УДК 539.3:534.1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С КОМБИНИРОВАННЫМ ТРЕНИЕМ

Ольшанский В.П., д. ф.-м.н., проф.[1], Ольшанский С.В., к.ф.-м.н.[1]

[1)] *Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко,*

[2)] *Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"*

Методом энергетического баланса выведены приближённые компактные формулы для вычисления амплитуд затухающих колебаний в системе переменной массы при действии реактивной силы, а также сил вязкого, сухого и позиционного сухого трения. Показано, что в частных случаях из этих формул вытекают известные зависимости. Исследовано влияние перечисленных сил на темп затухания нестационарных колебаний.

Введение. Свободные колебания системы с одной степенью свободы в условиях позиционного сухого трения рассматривали в [1-2], считая массу и жесткость системы постоянными величинами. Нестационарные колебания диссипативных систем переменных параметров, жесткости или массы, исследовали в [3-6]. В монографии [3] построены приближенные решения отдельных задач динамики осцилляторов переменной массы с учетом действия сил вязкого или сухого трения. В [4] через функции Бесселя выражено точное аналитическое решение задачи свободных колебаний осциллятора линейно-переменной массы с учетом вязкого трения. Подобного вида решения, но при кулоновом трении, имеются также в работах [6-7]. В [6-9] построены приближенные решения задач нестационарных колебаний, с учетом действия сил вязкого или сухого трения, методом ВБК. Обзор зарубежных публикаций по динамике тела переменной массы, включая и колебания, опубликован в [10]. Анализ публикаций показывает, что моделирование колебаний систем переменной массы в условиях комбинированного сопротивления среды, в том числе и позиционного сухого трения, требует дальнейшего развития. Оно позволяет обобщить имеющиеся решения в теории механических колебаний и повысить адекватность математических моделей, поскольку в реальных условиях колебания элементов машин обычно проходят при совместном действии сил сопротивления различной природы.

Целью работы является построение и апробация формул для расчета амплитуд затухающих колебаний осцилляторов линейно-переменной массы при совместном действии реактивной силы, а также сил вязкого, сухого и позиционного сухого трения. Средством достижения цели выбран метод энергетического баланса, который оказался эффективным в расчетах свободных колебаний осцилляторов постоянных параметров при наличии различных диссипативных сил [11]. Здесь проводится модернизация указанного метода путем учета в балансе энергий работы дополнительной силы инерции, возникающей вследствие изменения массы колебательной системы с течением времени. Без такой модернизации метод энергетического баланса приводит к существенным погрешностям [6].

Построение расчетных формул. Следуя [3], будем различать два случая трения Кулона. В первом случае сила трения $F_T = const$ и не зависит от изменения массы. Во втором сила трения пропорциональна массе и меняется с течением времени t.

1. При $F_T = const$ колебания системы описываем дифференциальным уравнением

$$\left(m_0 + \delta t\right)\ddot{x} + \left(\delta\varepsilon + \mu\right)\dot{x} + \left(c + \Delta c \cdot signx \cdot sign\dot{x}\right)x = -F_T sign\dot{x} . \qquad (1)$$

В нем $x = x(t)$ перемещение осциллятора; $m_0 -$ начальное значение массы; $\delta -$ скорость изменения массы во времени t; $0 \le \varepsilon \le 1 -$ коэффициент реактивности, позволяющий учитывать несовпадение направлений действия реактивной силы и перемещения; $\mu -$ коэффициент линейного вязкого трения; $c -$ коэффициент жесткости колебательной системы; $\Delta c -$ коэффициент позиционного сухого трения; точка над x означает производную по времени t.

Причиной колебаний считаем начальное отклонение системы от положения равновесия против оси ox на расстояние a_0. Поэтому начальными условиями к (1) берем:

$$x(0) = -a_0 < 0 ; \quad \dot{x}(0) = 0 . \qquad (2)$$

Для расчета колебаний методом энергетического баланса представим уравнение (1) в виде

$$m_0\ddot{x} + \left(c + \Delta c \cdot signx \cdot sign\dot{x}\right)x = \Phi\left(t, \dot{x}, \ddot{x}\right),$$
$$\Phi\left(t, \dot{x}, \ddot{x}\right) = -F_T sign\dot{x} - \delta\, t\ddot{x} - \left(\delta\varepsilon + \mu\right)\dot{x} . \qquad (3)$$

На первом размахе колебаний, при перемещении осциллятора из крайнего левого исходного положения в крайнее правое, функцию $x(t)$

аппроксимируем выражением

$$x(t) = -a\cos\omega t\,, \tag{4}$$

в котором $\omega = \sqrt{c/m_0}$; $a-$ некоторая константа.

Вычислив производные из (4), получаем

$$\dot{x} = a\omega\sin\omega t\,; \qquad \ddot{x} = a\omega^2\cos\omega t\,. \tag{5}$$

На первом размахе колебаний, когда $t \in (0; \pi/\omega)$, работа силы $\Phi(t,\dot{x},\ddot{x})$ представляется интегралом

$$A = \int_0^{\pi/\omega} \Phi(t,\dot{x},\ddot{x})\,\dot{x}dt\,. \tag{6}$$

Подставив в (6) выражения (3) и (5), после вычисления интеграла, получаем

$$A = -2F_T a - \frac{\pi}{4}\omega(2\mu + 2\delta\varepsilon - \delta)\,a^2\,.$$

Изменение потенциальной энергии системы Δu на первом размахе колебаний равно

$$\Delta u = \frac{1}{2}\left(c_2 a_1^2 - c_1 a_0^2\right),$$

где $c_{1,2} = c \mp \Delta c$; $a_1 -$ амплитудное отклонение осциллятора вправо в конце размаха.

Приравняв Δu к А, получаем уравнение

$$\left(\sqrt{c_2}a_1\right)^2 - \left(\sqrt{c_1}a_0\right)^2 = -4F_T a - \frac{\pi}{2}\omega\lambda a^2\,, \tag{7}$$

в котором $\lambda = 2\mu + 2\delta\varepsilon - \delta$.

Чтобы найти неизвестное a_1, приближенно принимаем

$$a = \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\sqrt{c_1}a_0 + \sqrt{c_2}a_1\right). \tag{8}$$

Подстановка (8) в (7) дает:

$$\sqrt{c_2}a_1 - \sqrt{c_1}a_0 = \frac{-2F_T}{\sqrt{c}} - \frac{\pi\lambda}{8}\cdot\frac{\sqrt{c_1}a_0 + \sqrt{c_2}a_1}{\sqrt{cm_0}}\,.$$

Из последнего равенства следует, что

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{c_2}\left(1+\frac{\pi\lambda}{8\sqrt{cm_0}}\right)}\left[a_0\sqrt{c_1}\left(1-\frac{\pi\lambda}{8\sqrt{cm_0}}\right)-\frac{2F_T}{\sqrt{c}}\right].$$

Обобщая этот результат, приходим к рекуррентному соотношению между амплитудами $(k-1)-$го и $k-$го размахов:

$$a_K = \frac{1}{\sqrt{c_2}\left(1+\frac{\pi\lambda}{8\sqrt{cm_{K-1}}}\right)}\left[a_{K-1}\sqrt{c_1}\left(1-\frac{\pi\lambda}{8\sqrt{cm_{K-1}}}\right)-\frac{2F_T}{\sqrt{c}}\right]; \tag{9}$$

$k = 1, 2, 3, ...$

Вычисление значений массы в моменты остановок также сводится к рекуррентной формуле

$$m_K = m_{K-1} + \pi\delta\sqrt{\frac{m_{K-1}}{c}}\ . \tag{10}$$

Осциллятор прекратит колебания, когда

$$a_K \le F_T c^{-1}\ .$$

Из (9) вытекают известные частные случаи. Рассмотрим некоторые из них.

При постоянной массе осциллятора ($\delta = 0$), без вязкого трения ($\mu = 0$), множитель $\lambda = 0$ и

$$a_K = \frac{1}{\sqrt{c_2}}\left(\sqrt{c_1}a_{K-1} - \frac{2F_T}{\sqrt{c}}\right). \tag{11}$$

Тогда при чисто позиционном сухом трении, когда $F_T = 0$:

$$a_K = a_{K-1}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\ .$$

Эта зависимость другим способом выведена в [1,2].

В случае отсутствия позиционного трения, но при наличии силы Кулона, когда $c_1 = c_2 = c$, а $F_T > 0$, выражение (11) принимает вид

$$a_K = a_{K-1} - \frac{2F_T}{c}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Это рекуррентное соотношение обычно излагают в учебной литературе по теоретичной механике [12].

2. Рассмотрим далее как изменятся расчетные формулы в случае переменной силы трения, когда в правой части в (1) $F_T = fg\left(m_0 + \delta\, t\right)$. Символами f, g обозначили соответственно коэффициент трения скольжения и ускорение свободного падения.

При вычислении работы А, во время первого размаха, теперь надо заменить

$$\int_0^{\pi/\omega} F_T \dot{x} dt \quad \text{на} \quad \int_0^{\pi/\omega} fg\left(m_0 + \delta\, t\right) \dot{x} dt .$$

Из равенства этих интегралов следует, что переменную силу трения можно заменить ее усредненным значением

$$F_T = fg\left(m_0 + \frac{\pi\delta}{2}\sqrt{\frac{m_0}{c}}\right).$$

По аналогии на $k-$ом размахе колебаний

$$F_T = fg\left(m_{K-1} + \frac{\pi\delta}{2}\sqrt{\frac{m_{K-1}}{c}}\right).$$

Поэтому, при переменной силе трения, (9) перейдет в рекуррентную формулу

$$a_K = \frac{1}{\sqrt{c_2}\left(1 + \frac{\pi\lambda}{8\sqrt{cm_{K-1}}}\right)}\left[a_{K-1}\sqrt{c_1}\left(1 - \frac{\pi\lambda}{8\sqrt{cm_{K-1}}}\right) - \frac{2fg}{\sqrt{c}}\left(m_{K-1} + \frac{\pi\delta}{2}\sqrt{\frac{m_{K-1}}{c}}\right)\right]; \quad (12)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

Для вычисления значений массы в моменты остановок сохраняется прежняя формула (10).

Осциллятор прекратит движение, когда $a_K \le fg\, m_K c^{-1}$.

Теперь ширина области застоя зависит от изменения массы. С увеличением массы область застоя расширяется, а с уменьшением массы - сужается.

Численные результаты. В табл. 1 записаны значения амплитуд колебаний, вычисленные разными способами. Для проведения расчетов по формуле (9), задавали: $m_0 = 4$ кг; $c = 1600$ Н/м; $\delta = \pm 2$ кг/с; $F_T = 8$ Н; $\mu = \varepsilon = 0$; $a_0 = 0,05$ м; $\Delta c = 0$.

Таблица 1. Значения $100a_K$, вычисленные тремя способами ($F_T = const$)

k	$\delta = 2$ кг/с			$\delta = -2$ кг/с		
	из [6], ВБК	из [6], МЭБ	форм. (9)	из [6], ВБК	из [6], МЭБ	форм. (9)
1	4,088	4,019	4,089	3,911	3,980	3,913
2	3,155	3,037	3,158	2,840	2,958	2,843
3	2,203	2,055	2,207	1,790	1,936	1,794
4	1,232	1,072	1,237	0,761	0,913	0,765
5	0,244	0,088	0,250	0,245*	0,112*	0,241*

Символом * помечены те размахи, при которых осциллятор не проходит положения $x = 0$.

Заимствованные из [6] значения амплитуд содержатся в указанной монографии в табл. 2.11 и 2.12.

Сопоставляя результаты, легко убедиться, что значения амплитуд, к которым приводит формула (9), гораздо лучше согласуются с ВБК-приближениями, чем амплитуды, найденные методом энергетического баланса в [6]. Таким образом, проведенная здесь модернизация метода энергетического баланса учетом работы дополнительной силы инерции, вызванной изменением массы, существенно повысила точность метода.

В табл. 2 и табл. 3 записаны результаты расчетов по формуле (9), с учетом вязкого и позиционного сухого трения. Вычисления подтверждают, что с возрастанием коэффициентов μ и Δc, при прежних остальных исходных данных, возрастает темп затухания колебаний и сокращается количество размахов осциллятора до его полного останова.

Таблица 2. Значения $100a_K$, м, $\delta = 2$ кг/с; $F_T = 8$ Н; $\varepsilon = 0$

k	$\Delta c = 0$		$\Delta c = 100$ Н/м		$\Delta c = 200$ Н/м	
	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с
1	3,913	3,579	3,645	3,332	3,390	3,098
2	2,849	2,301	2,398	1,921	2,000	1,585
3	1,806	1,144	1,251	0,720	0,798	0,375
4	0,783	0,090	0,193	0,310*	0,243*	-
5	0,221*	-	-	-	-	-

Таблица 3. Значения $100a_K$, м, $\delta = -2$ кг/с; $F_T = 8$ Н; $\varepsilon = 0$

k	$\Delta c = 0$		$\Delta c = 100$ Н/м		$\Delta c = 200$ Н/м	
	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с
1	3,743	3,421	3,486	3,185	3,241	2,960
2	2,549	2,031	2,138	1,687	1,774	1,382
3	1,422	0,818	0,944	0,461	0,554	0,172
4	0,363	0,228*	0,110*	–	0,456*	–

При $F_T = const$, без учета реактивной силы ($\varepsilon = 0$), темп затухания колебаний с убыванием массы осциллятора оказывается большим, чем с возрастанием его массы.

Для проведения расчетов по формуле (12), при переменной силе трения, задавали: $m_0 = 4$ кг; $c = 1600$ Н/м; $\delta = \pm 1$ кг/с; $f = 0,2$; $a_0 = 0,05$ м. Результаты вычисления a_K при $\mu = \varepsilon = \Delta c = 0$ записаны в табл. 4, где для сравнения также указаны значения a_K, полученные в [6] ВБК методом и методом энергетического баланса, до его модернизации.

Таблица 4. Значения $100a_K$, вычисленные тремя способами при переменной силе трения $F_T = fg\left(m_0 + \delta\, t\right)$

k	$\delta = 1$ кг/с			$\delta = -1$ кг/с		
	из [6], ВБК	из [6], МЭБ	форм. (12)	из [6], ВБК	из [6], МЭБ	форм. (12)
1	4,044	4,009	4,044	3,994	4,029	3,994
2	3,038	2,980	3,039	3,034	3,096	3,035
3	1,982	1,911	1,984	2,121	2,200	2,123
4	0,875	0,825	0,878	1,252	1,342	1,255
5	0,284*	0,347*	0,280*	0,428	0,519	0,433
6	-	-	-	0,348*	0,268*	0,346*

Амплитуды, вычисленные методами ВБК и МЭБ, находятся в [6] в табл. 2.13 и 2.14. Расчет подтверждает, что после модернизации улучшилось согласование результатов, полученных методами ВБК и энергетического баланса, что было выше и при постоянной силе трения.

В табл. 5 и табл. 6 помещены значения амплитуд колебаний, вычисленные по формуле (12) с учетом действия сил вязкого и позиционного сухого трения. Для проведения расчетов использовали прежние исходные данные, задавая $\varepsilon = 0$.

При переменной силе трения, как и при постоянном ее значении, с увеличением коэффициентов μ и Δc убыстряется темп затухания свободных колебаний и уменьшается количество размахов осциллятора за время его движения.

Таблица 5. Значения $100a_K$, м, $F_T = fg\left(m_0 + \delta\, t\right)$; $\delta = 1$ кг/с

k	$\Delta c = 0$		$\Delta c = 100$ Н/м		$\Delta c = 200$ Н/м	
	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с
1	3,869	3,539	3,604	3,295	3,352	3,063
2	2,735	2,196	2,295	1,826	1,906	1,499
3	1,594	0,953	1,064	0,551	0,631	0,225
4	0,447	0,204*	0,099*	0,566*	0,499*	-

Таблица 6. Значения $100a_K$, м, $F_T = fg\left(m_0 + \delta\, t\right)$; $\delta = -1$ кг/с

k	$\Delta c = 0$		$\Delta c = 100$ Н/м		$\Delta c = 200$ Н/м	
	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с	$\mu = 2$ кг/с	$\mu = 6$ кг/с
1	3,822	3,496	3,561	3,256	3,313	3,028
2	2,734	2,202	2,307	1,843	1,930	1,527
3	1,734	1,096	1,221	0,710	0,802	0,395
4	0,817	0,161	0,285	0,190*	0,109*	-
5	0,018*	-	-	-	-	-

Выводы. Модернизация метода энергетического баланса позволила получить компактные формулы вычисления амплитуд затухающих колебаний осциллятора переменной массы при совместном действии реактивной силы, а также сил вязкого и сухого трения. Проверка формул на адекватность подтвердила их хорошую точность. Показано, что в условиях комбинированного трения темп затухания свободных колебаний существенно убыстряется.

Список использованных источников

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Сурьянинов Н.Г. Теоретические основы динамики машин / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А. Белоус. – Одесса: ОГПУ, 2000. – 306 с.
3. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой

звеньев / А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с.
4. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass / L. Cveticanin. – Taylor & Francis Ltd. – 1998. – 300 p.
5. Митропольский Ю.А. Избранные труды в 2-х томах / Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.
6. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.
7. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси при наявності сухого тертя / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Математичне моделювання в техніці та технологіях: Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – № 54 (1027). – С. 172-178.
8. Ольшанский В.П. ВБК-метод в расчетах колебаний механизмов с переменной массой звеньев / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин: загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник. – Кіровоград: КНТУ, 2013. – Вип. 43. Ч. 1. – С. 108-113.
9. Ольшанский В.П. Расчет колебаний механизмов с переменной массой звеньев методом ВБК / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Механізація сільськогосподарського виробництва: вісник ХНТУСГ. – 2014. – Вип. 148. – С. 9-18.
10. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable systems / L. Cveficanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – P. 56-74.
11. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.
12. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: Т. 2 / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.

Анотація

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНО-ЗМІННОЇ МАСИ З КОМБІНОВАНИМ ТЕРТЯМ

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

Методом енергетичного балансу виведено наближені компактні формули для обчислення амплітуд затухаючих коливань в системі змінної маси при дії реактивної сили, а також сил в'язкого, сухого та позиційного сухого тертя. Показано, що в окремих випадках із цих *формул випливають відомі залежності. Досліджено вплив перелічених сил на темп затухання нестаціонарних коливань.*

Abstract

NONSTATIONARY OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEM OF LINEARLY VARIABLE MASS COMBINED WITH FRICTION

Olshanskii S.V., Olshanskii S.V.

Energy balance method derived approximate compact formulas for calculating the amplitudes of damped oscillations in a system with variable mass under the action of reactive power, as well as the forces of viscous, dry and position of dry friction were obtained. It is shown that in particular cases of these formulas implies known dependence. The influence of these forces on the decay rate of transient oscillations are investigated.