



Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет енергетики, робототехніки та комп'ютерних технологій

Кафедра електромеханіки, робототехніки, біомедичної
інженерії та електротехніки

ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання розрахунково графічного завдання

з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки»,
«Теорія електричних та магнітних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Теорія
електромагнітного поля», «Теорія електромагнітних кіл»

для здобувачів зі спеціальності 163 «Біомедична інженерія» та 141
«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Харків 2023

Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет енергетики, робототехніки та комп'ютерних технологій
Кафедра електромеханіки, робототехніки, біомедичної інженерії та електротехніки

ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання розрахунково графічного завдання

з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки»,
«Теорія електричних та магнітних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Теорія
електромагнітного поля», «Електромагнітні поля та методи їх розрахунку»

для здобувачів зі спеціальності 163 «Біомедична інженерія» та 141
«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Затверджено
рішенням Науково-методичної ради
факультету енергетики, робототехніки та
комп'ютерних технологій
Протокол № 3
від 22.02.2023 р.

Харків
2023

Схвалено
на засіданні кафедри електромеханіки, робототехніки, біомедичної інженерії та
електротехніки
Протокол №5 від 16.02.2023 р.

О. Г. Аврунін, докт. техн. наук, проф., завідувач кафедри біомедичної інженерії
Харківського національного університету радіоелектроніки;

О. М. Мороз, докт. техн. наук, проф., професор кафедри електропостачання та
енергетичного менеджменту Державного біотехнологічного університету

С23 Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи за темою «» з
дисциплін «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електричних та
магнітних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Теорія електромагнітного
поля», «Електромагнітні поля та методи їх розрахунку» для здобувачів освіти
ден. та заочної форми навчання спеціальностей 141 «Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка» та 163 «Біомедична інженерія» / Держ.
біотехнологічний ун-т ; авт.-уклад.: Н. Г. Косуліна, М. О. Чорна, В. В. Сухін, К.
С. Коршунов. – Харків : [б. в.], 2023. – 73 с.

Методичні вказівки розроблено відповідно до програми навчальних дисциплін
з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електричних та магнітних
кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Теорія електромагнітного поля»,
«Електромагнітні поля та методи їх розрахунку». Методичні вказівки призначені
здобувачам першого (бакалаврського) та другого (магістерських) рівнів вищої
освіти денної та заочної форми навчання зі спеціальності 163 «Біомедична
інженерія» та 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

УДК 621.3

Відповідальний за випуск : Н. Г. Косуліна, д-р техн. наук

© Косуліна Н. Г., Чорна М. О., Сухін В. В.,
Коршунов К. С. 2023
© ДБТУ, 2023

Зміст

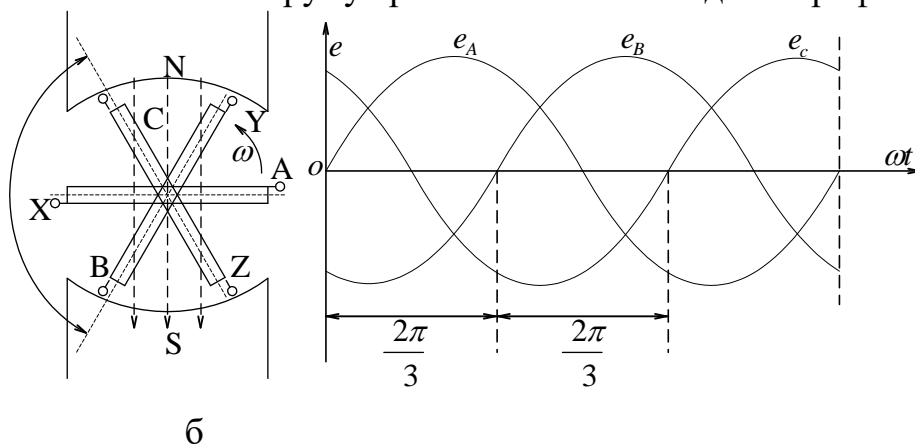
1. Трифазні кола. Базові співвідношення в трифазних колах.
2. З'єднання трифазної системи зіркою.
3. З'єднання трифазної системи трикутником.
4. Розрахунок складних симетричних трифазних електричних кіл.
5. Приклад розрахунку симетричного трифазного кола.
6. Розрахунок несиметричних трифазних кіл.
7. Розрахунок несиметричних складних трифазних електричних кіл.
8. Активна, реактивна та повна потужності трифазної системи.
9. Приклад розрахунку несиметричного трифазного кола.
10. Приклад розв'язування типових задач.

1. Трифазні кола.

Базові співвідношення в трифазних колах

Під трифазною симетричною системою ЕРС розуміють сукупність трьох синусоїдних ЕРС однакової частоти і амплітуди, які зсунуті по фазі на кут 120° . Головною перевагою трифазної системи перед однофазною є те, що вона забезпечує передачу і розподіл енергії з меншими втратами. Крім того, трифазна система дає можливість створювати обертове магнітне поле, що використовується в двигунах трифазного струму, які мають безперечні технічні і техніко-економічні переваги перед однофазними двигунами.

Здобуття трифазного змінного струму розглянемо на моделі трифазного



генератора (рис.1).

Рис 1.1. Здобуття трифазного змінного струму:

а – модель трифазного генератора; б – хвильова діаграма синусоїдальних ЕРС в котушках.

У полі електромагніту міститься сталевий циліндр – ротор, на поверхні якого укріплені три однакові обмотки (фази) з початками A, B, C і відповідними кінцями X, Y, Z . Обмотки зсунуті в просторі одна відносно одної на кут $\frac{2\pi}{3p}$ радіан, або $\frac{360^\circ}{3p}$ електричних градусів, де p – число пар полюсів у генераторі.

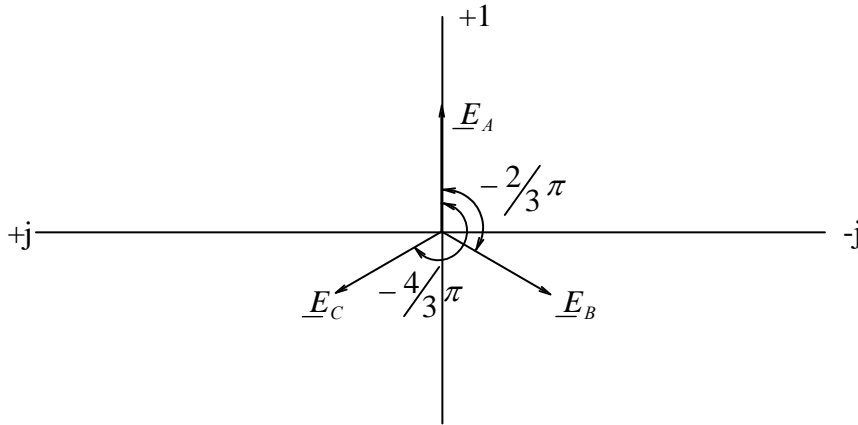
При одній парі полюсів (рис.1,а) цей кут дорівнює $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$. Якщо ротор обертає рівномірно з кутовою швидкістю ω проти руху годинникової стрілки, то в котушках наводяться синусоїдні ЕРС з однаковими частотами і амплітудами, але зсунуті за фазою на кут $\frac{2\pi}{3}$. Буде отримана симетрична система ЕРС, яка може бути записана для миттєвих значень ЕРС так:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t, \\ e_B &= E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \\ e_C &= E_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

або у комплексній формі для дійсних значень ЕРС:

$$\begin{aligned}\underline{E}_A &= E e^{j\psi}, \\ \underline{E}_B &= E e^{j\left(\psi - \frac{2}{3}\pi\right)}, \\ \underline{E}_C &= E e^{j\left(\psi - \frac{4}{3}\pi\right)}.\end{aligned}$$

де $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$.



Векторна діаграма симетричної трифазної системи дійсних значень Е Р С при $\Psi = 0$

Множник $e^{j\frac{2}{3}\pi}$ в трифазних системах аналогічний множнику $e^{j\frac{\pi}{2}}$ в однофазній системі. В теорії однофазного змінного струму множник $e^{j\frac{\pi}{2}}$ називають оператором повороту на кут 90° у бік випередження, а $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ – оператором повороту на кут 90° у бік відставання.

В теорії трифазного змінного струму оператор $e^{j\frac{2}{3}\pi}$ має назву оператора повороту у позитивному напрямку на кут 120° та позначається індексом “ a ”, тобто $e^{j\frac{2}{3}\pi} = a$.

Величина оператору a :

$$\begin{aligned}a &= e^{j\frac{2}{3}\pi} = \cos \frac{2}{3}\pi + j \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2 &= e^{j\frac{4}{3}\pi} = \cos \frac{4}{3}\pi + j \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^3 &= e^{j\frac{2}{3}\pi \cdot 3} = e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = 1, \\ a^4 &= a^3 a = a.\end{aligned}$$

Легко уявити, що сума трьох векторів $a + a^2 + a^3 = 0$.

Отже, можна зробити висновок, що геометрична сума векторів ЕРС \underline{E}_A , \underline{E}_B , \underline{E}_C теж дорівнює нулю:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = \underline{E} \left(1 + e^{j\frac{4}{3}\pi} + e^{j\frac{2}{3}\pi} \right) = 0.$$

Це ж положення відноситься і до миттєвих значень:

$$e_A + e_B + e_C = 0,$$

тобто сума миттєвих значень ЕРС трифазної системи у будь-який час дорівнює нулю.

Для фазних обмоток трифазної системи прийнято такі позначення:

$$\begin{array}{lll} A - X & \text{або} & 1 - 1', \\ B - Y & \text{або} & 2 - 2', \\ C - Z & \text{або} & 3 - 3'. \end{array}$$

де: A, B, C чи $1, 2, 3$ – початок обмоток;

X, Y, Z чи $1', 2', 3'$ – кінці обмоток.

Зміну ЕРС за часом графічно зображено на рис. 1.1, б.

Якщо замкнути всі три фази через однакові за величиною і характером споживачі (рис.2) $Z_A = Z_B = Z_C = Z$, то отримаємо незв'язану трифазну систему кіл, по яких проходить симетрична система струмів $i_A = i_B = i_C$, які аналітично можна виразити рівняннями:

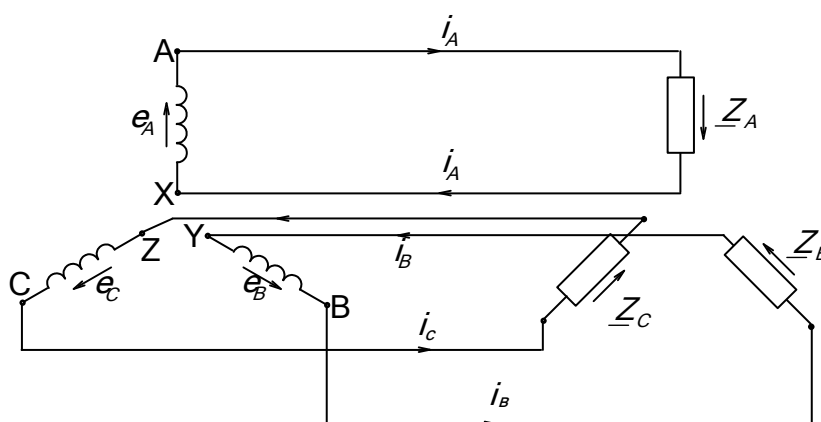


Рис. 2. Незв'язана трифазна система

$$\left. \begin{array}{l} i_A = I_m \sin \omega t, \\ i_B = I_m \sin(\omega t - 2\pi/3), \\ i_C = I_m \sin(\omega t - 4\pi/3) \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Графічно ці струми зображають подібно до ЕРС. Як видно з рис. 2, для передачі енергії потрібно шість проводів. Для створення зручнішої трифазної системи кінці обмоток генератора і споживачів електрично з'єднують *зіркою* або *трикутником*.

Існують такі схеми з'єднання генератора та навантаження:

Однотипні: зірка – зірка $Y - Y$, або трикутник – трикутник $\Delta - \Delta$.

Різнотипні: зірка – трикутник $Y - \Delta$, або трикутник – зірка $\Delta - Y$.

З'єднання обмоток генератора зіркою виконують, об'єднуючи початки усіх його обмоток у одну загальну точку, яка має назву нейтральної точки (рис. 3). Зв'язок між генератором і споживачами здійснюється електричними проводами, що йдуть від початків усіх обмоток, а іноді і від нейтральної точки генератора. Провід, що йде від початку обмотки генератора до споживача, називається *лінійним*, а той, що йде від нейтральної (або нульової) точки, – *нейтральним* (або *нульовим*) проводом.

При з'єднанні обмоток генератора трикутником початок обмотки кожної фази сполучають з кінцем обмотки наступної фази (див. рис.2). Зв'язок генератора з споживачами здійснюється лінійними проводами, що виходять із спільних точок обмоток генератора.

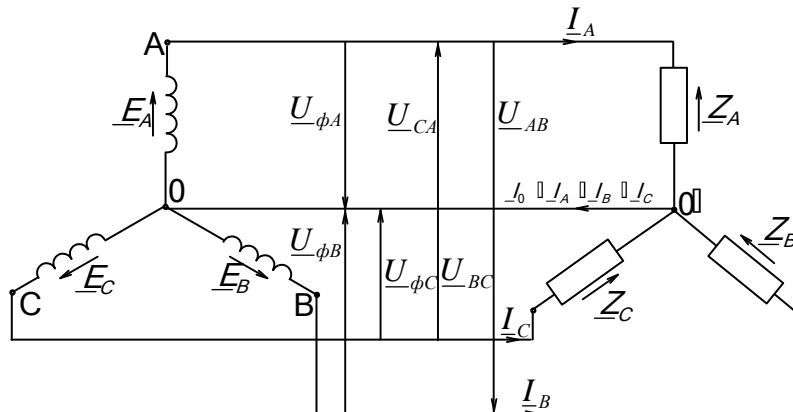


Рис 3. Зв'язна трифазна система при з'єднанні зіркою

ЕРС, що індукується в обмотках генератора, напруги на затискачах цих обмоток, і струми, що проходять по них, називають відповідно *фазними* ЕРС (e_ϕ , E_ϕ), напругами (u_ϕ , U_ϕ) і струмами (i_ϕ , I_ϕ), а напруги між сусідніми лінійними проводами і струми, що проходять у них, – *лінійними* напругами (u_l , U_l) і струмами (i_l , I_l).

Сполучення споживачів зіркою і трикутником виконують аналогічно до відповідних сполучень обмоток генератора. Визначення фазних і лінійних напруг і струмів для споживачів залишаються такими самими, як і для генераторів.

Надалі умовимось у багатофазній системі кінці струми направляти так, щоб всі лінійні струми були направлені до споживачів (рис. 3), а фазні струми в сторонах трикутника (рис. 2) – проти руху годинникової стрілки. Фазні струми в променях зірки споживачів сходяться в нейтральній точці. Результуючий струм i_0 в нейтральному проводу піде до нейтральної точки генератора.

Напрями всіх ЕРС і напруг відповідатимуть напрямам відповідних струмів.

2. З'єднання трифазної системи зіркою

На рис. 3 зображена схема сполучення зв'язаної трифазної системи зіркою. Якщо система симетрична, то діючі значення ЕРС усіх фаз генератора між собою однакові: $E_A = E_B = E_C = E_\phi$ і зсунуті під кутом 120° одна відносно одної. При однаковому навантаженні всіх фаз будуть рівні між собою і фазні напруги:

$$U_{\phi A} = U_{\phi B} = U_{\phi C} = U_\phi.$$

Діючі значення лінійних напруг дорівнюють геометричній різниці двох фазних напруг:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_A - \underline{U}_B, \\ \underline{U}_{BC} &= \underline{U}_B - \underline{U}_C, \\ \underline{U}_{CA} &= \underline{U}_C - \underline{U}_A. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

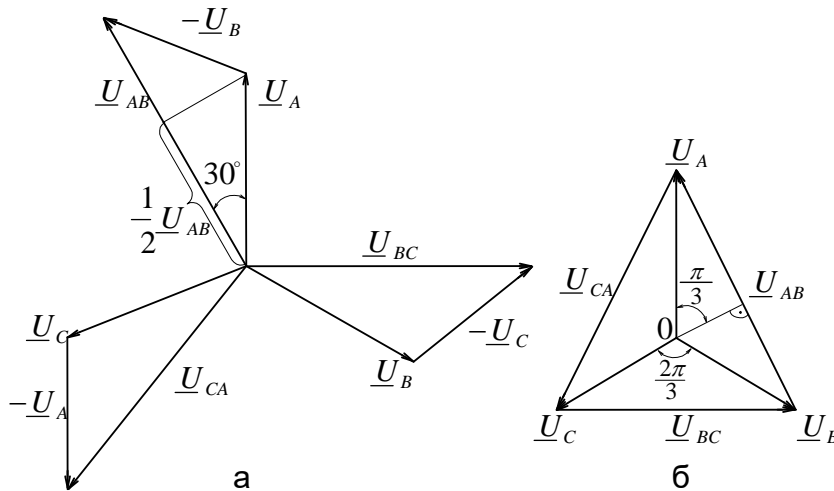


Рис 4. Векторна діаграма напруг при з'єднанні зіркою

Побудувавши векторну діаграму фазних напруг, дуже легко знайти напрям і величину вектора лінійної напруги (рис.4). Як видно з векторної діаграми, вектори лінійних напруг випереджають відповідні фазні напруги на кут 30° . Опустивши перпендикуляр з вектора \underline{U}_A на вектор \underline{U}_{AB} , легко знайти співвідношення між лінійною і фазною напругами:

$$\frac{1}{2}U_{AB} = U_A \cos 30^\circ; U_{AB} = \sqrt{3}U_A \text{ або } U_l = \sqrt{3}U_\phi.$$

У загальному вигляді співвідношення між лінійною і фазною напругами знаходять так (рис. 4, б):

$$\frac{U_{AB}}{2} = U_A \sin \frac{\pi}{3}; U_l = 2U_\phi \sin \frac{\pi}{3}. \quad (2.2)$$

При з'єднанні зіркою лінійні струми I_{Al} , I_{Bl} і I_{Cl} дорівнюють відповідним фазним $I_{A\phi}$, $I_{B\phi}$ і $I_{C\phi}$, а струм у нульовому проводі I_0 дорівнює геометричній сумі діючих значень усіх фазних струмів:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_{A\phi} + \underline{I}_{B\phi} + \underline{I}_{C\phi} = \underline{I}_{Al} + \underline{I}_{Bl} + \underline{I}_{Cl}.$$

У випадку симетричного навантаження всі струми будуть однакові між собою, а їх геометрична сума дорівнює нулю (рис.5):

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_{A\phi} + \underline{I}_{B\phi} + \underline{I}_{C\phi} = 0.$$

У такому випадку нульовий провід можна не застосовувати.

Симетричне навантаження створюють асинхронні двигуни, трифазні діодні випрямлячі тощо. Але на практиці важко одержати симетричне навантаження, тому нульовий провід застосовують обов'язково, але його переріз беруть меншим, ніж переріз лінійного проводу, оскільки по ньому йде результуючий струм, який завжди менший від лінійного.

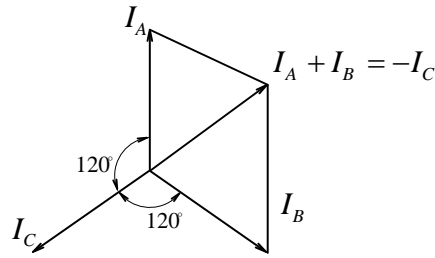


Рис 5. Векторна діаграма симетричних струмів при з'єднанні споживачів зіркою.

Слід зауважити, що на схемах усі струми та ЕРС позначають так, як на рис.3. Насправді всі три електрорушійні сили і струми не можуть мати той самий знак, тобто не можуть бути направлені одночасно до початків або до кінців фаз. Частина ЕРС і струмів у певний момент часу (рис. 1, б) має один напрям, а частина – інший. Сума ЕРС або струмів фаз у будь-який момент часу дорівнює нулю. Якщо всі споживачі однакові і становлять активне навантаження, то фазні струми збігаються за фазою з відповідними фазними напругами (рис.6). При активно-індуктивному навантаженні фаз вектори струмів відстають на відповідні кути φ від фазних напруг (рис.7), а при активно-ємнісному навантаженні струми випереджають фазні напруги. При несиметричному навантаженні у фазах будуть різні струми. Це приводить до так званого “перекосу фаз”, що негативно впливає на роботу генератора. Тому на практиці намагаються навантажувати всі фази приблизно рівномірно.

З векторної діаграми (рис.4) можна побудувати так звану топографічну діаграму, якщо перенести вектори лінійних напруг паралельно самим собі так, щоб вони з'єднали відповідні вектори фазних напруг (рис.4,б). Сторони рівнобедреного трикутника - це лінійні напруги. У центрі трикутника міститься нульова точка, з якої виходять вектори фазних напруг.

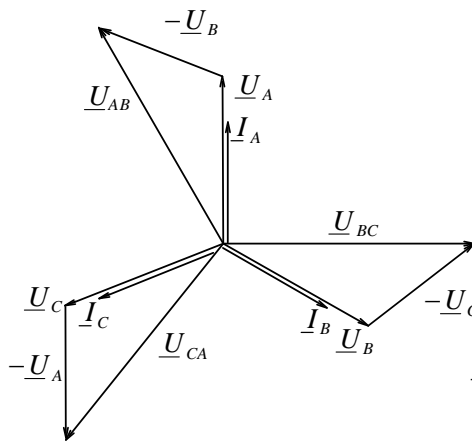


Рис 6. Векторна діаграма напруг і струмів (до схеми рис. 3) для рівномірного активного навантаження фаз при з'єднанні зіркою.

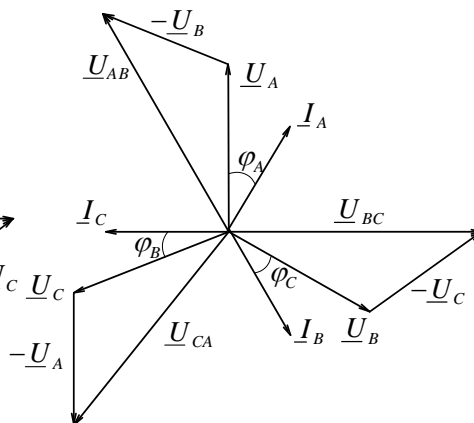


Рис 7. Векторна діаграма напруг і струмів для рівномірного активно-індуктивного навантаження фаз при з'єднанні зіркою (до схеми рис.3).

Зауважимо, що нульова точка зміщуватиметься від центра трикутника при несиметричному навантаженні і відсутності нульового проводу, тобто фазні напруги без нульового проводу можуть бути різними. Більша напруга буде на тій фазі, де більший опір споживача, і навпаки.

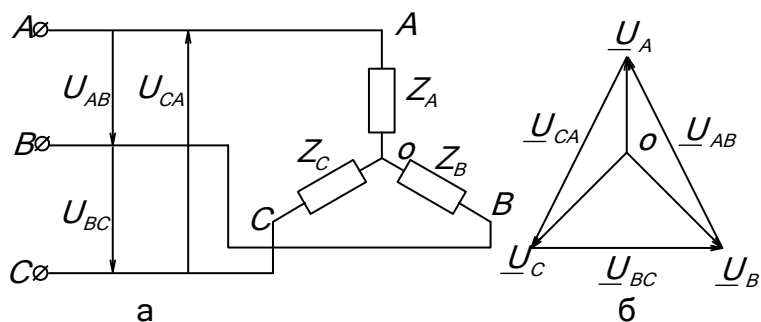


Рис 8. З'єднання споживачів зіркою без нульового проводу:

а – схема з'єднання; б – топографічна діаграма при $Z_A < Z_B = Z_C$

Так, $Z_A < Z_B = Z_C$, і на топографічній діаграмі напруга на фазі А буде менша від двох інших (рис. 8, б). При $Z_A = \infty$ (обрив кола фази А) і $Z_B = Z_C$ напруга на фазі А стає значно більшою, ніж на двох інших (рис. 9), а нульова точка лежить на самому лінійному векторі напруги U_{BC} .

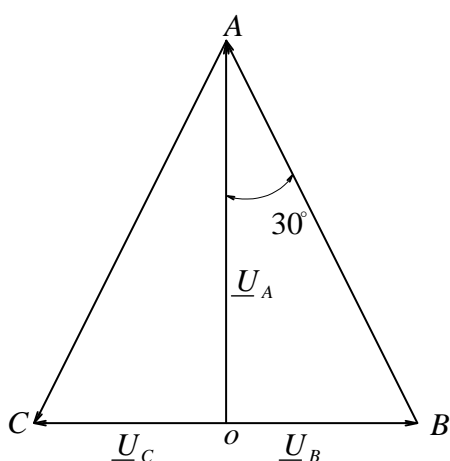


Рис 9. Топографічна діаграма при $Z_A = \infty$ і $Z_B = Z_C$ до схеми рис.8.

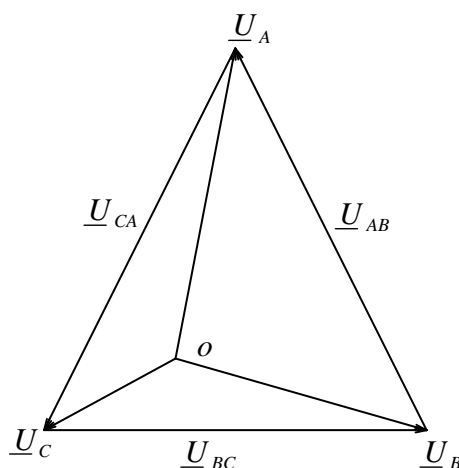


Рис 10. Топографічна діаграма при $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ (до схеми рис. 8)

У загальному випадку при несиметричному навантаженні, коли $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ фазні напруги прямо пропорційні опорам і нульова точка займає певне положення (рис. 10). Нарешті, при $Z_A = 0$ і $Z_B = Z_C$ (рис. 11, а) напруга на фазі А $U_A = 0$, але на інших фазах вона досягає лінійної напруги (рис. 11, б). Таким чином, при несиметричному навантаженні фаз без нульового проводу напруга на фазах різко змінюється і може бути значно вищою, ніж та, на яку розраховані споживачі (лампи розжарювання, радіоприймачі, однофазні двигуни тощо), що приведе до їх псування. Якщо ж у схемі нульовий провід є, то такого перекосу фазних напруг не буде, по нульовому проводу проходить результуючий струм, і фазні напруги будуть однаковими (нехтуємо власним опором нульового проводу).

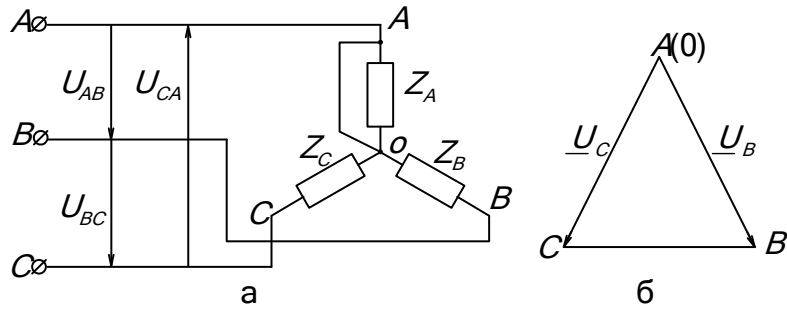
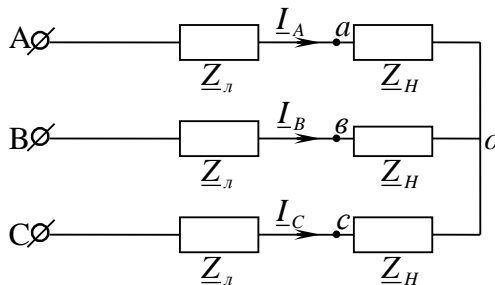


Рис 11. З'єднання споживачів зіркою без нульового проводу при $Z_A = 0$; $Z_B = Z_C$:
а – схема з'єднання; б – топографічна діаграма.

Отже, нульовий провід, по-перше, дає змогу мати крім лінійної напруги ще й фазну, а по-друге, перерозподіляє фазні напруги, підтримуючи їх однаковими незалежно від навантаження. Це є однією з причин того, що в нульовому проводі не ставлять запобіжників.

Розрахунок симетричного трифазного кола при з'єднанні приймачів енергії зіркою



Задача.

Задані лінійні напруги $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_L$ та опори лінії Z_L і навантаження Z_H . Визначить струми, фазні та лінійні напруги на навантаженні.

Послідовність розрахунку.

1. Визначаємо модуль фазної напруги $U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$.
2. Повний опір фази $Z_\phi = \sqrt{(R_L + R_H)^2 + (X_L + X_H)^2}$.
3. Струми лінійні та фазні $I_L = I_\phi = \frac{U_\phi}{Z_\phi}$.
4. Фазна напруга на навантаженні $U_{\phi H} = I_\phi Z_H$.
5. Лінійна напруга на навантаженні $U_{LH} = \sqrt{3} U_{\phi H}$.

Задачу можна розрахувати і використовуючи комплексний метод.

1. Так як $\underline{U}_{AB} = U_A \sqrt{3} e^{j30^\circ}$ (дивись векторну діаграму рис. 4), то $\underline{U}_A = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}$

відповідно $\underline{U}_B = \frac{\underline{U}_{BC}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}$, $\underline{U}_C = \frac{\underline{U}_{CA}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}$.

Розрахунок ведуть тільки для однієї фази.

2. $\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_\phi}$, де $\underline{Z}_\phi = \underline{Z}_L + \underline{Z}_H$

$$3. \underline{U}_{a0} = \underline{I}_A \underline{Z}_H.$$

$$4. \underline{U}_{a0} = \underline{U}_{a0} \sqrt{3} e^{j30^\circ}.$$

Побудуємо векторну діаграму для активно-індуктивного навантаження.

1. Будуємо зірку фазних напруг $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$.

2. Будуємо трикутник лінійних напруг $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$.

3. Так як навантаження активно-індуктивне, то вектори фазних струмів (вони є і лінійними) утворюють зірку струмів, яка зміщена у бік запізнення на кут $\varphi = \arctg \frac{X_L + X_H}{R_L + R_H}$.

4. Будуємо зірку фазних напруг на навантаженні:

– активне падіння напруги $\underline{I}_A R_H$ співпадає по фазі зі струмом \underline{I}_A першої фази;

– індуктивне падіння напруги $jX_H \underline{I}_A$ випереджає струм \underline{I}_A на кут 90° ;

– падіння напруги на фазі навантаження $\underline{U}_{HA} = R_H \underline{I}_A + jX_H \underline{I}_A$. Аналогічно будуються вектори $\underline{U}_{HB}, \underline{U}_{HC}$;

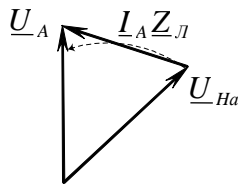
– з'єднуючи кінці векторів зірки фазних напруг навантажень здобуваємо трикутник лінійних напруг на навантаженні $\underline{U}_{a0}, \underline{U}_{0c}, \underline{U}_{ca}$;

– так як опори лінійних проводів однакові, то падіння напруги на них також будуть однакові.

Вони можуть бути побудовані таким чином.

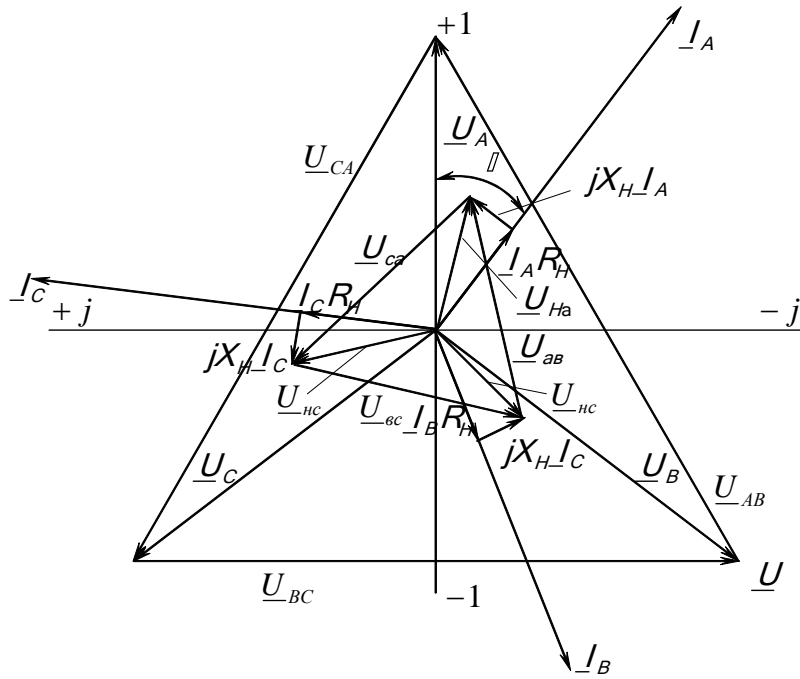
У лінії маємо активно-індуктивний опір. Падіння напруги на активному опорі $R_L \underline{I}_A$ співпадає по фазі зі струмом, падіння напруги на індуктивному опорі $jX_L \underline{I}_A$ випереджає струм по фазі на 90° . Вектор результуючого падіння напруги в лінії буде $\underline{I}_A \underline{Z}_L = R_L \underline{I}_A + jX_L \underline{I}_A$.

Треба звернути увагу на терміни “падіння” напруги та “втрата” напруги.



Геометрична різниця напруг $\underline{U}_A - \underline{U}_{Ha} = \underline{I}_A \underline{Z}_L$ має назву падіння напруги. Алгебраїчна різниця $U_A - U_{Ha} = \Delta U_A$ має назву втрати напруги.

Так як геометрична різниця векторів більше різниці їх довжин (алгебраїчна різниця), то падіння напруги більша ніж втрата напруги. І тільки тоді коли вектори \underline{U}_A та \underline{U}_{Ha} співпадають по напрямку вони дорівнюють одне одному.



Векторна діаграма для активно-індуктивного навантаження.

3. З'єднання трифазної системи трикутником.

При сполученні трифазної системи трикутником як обмотки генератора, так і споживачі з'єднані послідовно, утворюючи замкнені трикутники фаз генератора і споживачів (рис. 12).

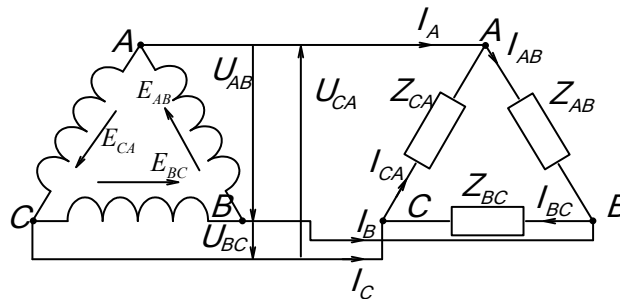


Рис 12. З'єднання трифазної системи трикутником

У замкненому контурі генератора діють ЕРС кожної фази, сума діючих значень яких дорівнює нулю, оскільки вони рівні за величиною і зсунуті за фазою на 120° (рис. 13).

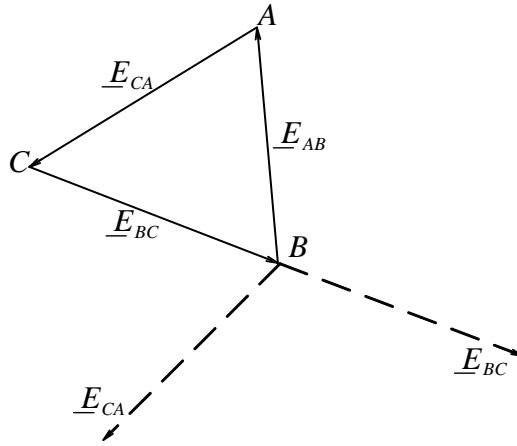


Рис 13. Векторна діаграма діючих значень ЕРС при з'єднанні обмоток генератора трикутником

Звідси випливає, що в замкненому контурі ABC генератора при відсутності навантаження ніякого струму не буде. Трикутник споживачів приєднують до генератора трьома лінійними проводами. Напряга між лінійними проводами дорівнює напрузі на фазі генератора. Отже, при сполученні трифазної системи трикутником лінійна напруга дорівнює фазній:

$$U_{\text{Л}} = U_{\text{Ф}}. \quad (3.1)$$

Лінійні струми I_A, I_B, I_C не дорівнюють фазним I_{AB}, I_{BC}, I_{CA} . За першим законом Кірхгофа алгебраїчна сума миттєвих значень струмів для кожного з вузлів A, B і C трикутника споживачів дорівнює нулю: $i_A + i_{CA} - i_{AB} = 0$, звідки лінійний струм дорівнює різниці двох суміжних фазних струмів:

$$\left. \begin{aligned} i_A &= i_{AB} - i_{CA}; \\ i_B &= i_{BC} - i_{AB}; \\ i_C &= i_{CA} - i_{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Алгебраїчна сума всіх лінійних струмів у будь-який момент часу дорівнює нулю. Замінюючи алгебраїчну суму миттєвих значень геометричною сумою діючих значень векторів струмів, маємо:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Геометрична сума всіх векторів лінійних струмів також дорівнює нулю. Векторна діаграма напруг і струмів для активного рівномірного навантаження фаз при сполученні трифазної системи трикутником зображена на рис. 14.

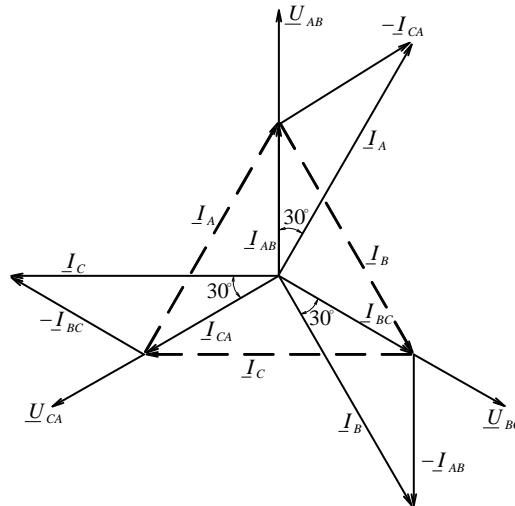


Рис 14. Векторна діаграма напруг і струмів для активного рівномірного навантаження фаз при з'єднанні трифазної системи трикутником

Як видно з рис.14, вектори фазних струмів збігаються за фазою з відповідними напругами, однакові за величиною і зсунуті під кутом 120° . Вектори лінійних струмів I_A , I_B і I_C відстають за фазою від фазних струмів на кут 30° . Якщо лінійні струми перенести паралельно самим собі так, щоб вони сполучали кінці векторів фазних струмів, то маємо топографічну діаграму струмів (на рис. 14 показано пунктиром), подібну до топографічної діаграми напруг при сполученні зіркою.

З векторної діаграми (рис.14) легко знайти співвідношення між лінійними і фазними струмами: $\frac{1}{2}I_A = I_{AB} \cos 30^\circ$, звідки $I_A = \sqrt{3}I_{AB}$, або $I_l = \sqrt{3}I_\phi$.

Це саме співвідношення можна знайти з формули для багатofазної системи:

$I_l = 2I_\phi \sin \frac{\pi}{m}$ при $m=3$ $I_l = \sqrt{3}I_\phi$. При нерівномірному навантаженні фаз, коли $Z_{AB} \neq Z_{BC} \neq Z_{CA}$, фазні струми будуть неоднаковими. Лінійні струми також будуть різні і визначаються різницею суміжних фазних струмів. Векторну діаграму для нерівномірного активного і активно-індуктивного навантажень фаз зображено на рис. 15, а і б.

Як видно з рис. 15, при нерівномірному навантаженні фаз струми неоднакові; це створює "перекіс фаз", що приводить до ненормальної роботи генератора.

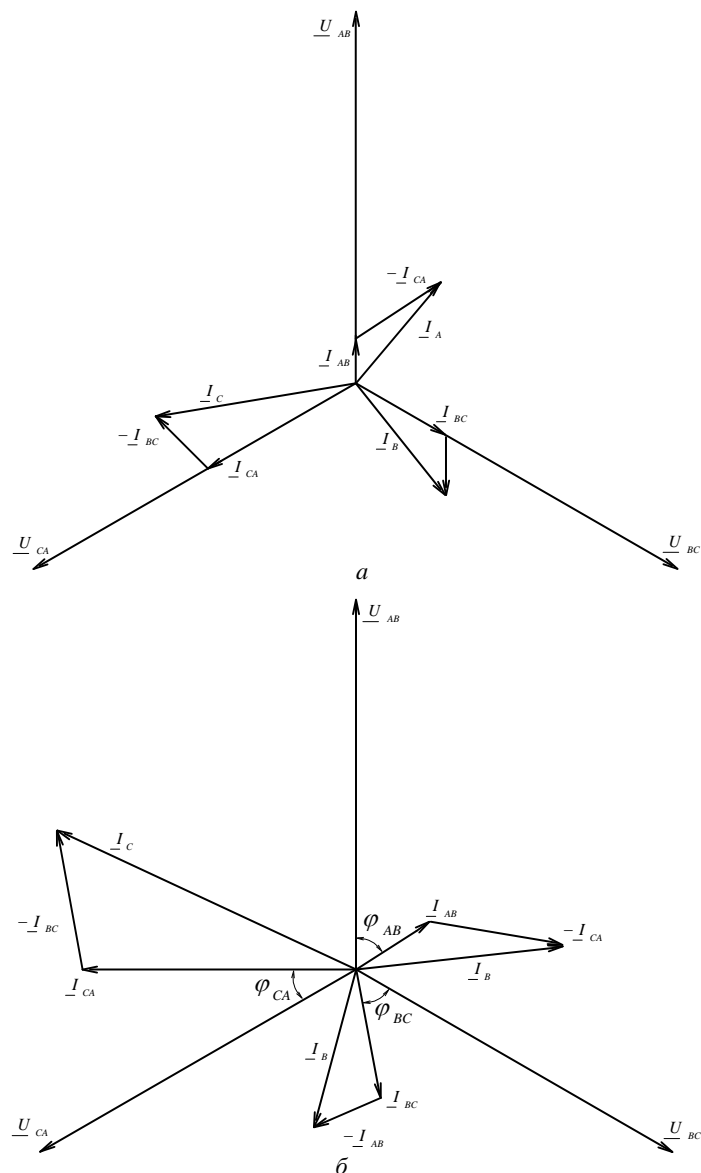


Рис 15. Векторні діаграми нерівномірного навантаження фаз при з'єднанні трифазної системи трикутником: а – нерівномірне активне навантаження; б – нерівномірне активно-індуктивне навантаження.

Тому в практиці сполучення споживачів трикутником застосовують перш за все для симетричного навантаження (трифазні двигуни тощо). При наявності “перекосу фаз” його вирівнюють, перерозподіляючи навантаження між фазами.

Струм у фазах і кути зсуву фаз при сполученні трифазної системи трикутником можна записати так:

$$\left. \begin{aligned} I_{AB} &= \frac{U_{AB}}{Z_{AB}}; & \sin \varphi_{AB} &= \frac{X_{AB}}{Z_{AB}}; \\ \cos \varphi_{AB} &= \frac{R_{AB}}{Z_{AB}}; & \operatorname{tg} \varphi_{AB} &= \frac{X_{AB}}{R_{AB}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Для інших фаз співвідношення знаходимо аналогічно. Лінійні струми знаходимо з рівнянь (3.3).

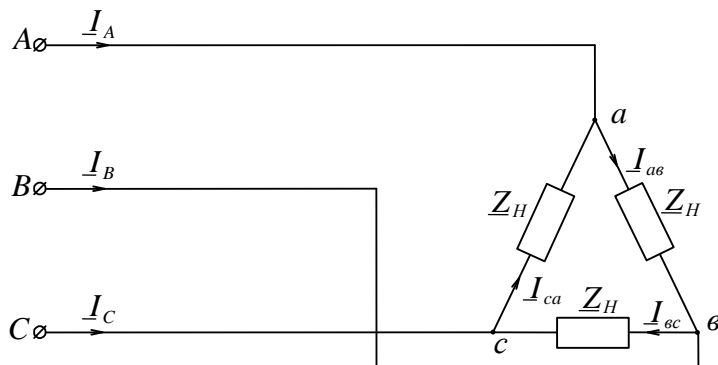
Порівнюючи сполучення обмоток генератора трикутником із сполученням зіркою, можна побачити, що у двох генераторів з однаковими лінійними напругами легше ізолювати фазні обмотки при сполученні їх зіркою, тому що на фазу припадає

в $\sqrt{3}$ раз менша напруга, ніж при сполученні обмоток трикутником. Тому на практиці частіше застосовують сполучення обмоток генератора зіркою.

Розрахунок симетричного трифазного кола при з'єднанні приймачів енергії трикутником

Задача 1.

Опори навантаження з'єднанні трикутником. Задані лінійна напруга на вході і значення опорів навантаження. Розрахувати значення лінійних та фазних струмів.

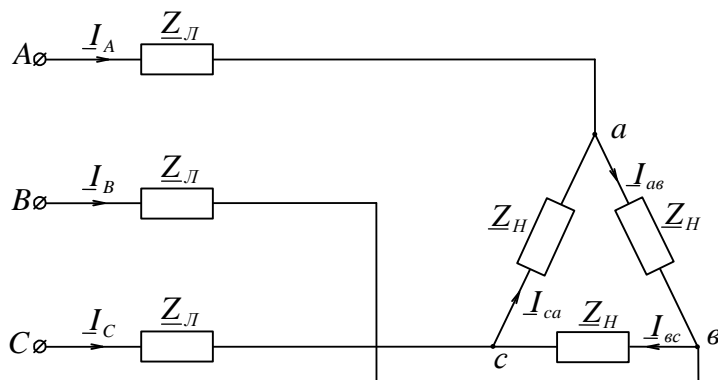


При з'єднанні трикутником $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$. При відсутності опорів проводів лінії це буде і напруга на навантаженні.

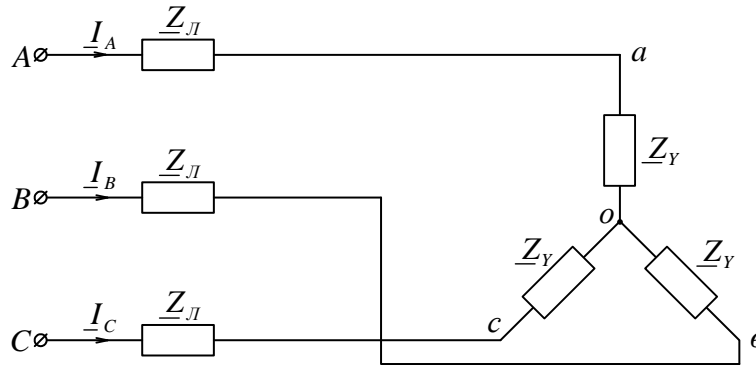
1. Визначаємо фазний струм $I_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{ф}}}{Z_{\text{H}}}$.
2. Визначаємо лінійний струм $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}$.

Задача 2.

Задано значення лінійної напруги на початку лінії U_{AB} , U_{BC} , U_{CA} та всі опори навантаження Z_{H} та проводів $Z_{\text{л}}$. Розрахувати значення лінійних та фазних струмів.



Задачу вирішуємо, перетворюючи з'єднання трикутником у еквівалентну зірку.



Так як навантаження рівномірне (в кожній фазі опори однакові по характеру і рівні по модулю), то $\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3}$.

1. Визначаємо повний опір фази $Z_\phi = \sqrt{(R_n + R_Y)^2 + (X_n + X_Y)^2}$.

2. Фазна напруга на навантаженні $U_\phi = \frac{U_n}{\sqrt{3}}$.

3. Фазний струм $I_{\phi Y}$ в еквівалентній схемі: $I_{\phi Y} = \frac{U_\phi}{Z_\phi}$.

4. Напруга на навантаженні в еквівалентній схемі $U_{\phi Y} = I_{\phi Y} Z_Y$.

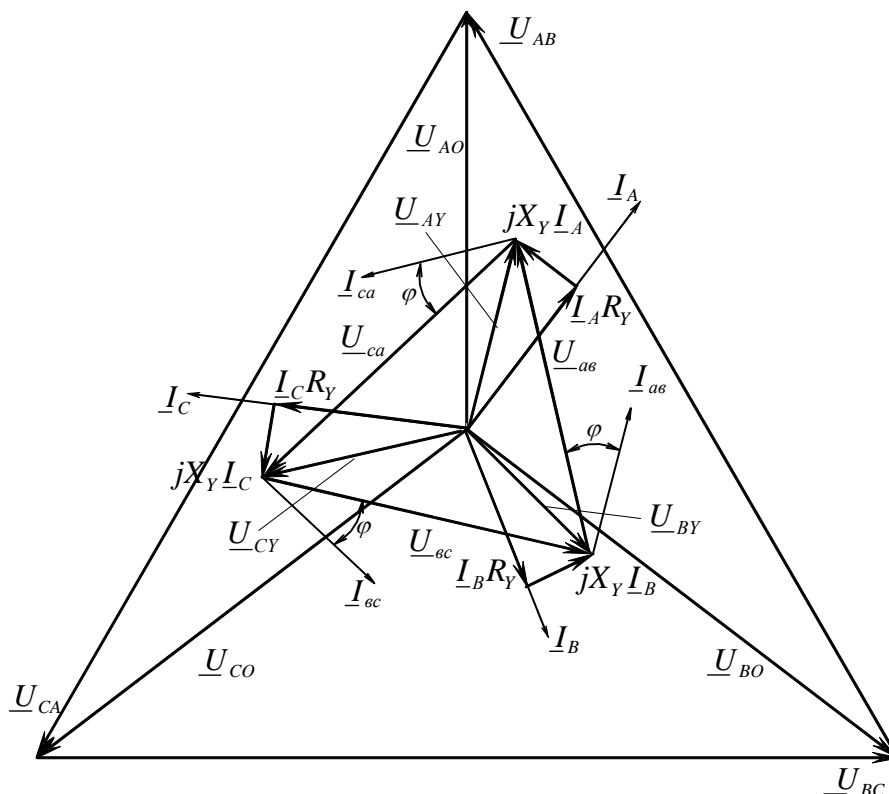
5. Напруга на навантаженні у заданій схемі $U_{H\Delta} = \sqrt{3} U_{\phi Y}$.

6. Струм у приймачах енергії, тобто у фазах трикутника $I_{a\phi} = I_{\phi c} = I_{c\phi} = I_\phi = \frac{U_{H\Delta}}{Z_H}$.

7. Лінійні струми $I_A = I_B = I_C = I_n = \sqrt{3} I_\phi$.

Побудуємо векторну діаграму.

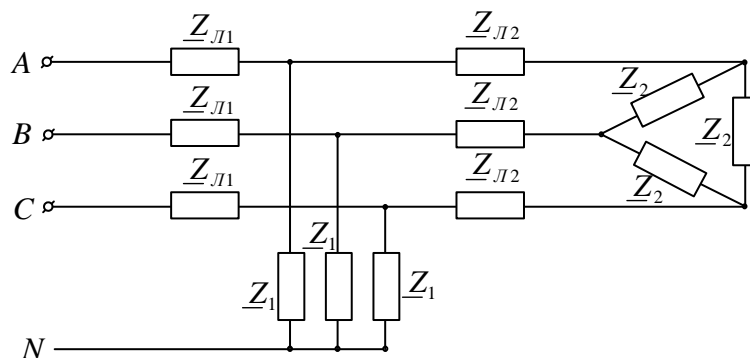
- Побудуємо трикутник лінійних напруг на початку лінії \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} .
- Будуємо зірку фазних напруг генератора (це і фазні напруги у еквівалентній схемі), \underline{U}_{AO} , \underline{U}_{BO} , \underline{U}_{CO} .
- Будуємо зірку струмів у еквівалентній схемі (це і лінійні струми у заданій схемі), \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C .
- Будуємо зірку фазних напруг на навантаженні в еквівалентній схемі. Припустимо, що навантаження активно-індуктивне. Напруга на активному опорі $\underline{I}_A R_Y$ співпадає по фазі зі струмом, а напруга на індуктивному опорі навантаження випереджає струм на кут 90° $jX_Y \underline{I}_A$. Сумарний вектор дає значення напруги на навантаженні в еквівалентній схемі.
- Будуємо трикутник векторів лінійних напруг на навантаженні, з'єднуючи кінці векторів \underline{U}_{AY} , \underline{U}_{BY} , \underline{U}_{CY} .
- Будуємо вектори фазних струмів у трикутнику навантаження під кутом φ відносно відповідних напруг, де $\varphi = \arctg \frac{X_H}{R_H}$.



4. Розрахунок складних симетричних трифазних електричних кіл.

Будь-яке складне симетричне трифазне електричне коло можливо звести до простого однофазного кола і розрахунок виконувати для однієї фази. Покажемо на прикладі як це робиться.

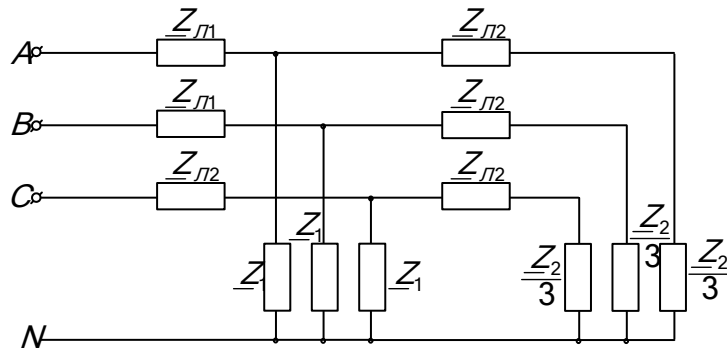
Маємо складне трифазне електричне коло.



Задані напруга джерела живлення та опори всіх навантажень.

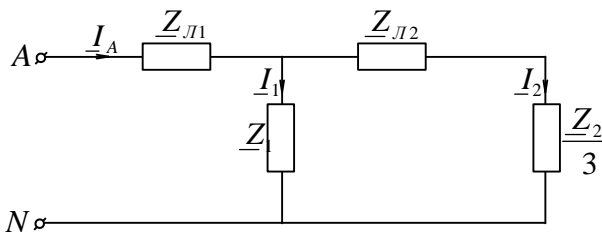
Опори першого навантаження (Z_1) з'єднані зіркою, другого (Z_2) – трикутником.

Замінюємо з'єднання трикутником еквівалентним з'єднанням зіркою.



При заміні з'єднання трикутником на еквівалентну зірку опір кожної фази дорівнює $\frac{Z_2}{3}$.

Якщо відома лінійна напруга живлення $U_{л}$, то визначають значення фазної напруги $U_{\phi} = \frac{U_{л}}{\sqrt{3}}$ і задану схему з'єднання навантажень приводять до схеми



і розраховують струми у вітках схеми.

Треба пам'ятати, що струми у фазах В та С мають зсув по фазі на 120° та 240° відповідно.

5. Приклад розрахунку симетричного трифазного кола.

До трифазного генератора напругою 220/127 В під'єднанні два електродвигуна та три однакові групи ламп. Накреслити схему з'єднання у відповідності з номінальними напругами джерела живлення та приймачів. Підрахувати струми кожного споживача, загальний струм, потужності і $\cos\phi_{Г}$, з котрими працює генератор, потужність на валу генератора, к.к.д. котрого $\eta_{Г}$ задано. Визначить ємність, необхідну для компенсації $\cos\phi_{Г}$ до заданого значення. Побудувати векторну діаграму. Дані приведені у таблиці.

Двигун №1				Двигун №2				Лампи		$\eta_{Г}$	$\cos\phi_{Г}$
P_1	U_1	$\cos\phi_1$	η_1	P_2	U_2	$\cos\phi_2$	η_2	$P_{Л}$	$U_{Л}$		
кВт	В			кВт	В			кВт	В		
3,5	220	0,82	0,71	0,6	380	0,7	0,7	3,4	220	0,82	0,92
	127				220						

Обмотки двигуна №1 треба з'єднати по схемі Y, так як напруги 220/127 означає, що на кожен фазу двигуна необхідно подати 127 В. Обмотки статора двигуна №2 треба з'єднати трикутником, так як напруга 380/220 означає, що на кожен фазу двигуна необхідно подати напругу 220 В. На кожен із груп ламп необхідно подати напругу 220 В, тому групи ламп треба з'єднати трикутником.

Так як трифазне коло симетричне, то розрахунок проводиться для однієї фази.

I. Двигун №1. (Д 1)

1. Потужність, яку споживає двигун №1, визначається із виразу:

$$\eta_1 = \frac{P_1}{P'_1}; \quad P'_1 = \frac{P_1}{\eta_1}.$$

2. Потужність, яку споживає кожна фаза визначається виразом:

$$P'_{1\phi} = \frac{P'_1}{3} = \frac{P_1}{3\eta_1}.$$



3. Потужність, яка споживається кожною зіркою визначається виразом:

$$P'_{1\phi} = U_{\phi} \cdot I_{1\phi} \cos \varphi_1$$

Із цього співвідношення визначається фазний (він же лінійний) струм Д1.

$$I_{л1} = I_{\phi1} = \frac{P'_{1\phi}}{U_{\phi} \cos \varphi_1} = \frac{P_1}{3U_{\phi} \cos \varphi_1 \eta_1}$$

II. Двигун №2. (Д 2)

1. Потужність, яку споживає двигун Д2, визначається аналогічно:

$$\eta_2 = \frac{P_2}{P'_2}; \quad P'_2 = \frac{P_2}{\eta_2};$$

$$P'_{2\phi} = \frac{P'_2}{3} = \frac{P_2}{3\eta_2} = U_{л} I_{\phi2} \cos \varphi_2$$

Із цього виразу визначається струм двигуна Д2:

$$I_{\phi2} = \frac{P_2}{3U_{л} \cos \varphi_2 \eta_2};$$

$$I_{л2} = \sqrt{3} I_{\phi2} = \frac{P_2}{\sqrt{3} U_{л} \cos \varphi_2 \eta_2}$$

III. Лампи №3.

Так як потужність, яка споживається кожною групою ламп, дорівнює:

$$P_{\phi Л} = U_{Л} I_{\phi Л} = \frac{P_{Л}}{3}; \quad \text{то} \quad I_{\phi Л} = \frac{P_{Л}}{3U_{Л}};$$

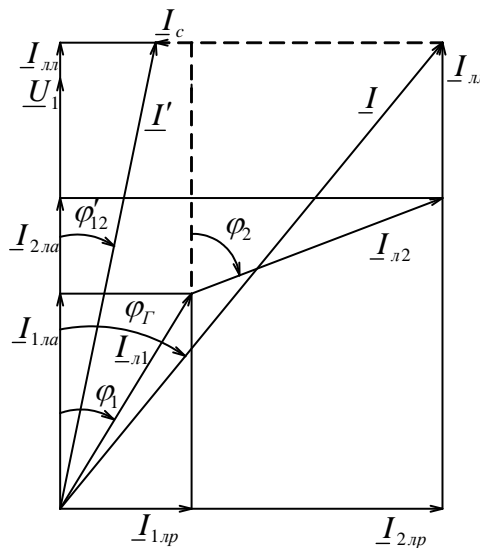
де: $I_{\phi Л}$ – фазний струм ламп.

Лінійний струм групи ламп

$$I_{ЛЛ} = I_{\phi Л} \cdot \sqrt{3} = \frac{P_{Л}}{\sqrt{3} \cdot U_{Л}}$$

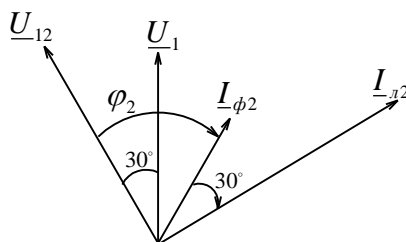
Загальний струм споживачів визначається після побудови векторної діаграми, котру достатньо побудувати для однієї фази.

Побудова векторної діаграми

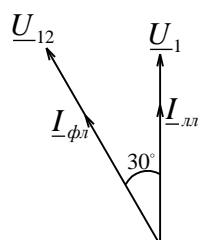


1. Будуємо вектор фазної напруги генератора \underline{U}_1 .
2. Вектор $\underline{I}_{Л1}$ відстає від \underline{U}_1 на кут φ_1 .
3. Як відкласти вектор лінійного струму другого двигуна $\underline{I}_{Л2}$?

$\underline{I}_{\phi 2}$ відстає від \underline{U}_{12} на кут φ_2 , $\underline{I}_{Л2}$ відстає від $\underline{I}_{\phi 2}$ на 30° . Отже $\underline{I}_{Л2}$ відстає від \underline{U}_1 на кут φ_2 .



4. Будуємо вектор лінійного струму ламп. Як він орієнтується відносно \underline{U}_1 ?



Фазний струм лампи співпадає по фазі з лінійною напругою, а лінійний струм $I_{ЛЛ}$ відстає від фазного на кут 30° , тобто співпадає по фазі з \underline{U}_1 .

5. Із векторної діаграми випливає, що загальний струм дорівнює:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{(I_{1ла} + I_{2ла} + I_{лл})^2 + (I_{1лр} + I_{2лр})^2} =$$

$$= \sqrt{(I_{л1} \cos \varphi_1 + I_{л2} \cos \varphi_2 + I_{лл})^2 + (I_{л1} \sin \varphi_1 + I_{л2} \sin \varphi_2)^2}$$

6. Потужність, що потребують двигуни та лампи, тобто потужність яка віддається генератором дорівнює:

$$P_G = P'_1 + P'_2 + P_L = \frac{P_1}{\eta_1} + \frac{P_2}{\eta_2} + P_L$$

7. Потужність яку потребує генератор P'_G :

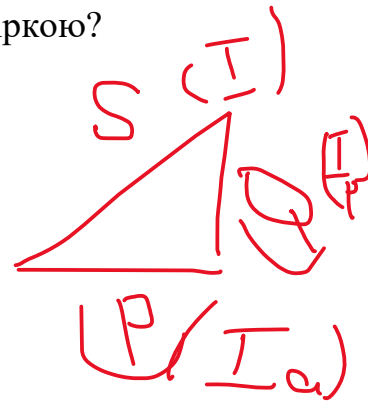
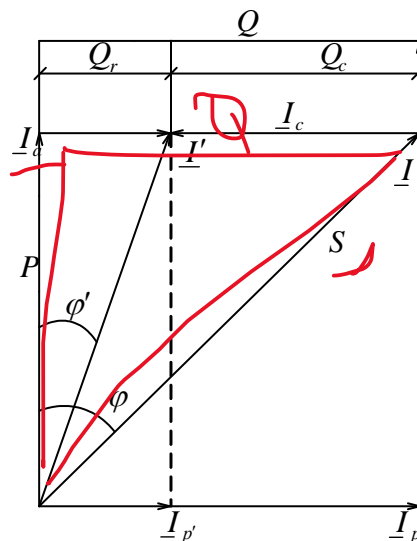
$$\eta_G = \frac{P_G}{P'_G}; \quad P'_G = \frac{P_G}{\eta_G}$$

8. $\cos \varphi_G$ визначається із векторної діаграми:

$$\cos \varphi_G = \frac{I_a}{I}$$

9. Припустимо, що із векторної діаграми ми здобули $\cos \varphi_G = 0,85$, а його задане значення $\cos \varphi'_G = 0,92$. Щоб збільшити $\cos \varphi_G$, необхідно використати ємність. Це питання ми розглядали при вивченні

Яка величина ємності? Як її треба підключати: трикутником чи зіркою?



Для рішення цих питань розглянемо трикутник струмів. Помножимо вектори трикутника струмів на U_ϕ , отримаємо трикутник потужностей.

Q – Реактивна потужність, яка потребується від генератора до компенсації, тобто реактивна потужність, яка потребується однією фазою споживачів. Після компенсації частина цієї реактивної потужності Q_C надходить у приймачі від конденсаторів, а частина Q_G продовжує надходити від генератора.

$$\frac{Q_G}{P_{G\phi}} = \operatorname{tg} \varphi_G \quad \text{тобто} \quad Q = P_{G\phi} \operatorname{tg} \varphi_G$$

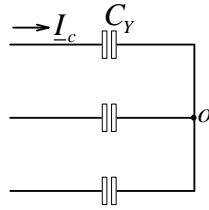
$$\frac{Q_G}{P_{G\phi}} = \operatorname{tg} \varphi'_G \quad \text{тобто} \quad Q_G = P_{G\phi} \operatorname{tg} \varphi'_G$$

де: $P_{\Gamma\phi}$ – потужність яка споживається приймачами. $P_{\Gamma\phi} = \frac{P_{\Gamma}}{3}$.

Реактивну потужність, яку треба взяти від конденсаторів:

$$Q_C = Q - Q_{\Gamma} = P_{\Gamma\phi} (tg\varphi_{\Gamma} - tg\varphi'_{\Gamma})$$

При з'єднанні зіркою:



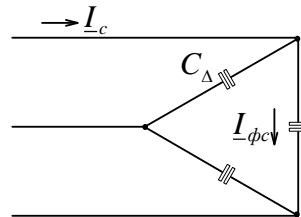
$$Q_C = I_C^2 X_{C_Y} = I_C^2 \frac{1}{\omega C_Y} = I_C U_{\phi};$$

$$C_Y = \frac{I_C^2}{\omega Q_C};$$

звідси

$$I_C = \frac{Q_C}{U_{\phi}}$$

При з'єднанні трикутником:



$$I_{\phi C} = \frac{I_C}{\sqrt{3}};$$

$$Q_C = I_{\phi C}^2 X_{C_{\Delta}} = I_{\phi C}^2 \frac{1}{\omega C_{\Delta}};$$

$$C_{\Delta} = \frac{I_{\phi C}^2}{\omega Q_C} = \frac{I_C^2}{3\omega Q_C};$$

Відношення $\frac{C_Y}{C_{\Delta}} = 3$, тобто $C_Y = 3 \cdot C_{\Delta}$

Отже, економічно з'єднувати конденсатори трикутником, так як при цьому необхідна ємність у тричі менша, чим при з'єднуванні зіркою.

Для визначення величини ємності, яка необхідна для компенсації $\cos\varphi_{\Gamma}$ до величини $\cos\varphi'_{\Gamma}$, можна міркувати інакше.

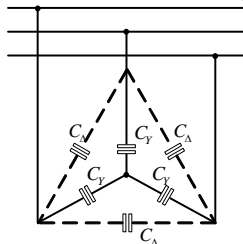
При з'єднанні зіркою із раніш слідує, що:

$$C_Y = \frac{P_{\Gamma\phi}}{\omega U_{\phi}^2} (tg\varphi_{\Gamma} - tg\varphi'_{\Gamma});$$

$$P_{\Gamma\phi} = \frac{P_{\Gamma}}{3} \text{ Вт};$$

$$U_{\phi} = 127\text{В.}$$

Замінімо з'єднання зіркою еквівалентним трикутником:



$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3};$$

$$\frac{1}{j\omega C_Y} = \frac{1}{3j\omega C_{\Delta}};$$

$$C_Y = 3 \cdot C_{\Delta}.$$

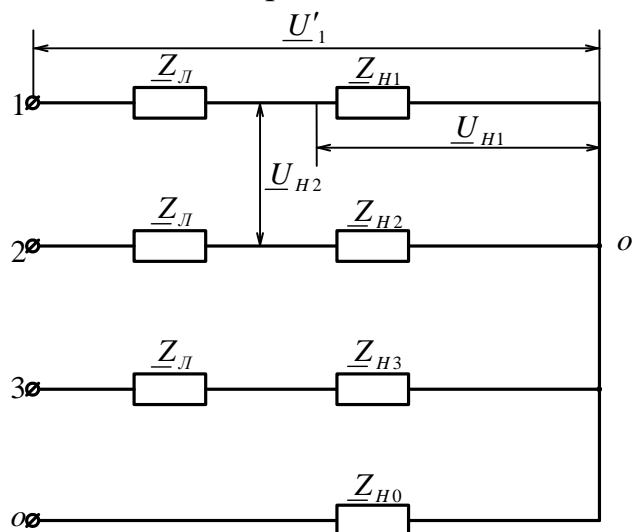
6. Розрахунок несиметричних трифазних кіл.

Несиметрія виникає у трифазних електричних колах під впливом таких обставин:

- несиметричне навантаження (опори фаз мають різні значення по модулю та різноманітні по характеру – чи активно-індуктивні, чи активно-ємнісні).
 - несиметрична система ЕРС.
 - розмиканням фази.
 - коротким замиканням (наприклад, між двома фазами чи фазою та нейтралю).
- Розглянемо як розраховується несиметричне трифазне коло при таких умовах:
- система фазних та лінійних напруг генератора симетрична.
 - навантаження статичне (тобто нема двигунів).

З'єднання приймачів енергії зіркою з нульовим проводом. Задано: симетрична система фазних напруг на початку лінії, та опори навантажень ($Z_{H1} \neq Z_{H2} \neq Z_{H3}$) і нейтрального проводу Z_{H0} . Визначить струми та напруги на опорах навантаження.

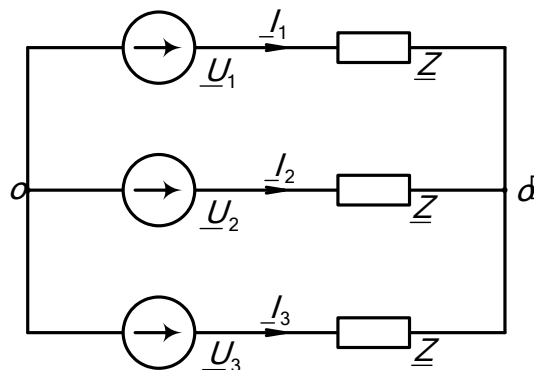
Приклад 1.



Методика розрахунку.

1. Складемо еквівалентну схему електричного кола, у якому напруги на вході замінені джерелами живлення ЕРС які дорівнюють:

$$\underline{E}_1 = \underline{U}_1, \quad \underline{E}_2 = \underline{U}_2, \quad \underline{E}_3 = \underline{U}_3.$$



2. У еквівалентній схемі два вузла. Тому використовуючи метод двох вузлів знайдемо вузлову напругу $\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_1 Y_1 + \underline{U}_2 Y_2 + \underline{U}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}$.

3. Згідно закону Ома для ділянки кола визначимо струми у вітках:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{0'0} + \underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_{0'0}}{\underline{Z}_1} = (\underline{U}_1 - \underline{U}_{0'0}) Y_1;$$

$$\underline{I}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_{0'0}) Y_2;$$

$$\underline{I}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_{0'0}) Y_3;$$

$$\underline{I}_0 = \underline{U}_{0'0} Y_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

де: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{H1}$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{H2}$, $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{H3}$,

$$Y_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}, \quad Y_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}, \quad Y_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3}, \quad Y_0 = \frac{1}{\underline{Z}_0}.$$

4. Напруги на кожній фазі \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 відповідно дорівнюють:

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_{0'0}, \quad \underline{U}'_2 = \underline{U}_2 - \underline{U}_{0'0}, \quad \underline{U}'_3 = \underline{U}_3 - \underline{U}_{0'0}.$$

5. Визначаємо фазні напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{H1} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{H1}, \quad \underline{U}_{H2} = \underline{I}_2 \underline{Z}_{H2}, \quad \underline{U}_{H3} = \underline{I}_3 \underline{Z}_{H3}.$$

6. Лінійні напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{H12} = \underline{U}_{H1} - \underline{U}_{H2}, \quad \underline{U}_{H23} = \underline{U}_{H2} - \underline{U}_{H3},$$

$$\underline{U}_{H31} = \underline{U}_{H3} - \underline{U}_{H1}.$$

Побудуємо векторну діаграму.

Векторну діаграму будують у відповідному масштабі після розрахунку величин напруг та струмів у комплексній формі (тобто знаємо модулі та аргументи струмів та напруг).

1. Будуємо зірку фазних напруг на початку лінії \underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_3 .
2. Будуємо трикутник лінійних напруг на початку лінії \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} .
3. Будуємо вектор напруги зміщення нейтралі, тобто вектор вузлової напруги $\underline{U}_{0'0}$.
4. У відповідності з рівняннями для фазних напруг будуємо несиметричну зірку фазних напруг на $\underline{Z}_L + \underline{Z}_H$
 \underline{U}'_1 , \underline{U}'_2 , \underline{U}'_3 .

5. Будуємо зірку струмів $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_0$.

6. Будуємо зірку фазних напруг на навантаженні.

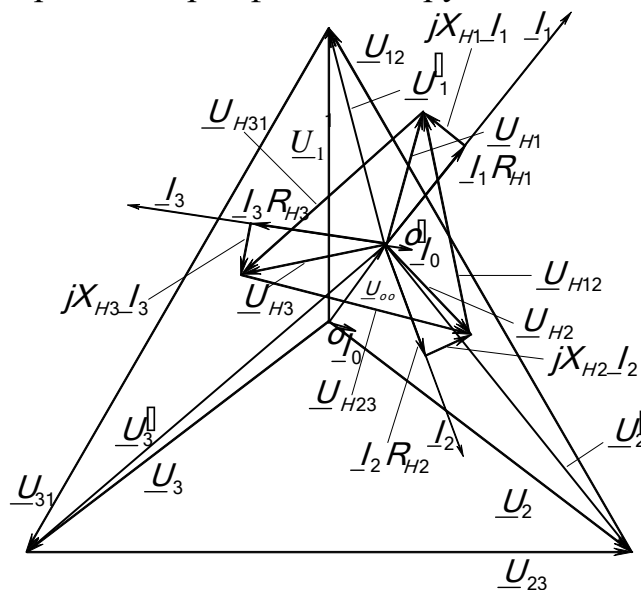
Прийmemo, що у всіх фазах активно-індуктивне навантаження.

– $\underline{I}_1 R_{H1}$ – це вектор падіння напруги на активному опорі навантаження, який співпадає по фазі з вектором струму.

– $jX_{H1} \underline{I}_1$ – вектор падіння напруги на індуктивному опорі навантаження, який випереджає струм на кут 90° . Сумарний вектор і є вектором фазної напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{H1} = \underline{I}_1 R_{H1} + jX_{H1} \underline{I}_1.$$

7. Будуємо трикутник лінійних напруг на навантаженні $\underline{U}_{H12}, \underline{U}_{H23}, \underline{U}_{H31}$, з'єднавши кінці зірки векторів фазних напруг на навантаженні.



Проведемо аналіз виразу для напруги зміщення нейтралі $\underline{U}_{0'0}$.

1. При несиметричному навантаженні використання нульового проводу зменшує напругу зміщення нейтралі $\underline{U}_{0'0}$.

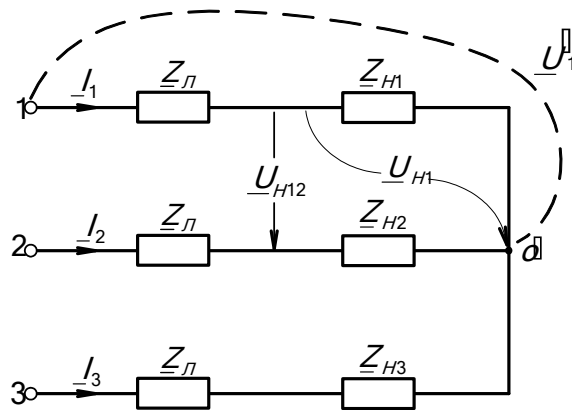
Якщо $\underline{Z} \rightarrow 0$, то $Y_0 \rightarrow \infty$ і $\underline{U}_{0'0} \rightarrow 0$. Тобто напруги на фазах навантаження дорівнюють напругам джерела живлення і система в цьому випадку наближується до симетричної.

2. При обриві нульового проводу $\underline{Z}_0 \rightarrow \infty$, а $Y_0 \rightarrow 0$ асиметрія системи збільшується, так як напруга $\underline{U}_{0'0}$ збільшується і одні фази будуть знаходитись під зниженою напругою, а другі під підвищеною. Тобто з'являється перекис фаз. Тому у нульовому проводі не установлюють не запобіжників не вимикачів.

Приклад 2

Задані величини лінійних напруг на початку лінії та всі опори. Приймачі енергії з'єднанні зіркою без нульового проводу.

Необхідно визначити струми та напруги в кожній фазі навантаження.

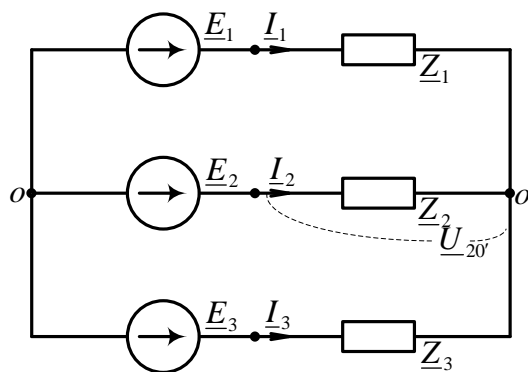


При відсутності нейтрального проводу заданими є не фазні, а лінійні напруги на вході схеми.

Методика розрахунку

Для вирішення цього прикладу необхідно знати величини фазних напруг \underline{U}'_1 , \underline{U}'_2 , \underline{U}'_3 .

1. Для визначення величин цих напруг представимо початкову схему еквівалентною.



$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{H1};$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{H2};$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{H3}.$$

ЕРС можуть бути любі, але обов'язково при цьому виконання таких умов:

$$\underline{U}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2, \quad \underline{U}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3, \quad \underline{U}_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1.$$

2. Так як ми домовились, що ЕРС можуть бути будь-якої величини, то нехай $\underline{E}_2 = 0$,

тоді $\underline{U}_{12} = \underline{E}_1$, $\underline{U}_{23} = -\underline{E}_3$ і напруга $\underline{U}_{20'} = \underline{U}'_2$ визначиться як:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{20'} = \underline{U}'_2 = -\underline{U}_{00'} &= -\frac{\underline{E}_1 Y_1 + \underline{E}_2 Y_2 + \underline{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = -\frac{\underline{U}_{12} Y_1 - \underline{U}_{23} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \\ &= \frac{\underline{U}_{21} Y_1 + \underline{U}_{23} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \quad \underline{U}'_2 = \frac{\underline{U}_{21} Y_1 + \underline{U}_{23} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\underline{U}'_1 = \frac{\underline{U}_{12} Y_2 + \underline{U}_{13} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad \underline{U}'_3 = \frac{\underline{U}_{31} Y_1 + \underline{U}_{32} Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

3. Згідно закону Ома для ділянки кола визначаємо струми:

$$\underline{I}_1 = \frac{U'_1}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{U'_2}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_3 = \frac{U'_3}{\underline{Z}_3}.$$

4. Фазні напруги на навантаженні:

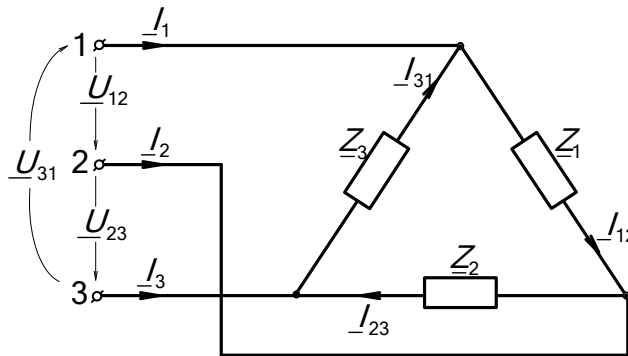
$$\underline{U}_{H1} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{H1}, \quad \underline{U}_{H2} = \underline{I}_2 \underline{Z}_{H2}, \quad \underline{U}_{H3} = \underline{I}_3 \underline{Z}_{H3}.$$

5. Лінійні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{H12} = \underline{U}_{H1} - \underline{U}_{H2}, \quad \underline{U}_{H23} = \underline{U}_{H2} - \underline{U}_{H3}, \\ \underline{U}_{H31} = \underline{U}_{H3} - \underline{U}_{H1}.$$

Побудова векторної діаграми аналогічна випадку з'єднання з нульовим проводом, тільки побудова починається з трикутника лінійних напруг на початку лінії.

З'єднання приймачів енергії трикутником
Приклад 1.



Приклад 1.

Задані напруги на початку лінії \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} (це і напруги на навантаженні, так як $\underline{Z}_{\text{Л}} = 0$) та величини опорів навантаження $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$. Визначить фазні та лінійні струми.

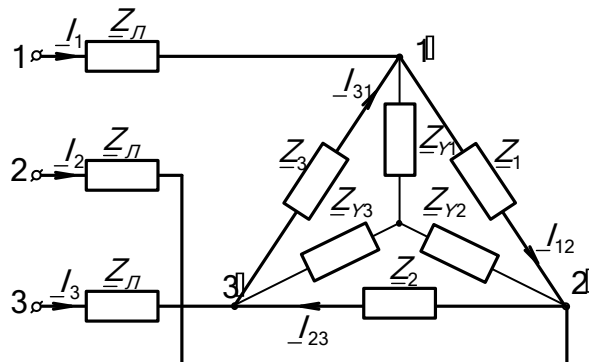
1. Визначаємо фазні струми:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_3}.$$

2. Визначаємо лінійні струми по першому закону Кірхгофа:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}.$$

Приклад 2.



Рішення цього прикладу ускладнюється, так як треба враховувати опори проводів.

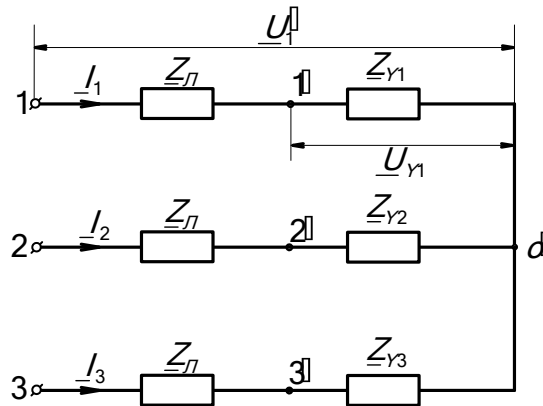
Задані напруги на початку лінії \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} та величини опорів лінії $\underline{Z}_{\text{Л}}$ та навантаження $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$. Визначить фазні та лінійні струми.

Послідовність розрахунку

1. Перетворимо з'єднання споживачів енергії трикутником у еквівалентну зірку:

$$\underline{Z}_{Y1} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}, \quad \underline{Z}_{Y2} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

$$\underline{Z}_{Y3} = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$



2. Розрахунок еквівалентної схеми зводиться до розрахунку кола при з'єднанні споживачів зіркою. Визначаємо напруги $\underline{U}'_1, \underline{U}'_2, \underline{U}'_3$.

3. Визначаємо струми у еквівалентній схемі (це і є лінійні струми заданої схеми).

4. Визначаємо падіння напруги на споживачах еквівалентної схеми:

$$\underline{U}_{Y1} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{Y1}, \quad \underline{U}_{Y2} = \underline{I}_2 \underline{Z}_{Y2}, \quad \underline{U}_{Y3} = \underline{I}_3 \underline{Z}_{Y3}.$$

5. Визначаємо напруги на трикутнику заданої схеми:

$$\underline{U}_{1'2'} = \underline{U}_{Y1} - \underline{U}_{Y2}, \quad \underline{U}_{2'3'} = \underline{U}_{Y2} - \underline{U}_{Y3},$$

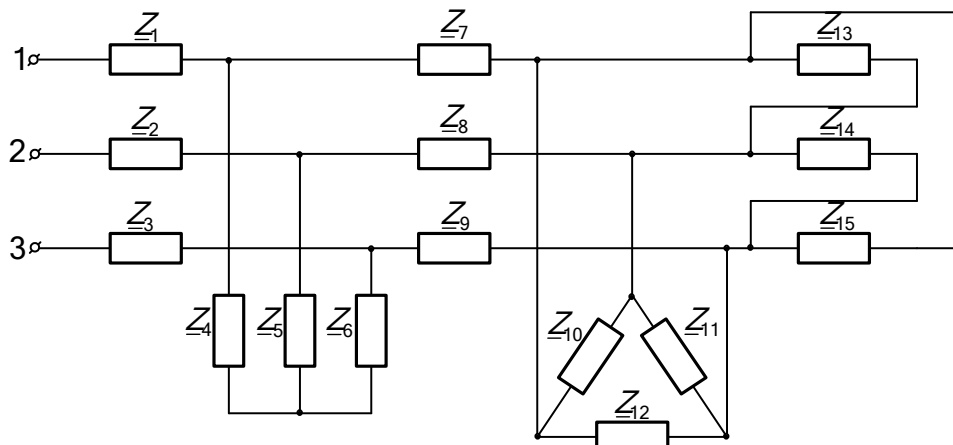
$$\underline{U}_{3'1'} = \underline{U}_{Y3} - \underline{U}_{Y1}.$$

6. Визначаємо по закону Ома струми у фазах приймача:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{1'2'}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{2'3'}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{3'1'}}{\underline{Z}_3}.$$

7. Розрахунок несиметричних складних трифазних електричних кіл.

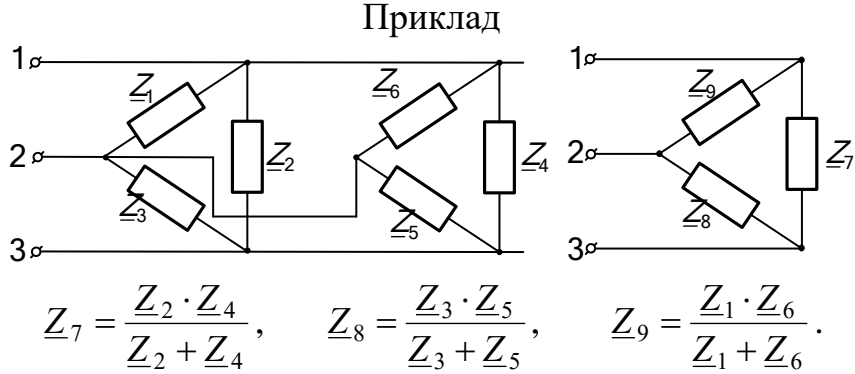
Розглянемо складну трифазну електричну схему, у котрій приймачі енергії в залежності від їх паспортних даних з'єднанні трикутником чи зіркою. Задані напруги на початку лінії $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ та всі опори навантажень. Визначить струми та напруги на всіх ділянках кола.



Для виконання розрахунку схема згортається від кінця до початку до більш простішої, яка була розглянута раніш.

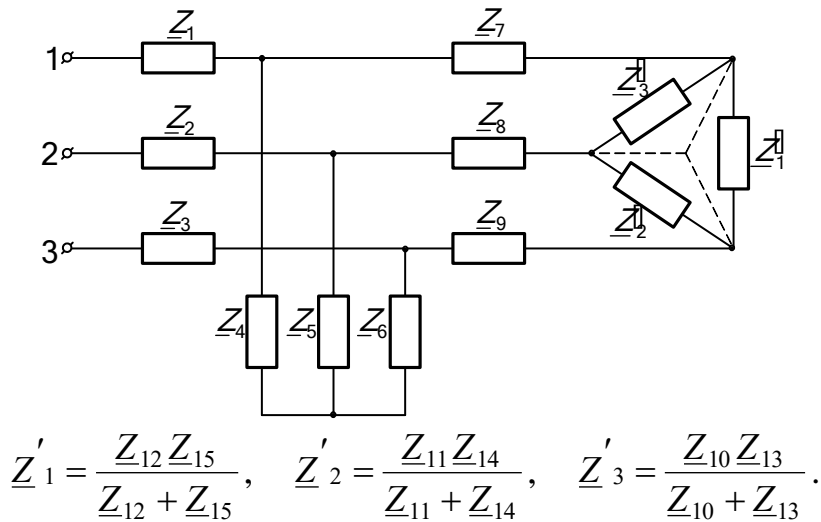
Окремі етапи перетворень зарисовуються, щоб уникнути помилок при розрахунках.

При цьому треба пам'ятати, що дві зірки замінити однією неможливо, а два трикутника можливо.

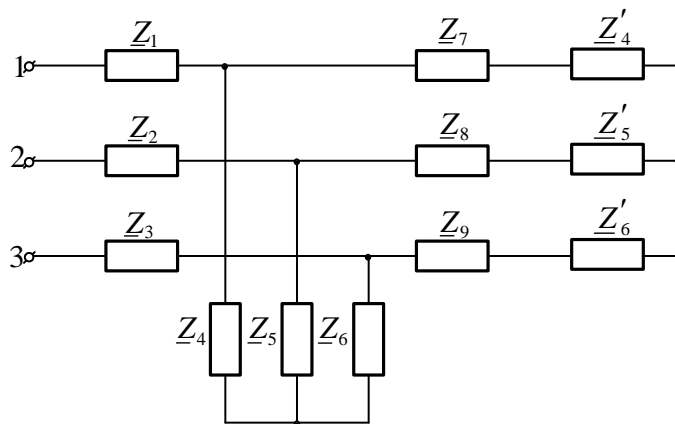


Послідовність розрахунку складної схеми

1. Замінюємо два трикутника \underline{Z}_{10} , \underline{Z}_{11} , \underline{Z}_{12} та \underline{Z}_{13} , \underline{Z}_{14} , \underline{Z}_{15} одним еквівалентним отримаємо схему:

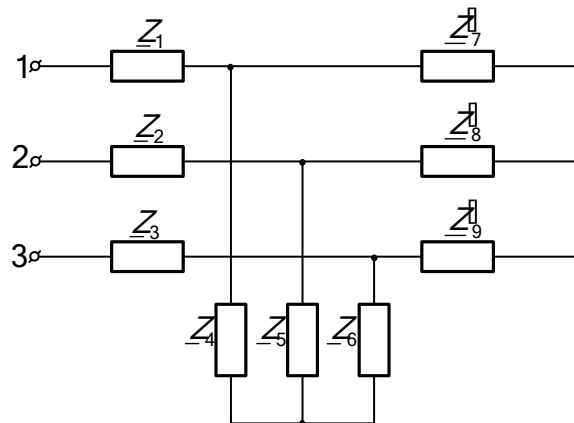


2. Замінюємо здобуте з'єднання трикутником \underline{Z}'_1 , \underline{Z}'_2 , \underline{Z}'_3 еквівалентною зіркою \underline{Z}'_4 , \underline{Z}'_5 , \underline{Z}'_6 :



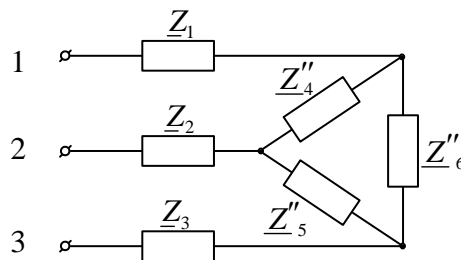
$$\underline{Z}'_4 = \frac{\underline{Z}'_3 \underline{Z}'_1}{\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_3}, \quad \underline{Z}'_5 = \frac{\underline{Z}'_3 \underline{Z}'_2}{\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_3}, \quad \underline{Z}'_6 = \frac{\underline{Z}'_1 \underline{Z}'_2}{\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_3}.$$

3. Згортаємо далі схему:



$$\underline{Z}'_7 = \underline{Z}_7 + \underline{Z}'_4, \quad \underline{Z}'_8 = \underline{Z}_8 + \underline{Z}'_5, \quad \underline{Z}'_9 = \underline{Z}_9 + \underline{Z}'_6.$$

4. В останній схемі маємо два з'єднання зіркою. Для подальшого розрахунку замінюємо два з'єднання зіркою еквівалентними трикутниками, а потім два трикутника одним. Отримаємо таку схему:



Розрахунок такої схеми було розглянуто раніш.

Для подальшого розрахунку поступово розгортаємо схему до її заданого вигляду.

8. Активна, реактивна та повна потужність трифазної системи.

Під активною потужністю трифазної системи розуміють суму активних потужностей фаз навантаження і активної потужності у опорі нульового проводу.

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0$$

Реактивна потужність трифазної системи – це сума реактивних потужностей навантаження і реактивної потужності у нульовому проводі.

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0$$

Якщо навантаження рівномірне, то:

$$P_0 = Q_0 = 0, \quad P_A = P_B = P_C = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi,$$

$$Q_A = Q_B = Q_C = U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi.$$

де: φ_ϕ – кут між напругою U_ϕ на фазі навантаження і струмом I_ϕ фази навантаження. Тоді:

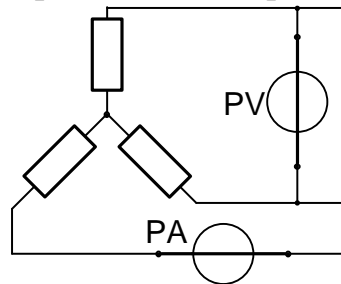
$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi, \quad Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3U_{\phi}I_{\phi}.$$

При розрахунках по приведеним формулам виникає практична незручність, так як одні прилади показують фазні величини, другі лінійні.

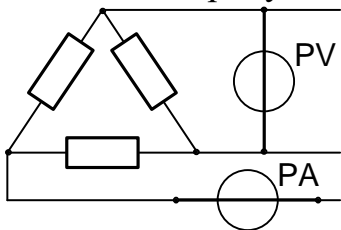
Покажемо це на прикладі.

При з'єднанні зіркою



Амперметр показує $I_{\phi} = I_L$, вольтметр – U_L .

При з'єднанні трикутником



Вольтметр показує $U_L = U_{\phi}$, амперметр – I_L .

Доцільно перетворити формули так, що до складу входили тільки лінійні величини.

При з'єднанні зіркою $I_{\phi} = I_L$, $U_{\phi} = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$,

$$P = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi.$$

При з'єднанні трикутником $I_{\phi} = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$, $U_{\phi} = U_L$,

$$P = 3 U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi.$$

Таким чином:

$$P = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi, \quad P = \sqrt{3}U_L I_L \cos \varphi.$$

Іноді у формулах не пишуть I_{ϕ} , U_{ϕ} чи U_L , I_L , але треба пам'ятати: якщо у формулі стоїть цифра 3 – то мова йде про фазні величини, а якщо $\sqrt{3}$ – то про лінійні.

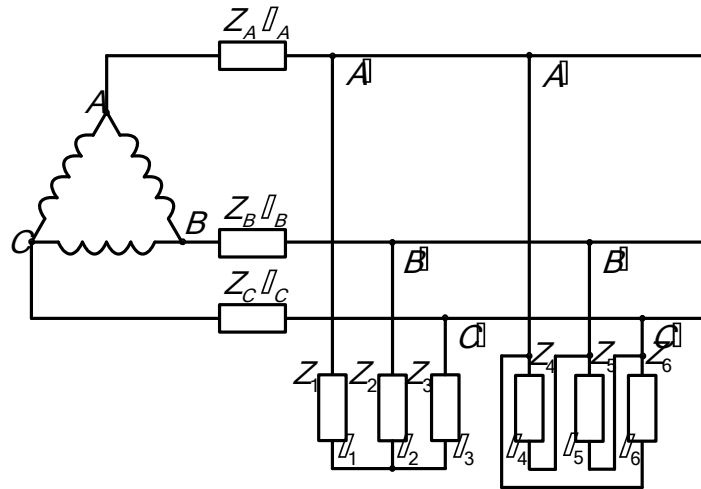
Треба пам'ятати, що ці вирази справедливі тільки при рівномірному навантаженні, коли $P_0 = Q_0 = 0$.

9. Приклад розрахунку несиметричного трифазного кола.

Для електричної схеми з джерелом живлення напругою у 100В, виконати наступне:

1. Визначить струми споживачів.
2. Визначить напруги на споживачах.

3. Розрахувати загальну потужність кола.
4. Визначити коефіцієнт потужності кола.
5. Побудувати векторну діаграму.
6. Розкласти аналітично та графічно несиметричну систему напруг та струмів на симетричні складові.



Z_A	φ_A	Z_B	φ_B	Z_C	φ_C	Z_1	φ_1	Z_2	φ_2	Z_3	φ_3	Z_4	φ_4	Z_5	φ_5	Z_6	φ_6
0,75	0	2	0	1	0	6	0	12	0	20	0	6	0	20	0	5	0
0,75	-30	2	30	1	60	6	90	12	-37	20	90	6	-20	20	90	5	90

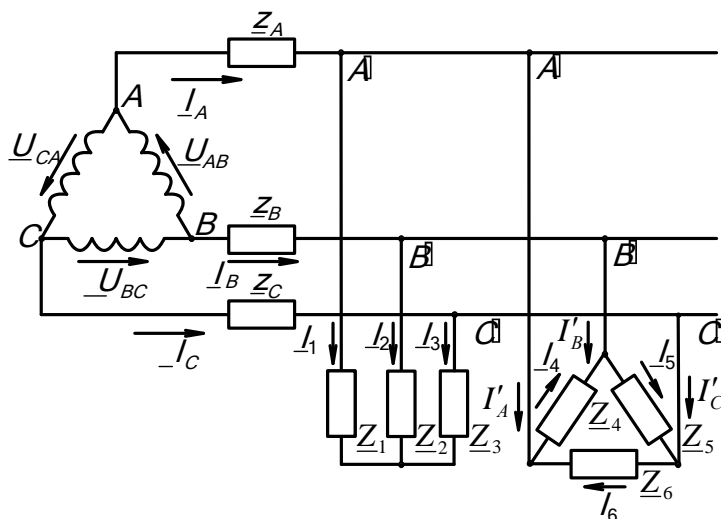
Розв'язування.

Задачу вирішуємо символічним методом. Виразимо усі опори у символічній формі у вигляді комплексних чисел.

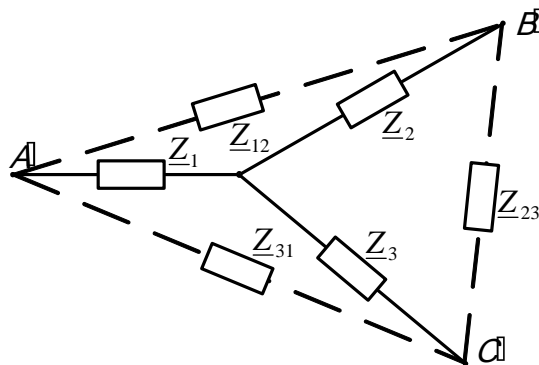
$$\begin{aligned} \underline{Z}_A &= 0.75e^{-j30^\circ} = 0.75(\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ) = \\ &= 0.75 \cdot 0.866 - j0.75 \cdot 0.5 = 0.65 - j0.375 ; \\ \underline{Z}_B &= 2e^{j30^\circ} = 2 \cdot \cos 30^\circ + j2 \sin 30^\circ = \\ &= 2 \cdot 0.866 + j2 \cdot 0.5 = 1.732 + j ; \\ \underline{Z}_C &= 1e^{j60^\circ} = 1 \cdot \cos 60^\circ + j1 \sin 60^\circ = 0.5 + j0.866 ; \\ \underline{Z}_1 &= 6e^{j90^\circ} = 6 \cdot \cos 90^\circ + j6 \sin 90^\circ = 0 + j6 = j6 ; \\ \underline{Z}_2 &= 12e^{-j37^\circ} = 12 \cos 37^\circ - j12 \sin 37^\circ = \\ &= 12 \cdot 0.798 - j12 \cdot 0.602 = 9.58 - j7.22 ; \\ \underline{Z}_3 &= 20e^{j90^\circ} = 20 \cdot \cos 90^\circ + 20j \cdot \sin 90^\circ = 0 + j20 = j20 ; \\ \underline{Z}_4 &= 6e^{-j20^\circ} = 6 \cdot \cos 20^\circ - j6 \sin 20^\circ = \\ &= 6 \cdot 0.939 - j6 \cdot 0.342 = 5.64 - j2.05 ; \\ \underline{Z}_5 &= 20e^{j90^\circ} = 20 \cos 90^\circ + j20 \sin 90^\circ = 0 + j20 = j20 ; \\ \underline{Z}_6 &= 5e^{j90^\circ} = 5 \cos 90^\circ + j5 \sin 90^\circ = 0 + j5 = j5 . \end{aligned}$$

При симетричній системі лінійних напруг та несиметричних приймачах, з'єднаних зіркою фазні напруги будуть несиметричні і напруги між нейтральними точками приймачів не будуть дорівнювати нулю. Отже, ~~одноименні фази~~ приймачів неможливо розглядати як з'єднанні паралельно.

Для знаходження еквівалентної зірки необхідно зірку $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ перетворити у еквівалентний трикутник. Так як одноименні фази приймачів, з'єднаних трикутником, знаходяться під однаковими напругами, то їх можливо розрахувати як з'єднанні паралельно, і просумувавши їх провідності здобудемо еквівалентний трикутник, котрий потім перетворюємо у еквівалентну зірку. Позначимо позитивний напрямок напруг та струмів на схемі.



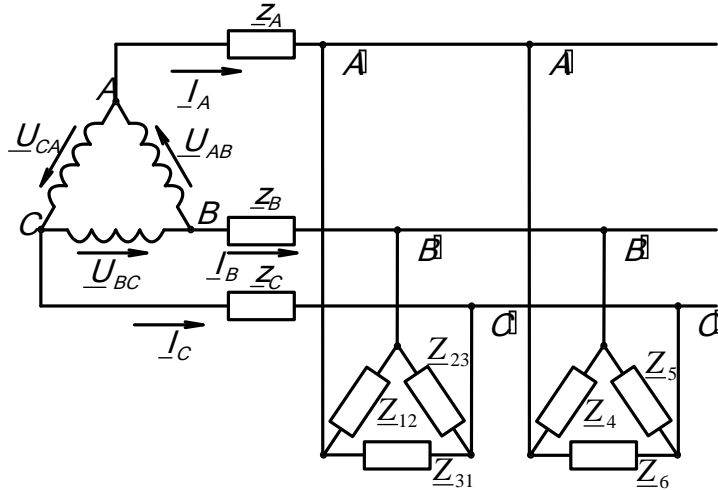
1. Перетворюємо зірку $\underline{Z}_1; \underline{Z}_2; \underline{Z}_3$; у еквівалентний трикутник.



$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \\
 &= j6 + (9.58 - j7.22) + \frac{j6(9.58 - j7.22)}{j20} = \\
 &= j6 + 9.58 - j7.22 + \frac{j6 \cdot 9.58 + 6 \cdot 7.22}{j20} = \\
 &= 9.58 - j1.22 + \frac{(j57.48 + 43.32)(-j20)}{j20(-j20)} = \\
 &= 9.58 - j1.22 + \frac{57.48 \cdot 20 - j43.32 \cdot 20}{20^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9.58 - j1.22 + \frac{20(57.48 - j43.32)}{20 \cdot 20} = \\
&= 9.58 - j1.22 + 2.87 - j2.17 = 12.45 - j3.39 \\
&\quad \underline{Z_{12}} = 12.45 - j3.39 \\
&\quad \underline{Z_{23}} = \underline{Z_2} + \underline{Z_3} + \frac{\underline{Z_2} \cdot \underline{Z_3}}{\underline{Z_1}} = \\
&= 9.58 - j7.22 + j20 + \frac{(9.58 - j7.22) \cdot j20}{j6} = \\
&= 9.58 + j12.78 + \frac{j9.58 \cdot 20 + 7.22 \cdot 20}{j6} = \\
&= 9.58 + j12.78 + \frac{(j191.6 + 144.4)(-j6)}{j6(-j6)} = \\
&= 9.58 + j12.78 + \frac{191.6 \cdot 6 - j144.4 \cdot 6}{6^2} = \\
&= 9.58 + j12.78 + \frac{6(191.6 - j144.4)}{6 \cdot 6} = \\
&9.58 + j12.78 + 31.93 - j24.06 = 41.51 - j11.28 \\
&\quad \underline{Z_{23}} = 41.51 - j11.28 \\
&\quad \underline{Z_{31}} = \underline{Z_3} + \underline{Z_1} + \frac{\underline{Z_3} \cdot \underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} = \\
&= j20 + j6 + \frac{j20 \cdot j6}{9.58 - j7.22} = \\
&= j26 + \frac{-120(9.58 + j7.22)}{(9.58 - j7.22)(9.58 + j7.22)} = \\
&= j26 + \frac{-120 \cdot 9.58 - j120 \cdot 7.22}{9.58^2 + 7.22^2} = \\
&= j26 + \frac{-1149.6 - j866.4}{91.78 + 52.13} = \\
&= j26 + \frac{-1149.6 - j866.4}{143.91} = \\
&= j26 - 8 - j6 = -8 + j20 \\
&\quad \underline{Z_{31}} = -8 + j20
\end{aligned}$$

Схема прийме вигляд:



2. Знаходимо опори еквівалентного трикутника.

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{A'B'} &= \underline{Z}_{12} \parallel \underline{Z}_4 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_4} = \\
 &= \frac{(12.45 - j3.39)(5.64 - j2.05)}{12.45 - j3.39 + 5.64 - j2.05} = \\
 &= \frac{12.45 \cdot 5.64 - j3.39 \cdot 5.64 - j12.45 \cdot 2.05 - 3.39 \cdot 2.05}{18.09 - j5.44} = \\
 &= \frac{70.22 - j19.1 - j25.52 - 6.95}{18.09 - j5.44} = \\
 &= \frac{(63.27 - j44.62)(18.09 + j5.44)}{(18.09 - j5.44)(18.09 + j5.44)} = \\
 &= \frac{63.27 \cdot 18.09 - j44.62 \cdot 18.09 + j63.27 \cdot 5.44 + 44.62 \cdot 5.64}{18.09^2 + 5.44^2} = \\
 &= \frac{1144.55 - j807.18 + j344.18 + 251.66}{327.25 + 29.59} = \\
 &= \frac{1396.21 - j463}{356.84} = 3.91 - j1.3 \\
 \underline{Z}_{A'B'} &= 3.91 - j1.3 \\
 \underline{Z}_{B'C'} &= \underline{Z}_{23} \parallel \underline{Z}_5 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_5}{\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_5} = \\
 &= \frac{(41.51 - j11.28)(j20)}{41.51 - j11.28 + j20} = \\
 &= \frac{j41.51 \cdot 20 + 11.28 \cdot 20}{41.51 + j8.72} = \\
 &= \frac{(225.6 + j830.2)(41.51 - j8.72)}{(41.51 + j8.72)(41.51 - j8.72)} = \\
 &= \frac{225.6 \cdot 41.51 + j830.2 \cdot 41.51 - j225.6 \cdot 8.72 + 830.2 \cdot 8.72}{41.51^2 + 8.72^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{9364.6 + j34461.6 - j1967.2 + 7239.3}{1723.1 + 76.04} =$$

$$= \frac{16603.9 + j32494.4}{1799.14} = 9.23 + j18.06$$

$$\underline{Z}_{B'C'} = 9.23 + j18.06$$

$$\underline{Z}_{C'A'} = \underline{Z}_{31} \parallel \underline{Z}_6 = \frac{\underline{Z}_{31} \cdot \underline{Z}_6}{\underline{Z}_{31} + \underline{Z}_6} =$$

$$= \frac{(-8 + j20)j5}{-8 + j20 + j5} = \frac{(-j40 - 100)(-8 - j25)}{(-8 + j25)(-8 - j25)} =$$

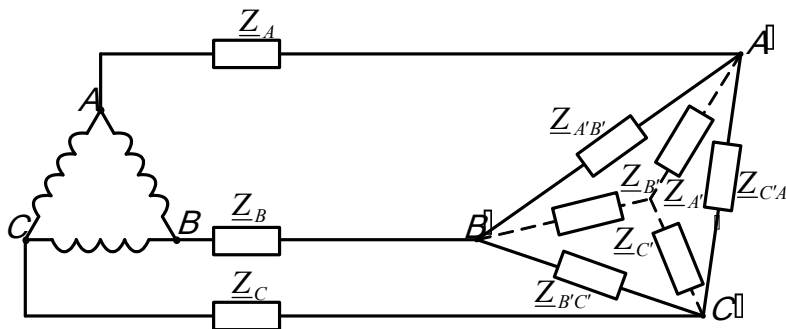
$$= \frac{j40 \cdot 8 + 100 \cdot 8 - 25 \cdot 40 + j100 \cdot 25}{8^2 + 25^2} =$$

$$= \frac{j320 + 800 - 1000 + j2500}{689} =$$

$$= \frac{-200 + j2820}{689} = -0.29 + j4.09$$

$$\underline{Z}_{C'A'} = -0.29 + j4.09$$

Схема приймає вигляд:



3. Визначимо опори промінів еквівалентної зірки.

$$\underline{Z}_{A'} = \frac{\underline{Z}_{A'B'} \cdot \underline{Z}_{C'A'}}{\underline{Z}_{A'B'} + \underline{Z}_{B'C'} + \underline{Z}_{C'A'}} =$$

$$= \frac{(3.91 - j1.3)(-0.29 + j4.09)}{3.91 - j1.3 + 9.23 + j18.06 - 0.29 + j4.09} =$$

$$= \frac{-3.91 \cdot 0.29 + j1.3 \cdot 0.29 + j3.91 \cdot 4.09 + 1.3 \cdot 4.09}{12.84 + j20.85} =$$

$$= \frac{-1.13 + j0.38 + j16.0 + 5.32}{12.84 + j20.85} =$$

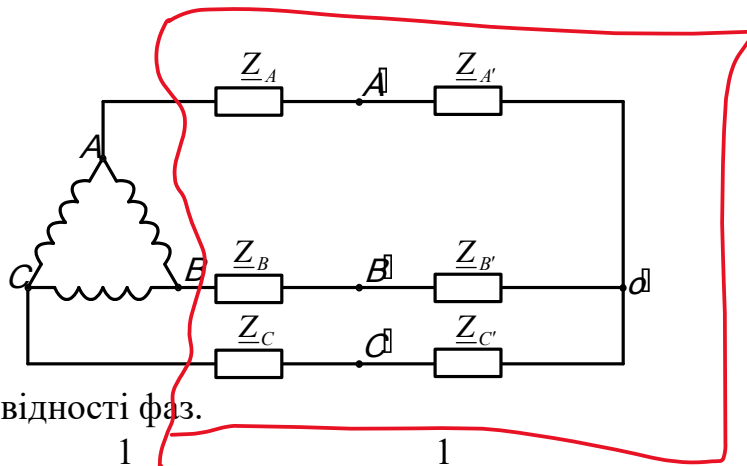
$$= \frac{(4.19 + j16.38)(12.84 - j20.85)}{(12.84 + j20.85)(12.84 - j20.85)} =$$

$$= \frac{4.19 \cdot 12.84 + j16.38 \cdot 12.84 - j4.19 \cdot 20.85 + 16.38 \cdot 20.85}{12.84^2 + 20.85^2} =$$

$$= \frac{53.8 + j210.32 - j87.36 + 341.52}{164.86 + 434.72} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{395.32 + j122.96}{599.58} = 0.66 + j.21 \\
\underline{Z}_{A'} &= 0.66 + j.21 \\
\underline{Z}_{B'} &= \frac{\underline{Z}_{B'C'} \cdot \underline{Z}_{A'B'}}{\underline{Z}_{A'B'} + \underline{Z}_{B'C'} + \underline{Z}_{C'A'}} = \\
&= \frac{(9.23 + j18.06)(3.91 - j1.3)}{12.84 + j20.85} = \\
&= \frac{9.23 \cdot 3.91 + j18.06 \cdot 3.91 - j9.23 \cdot 1.3 + 18.06 \cdot 1.3}{12.84 + j20.85} = \\
&= \frac{36.09 + j70.6 - j12.0 + 23.48}{12.84 + j20.85} = \\
&= \frac{(59.57 + j58.5)(12.84 - j20.85)}{(12.84 + j20.85)(12.84 - j20.85)} = \\
&= \frac{59.57 \cdot 12.84 + j58.5 \cdot 12.84 - j59.57 \cdot 20.85 + 58.5 \cdot 20.85}{12.84^2 + 20.85^2} = \\
&= \frac{764.88 + j751.14 - j1241.84 + 1219.73}{599.58} = \\
&= \frac{1984.61 - j490.7}{599.58} = 3.31 - j0.82 \\
\underline{Z}_{B'} &= 3.31 - j0.82 \\
\underline{Z}_{C'} &= \frac{\underline{Z}_{C'A'} \cdot \underline{Z}_{B'C'}}{\underline{Z}_{A'B'} + \underline{Z}_{B'C'} + \underline{Z}_{C'A'}} = \\
&= \frac{(-0.29 + j4.09)(9.23 + j18.06)}{12.84 + j20.85} = \\
&= \frac{-0.29 \cdot 9.23 + j4.09 \cdot 9.23 - j0.29 \cdot 18.06 - 4.09 \cdot 18.06}{12.84 + j20.85} = \\
&= \frac{-2.68 + j37.75 - j5.24 - 73.86}{12.84 + j20.85} = \\
&= \frac{(-76.54 + j35.51)(12.84 - j20.85)}{(12.84 + j20.85)(12.84 - j20.85)} = \\
&= \frac{-76.54 \cdot 12.84 + j35.51 \cdot 12.84 + j76.54 \cdot 20.85 + 35.51 \cdot 20.85}{12.84^2 + 20.85^2} = \\
&= \frac{-982.77 + j455.95 + j1595.86 + 740.38}{164.87 + 434.72} = \\
&= \frac{-242.39 + j2051.81}{599.58} = -0.4 + j3.42 \\
\underline{Z}_{C'} &= -0.4 + j3.42
\end{aligned}$$

Схема приймає вигляд:



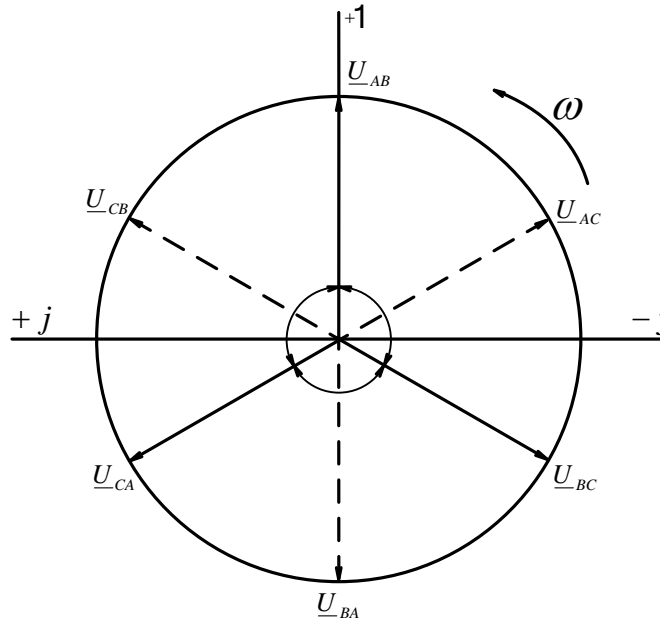
4. Визначаємо провідності фаз.

$$\begin{aligned} \underline{Y}_A &= \frac{1}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_{A'}} = \frac{1}{0.65 - j0.375 + 0.66 + j0.21} = \\ &= \frac{1}{1(1.31 + j0.165)} = \frac{1.31 + j0.165}{(1.31 - j0.165)(1.31 + j0.165)} = \frac{1.31 + j0.165}{1.31^2 + 0.165^2} = \\ &= \frac{1.31 + j0.165}{1.72 + 0.03} = \frac{1.31 + j0.165}{1.75} = 0.75 + j0.09 \\ \underline{Y}_A &= 0.75 + j0.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_B &= \frac{1}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_{B'}} = \frac{1}{1.732 + j + 3.31 - j0.82} = \\ &= \frac{1}{1(5.04 - j0.18)} = \\ &= \frac{5.04 - j0.18}{(5.04 + j0.18)(5.04 - j0.18)} = \\ &= \frac{5.04 - j0.18}{5.04^2 + 0.18^2} = \frac{5.04 - j0.18}{25.4 + 0.03} = \\ &= \frac{5.04 - j0.18}{25.43} = 0.198 - j0.007 \\ \underline{Y}_B &= 0.198 - j0.007 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_C &= \frac{1}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{C'}} = \frac{1}{0.5 + j0.866 - 0.4 + j3.42} = \\ &= \frac{1}{1(0.1 - j4.28)} = \frac{0.1 - j4.28}{(0.1 + j4.28)(0.1 - j4.28)} = \frac{0.1 - j4.28}{0.1^2 + 4.28^2} = \\ &= \frac{0.1 - j4.28}{0.01 + 18.32} = \frac{0.1 - j4.28}{18.33} = 0.005 - j0.23 \\ \underline{Y}_C &= 0.005 - j0.23 \end{aligned}$$

5. Запишемо лінійні напруги генератора у символічному вигляді.



Направимо вектор \underline{U}_{AB} по дійсній позитивній осі.

Тоді: $\underline{U}_{AB} = 100B$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{BC} &= \underline{U}_{AB} \cdot e^{-j120^\circ} = \underline{U}_{AB} \cdot \cos(-120^\circ) + j\underline{U}_{AB} \cdot \sin(-120^\circ) = \\ &= 100(-0.5 - j0.866) = -50 - j87\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{BC} = (-50 - j87)B$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{CA} &= \underline{U}_{AB} \cdot e^{j120^\circ} = 100(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = \\ &= 100(-0.5 + j0.866) = -50 + j87\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{CA} = (-50 + j87)B$$

6. Враховуємо, що:

$$\underline{U}_{BA} = \underline{U}_{AB} \cdot e^{j180^\circ} = -\underline{U}_{AB} = -100B$$

$$\underline{U}_{CB} = \underline{U}_{BC} \cdot e^{j180^\circ} = -\underline{U}_{BC} = (50 + j87)B$$

$$\underline{U}_{AC} = \underline{U}_{CA} \cdot e^{j180^\circ} = -\underline{U}_{CA} = (50 - j87)B$$

7. Визначаємо фазні напруги генератора.

$$\begin{aligned}\underline{U}_{A0'} &= \frac{\underline{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_B + \underline{U}_{AC} \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\ &= \frac{100(0.198 - j0.007) + (50 - j87)(0.005 - j0.23)}{0.75 + j0.09 + 0.198 - j0.007 + 0.005 - j0.23} = \\ &= \frac{19.8 - j0.7 + 50 \cdot 0.005 - j87 \cdot 0.005 - j50 \cdot 0.23 - 87 \cdot 0.23}{0.953 - j0.147} = \\ &= \frac{19.8 - j0.7 + 0.25 - j0.44 - j11.5 - 20.01}{0.953 - j0.147} = \\ &= \frac{(0.04 - j12.64)(0.953 + j0.147)}{(0.953 - j0.147)(0.953 + j0.147)} = \\ &= \frac{0.04 \cdot 0.953 - j12.64 \cdot 0.953 + j0.04 \cdot 0.147 + 12.64 \cdot 0.147}{0.953^2 + 0.147^2} = \\ &= \frac{0.038 - j12.05 + j0.006 + 1.86}{0.908 + 0.022} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1.898 - j12.04}{0.93} = 2.04 - j12.95 \\
\underline{U}_{A0'} &= (2.04 - j12.95)B \\
\underline{U}_{B0'} &= \frac{\underline{U}_{BA} \cdot \underline{Y}_A + \underline{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\
&= \frac{-100(0.75 + j0.09) + (-50 - j87)(0.005 - j0.23)}{0.953 - j0.147} = \\
&= \frac{-75 - j9 - 50 \cdot 0.005 - j87 \cdot 0.005 + j50 \cdot 0.23 - 87 \cdot 0.23}{0.953 - j0.147} = \\
&= \frac{-75 - j9 - 0.25 - j0.44 + j11.5 - 20.01}{0.953 - j0.147} = \\
&= \frac{(-95.26 - j2.06)(0.953 + j0.147)}{(0.953 - j0.147)(0.953 + j0.147)} = \\
&= \frac{-95.26 \cdot 0.953 - j2.06 \cdot 0.953 - j95.26 \cdot 0.147 + 2.06 \cdot 0.147}{0.953^2 + 0.147^2} = \\
&= \frac{-90.78 - j1.96 - j14.0 + 0.3}{0.93} = \\
&= \frac{-90.78 - j15.96}{0.93} = -97.3 - j17.16 \\
\underline{U}_{B0'} &= (-97.3 - j17.16)B \\
\underline{U}_{C0'} &= \frac{\underline{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_A + \underline{U}_{CB} \cdot \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\
&= \frac{(-50 + j87)(0.75 + j0.09) + (50 + j87)(0.198 - j0.007)}{0.953 - j0.147} = \\
&= \frac{-50 \cdot 0.75 + j87 \cdot 0.75 - j50 \cdot 0.09 - 87 \cdot 0.09 + 50 \cdot 0.198 + \\
&\quad + j87 \cdot 0.198 - j50 \cdot 0.007 + 87 \cdot 0.007}{0.953 - j0.147} = \\
&= \frac{-37.5 + j65.25 - j4.5 - 7.83 + 9.9 + j17.23 - j0.35 + 0.61}{0.953 - j0.147} = \\
&= \frac{(-34.82 + j74.63)(0.953 + j0.147)}{(0.953 - j0.147)(0.953 + j0.147)} = \\
&= \frac{-34.82 \cdot 0.953 + j74.63 \cdot 0.953 - j34.82 \cdot 0.147 - 74.6 \cdot 0.147}{0.953^2 + 0.147^2} = \\
&= \frac{-33.18 + j71.12 - j5.12 - 10.98}{0.93} = \\
&= \frac{-44.16 + j66.0}{0.93} = -47.5 + j71.0 \\
\underline{U}_{C0'} &= (-47.5 + j71.0)B
\end{aligned}$$

8. Визначаємо лінійні струми.

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{U}_{A'O'} \cdot \underline{Y}_A = (2.04 - j12.95)(0.75 + j0.09) = \\ &= 2.04 \cdot 0.75 - j12.95 \cdot 0.75 + j2.04 \cdot 0.09 + 12.95 \cdot 0.09 = \\ &= 3.3 - j9.53\end{aligned}$$

$$\underline{I}_A = (3.3 - j9.53)A$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_B &= \underline{U}_{B'O'} \cdot \underline{Y}_B = (-97.3 - j17.16)(0.198 - j0.007) = \\ &= -97.3 \cdot 0.198 - j17.16 \cdot 0.198 + j97.3 \cdot 0.007 - 17.16 \cdot 0.007 = \\ &= -19.26 - j3.4 + j0.7 - 0.12 = -19.38 - j2.7\end{aligned}$$

$$\underline{I}_B = (-19.4 - j2.7)A$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \underline{U}_{C'O'} \cdot \underline{Y}_C = (-47.5 + j71.0)(0.005 - j0.23) = \\ &= -47.5 \cdot 0.005 + j71.0 \cdot 0.005 + j47.5 \cdot 0.23 + 71 \cdot 0.23 = \\ &= 16.1 + j12.23\end{aligned}$$

$$\underline{I}_C = (16.1 + j12.23)A$$

9. Визначаємо фазні напруги на еквівалентній зірці.

$$\begin{aligned}\underline{U}_{A'O'} &= \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_{A'} = (3.3 - j9.53)(0.66 + j0.21) = \\ &= 3.3 \cdot 0.66 - j9.53 \cdot 0.66 + j3.3 \cdot 0.21 + 9.53 \cdot 0.21 = \\ &= 2.18 - j6.29 + j0.69 + 2.0 = 4.8 - j5.6\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{A'O'} = (4.8 - j5.6)B$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{B'O'} &= \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_{B'} = (-19.4 - j2.7)(3.31 - j0.82) = \\ &= -19.4 \cdot 3.31 - j2.7 \cdot 3.31 + j19.4 \cdot 0.82 - 27 \cdot 0.82 = \\ &= -64.21 - j8.94 + j15.91 - 2.21 = -62.0 + j7.0\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{B'O'} = (-6.2 + j7)B$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{C'O'} &= \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_{C'} = (16.1 + j12.23)(-0.4 + j3.42) = \\ &= -16.1 \cdot 0.4 - j12.23 \cdot 0.4 + j16.1 \cdot 3.42 - 12.23 \cdot 3.42 = \\ &= -6.44 - j4.89 + j55.06 - 41.83 = -48.27 + j50.17\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{C'O'} = (-48.27 + j50.17)B$$

10. Визначаємо лінійні (вони є і фазні) струми споживачів, з'єднаних зіркою.

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{A'O'}}{\underline{Z}_1} = \frac{(4.8 - j5.6)(-j6)}{j6 \cdot (-j6)} = \\ &= \frac{-j4.8 \cdot 6 - 5.6 \cdot 6}{6 \cdot 6} = -0.93 - j0.8\end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = (-0.93 - j0.8)A$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{B'O'}}{\underline{Z}_2} = \frac{(-62 + j7)(9.58 + j7.22)}{(9.58 - j7.22)(9.58 + j7.22)} = \\ &= \frac{-62 \cdot 9.58 + j7 \cdot 9.58 - j62 \cdot 7.22 - 7 \cdot 7.22}{9.58^2 + 7.22^2} = \\ &= \frac{-593.96 + j67.05 - j474.64 - 50.54}{91.78 + 52.13} = \\ &= \frac{-644.5 - j380.59}{143.91} = -4.48 - j2.64\end{aligned}$$

$$\underline{I}_2 = (-4.48 - j2.64)A$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{C'O'}}{\underline{Z}_3} = \frac{(-48.27 + j50.17)(-j20)}{j20 \cdot (-j20)} = \\ &= \frac{j48.27 \cdot 20 + 50.17 \cdot 20}{20 \cdot 20} = 2.51 + j2.41 \\ \underline{I}_3 &= (2.51 + j2.41)A \end{aligned}$$

11. Визначаємо лінійні напруги на еквівалентній зірці, котрі одночасно являються і напругами на трикутнику споживачів.

$$\underline{U}_{A'B'} = \underline{U}_{A'O'} - \underline{U}_{B'O'} = 4.8 - j5.6 + 62.0 - j7.0 = 66.8 - j12.6$$

$$\underline{U}_{A'B'} = (66.8 - j12.6)B$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{B'C'} &= \underline{U}_{B'O'} - \underline{U}_{C'O'} = -6.2 + j7 + 48.27 - j50.17 = \\ &= -13.73 - j43.17 \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{B'C'} = (-13.73 - j43.17)B$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{C'A'} &= \underline{U}_{C'O'} - \underline{U}_{A'O'} = -48.27 + j50.17 - 4.8 + j5.6 = \\ &= -53.07 + j55.77 \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{C'A'} = (-53.07 + j55.77)B$$

Перевірка: алгебраїчна сума лінійних напруг завжди дорівнює нулю.

$$\begin{aligned} \underline{U}_{A'B'} + \underline{U}_{B'C'} + \underline{U}_{C'A'} &= 66.8 - j12.6 - 13.73 + j43.17 - 53.07 + \\ &+ j55.77 = 0 \end{aligned}$$

Напруги визначені правильно.

12. Визначаємо фазні струми споживача, з'єднаного трикутником.

$$\begin{aligned} \underline{I}_4 &= \underline{I}_{A'B'} = \frac{\underline{U}_{A'B'}}{\underline{Z}_4} = \frac{(66.8 - j12.6)(5.64 + j2.05)}{(5.64 - j2.05)(5.64 + j2.05)} = \\ &= \frac{66.8 \cdot 5.64 - j12.6 \cdot 5.64 + j66.8 \cdot 2.05 + 12.6 \cdot 2.05}{5.64^2 + 2.05^2} = \\ &= \frac{376.75 - j71.06 + j136.94 + 25.83}{31.81 + 4.2} = \\ &= \frac{402.58 + j68.88}{36.01} = 11.8 + j1.91 \\ \underline{I}_4 &= (11.8 + j1.91)A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_5 &= \underline{I}_{B'C'} = \frac{\underline{U}_{B'C'}}{\underline{Z}_5} = \frac{(-13.73 - j43.17)(-j20)}{j20 \cdot (-j20)} = \\ &= \frac{j13.73 \cdot 20 - 43.17 \cdot 20}{20 \cdot 20} = -2.16 + j0.69 \\ \underline{I}_5 &= (-2.16 + j0.69)A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_6 &= \underline{I}_{C'A'} = \frac{\underline{U}_{C'A'}}{\underline{Z}_6} = \frac{(-53.07 + j55.77)(-j5)}{j5 \cdot (-j5)} = \\ &= \frac{j53.07 \cdot 5 + 55.77 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 11.18 + j10.61 \\ \underline{I}_6 &= (11.18 + j10.61)A \end{aligned}$$

13. Визначаємо лінійні струми споживача, з'єднаного трикутником.

$$\underline{I}_{A'} = \underline{I}_{A'B'} - \underline{I}_{C'A'} = 11.8 + j1.91 - 11.18 - j10.61 = -j8.7$$

$$\underline{I}_{A'} = (-j8.7)A$$

$$\underline{I}_{B'} = \underline{I}_{B'C'} - \underline{I}_{A'B'} = -2.16 + j0.9 - 11.18 - j1.91 = -13.34 - j1.22$$

$$\underline{I}_{B'} = (-13.34 - j1.22)A$$

$$\underline{I}_{C'} = \underline{I}_{C'A'} - \underline{I}_{B'C'} = 11.18 + j10.61 + 2.16 - j0.69 = 13.34 + j9.92$$

$$\underline{I}_{C'} = (13.34 + j9.92)A$$

14. Загальну потужність кола визначимо як суму потужностей фаз. Потужність фази визначається як добуток фазної напруги на спряжений комплекс струму.

$$\tilde{S}_A = \underline{U}_{A0'} \cdot \underline{I}_A^* = (2.04 - j12.95)(3.3 + j9.53) =$$

$$= 6.73 - j43.73 + j19.44 + 123.41 = 130.14 - j23.3$$

$$\tilde{S}_B = \underline{U}_{B0'} \cdot \underline{I}_B^* = (-97.3 - j17.6)(-19.4 + j2.7) =$$

$$= 1875.96 + j70.19$$

$$\tilde{S}_C = \underline{U}_{C0'} \cdot \underline{I}_C^* = (-47.5 + j71)(16.1 - j12.23) =$$

$$= 103.58 + j1724.02$$

$$\tilde{S} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C = 130.14 - j23.3 + 1875.96 +$$

$$+ j70.19 + 103.58 + j1724.02 = 2109.64 + j1770.91$$

$$\tilde{S} = P + jQ$$

$$\tilde{S} = (2109.64 + j1770.91)$$

$$Q = 1770.91 \text{ BAp}$$

$$P = 2109.64 \text{ Bm}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2109.64^2 + 1770.91^2} = 2755 \text{ BA}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{2109}{2755} = 0,765$$

$$\varphi = 40^\circ$$

15. Розкладемо аналітично несиметричну систему лінійних напруг на трикутнику споживача на симетричні складові.

$$\underline{U}_{A'B'} = \underline{A} = (66.8 - j12.6)B$$

$$\underline{U}_{B'C'} = \underline{B} = (-13.73 - j43.17)B$$

$$\underline{U}_{C'A'} = \underline{C} = (-53.07 + j55.57)B$$

Складові нульової послідовності:

$$\underline{A}_0 = \frac{1}{3}(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}) =$$

$$= \frac{66.8 - j12.6 - 13.73 - j43.17 - 53.07 + j55.57}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\underline{A}_0 = 0$$

так як алгебраїчна сума лінійних напруг завжди дорівнює нулю.

Складова прямої послідовності:

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{3}(\underline{A} + a \cdot \underline{B} + a^2 \cdot \underline{C})$$

$$a = e^{j120^\circ} = -0.5 + j0.866$$

$$a^2 = e^{-j120^\circ} = -0.5 - j0.866$$

$$\underline{U}_{1A'B'} = \frac{1}{3}(\underline{U}_{A'B'} + a \cdot \underline{U}_{B'C'} + a^2 \cdot \underline{U}_{C'A'})$$

$$\underline{U}_{1A'B'} = \frac{(66.8 - j12.6) + (-13.73 - j43.17)(-0.5 + j0.866) + (-53.07 + j55.57)(-0.5 - j0.866)}{3} = \frac{66.8 - j12.6 + 13.73 \cdot 0.5 + j43.17 \cdot 0.5 - j13.73 \cdot 0.866 + 43.17 \cdot 0.866 + 53.07 \cdot 0.5 - j55.77 \cdot 0.5 + j53.07 \cdot 0.866 + 55.77 \cdot 0.866}{3} = \frac{66.8 - j12.6 + 6.86 + j21.58 - j11.9 + 37.38 + 26.53 - j27.78 + j45.96 + 48.3}{3} = \frac{185.87 + j15.14}{3} = 62 + j5.05$$

$$\underline{U}_{1A'B'} = (62 + j5.05)B$$

$$\underline{U}_{1B'C'} = \underline{U}_{1A'B'} \cdot a^2 = (62 + j5.05)(-0.5 - j0.866) = -62 \cdot 0.5 - j5.05 \cdot 0.5 - j62 \cdot 0.866 + 5.05 \cdot 0.866 = -31 - j2.52 - j53.7 + 4.37 = -26.63 - j56.22$$

$$\underline{U}_{1B'C'} = (-26.63 - j56.22)B$$

$$\underline{U}_{1C'A'} = \underline{U}_{1A'B'} \cdot a = (62 + j5.05)(-0.5 + j0.866) = -62 \cdot 0.5 - j5.05 \cdot 0.5 + j62 \cdot 0.866 - 5.05 \cdot 0.866 = -31 - j2.52 + j53.7 - 4.37 = -35.37 + j51.18$$

$$\underline{U}_{1C'A'} = (-35.37 + j51.18)B$$

Перевірка:

$$\underline{A}_1 + \underline{B}_1 + \underline{C}_1 = 62 + j5.05 - 26.63 - j56.22 - 35.37 + j51.17 = 0$$

Розклад виконано вірно.

Складові зворотної послідовності.

$$\underline{A}_2 = \frac{\underline{A} + a^2 \cdot \underline{B} + a \cdot \underline{C}}{3}$$

$$\underline{A}_2 = \frac{66.8 - j12.6 + (-13.73 - j43.17)(-0.5 - j0.866) + (-53.07 + j55.57)(-0.5 + j0.866)}{3} = \frac{66.8 - j12.6 + 6.86 + j21.58 + j11.9 - 37.38 + 26.53 - j27.78 - j45.96 - 48.3}{3} = \frac{14.51 - j52.86}{3} = 4.84 - j17.62$$

$$\underline{A}_2 = \underline{U}_{2A'B'} = (4.84 - j17.62)B$$

$$\underline{B}_2 = \underline{A}_2 \cdot a = (4.84 - j17.62)(-0.5 + j0.866) = -4.84 \cdot 0.5 + j17.62 \cdot 0.5 + j4.84 \cdot 0.866 + 17.62 \cdot 0.866 = -2.42 + j8.81 + j4.19 + 15.26 = 12.84 + j13$$

$$\underline{B}_2 = \underline{U}_{2B'C'} = (12.84 + j13)B$$

$$\begin{aligned}\underline{C}_2 &= \underline{A}_2 \cdot a^2 = (4.84 - j17.62)(-0.5 - j0.866) = \\ &= -0.5 \cdot 4.84 + j17.62 \cdot 0.5 - j4.84 \cdot 0.866 - 17.62 \cdot 0.866 = \\ &= -2.42 + j8.81 - j4.19 - 15.26 = -17.68 + j4.62 \\ \underline{C}_2 &= \underline{U}_{2C'A'} = (-17.68 + j4.62)B\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\underline{A}_2 + \underline{B}_2 + \underline{C}_2 = 4.84 - j17.62 + 12.84 + j13 - 17.68 + j4.62 = 0$$

Розклад виконано вірно.

16. Розкладемо аналітично несиметричну систему лінійних струмів споживача, з'єднаного трикутником, на симетричні складові.

$$\begin{aligned}\underline{I}_{A'} &= -j8.7 = \underline{A} \\ \underline{I}_{B'} &= -13.34 - j1.22 = \underline{B} \\ \underline{I}_{C'} &= 13.34 + j9.92 = \underline{C}\end{aligned}$$

Складові нульової послідовності

$$\begin{aligned}\underline{A}_0 &= \underline{I}_{0A'} = \underline{I}_{0B'} = \underline{I}_{0C'} = \frac{1}{3}(\underline{I}_{A'} + \underline{I}_{B'} + \underline{I}_{C'}) = \\ &= \frac{-j8.7 - 13.34 - j1.22 + 13.34 + j9.92}{3} = \frac{0}{3} = 0 \\ \underline{I}_0 &= 0\end{aligned}$$

Система немає нульового проводу.

Складові прямої послідовності.

$$\underline{A}_1 = \underline{I}_{1A'} = \frac{1}{3}(\underline{I}_{A'} + a \cdot \underline{I}_{B'} + a^2 \cdot \underline{I}_{C'});$$

де: оператор $a = e^{j120} = -0.5 + j0.866$,

$$a^2 = e^{-j120} = -0.5 - j0.866.$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{1A'} &= \frac{-j8.7 + (-13.34 - j1.22)(-0.5 + j0.866) + \\ &\quad + (13.34 + j9.92)(-0.5 - j0.866)}{3} = \\ &= \frac{-j8.7 + 13.34 \cdot 0.5 + j1.22 \cdot 0.5 - j13.34 \cdot 0.866 + \\ &\quad + 1.22 \cdot 0.866 - 13.34 \cdot 0.5 - j9.92 \cdot 0.5 - j13.34 \cdot 0.866 + \\ &\quad + 9.92 \cdot 0.866}{3} = \frac{-j8.7 + j0.61 - j11.55 + 1.06 - j4.96 - \\ &\quad - j11.55 + 8.59}{3} = \frac{9.65 - j36.05}{3} = 3.22 - j12.02 \\ \underline{I}_{1A'} &= (3.22 - j12.02)A \\ \underline{I}_{1B'} &= \underline{I}_{1A'} \cdot a^2 = (3.22 - j12.02)(-0.5 - j0.866) = \\ &= -3.22 \cdot 0.5 + j12.02 \cdot 0.5 - j3.22 \cdot 0.866 - 12.02 \cdot 0.866 = \\ &= -1.61 + j6.01 - j2.79 - 10.41 = -12.02 + j3.22 \\ \underline{I}_{1B'} &= (-12.02 + j3.22)A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{1C'} &= \underline{I}_{1A'} \cdot a = (3.22 - j12.02)(-0.5 + j0.866) = \\ &= -1.61 + j6.01 + j2.79 + 10.41 = 8.8 + j8.8 \\ \underline{I}_{1C'} &= (8.8 + j8.8)A\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\underline{I}_{1A'} + \underline{I}_{1B'} + \underline{I}_{1C'} = 3.22 - j12.02 - 12.02 + j3.22 + 8.8 + j8.8 = 0$$

Розклад виконано вірно.

Складові зворотної послідовності.

$$\begin{aligned}A_2 &= \underline{I}_{2A'} = \frac{1}{3}(\underline{I}_{A'} + a^2 \cdot \underline{I}_{B'} + a \cdot \underline{I}_{C'}) = \\ &= \frac{-j8.7 + (-13.34 - j1.22)(-0.5 - j0.866) + (13.34 + j9.92) \cdot \\ &\quad \cdot (-0.5 + j0.866)}{3} = \frac{-j8.7 + 13.34 \cdot 0.5 + j1.22 \cdot 0.5 + \\ &\quad + j13.34 \cdot 0.866 - 1.22 \cdot 0.866 - 13.34 \cdot 0.5 - j9.92 \cdot 0.5 + \\ &\quad + j13.34 \cdot 0.866 - 9.92 \cdot 0.866}{3} = \frac{-j8.7 + j0.61 + j11.5 - 1.06 - \\ &\quad - j4.96 + j11.5 - 8.59}{3} = \frac{-9.65 + j9.95}{3} = -3.22 + j3.32\end{aligned}$$

$$\underline{I}_{2A'} = (-3.22 + j3.32)A$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{2B'} &= \underline{I}_{2A'} \cdot a = (-3.22 + j3.32)(-0.5 + j0.866) = \\ &= 3.22 \cdot 0.5 - j3.32 \cdot 0.5 - j3.22 \cdot 0.866 - 3.32 \cdot 0.866 = \\ &= 1.61 - j1.66 - j2.79 - 2.88 = -1.27 - j4.45\end{aligned}$$

$$\underline{I}_{2B'} = (-3.22 + j3.32)A$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{2C'} &= \underline{I}_{2A'} \cdot a^2 = (-3.22 + j3.32)(-0.5 - j0.866) = \\ &= 1.61 - j1.66 + j2.79 + 2.88 = 4.49 + j1.13\end{aligned}$$

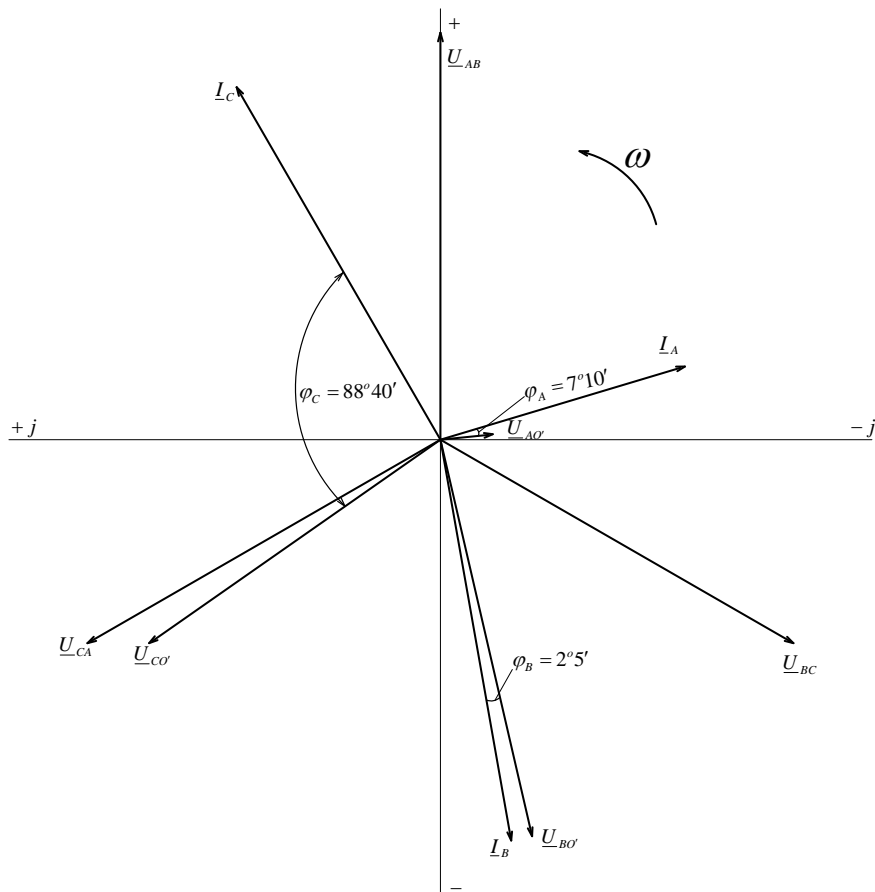
$$\underline{I}_{2C'} = (4.49 + j1.13)A$$

Перевірка:

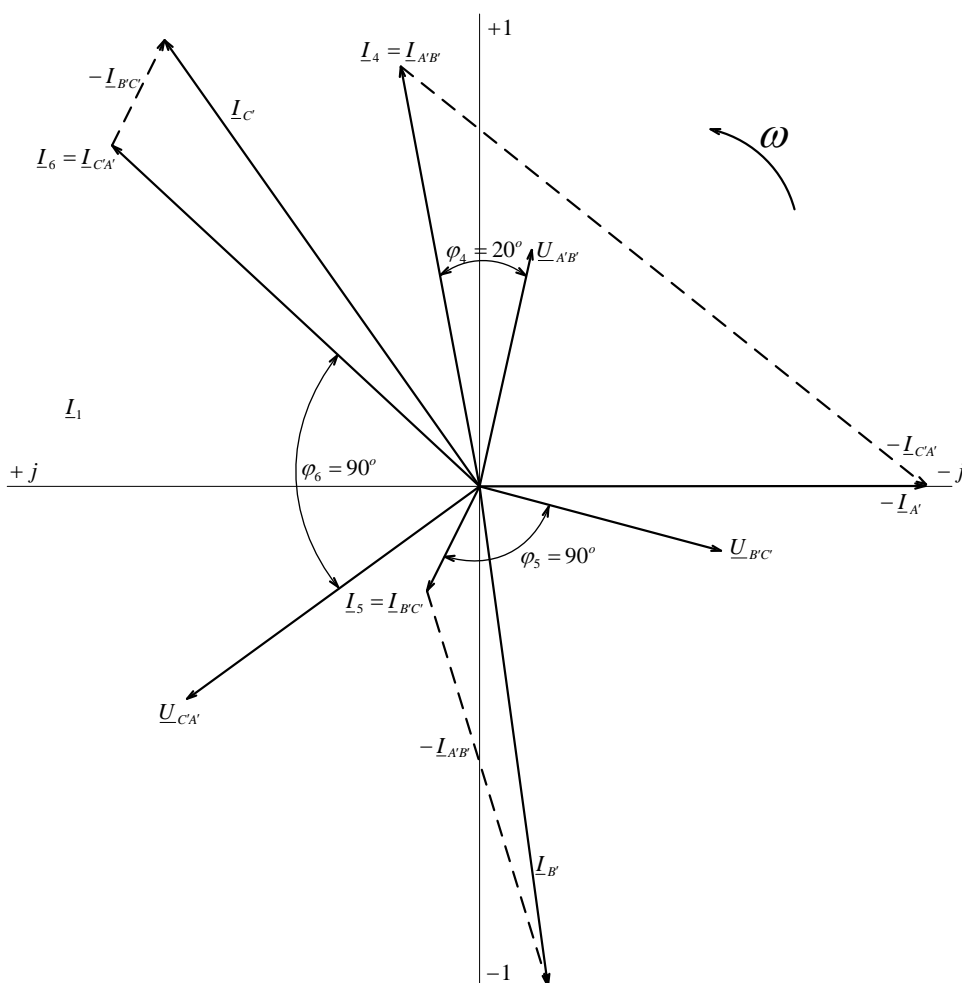
$$\underline{I}_{2A'} + \underline{I}_{2B'} + \underline{I}_{2C'} = -3.22 + j3.32 - 1.27 - j4.45 + 4.49 + j1.13 = 0$$

Розклад виконано вірно.

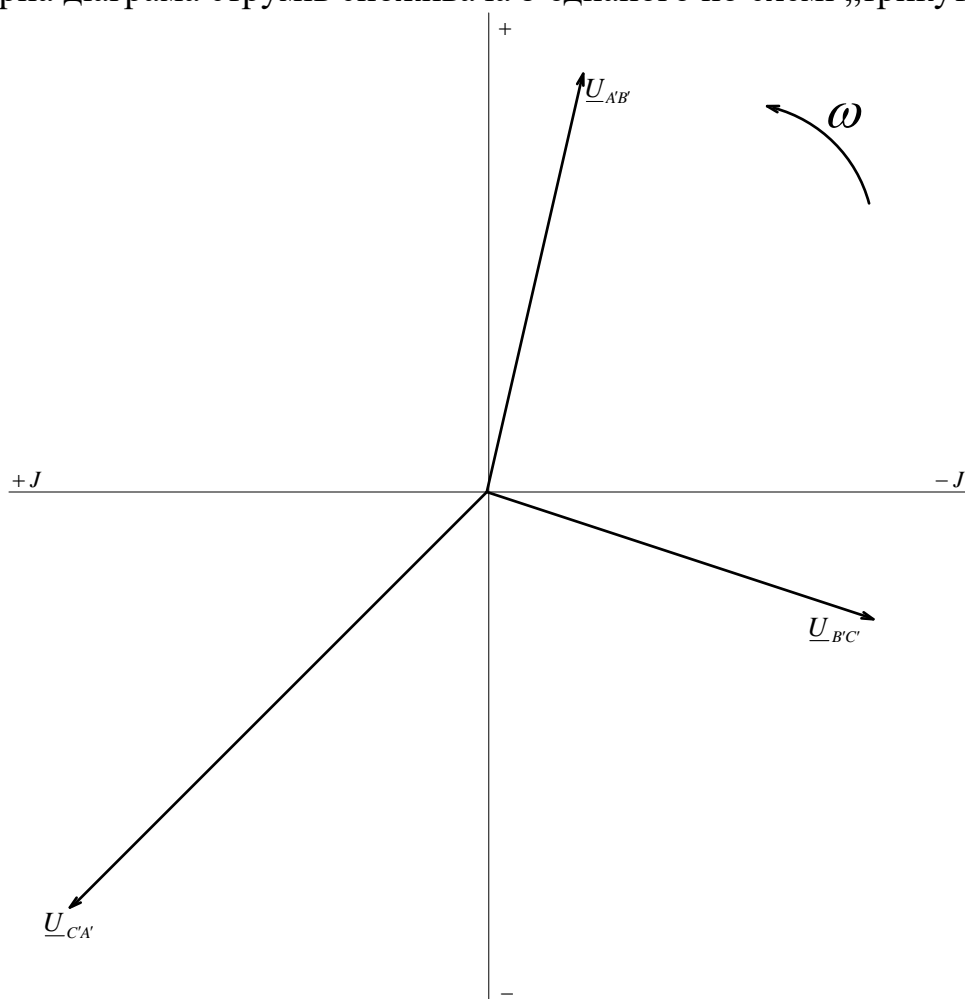
Побудуємо векторні діаграми для приведеного розрахунку.



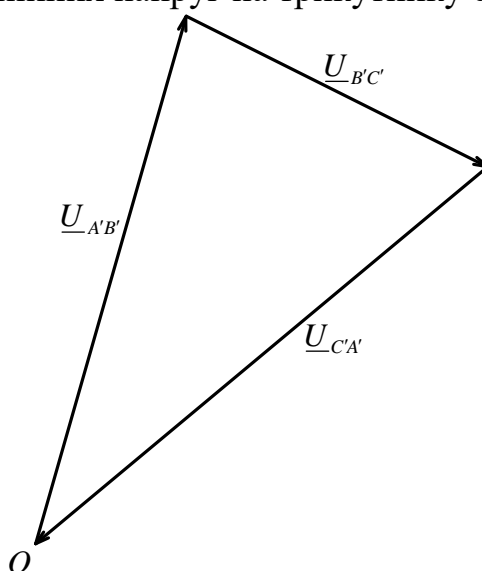
Векторна діаграма струмів та напруг генератора.



Векторна діаграма струмів споживача з'єднаного по схемі „трикутник”.

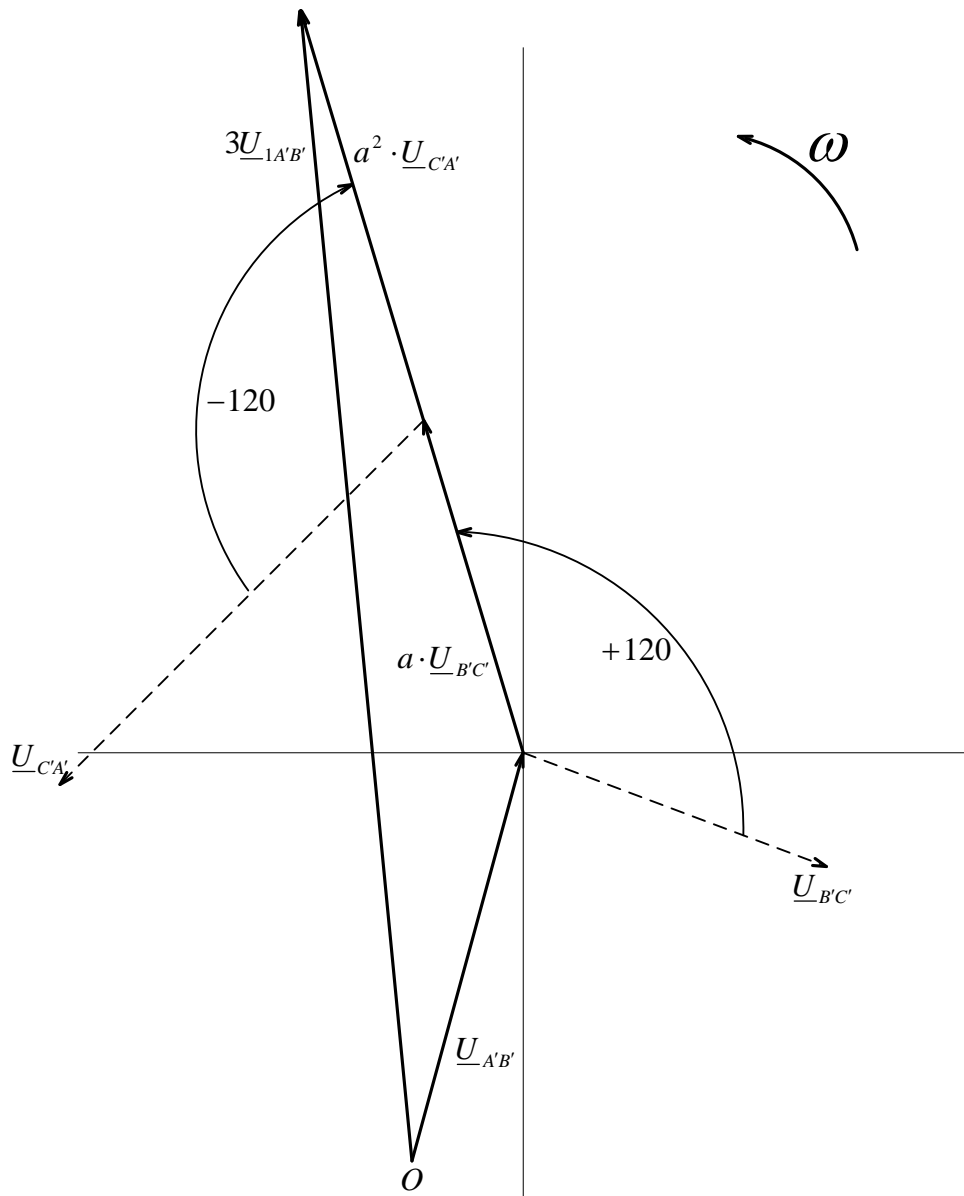


Векторна діаграма лінійних напруг на трикутнику споживача.

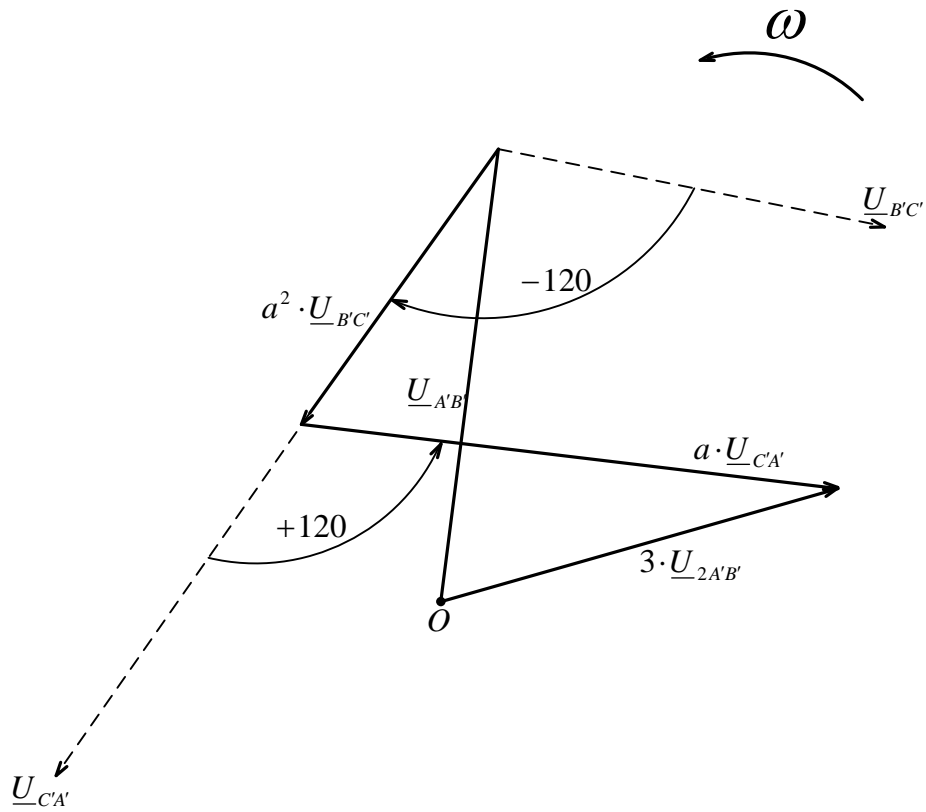


Векторна сума лінійних напруг на трикутнику споживача ($\underline{U}_{A'B'} + \underline{U}_{B'C'} + \underline{U}_{C'A'} = 0$)
 $\underline{U}_{0A'B'} = 0$.

Графічний розклад несиметричної системи лінійних напруг споживача з'єднаної по схемі „трикутник” на симетричні складові.

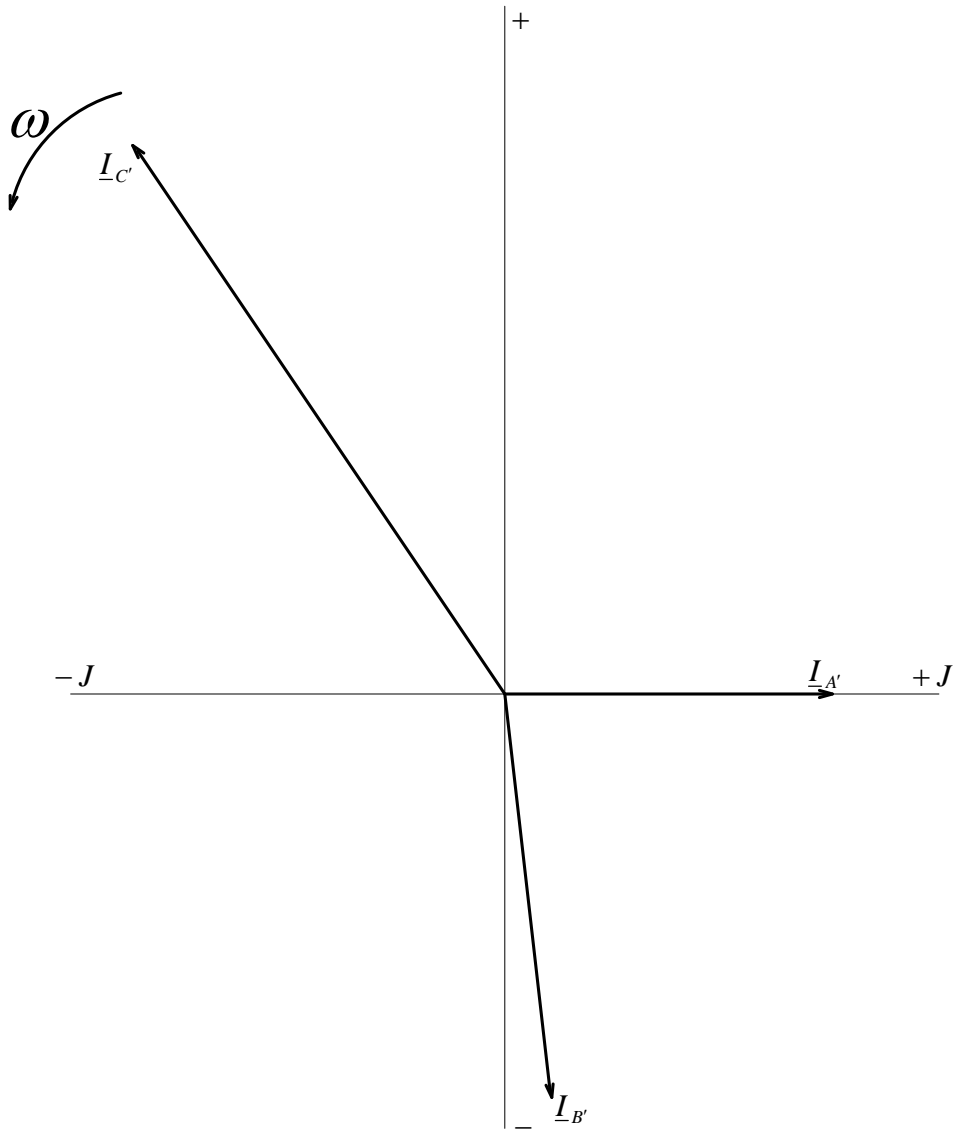


Складава прямих напруг послідовності.

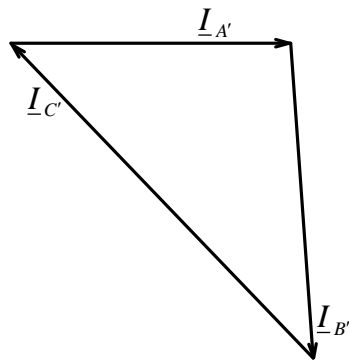


Складова зворотної послідовності напруг.

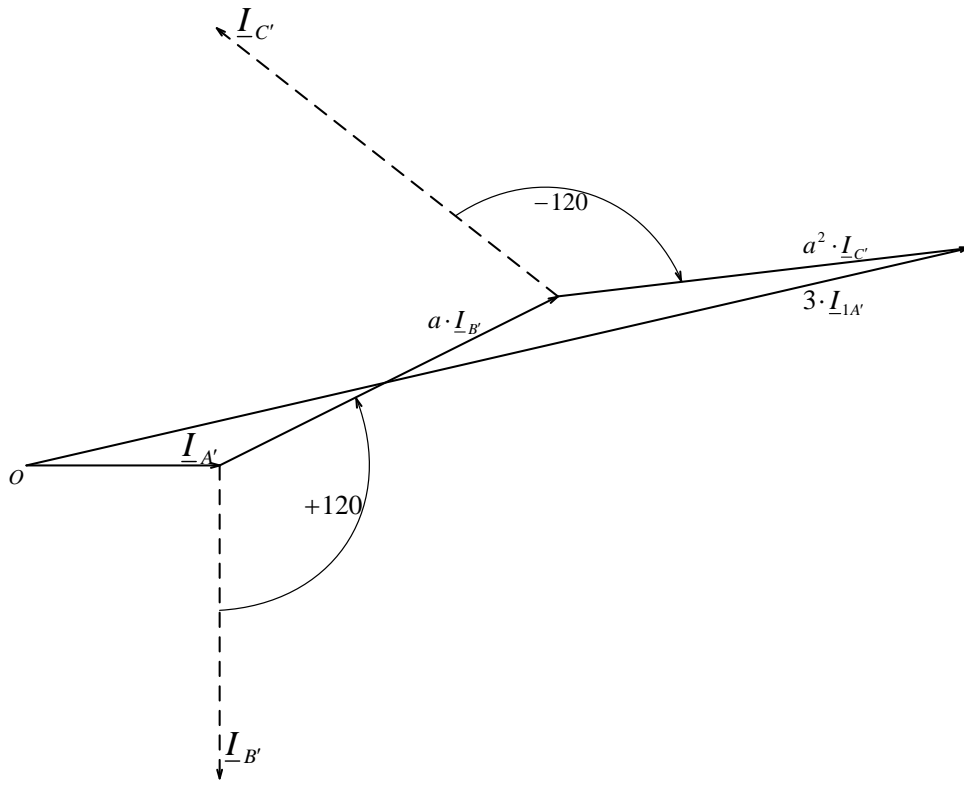
Графічний розклад несиметричної системи лінійних струмів споживача з'єданого в трикутник на симетричні складові.



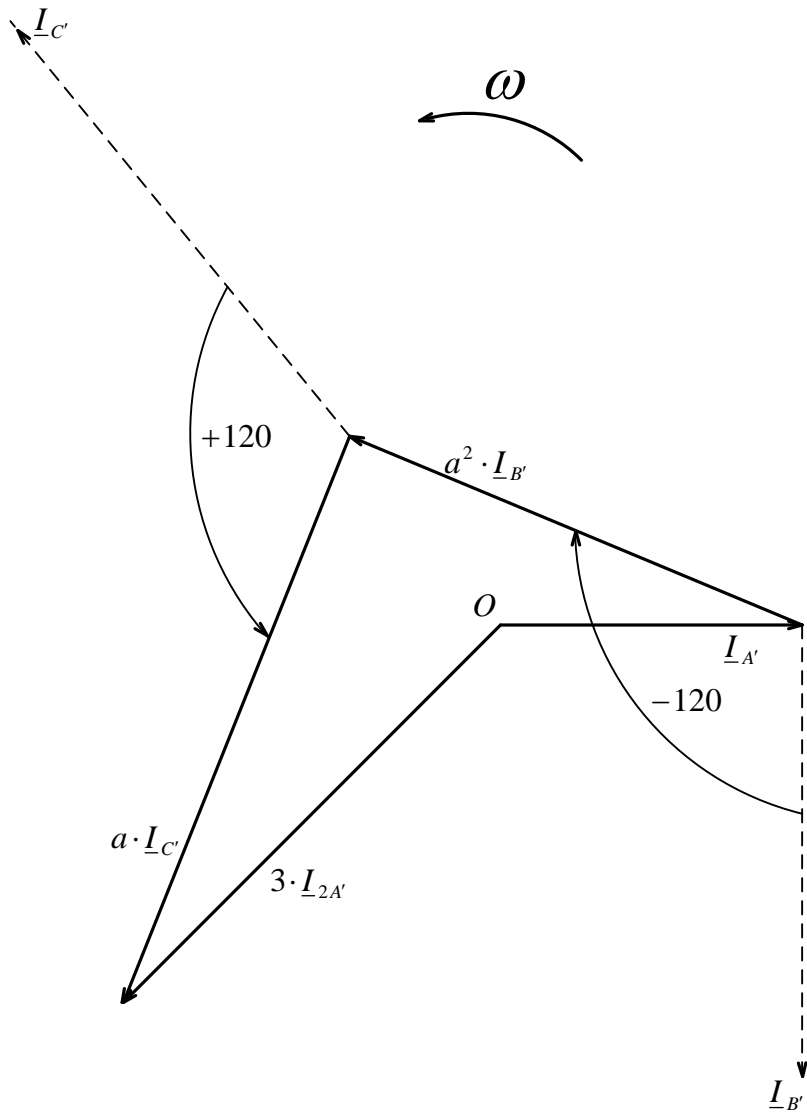
Векторна діаграма лінійних струмів споживача з'єднаного у трикутник.



Векторна сума лінійних струмів ($I_{O A'} = 0$).



Складова прямої послідовності фаз.



Складова зворотної послідовності фаз.

10. Приклади розв'язань типових задач.

Приклад 1. У трифазну мережу з лінійною напругою 380 В увімкнене симетричне навантаження (наприклад, асинхронний двигун) з параметрами схеми заміщення кожної фази $R = 40 \text{ Ом}$, $X_L = 30 \text{ Ом}$. Визначити фазні й лінійні струми, а також споживану потужність при з'єднанні фаз навантаження зіркою і трикутником. Нарисувати схеми заміщення та векторні діаграми для обох випадків.

Розв'язання. На рис. 16 показано схеми заміщення при ввімкненні зіркою /а/ і трикутником /б/.

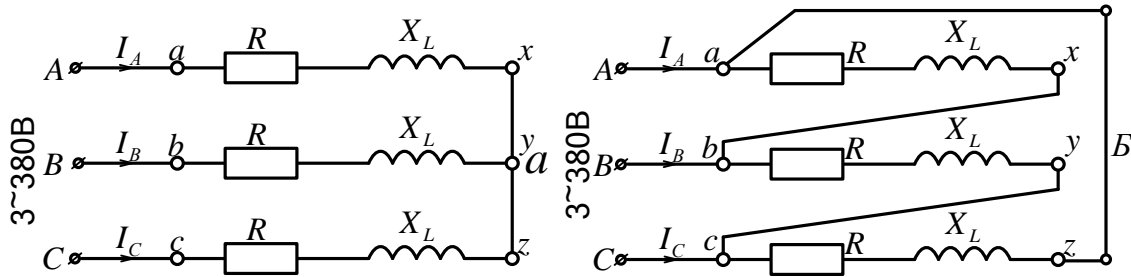


Рис 16

$$\text{Для обох схем} \quad Z_{\phi} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ Ом};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{30}{40} = 36.8^\circ.$$

$$\text{При з'єднанні фаз зіркою} \quad U_{\phi} = \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В};$$

$$I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{Z_{\phi}} = \frac{220}{50} = 4.4 \text{ А}; \quad I_a = I_b = I_c = I_{\phi} = 4.4 \text{ А}; \quad I_A = I_B = I_C = I_{\text{Л}} = I_{\phi} = 4.4 \text{ А};$$

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 4.4 \cdot 0.8 = 2320 \text{ Вт}.$$

$$\text{При з'єднанні фаз трикутником} \quad U_{\phi} = U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}; \quad I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{Z_{\phi}} = \frac{380}{50} = 7.6 \text{ А};$$

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\phi} = 7.6 \text{ А}; \quad I_A = I_B = I_C = I_{\text{Л}} = \sqrt{3}I_{\phi} = \sqrt{3} \cdot 7.6 = 13.2 \text{ А};$$

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi = 3 \cdot 380 \cdot 7.6 \cdot 0.8 = 6960 \text{ Вт}.$$

Векторні діаграми для обох випадків – “зірка” /а/ і “трикутник” /б/ – зображено на рис. 17.

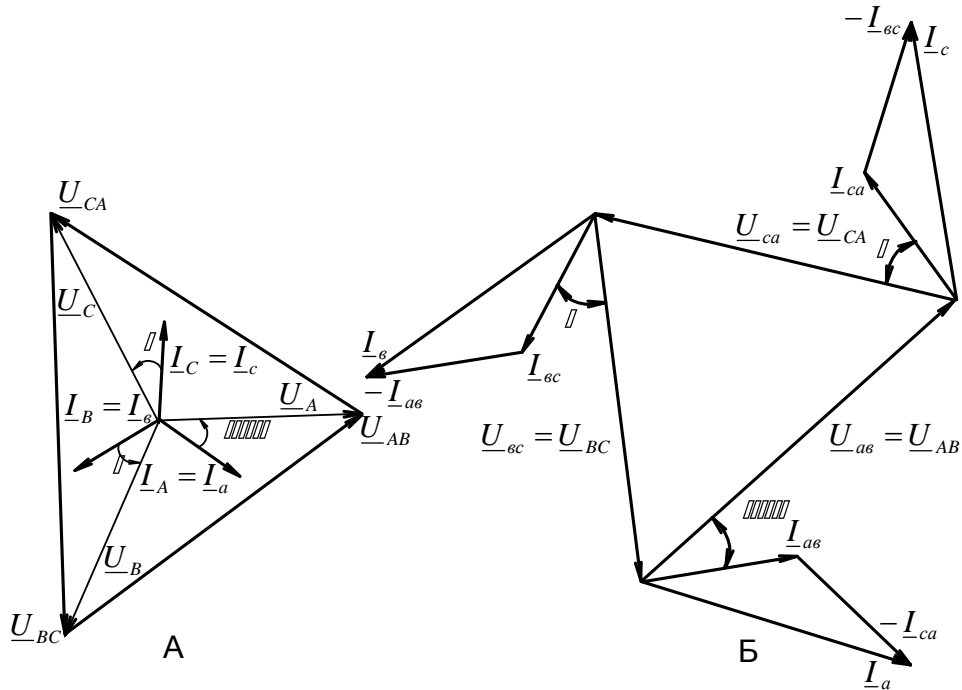


Рис 17

Приклад 2. У трифазну мережу з нейтральним проводом увімкнене зіркою несиметричне навантаження: $R_{(a)} = 265 \text{ Ом}$, $X_{C(a)} = 70 \text{ Ом}$, $R_{(b)} = 220 \text{ Ом}$, $R_{(c)} = 345 \text{ Ом}$, $X_{L(c)} = 160 \text{ Ом}$. Лінійна напруга мережі $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$.

Нарисувати схему заміщення. Визначити фазні та лінійні струми, струм у нейтральному проводі, а також споживану потужність. Визначити, як зміняться зазначені параметри при обриві нейтрального проводу. Побудувати векторні діаграми для обох випадків.

Розв'язання. Схему зміщення показано на рис. 18

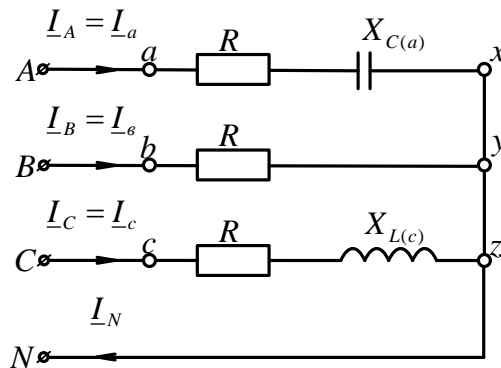


Рис 18

Беремо $\psi_A = 0$ для фази A. У цьому разі

$$\underline{U}_A = U_\phi = \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_B = U_\phi e^{-j120^\circ} = 220 e^{-j120^\circ} = -110 - j190.5 \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = U_\phi e^{j120^\circ} = 220 e^{j120^\circ} = -110 + j190.5 \text{ В}.$$

За наявності нейтрального проводу

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B; \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C; \quad U_a = U_b = U_c = U_\phi = 220 \text{ В}.$$

Повні опори й кути зсуву фаз навантаження

$$Z_a = \sqrt{R_{(a)}^2 + X_{C(a)}^2} = \sqrt{265^2 + 70^2} = 274 \text{ Ом}; \varphi_a = \arctg \frac{-X_{C(a)}}{R_{(a)}} = \arctg \frac{-70}{265} = -14.8^\circ;$$

$$Z_b = R_{(b)} = 220 \text{ Ом}; \varphi_b = 0; Z_c = \sqrt{R_{(c)}^2 + X_{L(c)}^2} = \sqrt{345^2 + 160^2} = 380 \text{ Ом};$$

$$\varphi_c = \arctg \frac{X_{L(c)}}{R_{(c)}} = \arctg \frac{160}{345} = 24.9^\circ.$$

Діючі значення фазних струмів, яким дорівнюють лінійні:

$$I_a = I_A = \frac{U_\phi}{Z_a} = \frac{220}{274} = 0.803 \text{ А}; I_b = I_B = \frac{U_\phi}{Z_b} = \frac{220}{220} = 1 \text{ А}; I_c = I_C = \frac{U_\phi}{Z_c} = \frac{220}{380} = 0.58 \text{ А}.$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 19). Визначимо діюче значення струму в нейтральному проводі ($\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$) прямим вимірюванням довжини вектора \underline{I}_N і множенням її на масштаб ($I_N = 0.24 \text{ А}$).

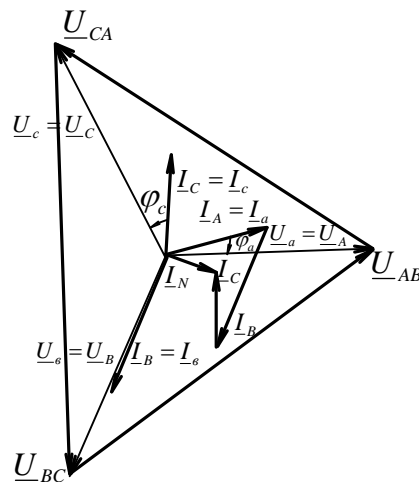


Рис 19

Можна перевірити здобутий зв'язок, звернувшись до символічного методу. Згідно з цим методом

$$\underline{I}_A = I_a = \frac{U_a}{Z_a} = \frac{220}{274e^{-j14.8^\circ}} = 0.803e^{j14.8^\circ} = 0.775 + j0.206 \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = I_b = \frac{U_b}{Z_b} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{220} = -0.5 - j0.865 \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = I_c = \frac{U_c}{Z_c} = \frac{220e^{j120^\circ}}{380e^{j24.9^\circ}} = 0.58e^{j95.1^\circ} = -0.05 + j0.577 \text{ А};$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.225 - j0.082 \text{ А}$$

$$I_N = \sqrt{0.225^2 + 0.082^2} = 0.239 \text{ А}.$$

Як видно, результат практично збігається з струмом I_N , здобутих із векторної діаграми.

Споживана потужність

$$P_a = U_a I_a \cos \varphi_a = 220 \cdot 0.803 \cos(-14.8^\circ) = 171 \text{ Вт};$$

$$P_b = U_b I_b \cos \varphi_b = 220 \cdot 1 \cos 0^\circ = 220 \text{ Вт};$$

$$P_c = U_c I_c \cos \varphi_c = 220 \cdot 0.58 \cos 24.9^\circ = 115 \text{ Вт};$$

$$P_{\Sigma} = P_a + P_b + P_c = 171 + 220 + 115 = 506 \text{ Вт}.$$

При обриві нейтрального проводу потрібно виконати розрахунок, враховуючи можливі зміни фазних напруг, бо навантаження фаз приймача несиметричне. Для цього потрібно обчислити комплексні повні провідності фаз:

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{265 - j70} = \frac{265 + j70}{265^2 + 70^2} = 0,00352 + j0,00093 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{220} = 0,00455 \text{ См}; \quad \underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{345 + j160} = 0,00239 - j0,00111 \text{ См}.$$

Напруга зміщення нейтралі

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{\underline{Y}_a \cdot \underline{U}_A + \underline{Y}_b \cdot \underline{U}_B + \underline{Y}_c \cdot \underline{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \\ &= \frac{1}{0,00352 + j0,00093 + 0,00455 + 0,00239 + j0,00111} \cdot \\ &\cdot (0,00352 + j0,00093)220 + 0,00455(-110 - j190,5) + \\ &+ (0,00239 - j0,00111)(-110 + j190,5) = \frac{0,219 - j0,084}{0,01046 - j0,00018} = \\ &= \frac{(0,219 - j0,084)(0,01046 + j0,00018)}{0,01046^2 + 0,00018^2} = 21 - j7,7 \text{ В}; \\ U_N &= \sqrt{21^2 + 7,7^2} = 22,4 \text{ В}. \end{aligned}$$

Фазні напруги і струми навантаження

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{U}_A - \underline{U}_N = 220 - 21 + j7,7 = 199 + j7,7 \text{ В}; \\ U_a &= \sqrt{199^2 + 7,7^2} = 199,2 \text{ В}; \\ \underline{U}_b &= \underline{U}_B - \underline{U}_N = -110 - j190,5 - 21 + j7,7 = -131 - j182,8 \text{ В}; \\ U_b &= \sqrt{131^2 + 182,8^2} = 225 \text{ В}; \\ \underline{U}_c &= \underline{U}_C - \underline{U}_N = -110 + j190,5 - 21 + j7,7 = -131 + j198,2 \text{ В}; \\ U_c &= \sqrt{131^2 + 198,2^2} = 238 \text{ В}; \\ I_A &= I_a = \frac{U_a}{Z_a} = \frac{199,2}{274} = 0,728 \text{ А}; \\ I_B &= I_b = \frac{U_b}{Z_b} = \frac{225}{220} = 1,022 \text{ А}; \\ I_C &= I_c = \frac{U_c}{Z_c} = \frac{238}{380} = 0,627 \text{ А}. \end{aligned}$$

Векторну діаграму показано на рис. 20

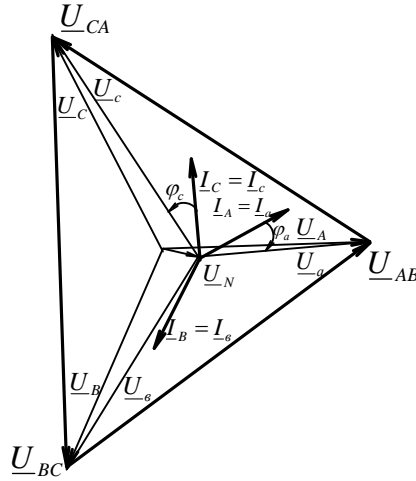


Рис 20

Споживана потужність

$$P_a = U_a I_a \cos \varphi_a = 199.2 \cdot 0.728 \cos(-14.8^\circ) = 140 \text{ Вт};$$

$$P_b = U_b I_b \cos \varphi_b = 225 \cdot 1.022 \cos 0^\circ = 230 \text{ Вт};$$

$$P_c = U_c I_c \cos \varphi_c = 238 \cdot 0.627 \cos 24.9^\circ = 135 \text{ Вт};$$

$$P_\Sigma = P_a + P_b + P_c = 140 + 230 + 135 = 505 \text{ Вт}.$$

Приклад 3. У трифазну мережу з лінійною напругою 220В увімкнене трикутником таке саме несиметричне навантаження, як і в прикладі 2:

$$R_{(ab)} = 265 \text{ Ом}; \quad X_{C(ab)} = 70 \text{ Ом}; \quad R_{(bc)} = 220 \text{ Ом}; \quad R_{(ca)} = 345 \text{ Ом}; \quad X_{L(ca)} = 160 \text{ Ом}.$$

Нарисувати схему заміщення. Визначити фазні та лінійні струми, а також споживану потужність. Побудувати векторну діаграму.

Розв'язання. Схему заміщення показано на рис. 21. Беремо $\psi_{AB} = 0$ для лінійної напруги \underline{U}_{AB} . У цьому разі $\underline{U}_{AB} = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 220 e^{-j120^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = 220 e^{j120^\circ}$.

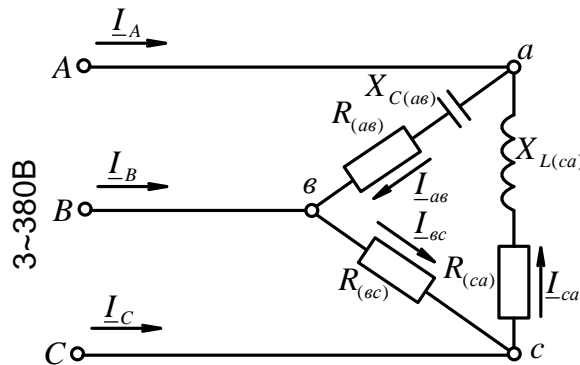


Рис 21

Напруга на фазах приймача

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB}; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC}; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA};$$

$$U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_\phi = 220 \text{ В}.$$

Повні опори та кути зсуву фаз навантаження такі самі, як і при з'єднанні зіркою:

$$Z_{ab} = Z_a = 274 \text{ Ом}; \quad \varphi_{ab} = \varphi_a = -14.8^\circ;$$

$$Z_{bc} = Z_b = 220 \text{ Ом}; \quad \varphi_{bc} = \varphi_b = 0;$$

$$Z_{ca} = Z_c = 380 \Omega; \varphi_{ca} = \varphi_c = 24.9^\circ;$$

$$I_{ab} = \frac{U_\Phi}{Z_{ab}} = \frac{220}{274} = 0.803 A; I_{bc} = \frac{U_\Phi}{Z_{bc}} = \frac{220}{220} = 1 A;$$

$$I_{ca} = \frac{U_\Phi}{Z_{ca}} = \frac{220}{380} = 0.58 A.$$

Побудуємо векторну діаграму (див. рис. 22, а або б).

Визначимо діючі значення лінійних струмів: $\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}$; $\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$; $\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}$ прямим вимірюванням довжин векторів I_A , I_B , I_C та множенням їх на масштаб / $I_A = 0.89 A$; $I_B = 1.65 A$; $I_C = 1.49 A$.

Можна перевірити здобути значення лінійних струмів, звернувшись до символічного методу:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{220}{274e^{-j14.8^\circ}} = 0.803e^{j14.8^\circ} = 0.775 + j0.206 A;$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{220} = -0.5 - j0.865 A;$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{380e^{j24.9^\circ}} = 0.58e^{j95.1^\circ} = -0.05 + j0.577 A;$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 0.775 + j0.206 + 0.05 - j0.577 = 0.78 - j0.371 A$$

$$I_A = \sqrt{0.78^2 + 0.371^2} = 0.865 A;$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -0.5 - j0.865 - 0.775 - j0.206 =$$

$$= -1.275 - j1.071 A;$$

$$I_B = \sqrt{1.275^2 + 1.071^2} = 1.665 A;$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = -0.05 + j0.577 + 0.5 + j0.865 = 0.45 + j1.442 A;$$

$$I_C = \sqrt{0.45^2 + 1.44^2} = 1.51 A.$$

Обчислені значення I_A , I_B , I_C практично збігаються із здобутими з векторної діаграми.

Споживана потужність

$$P_{ab} = U_{ab} I_{ab} \cos \varphi_{ab} = 220 \cdot 0.803 \cos(-14.8^\circ) = 171 \text{ Bm};$$

$$P_{bc} = U_{bc} I_{bc} \cos \varphi_{bc} = 220 \cdot 1 \cos 0^\circ = 220 \text{ Bm};$$

$$P_{ca} = U_{ca} I_{ca} \cos \varphi_{ca} = 220 \cdot 0.58 \cos 24.9^\circ = 115 \text{ Bm};$$

$$P_\Sigma = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = 171 + 220 + 115 = 506 \text{ Bm}.$$

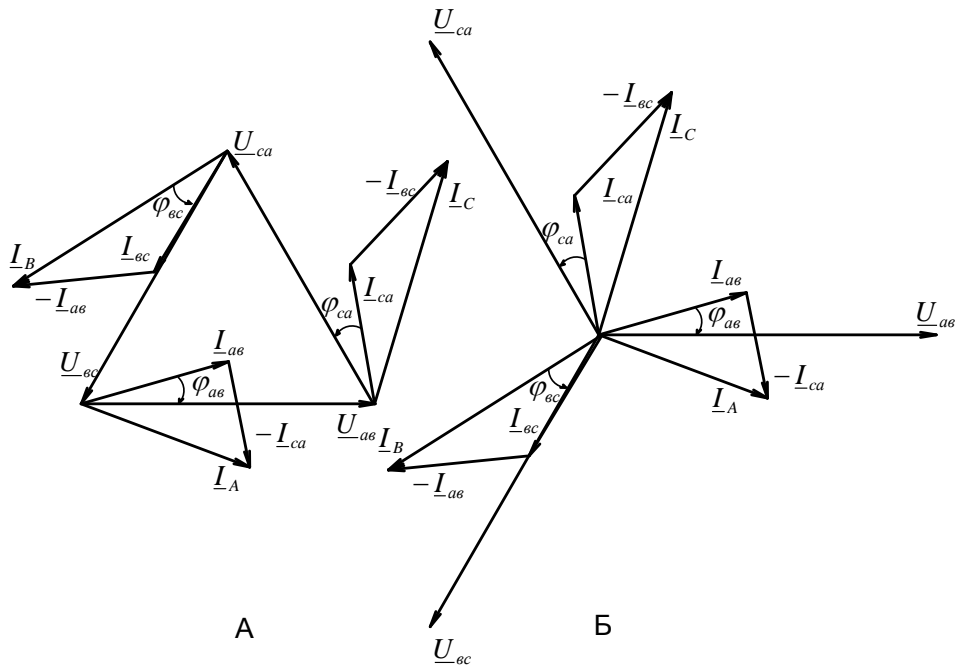
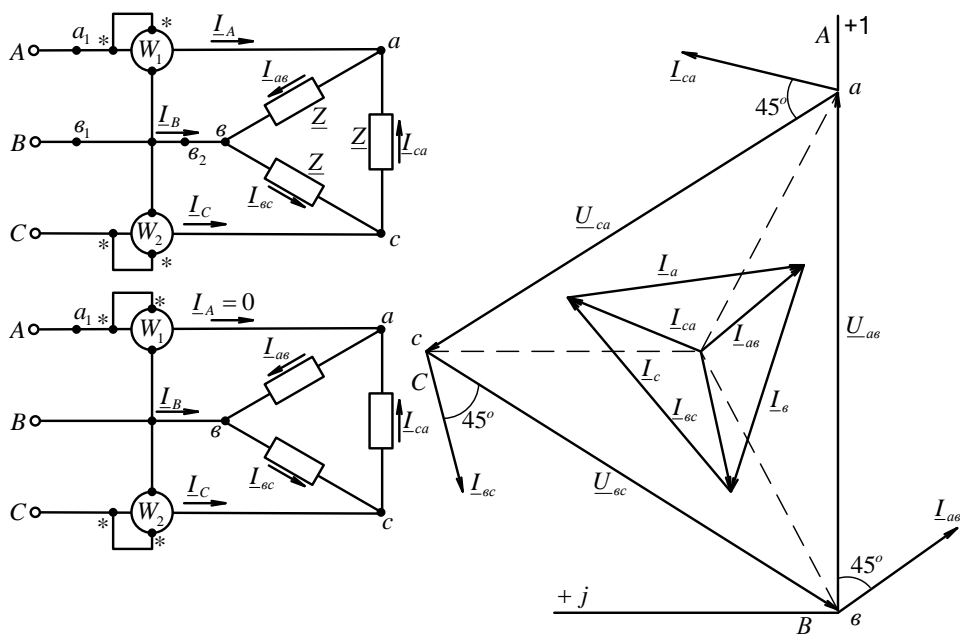


Рис 22

Приклад 4. У трифазну мережу з симетричними лінійними напругами $U_{\text{Л}} = 220\text{В}$ під'єднано трикутником споживач, опори кожної фази котрого $\underline{Z} = (10 + j10)\text{Ом}$ (рис. 23). Знайти струми у кожній фазі навантаження та лінії і покази кожного ватметра. Знайти тіж величини у випадку обриву у точці a_1 .



Рішення. Задачу вирішимо, користуючись символічним методом. Приймемо, що комплекс напруги U_{AB} дійсний. Тоді комплекси лінійних напруг

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab} = 220\text{В}; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc} = 220e^{-j120^\circ}\text{В};$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca} = 220e^{-j240^\circ}\text{В}.$$

Визначимо комплекси фазних та лінійних струмів:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{U}_{ab} / \underline{Z} = 220 / (10 + j10) = 15.6e^{-j45^\circ} = (11 - j11)\text{А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \underline{U}_{bc} / \underline{Z} = 220e^{-j120^\circ} / (10 + j10) = 15.6e^{-j165^\circ} = -15 - j4.03\text{А}$$

$$\underline{I}_{ca} = \underline{U}_{ca} / \underline{Z} = 220e^{-j240} / (10 + j10) = 15.6e^{-j75^\circ} = 4.03 + j15A;$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 6.97 - j26 = 26.9e^{-j75^\circ} A;$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -26 + j6.97 = 26.9e^{j165^\circ} A;$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 19 + j19 = 26.6e^{j45^\circ} A.$$

Знайдемо показання ватметрів:

$$P_1 = \text{Re}[U_{AB} I_A^*] = \text{Re}[220 \cdot 26.9e^{j75^\circ}] = 220 \cdot 26.9 \cos 75^\circ = 1530 \text{ Bm}$$

$$P_2 = \text{Re}[U_{CB} I_C^*] = \text{Re}[-220e^{-j120^\circ} \cdot 26.9e^{-j45^\circ}] = \\ = \text{Re}[220e^{j60^\circ} \cdot 26.9e^{-j45^\circ}] = 220 \cdot 26.9 \cos 75^\circ = 1530 \text{ Bm}.$$

Активна потужність кола

$$P = P_1 + P_2 = 1530 + 5730 = 7260 \text{ Bm}.$$

Перевірка показує, що

$$P = 3I_\phi^2 R = 3 \cdot 15.56^2 \cdot 10 = 7260 \text{ Bm}$$

На рис. побудована векторна діаграма напруг та струмів.

Обрив у точці a_1 (рис. 23). Струми у фазах навантаження

$$\underline{I}_{bc} = \underline{U}_{bc} / \underline{Z} = 220e^{-j120^\circ} / 10 + j10 = -1.5 - j4.04 A;$$

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{CA} = \underline{U}_{bc} / 2\underline{Z} = -220e^{-j120^\circ} / 2(10 + j10) = 7.5 + j2.02 A.$$

Розрахуємо лінійні струми: $\underline{I}_A = 0$;

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_B = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 22.5 + j6.05 = 23.3e^{j15^\circ} A.$$

Визначимо показання ватметрів:

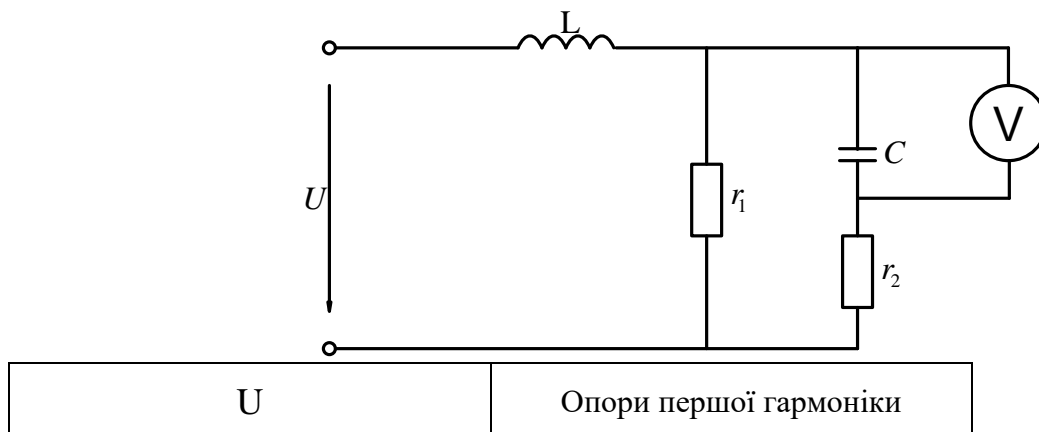
$$P_1 = 0 \quad ; \quad P_2 = \text{Re}[U_{CB} I_C^*] = \text{Re}[220e^{j60^\circ} \cdot 23.3e^{-j15^\circ}] = \\ = 220 \cdot 23.3 \cos 45^\circ = 3630 \text{ Bm}.$$

Задача №2.

Електричні кола не синусоїдального струму.

Для електричної схеми виконати наступне:

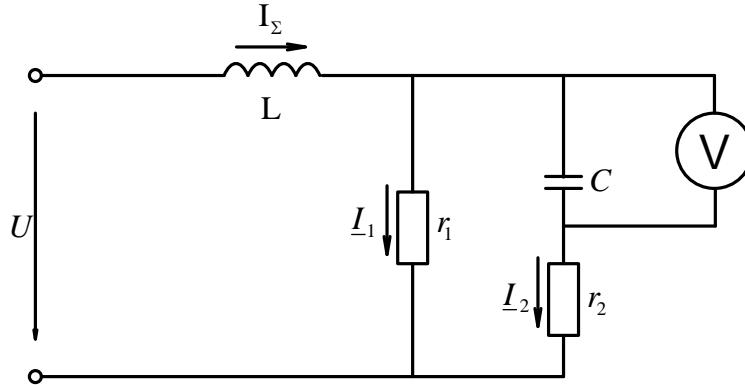
1. Розрахувати всі струми у колі і написати вирази для їх миттєвих значень.
2. Визначити діюче значення струму в нерозгалуженій частині кола.
3. Визначити свідчення вольтметра.
4. Підрахувати активну, реактивну, повну потужності і коефіцієнт потужності кола.



	r_1	r_2	ωL	$\frac{1}{\omega C}$
В	Ом	Ом	Ом	Ом
$50 + 60 \sin(\omega t + 30^\circ) + 30 \cos(3\omega t - 30^\circ)$	2,5	2,5	1,5	10,5

Рішення.

Струми у колі знаходимо методом накладення, підсумовуючи миттєві значення струмів кожної гармоніки.



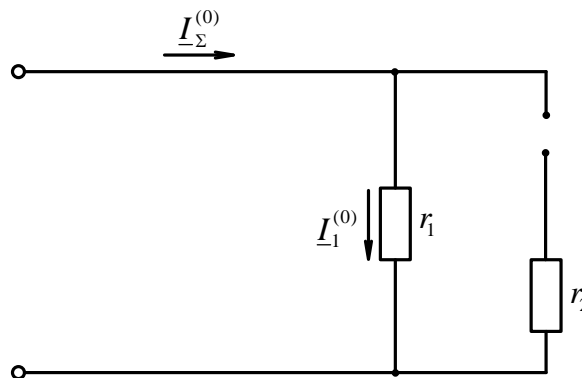
1. Для постійної складової.

$$K = 0 \quad \omega = 0$$

$$X_L = \omega L = 0$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$$

Схема прийме гляд:



$$I_m^{(0)} = I^{(0)} = const = \frac{U_0}{r_1} = i^{(0)} = \frac{50}{2.5} = 20 A$$

$$I_1^{(0)} = I_0^{(0)} = 20 A$$

$$I_2^{(0)} = 0$$

Для першої гармоніки.

$$K = 1$$

$$X_L^{(1)} = X_L = 1.5 \text{ Ом}$$

$$X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C} = 10.5 \text{ Ом}$$

$$r_1 = 2.5 \text{ Ом}$$

$$r_2 = 2.5 \text{ Ом}$$

Рішення виконуємо символічним методом.

$$Z^{(1)} = x_L^{(1)} = j1.5 \text{ Ом}$$

$$Z_1^{(1)} = r_1 = 2.5 \text{ Ом}$$

$$Z_2^{(1)} = r_2 - x_C^{(1)} = 2.5 - j10.5 \text{ Ом}$$

Опір розгалуження.

$$Z_{12}^{(1)} = Z_1^{(1)} \parallel Z_2^{(1)} = \frac{Z_1^{(1)} \cdot Z_2^{(1)}}{Z_1^{(1)} + Z_2^{(1)}} =$$

$$= \frac{2.5(2.5 - j10.5)}{2.5 + 2.5 - j10.5} = \frac{(6.25 - j26.25)(5 + j10.5)}{(5 - j10.5)(5 + j10.5)} =$$

$$= \frac{6.25 \cdot 5 - j26.25 \cdot 5 + j6.25 \cdot 10.5 + 26.25 \cdot 10.5}{5^2 + 10.5^2} =$$

$$= \frac{31.25 - j131.25 + j65.62 + 275.62}{25 + 110.25} =$$

$$= \frac{306.87 - j65.63}{135.25} = 2.27 - j0.48$$

$$\underline{Z_{12}^{(1)} = (2.27 - j0.48) \text{ Ом}}$$

Загальний опір кола.

$$Z_{\Sigma}^{(1)} = Z^{(1)} + Z_{12}^{(1)} = j1.5 + 2.27 - j0.48 = 2.27 + j1.02$$

$$\underline{Z_{\Sigma}^{(1)} = (2.27 + j1.02) \text{ Ом}}$$

Максимальні значення струму в нерозгалуженій частині кола.

$$I_{\Sigma m}^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{Z_{\Sigma}^{(1)}} = \frac{60(2.27 - j1.02)}{(2.27 + j1.02)(2.27 - j1.02)} =$$

$$= \frac{60 \cdot 2.27 - j60 \cdot 1.02}{2.27^2 + 1.02^2} = \frac{136.2 - j61.2}{5.15 + 1.04} = \frac{136.2 - j61.2}{6.19} =$$

$$= 22.0 - j9.9$$

$$\underline{I_{\Sigma m}^{(1)} = (22.0 - j9.9) \text{ А}}$$

Визначимо напругу розгалужень.

$$U_{12m}^{(1)} = I_{\Sigma m}^{(1)} \cdot Z_{12}^{(1)} = (22 - j9.9)(2.27 - j0.48) =$$

$$= 22 \cdot 2.27 - j9.9 \cdot 2.27 - j22 \cdot 0.48 - 9.9 \cdot 0.48 =$$

$$= 49.94 - j22.47 - j10.56 - 4.75 = 45.19 - j33.03$$

$$\underline{U_{12m}^{(1)} = (45.19 - j33.03) \text{ В}}$$

Визначимо струми в гілках.

$$I_{1m}^{(1)} = \frac{U_{12m}^{(1)}}{Z_1^{(1)}} = \frac{45.19 - j33.03}{2.5} = 18.08 - j13.21$$

$$\underline{I_{1m}^{(1)} = (18.08 - j13.21)A}$$

$$\begin{aligned} I_{2m}^{(1)} &= \frac{U_{12m}^{(1)}}{Z_2^{(1)}} = \frac{(45.19 - j33.03)(2.5 + j10.5)}{(2.5 - j10.5)(2.5 + j10.5)} = \\ &= \frac{45.19 \cdot 2.5 - j33.03 \cdot 2.5 + j45.19 \cdot 10.5 + 33.03 \cdot 10.5}{2.5^2 + 10.5^2} = \\ &= \frac{112.98 - j82.57 + j474.5 + 346.81}{6.25 + 110.25} = \\ &= \frac{459.8 + j391.93}{116.5} = 3.92 + j3.31 \\ \underline{I_{2m}^{(1)} &= (3.92 + j3.31)A} \\ \varphi_2^{(1)} &= -76^\circ 37' \end{aligned}$$

Перевірка:

$$I_{1m}^{(1)} + I_{2m}^{(1)} = I^{(1)}$$

$$18.08 - j13.21 + 3.92 + j3.31 = 22 - j9.9 = I^{(1)}$$

Струми обчислені вірно.

Напруга на ємності.

$$\begin{aligned} U_{Cm}^{(1)} &= I_{2m}^{(1)} \cdot Z_2^{(1)} = (3.92 + j3.31)(2.5 - j10.5) = \\ &= 3.92 \cdot 2.5 + j3.31 \cdot 2.5 - j3.92 \cdot 10.5 + 3.31 \cdot 10.5 = \\ &= 9.8 + j8.27 - j41.16 + 34.76 = 44.56 - j32.89 \end{aligned}$$

$$\underline{U_{Cm}^{(1)} = (44.56 - j32.89)V}$$

2. Для третьої гармоніки.

$$K = 3$$

$$X_L^{(3)} = 3X_L = 3 \cdot 1.5 = 4.5 \text{ Ом}$$

$$X_C^{(3)} = \frac{X_C^{(1)}}{3} = \frac{10.5}{3} = 3.5 \text{ Ом}$$

Запишемо опір у вигляді комплексів.

$$Z_L^{(3)} = j4.5 \text{ Ом}$$

$$Z_1^{(3)} = r_1 = 2.5 \text{ Ом}$$

$$Z_2^{(3)} = r_2 - x_C^{(3)} = (2.5 - j3.5) \text{ Ом}$$

Опір розгалуження.

$$\begin{aligned} Z_{12}^{(3)} &= Z_1^{(3)} \parallel Z_2^{(3)} = \frac{Z_1^{(3)} \cdot Z_2^{(3)}}{Z_1^{(3)} + Z_2^{(3)}} = \\ &= \frac{2.5(2.5 - j3.5)}{2.5 + 2.5 - j3.5} = \frac{(6.25 - j8.75)(5 + j3.5)}{(5 - j3.5)(5 + j3.5)} = \\ &= \frac{6.25 \cdot 5 - j8.75 \cdot 5 + j3.5 \cdot 6.25 + 8.75 \cdot 3.5}{5^2 + 3.5^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{31.25 - j43.75 + j21.87 + 30.62}{25 + 12.25} = \\
&= \frac{61.87 - j21.88}{37.25} = 1.66 - j0.59 \\
\underline{Z_{12}^{(3)}} &= (1.66 - j0.59) \text{ Ом}
\end{aligned}$$

Загальний опір кола.

$$\begin{aligned}
Z_{\Sigma}^{(3)} &= Z_L^{(3)} + Z_{12}^{(3)} = j4.5 + 1.66 - j0.59 = 1.66 + j3.91 \\
\underline{Z_{\Sigma}^{(3)}} &= (1.66 + j3.91) \text{ Ом}
\end{aligned}$$

Максимальне значення струму в нерозгалуженій частині кола.

$$\begin{aligned}
I_{\Sigma m}^{(3)} &= \frac{U_m^{(3)}}{Z^{(3)}} = \frac{30(1.66 - j3.91)}{(1.66 + j3.91)(1.66 - j3.91)} = \\
&= \frac{30 \cdot 1.66 - j30 \cdot 3.91}{1.66^2 + 3.91^2} = \frac{49.8 - j117.3}{2.75 - 15.29} = \\
&= \frac{49.8 - j117.3}{18.04} = 2.76 - j6.5 \\
\underline{I_{\Sigma m}^{(3)}} &= (2.76 - j6.5) \text{ А}
\end{aligned}$$

Визначимо напругу розгалуження.

$$\begin{aligned}
U_{12m}^{(3)} &= I_{\Sigma m}^{(3)} \cdot Z_{12}^{(3)} = (2.76 - j6.5)(1.66 - j0.59) = \\
&= 2.76 \cdot 1.66 - j6.5 \cdot 1.66 - j2.76 \cdot 0.59 - 6.5 \cdot 0.59 = \\
&= 4.58 - j10.79 - j1.63 - 3.83 = 0.75 - j12.42 \\
\underline{U_{12m}^{(3)}} &= 0.75 - j12.42
\end{aligned}$$

Визначимо струми в гілках.

$$\begin{aligned}
I_{1m}^{(3)} &= \frac{U_{12m}^{(3)}}{Z_1^{(3)}} = \frac{0.75 - j12.42}{2.5} = 0.3 - j4.97 \\
\underline{I_{1m}^{(3)}} &= 0.3 - j4.97 \\
I_{2m}^{(3)} &= \frac{U_{12m}^{(3)}}{Z_2^{(3)}} = \frac{0.75 - j12.42}{2.5 - j3.5} = \\
&= \frac{(0.75 - j12.42)(2.5 + j3.5)}{(2.5 - j3.5)(2.5 + j3.5)} = \\
&= \frac{0.75 \cdot 2.5 - j12.42 \cdot 2.5 + j0.75 \cdot 3.5 + 12.42 \cdot 3.5}{2.5^2 + 3.5^2} = \\
&= \frac{1.87 - j31.05 + j2.62 + 43.47}{6.25 + 12.25} = \\
&= \frac{45.34 - j28.43}{18.5} = 2.46 - j1.53 \\
\underline{I_{2m}^{(3)}} &= (2.46 - j1.53) \text{ А} \\
\varphi_2^{(3)} &= -54^\circ 30'
\end{aligned}$$

Перевірка:

$$I_{1m}^{(3)} + I_{2m}^{(3)} = I_{\Sigma m}^{(3)}$$

$$0.3 - j4.97 + 2.46 - j1.53 = 2.76 - j6.5 = I_{\Sigma m}^{(3)}$$

Струми обчислені вірно.

Напруга на ємності.

$$\begin{aligned} U_{Cm}^{(3)} &= I_{2m}^{(3)} \cdot Z_2^{(3)} = (2.46 - j1.53)(2.5 - j3.5) = \\ &= 2.46 \cdot 2.5 - j1.53 \cdot 2.5 - j2.46 \cdot 3.5 - 1.53 \cdot 3.5 = \\ &= 6.15 - j3.82 - j8.61 - 5.35 = 0.8 - j12.46 \end{aligned}$$

$$\underline{U_{Cm}^{(3)} = (0.8 - j12.46)B}$$

3. Запишемо набуті значення струмів і напруги на ємності в показовій формі.

$$I_{\Sigma m}^{(1)} = 22 - j9.9 = 25.6 \cdot e^{-j24^\circ} A$$

$$I_{1m}^{(1)} = 18.08 - j13.21 = 22.4 \cdot e^{-j36^\circ} A$$

$$I_{2m}^{(1)} = 3.92 + j3.31 = 5.04 \cdot e^{j40^\circ} A$$

$$U_{Cm}^{(1)} = 44.56 - j32.82 = 55.3 \cdot e^{-j36^\circ 30'} B$$

$$I_{\Sigma m}^{(3)} = 2.76 - j6.5 = 7.06 \cdot e^{-j67^\circ} A$$

$$I_{1m}^{(3)} = 0.3 - j4.97 = 4.98 \cdot e^{-j86^\circ 30'} A$$

$$I_{2m}^{(3)} = 2.46 - j1.53 = 2.9 \cdot e^{-j32^\circ} A$$

$$U_{Cm}^{(3)} = 0.8 - j12.46 = 12.48 \cdot e^{-j86^\circ 20'} B$$

4. Напишемо вираз для миттєвого значення струмів.

$$\begin{aligned} i_{\Sigma} &= i^{(0)} + i^{(1)} + i^{(3)} = 20 + 25.6 \sin(\omega t + 30^\circ - 24^\circ) + \\ &\quad + 7.06 \cos(3\omega t - 30^\circ - 67^\circ) \end{aligned}$$

$$\underline{i_{\Sigma} = 20 + 26.5 \sin(\omega t + 6^\circ) + 7.06 \cos(3\omega t - 97^\circ) A}$$

$$i_1 = 20 + 22.4 \sin(\omega t + 30^\circ - 36^\circ) + 4.98 \cos(3\omega t - 30^\circ - 86^\circ 30')$$

$$\underline{i_1 = 20 + 22.4 \sin(\omega t - 6^\circ) + 4.98 \cos(3\omega t - 116^\circ 30')}$$

$$i_2 = i_2^{(1)} + i_2^{(3)}$$

$$i_2 = 5.04 \sin(\omega t + 30^\circ + 40^\circ) + 2.9 \cos(3\omega t - 30^\circ - 86^\circ 20')$$

$$\underline{i_2 = 5.04 \sin(\omega t + 70^\circ) + 2.9 \cos(3\omega t - 116^\circ 20')}$$

5. Визначимо діюче значення струму в нерозгалуженій частині кола.

$$I_0 = 20 A$$

$$I_{\Sigma}^{(1)} = \frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{25.6}{\sqrt{2}} = 18.1 A$$

$$I_{\Sigma}^{(3)} = \frac{I_m^{(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{7.06}{\sqrt{2}} = 5.0 A$$

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= \sqrt{(I^{(0)})^2 + (I^{(1)})^2 + (I^{(3)})^2} = \sqrt{20^2 + 18.1^2 + 5^2} = \\ &= \sqrt{400 + 327 + 25} = 27.5 A \end{aligned}$$

$$\underline{I_{\Sigma} = 27.5 A}$$

6. Визначимо свідчення вольтметра.

$$U_C^{(1)} = \frac{U_{Cm}^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{55.3}{\sqrt{2}} = 39.1B$$

$$U_C^{(3)} = \frac{U_{Cm}^{(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{12.48}{\sqrt{2}} = 8.8B$$

$$U_C = \sqrt{(U_C^{(1)})^2 + (U_C^{(3)})^2} = \sqrt{39.1^2 + 8.8^2} = \sqrt{1606.25} = 40.08B$$

$$\underline{U_C = 40.08B}$$

7. Для визначення потужності визначимо діючі значення напруги.

$$U_0 = 50B$$

$$U^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{60}{\sqrt{2}} = 42.4B$$

$$U^{(3)} = \frac{U_m^{(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21.2B$$

$$U = \sqrt{(U_0)^2 + (U^{(1)})^2 + (U^{(3)})^2} = \sqrt{50^2 + 42.4^2 + 21.2^2} = 68.9B$$

8. Визначимо коефіцієнти потужності в нерозгалуженій частині кола.

$$Z^{(1)} = 2.27 + j1.02$$

$$\operatorname{tg} \varphi^{(1)} = \frac{1.02}{2.27} = 0.449$$

$$\varphi^{(1)} = 24^\circ 10'$$

$$\underline{\cos \varphi^{(1)} = 0.912} \quad \underline{\sin \varphi^{(1)} = 0.409}$$

$$Z^{(3)} = 1.66 + j3.91$$

$$\operatorname{tg} \varphi^{(3)} = \frac{3.91}{1.66} = 2.35$$

$$\varphi^{(3)} = 67^\circ$$

$$\underline{\cos \varphi^{(3)} = 0.39} \quad \underline{\sin \varphi^{(3)} = 0.92}$$

9. Визначимо активну потужність кола.

$$\begin{aligned} P &= P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(3)} = I^{(0)} \cdot U^{(0)} + I_{\Sigma}^{(1)} \cdot U^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + \\ &+ I_{\Sigma}^{(3)} \cdot U^{(3)} \cdot \cos \varphi^{(3)} = 20 \cdot 50 + 18.1 \cdot 42.4 \cdot 0.912 + 5 \cdot 21.2 \cdot 0.39 = \\ &= 1000 + 700 + 41 = 1741Bm \end{aligned}$$

$$\underline{P = 1741Bm}$$

Реактивна потужність.

$$\begin{aligned} Q &= I_{\Sigma}^{(1)} \cdot U^{(1)} \cdot \sin \varphi^{(1)} + I_{\Sigma}^{(3)} \cdot U^{(3)} \cdot \sin \varphi^{(3)} = \\ &= 18.1 \cdot 42.4 \cdot 0.409 + 5 \cdot 21.2 \cdot 0.92 = \\ &= 314 + 98 = 412Var \end{aligned}$$

$$\underline{Q = 412Var}$$

Повна потужність кола.

$$S = U \cdot I_{\Sigma} = 68.9 \cdot 27.5 = 1895BA$$

$$\underline{S = 1895BA}$$

Коефіцієнт потужності кола.

$$\cos \varphi_{\Sigma} = \frac{P}{S} = \frac{1741}{1895} = 0.918$$
$$\underline{\cos \varphi_{\Sigma} = 0.918}$$

Література:

1. Л.А. Бессонов “Теоретические основы электротехники” –М.: 1984
2. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. Под ред. Л.А. Бессонова. –М. “Высшая школа”, 2000.
3. М.М. Шебес, М.В. Каблукова. Задачник по теории линейных электрических цепей. –М. “Высшая школа”, 1990.
4. В.Г. Данько, В.І. Мілих, А.К. Черкасов. Розрахунок електричних кіл – Київ НОК 1992.
5. В.В. Овчаров Теоретичні основи електротехніки. – Київ “Урожай”, 1993.

ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання розрахунково графічного завдання

з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки»,
«Теорія електричних та магнітних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Теорія
електромагнітного поля», «Електромагнітні поля та методи їх розрахунку»

для здобувачів зі спеціальності 163 «Біомедична інженерія» та 141

«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

УДК 621.3

.Відповідальний за випуск: Н. Г. Косуліна, д-р техн. наук

© Косуліна Н. Г., Чорна М. О., Сухін В. В.,
Коршунов К. С. 2023
© ДБТУ, 2023

Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. _.

Наклад ___ пр.

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44