічного параболоїда (3.35). Але кожна з цих систем задає множину точок прямої лінії (у вигляді перетину двох площин), тому обидві прямі належать поверхні параболоїда (3.35). Очевидно, що це стосується і наступних аналогічних систем:

$$\left[\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \mu \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z \\ \frac{1}{\mu} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \right]. \quad (3.38)$$

При різних значеннях параметрів λ і μ ці системи задають різні прямі, тобто описують різні сімейства прямих ліній, які лежать на поверхні гіперболічного параболоїда, що ілюструється наступним рисунком.

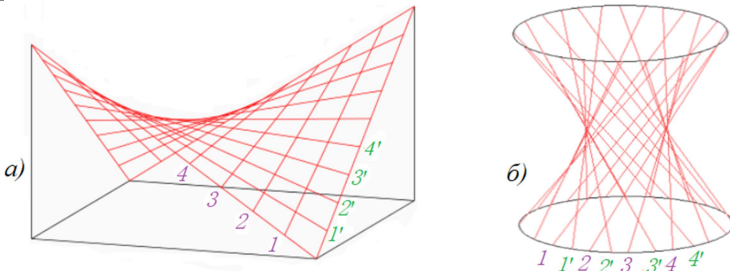


Рис.3.23

На рисунку (рис.3.23, а) одне сімейство прямих пронумеровано числами 1, 2, 3, 4, ..., а друге – тими ж числами зі штрихом.

Таким чином, можна говорити, що поверхня гіперболічного параболоїда складається з двохпараметричного сімейства прямих ліній.

Рівняння однопорожнинного гіперболічного параболоїда (3.25) переписемо у вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}. \quad (3.39)$$

Наслідком цього рівняння є сукупність двох систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b} \right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{b} \right) \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b} \right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{b} \right) \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Як і у попередньому випадку маємо двохпараметричне сімейство прямих, але тут воно утворює поверхню однопорожнинного гіперболічного параболоїда (рис.3.23, б).

Знайдені вище сімейства прямих називають прямолінійними твірними кривих другого порядку.

Можливість побудови криволінійних поверхонь за допомогою прямолінійних балок привернула увагу інженерів-конструкторів, які використали цю особливість для зведення різних споруд (рис.3.24).

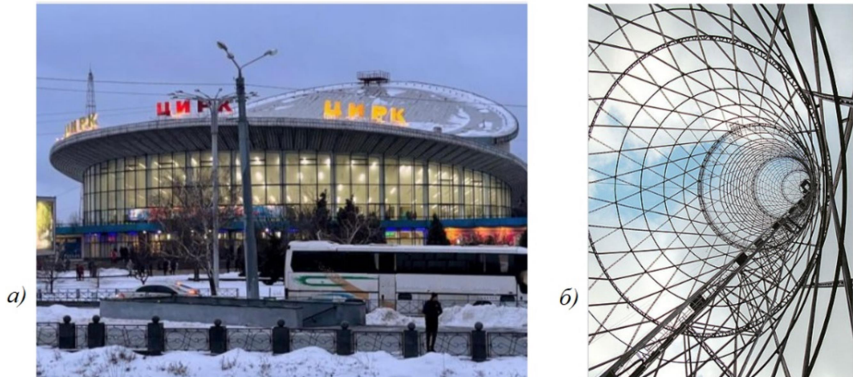


Рис.3.24

На рис.3.24(а) показана будівля цирку, дах якого має форму гіперболічного параболоїда, а на рис.3.24(б) – вежа, яка складена з секцій у формі однопорожнинного гіперболічного параболоїда (вид зсередини).

Ці споруди об'єднує те, що вони є міцними, надійними, мають невисоку металоємність та чинять незначний тиск на опори. Не дивно, що будівлі та вежі аналогічної конструкції різного призначення мають широке застосування.

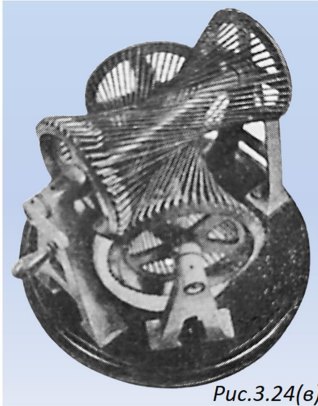
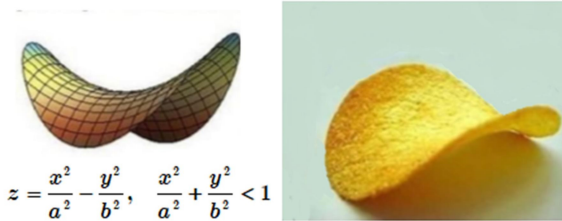


Рис.3.24(в)

На рис.3.24(в) зображено зубчасте зчеплення для передачі обертального руху між двома непаралельними валами. Як бачимо, зубчасті колеса виконані у формі однопорожнинного гіперболоїда. Це дає можливість щільного контакту зубців зразу по всій ширині коліс вздовж прямої лінії, яка є спільною твірною для них обох. В результаті зменшено контактні напруження, підвищена зносостійкість, забезпечена кінематична

стабільність передачі (рух між валами передається плавно без збудження нерівномірності обертання).

Наведеними прикладами застосування поверхонь другого порядку не закінчується. Їх можна зустріти в різних галузях.



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Рис.3.25

Застосування гіперболоїчного параболоїда в харчовій промисловості показано на рис.3.25. Чіпси такої форми мають привабливий вигляд і більшу жорсткість при руйнуванні, тому при транспортуванні не розтріскуються. Записана на рисунку нерівність вказує на те, що чіпси можуть бути розміщені всередині відповідного еліптичного циліндра.

Приклад 26. Задано точку $A(2;3;3)$, що лежить на поверхні гіперболічного параболоїда $z = x^2 - y^2/9$. Знайти канонічні рівняння прямолінійних твірних цього параболоїда, які проходять через задану точку.

Запишемо рівняння сімейств прямих (3.38), що належать поверхні параболоїда з врахуванням того, що в нашому випадку $a = 1, b = 3$:

$$a) \begin{cases} \lambda \left(x - \frac{y}{3} \right) = z \\ \frac{1}{\lambda} \left(x + \frac{y}{3} \right) = 1 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} \mu \left(x + \frac{y}{3} \right) = z \\ \frac{1}{\mu} \left(x - \frac{y}{3} \right) = 1 \end{cases}.$$

Розглянемо, спочатку систему (а). Очевидно, що обом рівнянням системи задовольняють координати точки A . Це дозволяє знайти параметр λ з будь-якого із рівнянь. Наприклад, з другого рівняння маємо:

$$\lambda = x + \frac{y}{3} = 2 + \frac{3}{3} = 3.$$

Тепер система (а) запишеться так:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 3x + y = 9 \end{cases}.$$

Це є рівняння однієї із прямих, що належать поверхні параболоїда, записане у виді перетину двох площин. Необхідно ще перетворити його до канонічного виду:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{l}.$$

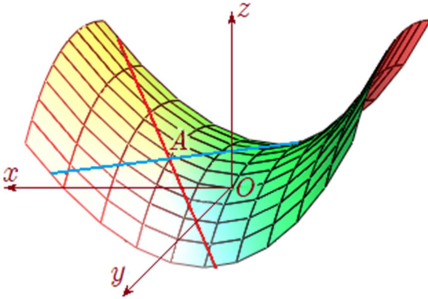
Тут x_0, y_0, z_0 – координати точки, через яку проходить пряма, а $\vec{S} = (n; m; l)$ – напрямний вектор прямої.

В якості величин x_0, y_0, z_0 можна взяти координати точки A . Направний вектор \vec{S} знайдемо, як векторний добуток векторів $\vec{N}_1 = (3; -1; -1)$ і $\vec{N}_2 = (3; 1; 0)$, які перпендикулярні до відповідних площин системи.

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Отже, для першої прямої приймаємо: $\vec{S}_1 = \vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$. Її рівняння в канонічному виді:

$$\boxed{\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-3}{6}}.$$



На рисунку ця лінія відмічена червоним кольором.

Далі виконаємо такі ж обчислення по відношенню до системи (б).

$$\begin{cases} \mu(x+y/3) = z \\ (1/\mu)(x-y/3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \mu = x - \frac{y}{3} = 2 - \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ 3x - y = 3 \end{cases}.$$

$$\vec{n}_1 = (3; 1; -3), \quad \vec{n}_2 = (3; -1; 0).$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -3\vec{i} - 9\vec{j} - 6\vec{k}.$$

З метою спрощення за напрямний вектор для другої прямої приймемо вектор, колінеарний знайденому: $\vec{S}_2 = (1; 3; 2)$. Тоді канонічним рівнянням цієї прямої буде:

$$\boxed{\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-3}{2}}.$$

На приведеному рисунку вона зображена голубим кольором.

Приклад 27. Через кожену точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві твірні, які перетинаються. Знайти максимальне значення гострого кута між вказаними твірними, якщо гіперболоїд задано рівнянням: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Для однопорожнинного гіперболоїда сімейства твірних з параметрами λ і μ задаються рівняннями (3.40). Враховуючи, що в нашому випадку $a = b = c = 1$, ці рівняння перетворюються до вигляду:

$$a) \begin{cases} x - z = \lambda(1 - y) \\ x + z = \frac{1}{\lambda}(1 + y) \end{cases}; \quad б) \begin{cases} x - z = \mu(1 + y) \\ x + z = \frac{1}{\mu}(1 - y) \end{cases}.$$

Запишемо рівняння площин системи (а) в загальному виді, що дає можливість легко визначити вектори \vec{N}_1 і \vec{N}_2 , перпендикулярні, відповідно, до цих площин:

$$\begin{cases} x + \lambda y - z - \lambda = 0 \\ x - \frac{1}{\lambda} y + z - \frac{1}{\lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{N}_1 = (1; \lambda; -1), \quad \vec{N}_2 = \left(1; -\frac{1}{\lambda}; 1\right).$$

Обчислюємо напрямний вектор прямих, одного з сімейств:

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -\frac{1}{\lambda} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{1}{\lambda} & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -\frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \vec{i} - 2\vec{j} - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \vec{k}. \end{aligned}$$

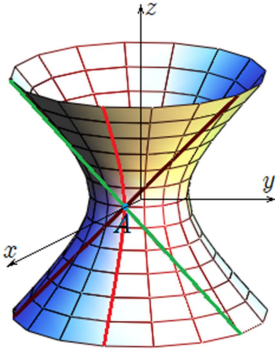
Аналогічно, виходячи з рівняння (б), знаходимо напрямний вектор прямих другого сімейства.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - \mu y - z - \mu = 0 \\ x + \frac{1}{\mu} y + z - \frac{1}{\mu} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; -\mu; -1), \quad \vec{n}_2 = \left(1; \frac{1}{\mu}; 1\right). \\ \vec{S}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -\mu & -1 \\ 1 & \frac{1}{\mu} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mu & -1 \\ \frac{1}{\mu} & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & \frac{1}{\mu} \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= \left(\frac{1}{\mu} - \mu\right) \vec{i} - 2\vec{j} + \left(\frac{1}{\mu} + \mu\right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Залишимо для прямолінійних твірних позначення змінних малими літерами, а для гіперboloїда введем відповідні великі:

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1.$$

Відмітимо, що задане рівняння визначає однопорожнинний гіперboloїд обертання, тому його перетин вертикальними площинами, які проходять через вісь Oz , дає однакову гіперболу. В зв'язку з цим дослідження величини кута між твірними достатньо провести не на всій поверхні, а лише на одній вітці вказаної гіперболи.



Виберемо для цього, наприклад, вітку:

$$\begin{cases} X^2 - Z^2 = 1 \\ Y = 0 \\ X > 0 \end{cases}.$$

Вона показана на рисунку червоною лінією. Візьмемо на цій гіперболі довільну точку на деякій висоті $Z = h$.

Очевидно, що ця точка має координати $(\sqrt{1+h^2}; 0; h)$. Підставимо їх в

верхнє з рівнянь системи (а) та знайдемо параметр λ :

$$\lambda = \sqrt{1+h^2} - h.$$

З цього виразу одержимо:

$$\lambda = \frac{(\sqrt{1+h^2} - h)(\sqrt{1+h^2} + h)}{\sqrt{1+h^2} + h} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2} + h} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \sqrt{1+h^2} + h.$$

Те ж саме можна одержати також і з системи (а), якщо використати нижнє рівняння.

Зазначимо, що система (б) відрізняється від системи (а) лише знаками при змінній y , але при $y = 0$ для параметра μ будемо мати такі ж співвідношення:

$$\mu = \sqrt{1+h^2} - h; \quad \frac{1}{\mu} = \sqrt{1+h^2} + h.$$

З врахуванням виразів для λ і μ , вектори \vec{S}_1 , \vec{S}_2 приймуть вигляд:

$$\vec{S}_1 = -2h\vec{i} - 2\vec{j} - 2\sqrt{1+h^2}\vec{k} = -2(h\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{1+h^2}\vec{k});$$

$$\vec{S}_2 = 2h\vec{i} - 2\vec{j} + 2\sqrt{1+h^2}\vec{k} = 2(h\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{1+h^2}\vec{k}).$$

Тоді за напрямні вектори прямолінійних твірних доцільно взяти:

$$\vec{s}_1 = h\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{1+h^2}\vec{k}; \quad \vec{s}_2 = h\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{1+h^2}\vec{k}.$$

Ці вектори мають однакову довжину:

$$|\vec{s}_1| = |\vec{s}_2| = \sqrt{h^2 + 1 + 1 + h^2} = \sqrt{2(1+h^2)}.$$

Кут між твірними співпадає з кутом між напрямними векторами. Косинус цього кута можна знайти за допомогою скалярного добутку векторів \vec{s}_1, \vec{s}_2 :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{h^2 - 1 + 1 + h^2}{2(1 + h^2)} = \frac{h^2}{1 + h^2}.$$

Очевидно, що мінімальне значення косинуса спостерігається при $h = z = 0$. Значенню $\cos \varphi = 0$ відповідає максимальне значення кута φ , яке дорівнює:

$$\varphi_{\max} = \pi/2.$$

Кут φ набуває максимального значення у всіх точках горлового перерізу $z = 0$, яким є одиничне коло $x^2 + y^2 = 1$. На рисунку показана точка A цього кола і дві взаємно перпендикулярні твірні, позначені різним кольором:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}; \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Крім цього маємо:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \cos \varphi = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h^2}{1 + h^2} = 1 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \varphi = 0.$$

Це значить, що при значному віддаленні ($z = h \rightarrow \infty$) від початку координат прямолінійні твірні двох сімейств зливаються і двохпараметричне сімейство вироджується в однопараметричне. Такий ефект є наслідком тієї властивості гіпербол, що вони наближаються до своїх асимптот, а поверхня однопорожнинного гіперболоїда – до поверхні конуса, яка має однопараметричне сімейство твірних (3.31).

3.5. Дотична площина та нормаль до поверхонь другого порядку

Нехай на поверхні другого порядку задана точка $M(x_0; y_0; z_0)$, а поверхня задається неявним рівнянням виду $F(x, y, z) = 0$. Тоді рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні в точці $M(x_0; y_0; z_0)$ можна записати, відповідно, у вигляді [10]:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M (z - z_0) = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M}. \quad (3.42)$$

Для еліпсоїда, наприклад, маємо:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1. \quad (3.43)$$

Обчислимо частинні похідні цієї функції по всім аргументам:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}. \quad (3.44)$$

В точці $M(x_0; y_0; z_0)$ вони приймають значення:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = \frac{2x_0}{a^2}; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = \frac{2y_0}{b^2}; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = \frac{2z_0}{c^2}. \quad (3.45)$$

Підставимо ці значення в рівняння (3.41):

$$\frac{2x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{2y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{2z_0(z - z_0)}{c^2} = 0. \quad (3.46)$$

Скоротимо на двійку та проведем очевидні перетворення:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}. \quad (3.47)$$

Координати точки $M(x_0; y_0; z_0)$ задовольняють рівняння еліпсоїда (3.24), тому права частина виразу (3.47) дорівнює одиниці.

Одержано рівняння дотичної площини до еліпсоїда в точці $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.} \quad (3.48)$$

Підставивши значення (3.45) у вираз (3.42), після скорочення на двійку одержимо рівняння нормалі до еліпсоїда в тій же точці:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{z_0/c^2}} \quad (3.49)$$

Проведемо тепер аналогічні обчислення для еліптичного параболоїда. Будемо вважати, що точка $M(x_0; y_0; z_0)$ лежить на його поверхні.

Рівняння еліптичного параболоїда в неявному вигляді:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z. \quad (3.50)$$

Частинні похідні по змінним x, y, z –

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{p}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{q}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2 \quad (3.51)$$

і їх значення в точці $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x_0}{p}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y_0}{q}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2. \quad (3.52)$$

Використаємо ці значення спочатку в рівнянні (3.41):

$$\begin{aligned} \frac{2x_0(x - x_0)}{p} + \frac{2y_0(y - y_0)}{q} - 2(z - z_0) &= 0 \Rightarrow \frac{x_0x}{p} + \frac{y_0y}{q} = \\ &= \frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} + z - z_0 \Rightarrow \frac{x_0x}{p} + \frac{y_0y}{q} = 2z_0 + z - z_0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Отже, рівняння дотичної площини до еліптичного параболоїда має вид:

$$\boxed{\frac{x_0x}{p} + \frac{y_0y}{q} = z + z_0.} \quad (3.54)$$

Значення частинних похідних (3.52) разом з виразом (3.42) дають можливість записати також і рівняння нормалі:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_0/p} = \frac{y - y_0}{y_0/q} = \frac{z - z_0}{-1}.} \quad (3.55)$$

Для інших поверхонь другого порядку рівняння дотичної площини та нормалі в точці з координатами $(x_0; y_0; z_0)$ знаходяться в тій же послідовності. Приводимо їх нижче в табл.2. Якщо параметрам a, b, c надати відповідні значення, то табличні рівняння будуть описувати дотичну площину та нормаль також і для поверхонь обертання другого порядку (3.15)-(3.19).

Таблиця 2

Назва поверхні	Рівняння поверхні	Рівняння дотичної площини	Рівняння нормалі
<i>Сфера</i>	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	$x_0x + y_0y + z_0z = R^2$	$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$
<i>Еліпсоїд</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$	$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{z_0/c^2}$
<i>Однопорожнинний гіперболоїд</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1$	$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{-z_0/c^2}$
<i>Двопорожнинний гіперболоїд</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = -1$	$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{-z_0/c^2}$
<i>Еліптичний конус</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 0$	$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{-z_0/c^2}$
<i>Еліптичний параболоїд</i>	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$	$\frac{x_0x}{p} + \frac{y_0y}{q} = z + z_0$	$\frac{x - x_0}{x_0/p} = \frac{y - y_0}{y_0/q} = \frac{z - z_0}{-1}$
<i>Гіперболічний параболоїд</i>	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$	$\frac{x_0x}{p} - \frac{y_0y}{q} = z + z_0$	$\frac{x - x_0}{x_0/p} = \frac{y - y_0}{-y_0/q} = \frac{z - z_0}{-1}$

П р и м і т к а. Нормальний вектор до поверхонь однопорожнинного гіперболоїда та гіперболічного параболоїда в заданій точці M

$$\vec{N} = \left(\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M; \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M; \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M \right)$$

перпендикулярний, як до самих поверхонь, так і до тих двох прямолінійних твірних, які лежать на цих поверхнях і перетинаються в точці M . Тому площина, яка дотикається в точці M до кожної з вказаних поверхонь, проходить також через пару прямолінійних твірних. В цьому сенсі така площина не є дотичною як такою, що має єдину спільну точку з відповідною поверхнею. Її природно назвати **площиною, що перетинає будь-яку з названих поверхонь (однопорожнинного гіперболоїда чи гіперболічного параболоїда) по двом прямолінійним твірним, які проходять через задану точку M .**

Це ж саме стосується і еліптичного конуса з тією лише відмінністю, що площина буде мати з поверхнею, крім деякої спільної точки M , лише одну прямолінійну твірну, яка проходить через цю точку. Отже, це є **площина, яка дотикається до поверхні еліптичного конуса по прямолінійній твірній, проведеної через точку M .**

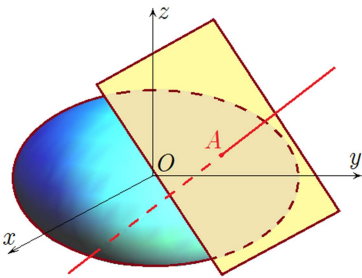
Оскільки перераховані випадки площини внесені в стовпчик “Рівняння дотичної площини” в табл.2, а така назва для цих площин некоректна – їх рівняння в табл.2 виділені **червоним кольором**.

Приклад 28. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні заданого еліпсоїда обертання в точці $A(1; 1; 1)$

$$\frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Рівняння дотичної площини для еліпсоїда має вид (3.48):

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$



В нашому випадку $a^2 = b^2 = 4$, $c^2 = 2$, тому:

$$\frac{x_0x + y_0y}{4} + \frac{z_0z}{2} = 1$$

Підставимо сюди координати точки $A(1; 1; 1)$:

$$\frac{x + y}{4} + \frac{z}{2} = 1.$$

Після спрощення одержуємо рівняння дотичної площини в загальному виді:

$$\boxed{x + y + 2z - 4 = 0.}$$

Для нормалі до еліпсоїда маємо рівняння (3.49):

$$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{z_0/c^2}.$$

Підставивши в це рівняння значення параметрів a , b , c та координат точки $A(1; 1; 1)$, одержимо:

$$\frac{x-1}{1/4} = \frac{y-1}{1/4} = \frac{z-1}{1/2}.$$

Остаточню канонічне рівняння нормалі запишеться так:

$$\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}}.$$

Положення дотичної площини та нормалі відносно поверхні еліпсоїда показано на рисунку.

Приклад 29. Задана точка $B(-3; 4; 2)$. Знайти рівняння: 1) конуса обертання навколо вісі Oz , який проходить через точку B ; 2) прямолінійної твірної, яка проходить через точку B ; 3) площини, яка дотикається вздовж цієї твірної до вказаного конуса.

1. Запишемо загальне рівняння кругового конуса (3.18) у виді:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}. \quad (*)$$

Припустимо, що цьому рівнянню задовольняють координати деякої точки $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Розділивши перше рівняння на друге, одержимо рівняння кругового конуса, який проходить через точку з координатами $(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{x^2 + y^2}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{z^2}{z_0^2} = 0. \quad (**)$$

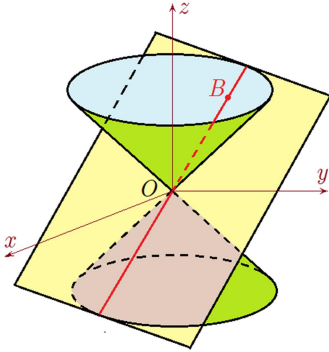
Щоб записати рівняння кругового конуса, який проходить через точку $B(-3; 4; 2)$, використаємо її координати:

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 0}.$$

2. Рівняння твірної витікає з рівняння сімейства твірних конуса (3.31), якщо замість величин x_0, y_0, z_0 прийняти координати точки $B(-3; 4; 2)$:

$$\boxed{\frac{x}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}}.$$

Ця твірна виділена на рисунку червоним кольором.



3. Рівняння площини, яка проходить через деяку точку з координатами $(x_0; y_0; z_0)$ і дотикається до кругового конуса по прямолинійній твірній має вид (табл.2):

$$\frac{x_0x + y_0y}{a^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 0.$$

Порівнюючи між собою співвідношення (*) і (**), знаходимо:

$$a^2 = x_0^2 + y_0^2; \quad c^2 = z_0^2, \quad \text{що дає:}$$

$$\frac{x_0x + y_0y}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{z}{z_0} = 0.$$

Залишається використати координати точки $B(-3; 4; 2)$:

$$\frac{4y - 3x}{25} - \frac{z}{2} = 0.$$

Приводимо одержане рівняння площини до загального виду:

$$\boxed{6x - 8y + 25z = 0.}$$

Конус, твірна і площина зображені на рисунку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія. Навчальний посібник – Суми.: ВТД Університетська книга, 2004. – 296 с.
2. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія у просторі. – Ніжин.: НДПУ, 2002.
3. Яковець В.П., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія на площині. – Ніжин.: НДПУ, 2001.
4. Берже М. Геометрия: Пер. с франц.– М.: Мир, 1984.–Т.2.–368 с.
5. Погорелов А.В. Геометрия: Учебное пособие для вузов.–2-е изд. – М.: Наука, 1984.–288 с.
6. Погорелов А.В. Геометрия. – М.: Наука, 1983.
7. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: Пер. с нем.– 3-е изд.– М.: Наука, 1981.–344 с.
8. Білоусова В.П. та ін. Аналітична геометрія. – К.: Вища школа, 1973.
9. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.
10. Завгородній О.І., Обихвіст Щ.В., Сіняєва О.В. Функції кількох змінних.– Харків.: ХНТУСГ, 2013.– 41. с.
11. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14. – СПб.: Питер, 2007.– 592с.
12. Дмитрий Кириянов. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0.–СПб.: БХВ-Петербург, 2012.–432 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Основи теорії та методика розв'язування задач

ЗАВГОРОДНІЙ Олексій Іванович
СОЛОВИЧЕНКО Ольга Володимирівна

Формат 60x84 1/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. 4,8

Наклад 100 пр.

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44

