УДК539.3 : 534.1

ПРО КОЛИВАННЯ МЕХАНІЗМІВ З ПОЗИЦІЙНИМ СУХИМ ТЕРТЯМ

Бурлака В.В., канд. техн. наук, Малець О.М. асист., Ольшанський В.П., докт. фіз.-мат. наук.
(Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра. Василенка)

Розглянуто малі нелінійні коливання системи з одним ступенем вільності при спільній дії сил в'язкого і позиційного сухого тертя. Виведено формули для обчислення амплітуд затухаючих коливань, спричинених початковим відхиленням системи від положення статичної рівноваги, в умовах комбінованого тертя. Показано, що зменшення амплітуд коливань відбувається за законом геометричної прогресії.

Вступ. У техніці поширені механізми, де затухання коливань зумовлено спільною дією сил в'язкого і сухого тертя. В'язке тертя ефективно гасить коливання в області резонансу, а сухе – поза межами цієї області, що підкреслює доцільність використання такого способу запобігання небезпечних коливань. Отже, вивчення коливань механічних систем з комбінованим тертям важливо для інженерної справи. Зазначимо, що теорія лінійних коливань при дії сили в'язкого тертя уже ґрунтовно розроблена і стала класичним надбанням, а специфіка коливань системи з позиційним сухим тертям детально розглянута в [1] і частково в [2]. Тому далі вивчемо спільний вплив згаданих факторів на коливання.

Метою роботи є одержання і апробація формул для розрахунку амплітуд затухаючих коливань осцилятора при одночасній дії сил в'язкого та позиційного сухого тертя.

Побудова розрахункових формул методом припасовування розв'язків.

Вільні затухаючі коливання механічної системи описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + \left(c + \delta \cdot \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{sign} \dot{x}\right)x = 0 . \qquad (1)$$

У ньому m - маса осцилятора; c - коефіцієнт пружності коливальної системи; k, δ - відповідно коефіцієнти в'язкого та позиційного сухого тертя; x - переміщення коливальної системи;

крапкою позначено похідну за часом t.

Підкреслюємо, що коефіцієнт δ є розмірною величиною, яка збігається з розмірністю c. Внаслідок наявності позиційного тертя відновлююча сила F_y залежить від знаків переміщення і швидкості [1], що графічно показано на рис.1.

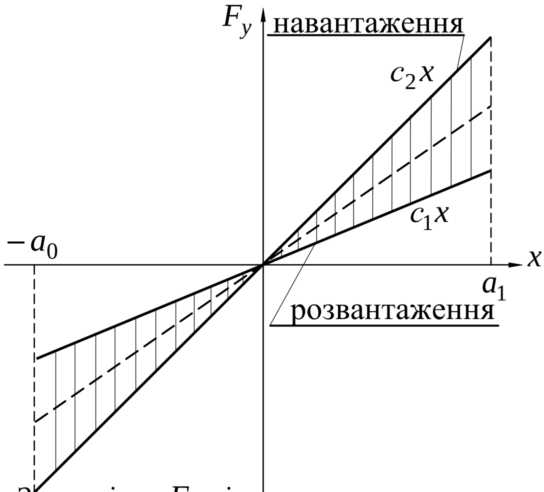

Рис. 1. Залежність F_y від x

Рівняння (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = -a_0 < 0 \quad ; \qquad \dot{x}(0) = 0\,, \tag{2}$$

позначивши символом a_0 початкове відхилення системи вліво від положення рівноваги.

Розглянемо перший розмах коливань, коли напрям руху осцилятора такий, як у вісі ox, тобто відбувається зліва направо і $\operatorname{sign}\,\dot{x} = 1$. Переміщення осцилятора $x = x_1(t)$ на початковому етапі руху, коли він знаходиться зліва від положення рівноваги $x_1(t) \le 0$, у відповідності з (1), описуємо рівнянням:

$$m\ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 + (c - \delta)x_1 = 0\,.$$

Його загальний розв’язок має вигляд:

$$x_1(t) = \exp(-\mu t)(в_1 \cos\omega_1 t + в_2 \sin\omega_1 t), \tag{3}$$

де $\mu = \dfrac{k}{2m}$; $\quad \omega_1 = \sqrt{\dfrac{c-\delta}{m} - \mu^2}$; $\quad в_1, в_2$ - довільні сталі.

Переміщення (3) відбувається зі швидкістю

$$\dot{x}_1(t) = -\exp(-\mu t)\left[(\mu в_1 - \omega_1 в_2)\cos\omega_1 t + (\mu в_2 + \omega_1 в_1)\sin\omega_1 t\right]. \qquad (4)$$

Підставивши (3) і (4) в (2), одержуємо систему двох рівнянь, з якої знаходимо сталі:

$$в_1 = -a_0; \quad в_2 = -a_0\mu/\omega_1.$$

Таким чином, рух коливальної системи на початковому етапі описується виразами:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -a_0 \exp(-\mu t)\left(\cos\omega_1 t + \frac{\mu}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right); \\ \dot{x}_1(t) &= a_0 \exp(-\mu t)\left(\omega_1 + \frac{\mu^2}{\omega_1}\right)\sin\omega_1 t. \end{aligned} \qquad (5)$$

Знайдемо час $t = t_1$, при якому $x_1(t_1) = 0$, коли осцилятор досягає положення рівноваги. Із (5) одержуємо рівняння:

$$\cos\omega_1 t_1 + \frac{\mu}{\omega_1}\sin\omega_1 t_1 = 0,$$

розв’язком якого є

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\mu}\right).$$

Оскільки $\sin\omega_1 t_1 = \omega_1 \big/ \sqrt{\omega_1^2 + \mu^2}$, то, у відповідності з (5), швидкість руху осцилятора, при $x_1 = 0$ дорівнює:

$$\dot{x}(t_1) = a_0\sqrt{\omega_1^2 + \mu^2}\exp(-\mu t_1).$$

Вона буде початковою на наступному етапі руху.

Переміщення системи $x = x_2(t)$, справа від положення рівноваги $(x_2 \geq 0)$, описуємо рівнянням:

$$m\ddot{x}_2 + k\dot{x}_2 + (c + \delta)x_2 = 0, \qquad (6)$$

в яке переходить (1), коли $\operatorname{sign}(\dot{x}) = 1$, $\operatorname{sign}(x) = 1$.

Загальний розв’язок (6) подаємо у вигляді

$$x_2(t) = \exp(-\mu t)(d_1\cos\omega_2 t + d_2\sin\omega_2 t), \qquad (7)$$

де $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{c+\delta}{m} - \mu^2}$; d_1, d_2 - довільні сталі.

Швидкість руху осцилятора становить:

$$\dot{x}_2(t) = -\exp(-\mu t)\left[(\mu d_1 - \omega_2 d_2)\cos\omega_2 t + (\mu d_2 + \omega_2 d_1)\sin\omega_2 t\right]. \quad (8)$$

Підставивши вирази (7) і (8), в початкові умови:

$$x_2(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = a_0\sqrt{\omega_1^2 + \mu^2}\exp(-\mu t_1),$$

знаходимо, що

$$d_1 = 0; \quad d_2 = a_0\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \mu^2}}{\omega_2}\exp(-\mu t_1). \quad (9)$$

Отже, згідно з (7), (8) і (9), рух осцилятора на етапі де $x > 0$ і $\dot{x} > 0$, описується виразами:

$$x_2(t) = d_2\exp(-\mu t)\sin\omega_2 t;$$
$$\dot{x}_2(t) = d_2\exp(-\mu t)(\omega_2\cos\omega_2 t - \mu\sin\omega_2 t). \quad (10)$$

Перший розмах коливань закінчується, коли $\dot{x}_2(t_2) = 0$. Враховуючи (10), одержуємо рівняння:

$$\omega_2\cos\omega_2 t_2 - \mu\sin\omega_2 t_2 = 0,$$

з якого випливає, що

$$t = t_2 = \frac{1}{\omega_2}\operatorname{arctg}\frac{\omega_2}{\mu}; \quad \sin\omega_2 t_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \mu^2}}.$$

Підставивши це значення t в перший вираз в (10), одержуємо максимальне відхилення a_1 осцилятора від положення рівноваги в кінці першого розмаху:

$$a_1 = x_2(t_2) = d_2\exp(-\mu t_2)\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \mu^2}}.$$

Враховуючи (9), цій формулі надаємо вигляд

$$a_1 = a_0\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \mu^2}}{\sqrt{\omega_2^2 + \mu^2}}\exp\left[-\mu(t_1 + t_2)\right].$$

Із неї одержуємо відношення:

$$\frac{a_1}{a_0} = q, \quad (11)$$

де $$q = \sqrt{\frac{c - \delta}{c + \delta}}\exp\left\{-\mu\left[\frac{1}{\omega_1}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\mu}\right) + \frac{1}{\omega_2}\operatorname{arctg}\frac{\omega_2}{\mu}\right]\right\}. \quad (12)$$

Очевидно, що відношення (11) збережеться і для амплітуд n-го і n-1 розмахів:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \qquad n = 1, 2, 3.....$$

Отже, амплітуда n-го розмаху пов'язана з початковим відхиленням a_0 залежністю:

$$a_n = a_0 q^n, \tag{13}$$

тобто зменшення амплітуд коливань відбувається за геометричною прогресією, знаменник якої легко обчислити по формулі (12).

У випадку невеликої сили в'язкого тертя, коли

$$\mu << \omega_1; \qquad \operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\mu} \approx \frac{\pi}{2},$$

що зазвичай спостерігається на практиці, обчислення q зводиться до більш простої наближеної формули:

$$q = \sqrt{\frac{c-\delta}{c+\delta}}\exp\left[-\frac{\pi k}{4\sqrt{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{c-\delta-m\mu^2}} + \frac{1}{\sqrt{c+\delta-m\mu^2}}\right)\right]. \tag{14}$$

Із (14) випливають окремі відомі результати. Так, коли $\delta = 0$, то $q = \exp\left(-\frac{\pi k}{2\sqrt{mc - k^2/4}}\right)$. Якщо $k = 0$, то $q = \sqrt{\frac{c-\delta}{c+\delta}}$. Саме такі вирази для q можна знайти в [3], [4], [5].

Вище припускали, що причиною коливань є початкове відхилення осцилятора від положення рівноваги. З'ясуємо далі як розрахувати коливальний процес, коли внаслідок миттєвого силового імпульсного навантаження система одержить у положенні рівноваги початкову швидкість υ_0. Для цього випадку вирази (7) і (8) повинні задовольняти початковим умовам:

$$x_2(0) = 0; \qquad \dot{x}_2(0) = \upsilon_0.$$

Довільні сталі в (7) і (8) тепер приймуть значення

$$d_1 = 0; \qquad d_2 = \upsilon_0/\omega_2$$

і рух відбудеться за законом:

$$x_2(t) = \frac{\upsilon_0}{\omega_2}\exp(-\mu t)\sin\omega_2 t.$$

Підставивши сюди найдене вище значення $t = t_2$, одержуємо максимальне відхилення осцилятора:

$$\max x_2(t) = x_2(t_2) = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\omega_2^2 + \mu^2}} \exp(-\mu t_2).$$

Далі, прийнявши, що

$$a_0 = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\omega_2^2 + \mu^2}} \exp\left(-\frac{\mu}{\omega_2} \operatorname{arctg} \frac{\omega_2}{\mu}\right), \tag{15}$$

за формулами (12) і (13) просто обчислити наступні амплітуди затухаючих коливань.

Аналіз числових результатів. Для проведення розрахунків приймаємо: $m_0 = 5\,кг$; $c = 4900\,Н/м$; $\delta = 0{,}02 \cdot c$ і $\delta = 0{,}05 \cdot c$; $k = 1;\ 10;\ 20\,кг/с$.

Обчислені за формулами (12), (13) відношення a_n/a_0 подано в табл.1.

Таблиця 1

Результати обчислень a_n/a_0 по формулах (12), (13)

n	a_n/a_0, при $\delta = 0{,}02 \cdot c$			a_n/a_0, при $\delta = 0{,}05 \cdot c$		
	$k = 1\frac{кг}{с}$	$k = 10\frac{кг}{с}$	$k = 20\frac{кг}{с}$	$k = 1\frac{кг}{с}$	$k = 10\frac{кг}{с}$	$k = 20\frac{кг}{с}$
1	0,9704	0,8865	0,8015	0,9417	0,8602	0,7774
2	0,9417	0,7859	0,6423	0,8868	0,7399	0,6044
3	0,9138	0,6967	0,5148	0,8351	0,6364	0,4699
4	0,8868	0,6176	0,4126	0,7864	0,5474	0,3653
5	0,8605	0,5475	0,3307	0,7405	0,4708	0,2840
6	0,8351	0,4854	0,2650	0,6973	0,4050	0,2208
7	0,8104	0,4303	0,2124	0,6566	0,3484	0,1716

Розрахунки підтверджують, що темп затухання коливань зростає при збільшенні значень коефіцієнтів тертя k і δ.

В табл.2 наведено значення a_n/a_0, які одержано за допомогою формул (13), (14).

Таблиця 2

Результати обчислень a_n/a_0 по формулах (13), (14)

n	a_n/a_0, при $\delta = 0{,}02\cdot c$			a_n/a_0, при $\delta = 0{,}05\cdot c$		
	$k = 1\frac{кг}{с}$	$k = 10\frac{кг}{с}$	$k = 20\frac{кг}{с}$	$k = 1\frac{кг}{с}$	$k = 10\frac{кг}{с}$	$k = 20\frac{кг}{с}$
1	0,9704	0,8865	0,8016	0,9417	0,8602	0,7777
2	0,9417	0,7860	0,6426	0,8868	0,7400	0,6049
3	0,9138	0,6968	0,5151	0,8351	0,6366	0,4705
4	0,8868	0,6177	0,4129	0,7864	0,5476	0,3659
5	0,8605	0,5477	0,3310	0,7405	0,4711	0,2846

Порівняння результатів в табл.1 і 2 підтверджує можливість заміни формули (12) більш простим виразом (14).

В табл.3 записано безрозмірні значення $\tilde{a}_0 = a_0\omega_2 U_0^{-1}$ в залежності від $\tilde{\mu} = \mu\omega_2^{-1}$. Їх обчислили по формулі (15).

Таблиця 3

Результати обчислень $\tilde{a}_0$ по формулі (15)

$\tilde{\mu}$	$\tilde{a}_0$	$\tilde{\mu}$	$\tilde{a}_0$	$\tilde{\mu}$	$\tilde{a}_0$
0	1,0000	0,04	0,9399	0,14	0,8105
0,001	0,9984	0,06	0,9117	0,16	0,7877
0,005	0,9922	0,08	0,8847	0,18	0,7660
0,01	0,9845	0,10	0,8589	0,20	0,7451
0,02	0,9693	0,12	0,8342	0,22	0,7250

Розрахунки показують, що зростання $\tilde{\mu}$ супроводжується зменшенням $\tilde{a}_0$. Використовуючи табл.3 та лінійну інтерполяцію, просто обчислювати a_0, бо

$$a_0 = \frac{\tilde{a}_0 \cdot \upsilon_0}{\omega_2}.$$

Приклад. Обчислимо a_0, коли $m_0 = 10\,кг$; $c = 8700\,Н/м$; $\delta = 460\,Н/м$; $k = 80\,кг/с$; $\upsilon_0 = 2\,м/с$. Для цих числових даних знаходимо: $\mu = 4\,с^{-1}$; $\omega_2 = 30\,с^{-1}$; $\tilde{\mu} \approx 0{,}133$. Провівши інтерполяцію чисел у табл.3, одержуємо $\tilde{a}_0 \approx 0{,}8184$. Отже,

$a_0 \approx 0{,}055\, м$.

Висновки. Дослідження показало, що при спільній дії позиційного сухого та ліного в'язкого тертя, спадання амплітуд коливань відбудеться за геометричною прогресією. Одержані формули дають можливість обчислити знаменник прогресії та розрахувати затухання коливального процесу механічної системи.

Список літератури

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: „Высшая школа",1980. – 408 с.

2. Сурьянинов Н.Г. Теоретические основы динамики машин / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А. Белоус. – Одесса: ОГПУ, 2000. – 306 с.

3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.

4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У.Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

5. Лойцянский Л.Г. Теоретическая механика. Т.2. Динамика / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Дрофа 2006.- 720 с.

Аннотация

О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЗМОВ С ПОЗИЦИОННЫМ СУХИМ ТРЕНИЕМ

Рассмотрено малые нелинейные колебания системы с одной степенью свободы при совместном действии сил вязкого и позиционного сухого трения. Выведено формулы для вычисления амплитуд затухающих колебаний, вызванных начальным отклонением системы от положения статического равновесия в условиях комбинированного трения. Показано, что убывание амплитуд колебаний происходит по закону геометрической прогрессии.

Abstract

ABOUT FLUCTUATION MECHANISM WITH POSITIONAL DRY FRICTION

The small nonlinear system fluctuations is considered with one degree of the liberty under joint action of power viscous and positional dry friction. Vyvedeno formulas for calculation of the amplitudes fading fluctuations, caused by initial deflection of the system from position of the steady-state balance in condition of multifunction friction. It is shown that

decrease the amplitudes of the fluctuations occurs under the iaw geometric progression.