

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЗЕРНА ПРИ ИЗМЕЛЬЧЕНИИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Нанка А.В., профессор

(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка)

Сформирована задача упругого деформирования фуражного зерна при его измельчении. В результате совместного решения задачи упругого и пластического деформирования твердого тела определены значения усилий, которые передаются зерну со стороны рабочих органов предлагаемой конструкции дробилки.

Постановка проблемы. Дробление твердых материалов представляет собой сложный процесс, физические основы которого еще не ясны до конца [1, 2]. С точки зрения теории имеется два подхода. Первый, когда имеет место хрупкое разрушение, связанное с наличием микротрещин. При достижении определенного значения напряжений в теле микротрещины начинают быстро расти, хотя напряженное состояние еще соответствует закону Гука. Второй, связан с возникновением пластических зон в теле при достижении предельных напряжений. Таким образом, в обоих случаях разрушению тела предшествуют упругие деформации. Для мягких материалов (к таковым относится фуражное зерно) с физической точки зрения ближе второй подход.

Предложенное нами устройство для измельчения фуражного зерна [2] представляет собой горизонтальный цилиндр, внутри которого располагается барабан с фрезами. Зерно через выходное отверстие бункера попадает в рабочую зону дробилки на противорежущую пластину (ПРП). Зерно, имеющее форму вытянутого эллипсоида вращения, ложится центральной частью на противорежущую пластину. Движущиеся фрезы срезают концевые части зерна.

Результаты исследований. В нашем случае дробление зерна производится внедрением в него твердого тела, имеющего острую кромку. Будем называть такой процесс разрушения «резанием». Можно указать следующие этапы этого процесса. Твердое тело (нож, фреза) приходит в соприкосновение с зерном. В зоне контакта возникает концентрация напряжений. При достижении предельных напряжений в этой зоне появляются пластические деформации. Далее область пластических деформаций расширяется, прочность тела нарушается, и происходит его разрушение. В такой постановке задачи приходится решать совместную задачу упругого и пластического деформирования тела. В теории пластичности вводятся понятия уравнения текучести и поверхности текучести, определяемых в пространстве напряжений. Здесь возникает необходимость формулировки критерия пластичности и принятия модели пластического деформирования [3]. Один из критериев – критерий Мизеса – имеет дело с характеристикой, называемой интенсивностью касательных напряжений T

$$T \equiv \sqrt{\frac{1}{2} I_2 \left(\overset{\circ}{\sigma} \right)} = \tau_s \quad (1)$$

где $\overset{\circ}{\sigma}$ - девиатор тензора напряжений;

$I_2 \left(\overset{\circ}{\sigma} \right)$ - второй инвариант девиатора тензора напряжений.

Будем считать, что при достижении предельного упругого состояния и выполнения условия (1) в какой либо точке тела, в соответствующем месте поперечного сечения тела происходит пластическое деформирование и разрушение тела. Тогда определение момента разрушения сводится к задаче линейной теории упругости при соблюдении закона Гука.

При решении задач теории упругости часто используют принцип Сен-Венана, позволяющий упростить соответствующую краевую задачу. Принцип заключается в следующем: рассматривается упругое тело, занимающее некоторый объем V и нагруженное внешними силами, приложенными в некоторой локальной области V_0 тела. Обозначим через \vec{F}, \vec{M} главный вектор и главный момент этих сил. Тогда распределение напряжений в теле вдали от области V_0 не зависит от характера распределения внешних сил внутри V_0 , а зависит лишь от \vec{F}, \vec{M} . Это свойство решений задач теории упругости позволяет изменять распределение сил по поверхности тела, а также незначительно менять форму тела.

Длина зерна равна $2a_3$, а максимальное поперечное сечение имеет диаметр, равный $2b_3$ (рис.1).

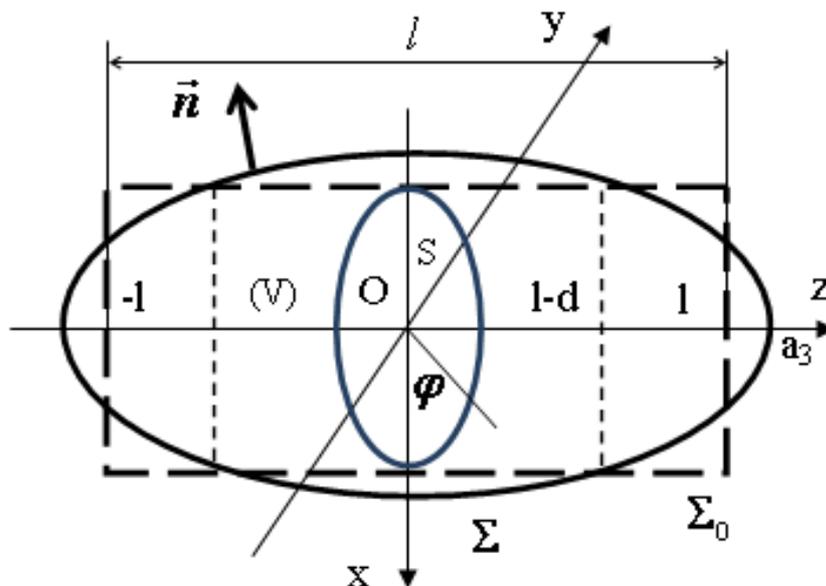


Рисунок 1. - К расчету напряженного состояния зерна

Заменим эллипсоид Σ круговым цилиндром Σ_0 с высотой $l = 2a_3 - d$ и объемом, равным объему зерна:

$$V = \pi R_0^2 l = \pi R_0^2 (2a_3 - d) = \frac{4}{3} \pi a_3 b_3^2 \quad (2)$$

Последнее соотношение позволяет определить радиус R_0 указанного цилиндра

$$R_0 = 2b_3 \sqrt{\frac{a_3}{3(2a_3 - d)}} \quad (3)$$

В процессе резания середина зерна ложится на ПРП, а его концы длиной d отрезаются фрезой. При этом поверхность зерна нагружается поверхностными силами \vec{p}_n , распределенными по Σ . Помимо декартовой системы координат (x, y, z) введем полярные координаты (r, φ, z) . Тогда распределение \vec{p}_n по поверхности Σ можно представить в виде [2]:

$$\vec{p}_n = \vec{F}(z) \cos \varphi. \quad (4)$$

где $\vec{F}(z)$ выбирается так, чтобы главный вектор внешних сил, действующих на зерно, равнялся нулю.

Основными характеристиками при описании напряженно-деформированного состояния упругого тела являются векторное поле перемещений $\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{r})$, тензор деформаций $\hat{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ik}\}_{ik}^3$ и тензор напряжений $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ik}\}_{ik}^3$ [4, 5]. Вектор перемещений связывает начальное $A(t_0)$ и конечное положение $A(t)$ частицы тела $\vec{u} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ (рис.2).

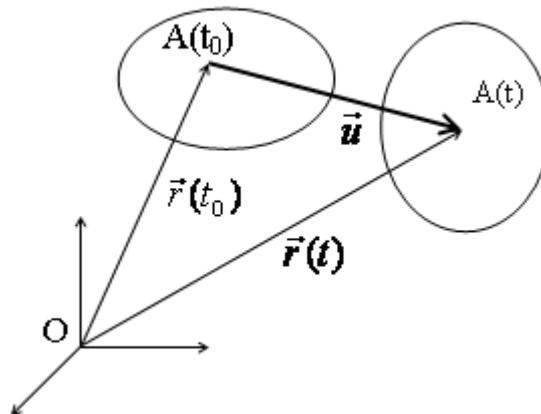


Рисунок 2. - Вектор перемещений

Тензор деформаций определяется матрицей порядка (3×3) , компоненты которой в декартовой системе координат в линейной теории упругости определяются соотношениями:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, i, k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Напряжения σ_{ik} связаны с компонентами тензора деформаций линейными соотношениями, выражающими закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \lambda \operatorname{div} \vec{u} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} \quad (6)$$

где $\lambda = 2\mu\nu / (1 - 2\nu)$, $\mu = E / 2(1 + \nu)$ - коэффициенты Ляме - физические константы;

E, ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Если ввести элементарную площадку $\Delta\Sigma$, ориентированную нормалью \vec{n} ,

то для нее можно записать соотношение Коши, дающие связь напряжений \vec{p}_n на ней с тензором напряжений σ_{ik} (рис.3):

$$\vec{P}_n = \vec{n} \cdot \mathfrak{C} \quad (P_{ni} = n_k \sigma_{ki}) \quad (7)$$

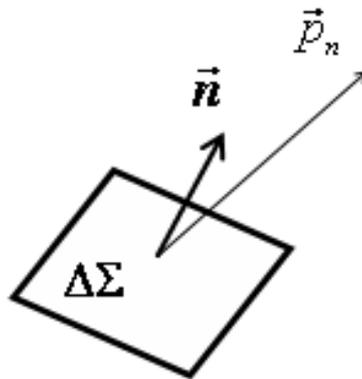


Рисунок 3. - Соотношение Коши

Формула (7) проясняет физический смысл компонент тензора напряжений: σ_{ik} представляет собой проекцию на k-ую ось поверхностной силы, проходящейся на единицу площади площадки, ориентированной перпендикулярной оси координат.

Один из законов механики сплошной среды - закон сохранения массы - в линейной теории упругости сводится к неизменности плотности тела и сохранения его формы при его нагружении. Третий закон - закон изменения кинетического момента тела - в классической теории упругости приводит к симметрии тензора напряжений $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. Второй же закон - закон изменения импульсов - при рассмотрении статических задач приводит к уравнению равновесия:

$$\operatorname{div} \mathfrak{C} + \vec{X} = 0, \quad (8)$$

или в координатной форме в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

После подстановки (6), (5) в соотношения (8) (или (9)) получим уравнения равновесия в форме Ляме

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \bar{u} + \mu \Delta \bar{u} + \bar{X} = 0, \tag{10}$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + X_1 &= 0 \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + X_2 &= 0 \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + X_3 &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (11) дополняются граничными условиями для выделения единственного решения, Существуют три типа граничных условий:

– первого, когда на границе заданы перемещения \bar{u}^0 точек тела

$$\bar{u} \Big|_{\Sigma} = \bar{u}^0, \tag{12}$$

– второго – на границе заданы поверхностные силы \bar{p}^0 , и в силу соотношений (7) имеем:

$$\bar{n} \cdot \bar{\sigma} \Big|_{\Sigma} = \bar{p}^0, \tag{13}$$

– третьего тип – смешанные условия, когда на части границы заданы перемещения, а на другой части поверхностные силы.

В рассматриваемом случае пренебрегаем массовыми силами ($\bar{X} = 0$), и считаем заданными поверхностные силы на Σ . На поверхностные силы налагаем необходимые условия равновесия – их главный вектор и главный момент равны нулю

$$\iint_{\Sigma} \bar{p}_n d\Sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} \bar{r} \times \bar{p}_n d\Sigma = 0. \tag{14}$$

Упругое тело (зерно) имеет форму тела вращения (рис. 1), точнее, является эллипсоидом с полуосями $a_3, b_3, c_3 = b_3$. Векторное уравнение поверхности в

параметрическом виде, выбирая в качестве параметров полярный угол φ и координату z , можно записать в форме [1]

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R}(\varphi, z) = \vec{e}_x R_x(\varphi, z) + \vec{e}_y R_y(\varphi, z) + \vec{e}_z R_z(\varphi, z) = \\ &= \vec{e}_x H(z) \cos \varphi + \vec{e}_y H(z) \sin \varphi + \vec{e}_z z = \vec{e}_r H(z) + \vec{e}_z z\end{aligned}\quad (15)$$

где

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ - радиус-вектор точки, лежащей на Σ ;

$r = H(z) = b_3 \sqrt{1 - (z/a_3)^2}$ определяет кривую в полуплоскости (r, z) , вращение которой вокруг оси Oz дает разыскиваемую поверхность Σ , $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - являются ортами декартовой системы координат;

$\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ - орт цилиндрической системы координат (два других орта этой системы координат записываются как $\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \vec{e}_z = (0, 0, 1)$).

Найдем выражение для единичной нормали $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, внешней по отношению к объему V [6-8]

$$\vec{n} = \frac{\vec{E}_\varphi \times \vec{E}_z}{|\vec{E}_\varphi \times \vec{E}_z|}, \quad (16)$$

где

$$\vec{E}_\varphi = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = (-H \sin \varphi, H \cos \varphi, 0), \quad \vec{E}_z = \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = (H' \cos \varphi, H' \sin \varphi, 1)$$

вектора ковариантного базиса на Σ , $H' = dH/dz$. Тогда получаем

$$\vec{n} = \frac{(H(z) \cos \varphi, H(z) \sin \varphi, -H(z) H'(z))}{H(z) \sqrt{(1 + H'^2(z))}} \quad (17)$$

Введем обозначения для компонент тензора напряжений в декартовой системе координат (x, y, z)

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (18)$$

и в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\varphi} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\varphi z} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (19)$$

Тогда граничное условие на поверхности Σ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} &\equiv \frac{\cos \varphi \sigma_x + \sin \varphi \tau_{xy} - H H' \tau_{xz}}{\sqrt{1 + H'^2}} = p_{nx} \\
n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz} &\equiv \frac{\cos \varphi \tau_{xy} + \sin \varphi \sigma_y - H H' \tau_{yz}}{\sqrt{1 + H'^2}} = p_{ny} \\
n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z &\equiv \frac{\cos \varphi \tau_{xz} + \sin \varphi \tau_{yz} - H H' \sigma_z}{\sqrt{1 + H'^2}} = p_{nz}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$(r = H(z))$$

Учитывая малое отклонение поверхности Σ от Σ_0 , представим зависимость $H(z)$ в виде (1)

$$H(z) = R_0 + \varepsilon f(z), \tag{21}$$

с малым параметром ε , характеризующим величину отклонения одной поверхности от другой. Наличие малого параметра в соотношениях краевой задачи позволяет привлечь к решению задачи асимптотические методы [9]. Все разыскиваемые функции зависят от указанного малого параметра. Представим каждую из них в виде асимптотического ряда по степеням этого параметра

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_x^{(2)} + \dots \\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{xy}^{(2)} + \dots \\
\tau_{xz} &= \tau_{xz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xz}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{xz}^{(2)} + \dots \\
\sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_y^{(2)} + \dots \\
\tau_{yz} &= \tau_{yz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{yz}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{yz}^{(2)} + \dots \\
\sigma_z &= \sigma_z^{(0)} + \varepsilon \sigma_z^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_z^{(2)} + \dots \\
\vec{u} &= \vec{u}^{(0)} + \varepsilon \vec{u}^{(1)} + \varepsilon^2 \vec{u}^{(2)} + \dots
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Коэффициенты, стоящие в этих соотношениях при k -ой степени ε называют k -ым приближением. Соответствующие краевые задачи для приближений вытекают из системы уравнений равновесия (30) и граничных условий (40). После подстановки (43) в уравнения (30) и выделения членов одного порядка, получаем

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^{(k)} + \mu \Delta \vec{u}^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{24}$$

В граничных условиях раскладываем левые части в ряды по степеням ε и приравниваем между собой члены одного порядка, стоящие в левых и правых частях соответствующих равенств, с учетом (41) получаем граничные условия для приближений:

– для нулевого приближения

$$\begin{aligned}
n_x^{(0)} \sigma_x^{(0)} + n_y^{(0)} \tau_{xy}^{(0)} + n_z^{(0)} \tau_{xz}^{(0)} &= p_{nx} \\
n_x^{(0)} \tau_{xy}^{(0)} + n_y^{(0)} \sigma_y^{(0)} + n_z^{(0)} \tau_{yz}^{(0)} &= p_{ny}, \\
n_x^{(0)} \tau_{xz}^{(0)} + n_y^{(0)} \tau_{yz}^{(0)} + n_z^{(0)} \sigma_z^{(0)} &= p_{nz} \\
(r = R_0)
\end{aligned} \tag{25}$$

– для первого приближения

$$\begin{aligned}
n_x^{(0)} \left[\sigma_x^{(1)} + f(z) \frac{\partial \sigma_x^{(0)}}{\partial r} \right] + n_x^{(1)} \sigma_x^{(0)} + n_y^{(0)} \left[\tau_{xy}^{(1)} + f(z) \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial r} \right] + \\
+n_y^{(1)} \tau_{xy}^{(0)} + n_z^{(0)} \left[\tau_{xz}^{(1)} + f(z) \frac{\partial \tau_{xz}^{(0)}}{\partial r} \right] + n_z^{(1)} \tau_{xz}^{(0)} = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
n_x^{(0)} \left[\tau_{xy}^{(1)} + f(z) \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial r} \right] + n_x^{(1)} \tau_{xy}^{(0)} + n_y^{(0)} \left[\sigma_y^{(1)} + f(z) \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial r} \right] + \\
+n_y^{(1)} \sigma_y^{(0)} + n_z^{(0)} \left[\tau_{yz}^{(1)} + f(z) \frac{\partial \tau_{yz}^{(0)}}{\partial r} \right] + n_z^{(1)} \tau_{yz}^{(0)} = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
n_x^{(0)} \left[\tau_{xz}^{(1)} + f(z) \frac{\partial \tau_{xz}^{(0)}}{\partial r} \right] + n_x^{(1)} \tau_{xz}^{(0)} + n_y^{(0)} \left[\tau_{yz}^{(1)} + f(z) \frac{\partial \tau_{yz}^{(0)}}{\partial r} \right] + \\
+n_y^{(1)} \tau_{yz}^{(0)} + n_z^{(0)} \left[\sigma_z^{(1)} + f(z) \frac{\partial \sigma_z^{(0)}}{\partial r} \right] + n_z^{(1)} \sigma_z^{(0)} = 0 \\
(r = R_0)
\end{aligned} \tag{28}$$

и так далее для $k = 2, 3, \dots$

Здесь, как это можно усмотреть из соотношения (17),

$$\bar{n}^{(0)} = \bar{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \tag{29}$$

- единичная нормаль к поверхности Σ_0 , а $\bar{n}^{(1)}$ представляет вектор

$$\bar{n}^{(1)} = -\frac{df(z)}{dz} \bar{e}_z = \left(0, 0, -\frac{df(z)}{dz} \right)$$

Рассмотрим равновесие тела в нулевом приближении. Ему соответствует уравнение (24) и граничное условие (25). Т.о. приходим к обобщению задачи Альманзи, когда на поверхности тела вращения задана нормальная составляющая внешних поверхностных сил [4]. Здесь и в дальнейшем будем опускать верхний индекс «⁽⁰⁾» в разыскиваемых величинах и пользоваться обозначениями, указанными на рис. 4.

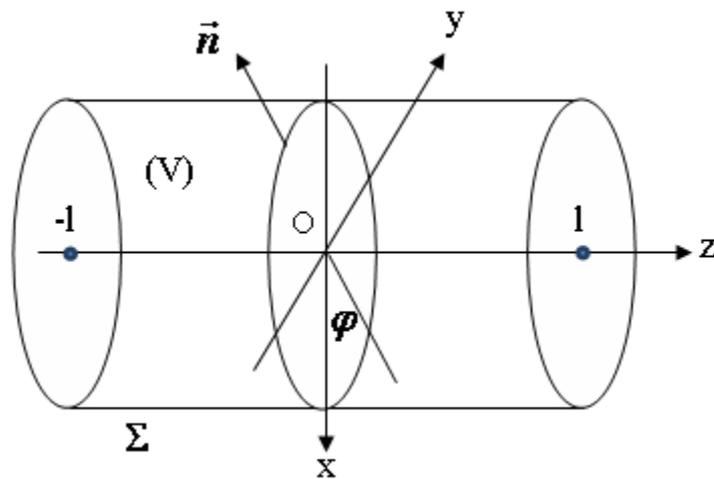


Рисунок 4. - Расчет напряженно-деформированного состояния

Выберем распределение поверхностных сил на Σ ($r = R_0$) такое, чтобы силы располагались в плоскости, перпендикулярной оси Oz

$$\vec{p}_n = \vec{e}_x p_{nx} + \vec{e}_y p_{ny} \quad (p_{nz} = 0) \quad (30)$$

Точное распределение сил по поверхности неизвестно, поэтому, следуя [6], зададим их правдоподобное распределение. Пусть в каждом сечении тела (рис. 5) $z = const$ силы направлены по нормали к Σ и описываются выражениями

$$\vec{p}_n = \vec{e}_r F(z) \cos \varphi = \vec{e}_x F(z) \cos^2 \varphi + \vec{e}_y F(z) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (31)$$

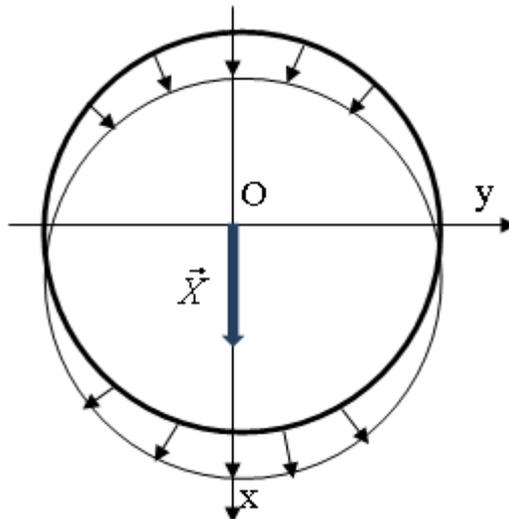


Рисунок 5. - Распределение поверхностных сил

Легко проверить, что равнодействующая данных сил $\vec{X} = \vec{e}_x X_x + \vec{e}_y X_y$ направлена вдоль оси Ox

$$X_x = R_0 F(z) \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi R_0 F(z), \quad X_y = R_0 F(z) \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0 \quad (32)$$

Граничные условия (25), записанные в произвольной ортогональной системе координат, имеют вид в проекциях на оси этих координат [10, 11] $n_k \sigma_{ki} = p_{ni}$ ($i, k = 1, 2, 3$) (по повторяющимся индексам здесь суммирование от 1 до 3). Учитывая разложение векторов и тензоров второго ранга по базису цилиндрической системы координат

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{e}_r, \\ \mathcal{E} &= \sigma_r \vec{e}_r \vec{e}_r + \tau_{r\varphi} (\vec{e}_r \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \vec{e}_r) + \tau_{rz} (\vec{e}_r \vec{e}_z + \vec{e}_z \vec{e}_r) + \sigma_\varphi \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi + \\ &+ \tau_{r\varphi} (\vec{e}_\varphi \vec{e}_z + \vec{e}_z \vec{e}_\varphi) + \sigma_z \vec{e}_z \vec{e}_z \end{aligned}$$

граничные условия (32) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= F(z) \cos \varphi \\ \tau_{r\varphi} &= 0, \quad \tau_{\varphi z} = 0 \quad (r = R_0) \end{aligned} \quad (33)$$

Окончательно, краевая задача упругого равновесия формулируется так: в области V имеет место система линейных дифференциальных уравнений (10), записываемая в цилиндрической системе координат

$$\mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (34)$$

$$\mu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (35)$$

$$\mu \Delta u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (36)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (37)$$

- оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.

Если посмотреть на схему нагружения зерна в рабочей зоне устройства, то можно заметить, что на концах зерна и его центре усилия направлены в различные стороны. Пользуясь аналогией с заклепочным соединением, представим нагружение распределенным вдоль оси зерна. Определим функцию $F(z)$, входящую в условие (33), как интерполяционный полином кривой, проходящей через точки A_1, \dots, A_7 (рис. 6) [12]

$$\begin{aligned}
F(z) = & -a \frac{(z+1)(z+1-d)z(z-1+d)(z-1+d/2)(z-1)}{(d/2)(-d/2)(-1+d/2)(-2l+3d/2)(-2l+d)(-2l+d/2)} \\
& + b \frac{(z+1)(z+1-d/2)(z+1-d)(z-1+d)(z-1+d/2)(z-1)}{(l)(1-d/2)(1-d)(-1+d)(-1+d/2)(-1)} \\
& - a \frac{(z+1)(z+1-d/2)(z+1-d)z(z-1+d)(z-1)}{(2l-d/2)(2l-d)(2l-3d/2)(1-d/2)(d/2)(-d/2)}
\end{aligned} \tag{38}$$

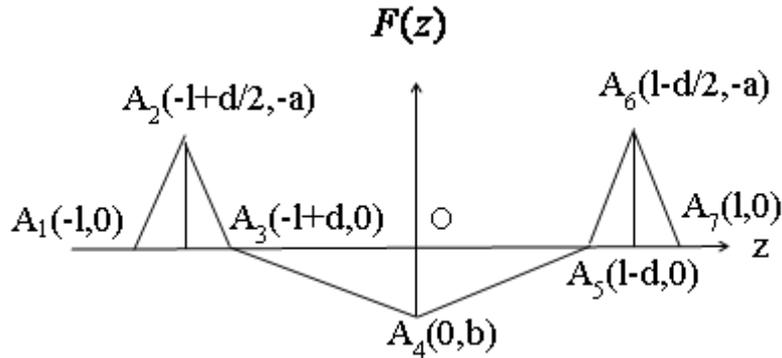


Рисунок 6. - Распределение поверхностных сил вдоль оси зерна

В дальнейшем приведенное распределение удобнее заменить в виде конечного ряда Фурье функции $F(z)$, выбирая в качестве координатных функций $\omega_m(z)$ собственные функции оператора дифференцирования $d^2\omega/dz^2$, обращающиеся в нуль на концах интервала $[-l, l]$ [13]

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \lambda^2\omega = 0, \quad \omega(-l) = \omega(l) = 0 \tag{39}$$

Нетривиальные решения данной задачи существуют при $\lambda = \lambda_m$

$$\lambda_m = \frac{\pi(2m-1)}{2l}$$

и имеют вид

$$\omega_m(z) = \cos(\lambda_m z) = \cos\left[\frac{\pi(2m-1)z}{2l}\right] \tag{40}$$

Данная система функций является полной и любая гладкая функция, обращающаяся в нуль на концах интервала $[-l, l]$, может быть с любой точностью приближена конечным рядом Фурье. Ряд Фурье по указанным функциям имеет вид

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \omega_m(z) \tag{41}$$

где коэффициенты Фурье представляют собой числа, определяемые выражением

$$F_m = 2 \int_{-l}^l F(z) \omega_m(z) dz \quad (42)$$

Расчеты показывают на быструю сходимость конечных рядов Фурье к $F(z)$.

В соотношение входят числовые параметры a, b . Они связаны между собой равенством

$$b = a \frac{64(7d^2 - 14dl + 4l^2)l^4(-l + d)^2}{d^2(4l - d)(-4l + 3d)(35d^4 - 210d^3l + 420d^2l^2 - 336dl^3 + 96l^4)} \quad (43)$$

которое вытекает из условия равенства нулю главного вектора поверхностных сил (14).

Усилия, передаваемые зерну со стороны фрезы, определяются поверхностными силами, действующими на участках поверхности с $z \in [-l, -l + d] \cap [l - d, l]$ и с учетом симметрии сил относительно плоскости xOy могут быть записаны в проекции на ось Ox в виде

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \int_{l-d}^{l+d} \int_0^{2\pi} p_{nx} R_0 d\varphi dz = 2R_0 \int_{l-d}^{l+d} \int_0^{2\pi} F(z) \cos^2 \varphi d\varphi dz = 2\pi R_0 \int_{l-d}^{l+d} F(z) dz = \\ &= a R_0 \frac{256\pi d (d^6 - 9d^5l + 33d^4l^2 - 63d^3l^3 + 66d^2l^4 - 36dl^5 + 8l^6)}{(4l - d)(4l - 3d)(35d^4 - 210d^3l + 420d^2l^2 - 336dl^3 + 96l^4)} \end{aligned} \quad (44)$$

Выводы. Принимая, с физической точки зрения, что зерно злаковых культур относится к мягким материалам, то при его измельчении в начальный период приложения усилий возникают пластические деформации. Далее область пластических деформаций расширяется, прочность тела нарушается, и происходит его разрушение. В результате совместного решения задачи упругого и пластического деформирования твердого тела определены значения усилий, которые передаются зерну со стороны рабочих органов предлагаемой конструкции дробилки.

Список использованных литературных источников

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. - М.: Наука, 1974. - 640 с.
2. Ходаков Г.С. Физика измельчения / Г.С. Ходаков. - М.: Наука, 1972. - 308 с.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. - М.: Наука, 1969. - 420 с.

4. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. - М.: Наука.-1970. - 939 с.
5. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. - М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. Погорелов А.В. Лекции по дифференциальной геометрии / А.В. Погорелов. - Харьков: Изд-во Харьковск. госун-та, 1967. - 163 с.
7. Тарапов И.Е., Борисенко А.И. Механика сплошной среды / И.Е. Тарапов, А.И. Борисенко. Вып. 3. Ч.1: Векторный анализ и начала тензорного исчисления. - Харьков: Золотые страницы, 2003. - 320 с.
8. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ / Дж. Мак-Коннел. - М.: Физматгиз, 1963. - 412 с.
9. Найфе А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфе. - М.: Мир. 1976. - 455 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошных сред / Л.И. Седов. Т. 1. - М.: Наука, 1976. - 536 с.
11. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды / И.Е. Тарапов. Вып. 3 Ч. 2: Общие законы кинематики и динамики. - Харьков: Золотые страницы, 2002. - 516 с.
12. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. - М.: Наука, 1979.-512 с.
13. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, А.И. Марон, Э.З. Шувалова. - М.: Наука, 1967. - 368 с.

Анотація

Математичне формулювання задачі пружної деформації зерна при його подрібненні і її вирішення

Нанка О.В.

Сформовано задачу пружної деформації фуражного зерна при його подрібненні. В результаті сумісного рішення задачі пружної і пластичної деформації твердого тіла визначені значення зусиль, які передаються зерну з боку робочих органів запропонованої конструкції дробарки.

Abstract

Mathematical problem resilient definition deformations of grain at his grinding down and its decision

O. Nanka

The task of resilient deformation of cornmeal is formed at his grinding down. As a result of compatible decision of task of resilient and plastic deformation of solid the values of efforts which are passed to grain from the side of workings organs of the offered construction of crusher are certain.