

УДК 631.362:532

## Про нелінійну модель зернопотоку неоднорідної суміші по плоскому віброрешету

В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, О.М. Малець, М.В. Сліпченко

*Харківський національний технічний університет сільського господарства  
ім. Петра Василенка (Харків, Україна)*

З використанням квадратичної реологічної залежності типу Севіджа описано усталений рух шару дрібнозернистої суміші змінної пористості по плоскому віброрешету, що нахилене до горизонту. При цьому розподіл питомої маси по висоті рухомого шару апроксимовано квадратним трьохчленом, у якого коефіцієнти залежать від амплітуди і частоти коливань віброрешета, а також від механічних властивостей зерносуміші. У виразах коефіцієнтів є множник, яким врахована наявність на поверхні решета інтенсифікаторів процесу сегрегації (ребер, рифлів, тощо). Завдяки вказаній апроксимації вдалося аналітичним способом розв'язати складене нелінійне диференціальне рівняння руху першого порядку. Розв'язок подано у вигляді квадратури, яка не виражається в замкненій формі через відомі функції. Тому запропоновано два варіанти наближеного обчислення інтеграла. Перший варіант ґрунтується на розкладанні підінтегральної функції в степеневий ряд і заміни ряду його частковою сумою. У другому варіанті через елементарні функції виражена головна частина інтеграла, а додаткова частина (нев'язка) знайдена наближено по формулі Сімпсона. У такий спосіб виведено наближені розрахункові формули для обчислення швидкості зернопотоку, продуктивності віброрешета і питомого його завантаження. Досліджено вплив різних чинників, зокрема реологічних сталих, на розрахункові кінематичні характеристики зернопотоку. Проведено порівняння числових результатів, до яких призводить запропонований спосіб розрахунку, з надрукованими в літературі. Встановлено гарну відповідність числових результатів, одержаних різними методами, чим підтверджена вірогідність виведених розрахункових формул. На відміну від відомих досліджень, розроблена модель не потребує числового інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку при розрахунках кінематичних характеристик зернопотоку по нахиленому віброрешету.

**Ключові слова:** *плоске нахилене віброрешето, нелінійна модель зернопотоку, змінна пористість суміші, апроксимація квадратним трьохчленом, швидкість руху, продуктивність віброрешета.*

**Вступ.** Нелінійні континуальні моделі руху віброрешетованих однорідних сумішей, без урахування зміни пористості, розглянуто в [1]. Але від пористості суміші залежить інтенсивність процесу сегрегації, тобто інтенсивність проникання до отворів решета відповідних зерен для просіювання. Тому в роботах [2, 3, 4] розглядали потоки зерносумішей змінної питомої маси (або пористості) по товщині рухомого шару. Спочатку визначили зміну пористості, зумовлену механічними коливаннями решета і дією сили гравітації, а потім обчислювали кінематичні характеристики руху. Обидві задачі, пов'язані з інтегруванням нелінійних диференціальних рівнянь, розв'язали числовими методами на комп'ютері. На відміну від указаних публікацій, тут пропонується аналітичний спосіб розрахунку зернопотоку не зв'язаний з числовим інтегруванням. Для цього запропоновано описувати розподіл питомої маси по товщині шару суміші квадратним трьохчленом. Раніше про таку апроксимацію йшлося в роботах [5, 6]. Завдяки вказаній апроксимації тут стало

можливим одержати в квадратурах розв'язок нелінійного диференціального рівняння руху, виведеного в припущенні, що складова в'язкого опору пропорційна квадрату швидкості деформацій зсуву, а залишкове сухе тертя у вібророзрідженій суміші пропорційне надлишковому внутрішньому тиску. Реологічні залежності такого типу використовував Севідж при моделюванні руху сипких матеріалів по нахиленій площині [7, 8]. Для опису руху однорідних зерносумішей по віброрешету, їх використано в [1].

Отже, метою цієї роботи є розробка нового аналітичного способу розрахунку руху дрібнозернистої суміші змінної пористості по плоскому віброрешету та апробація виведених формул.

**Основна частина роботи.** Використаємо розрахункову схему, що подана на рис. 1. Тут  $h$  – товщина рухомого шару суміші;  $\theta$  – кут нахилу решета до горизонту;  $A_k$  – амплітуда повздовжніх коливань решета з круговою частотою  $\omega$ ;  $x, y$  – відповідно повздовжня і поперечна

координати;  $u = u(y)$  – швидкість усталеного зернопотоку в напрямі вісі  $ox$ .

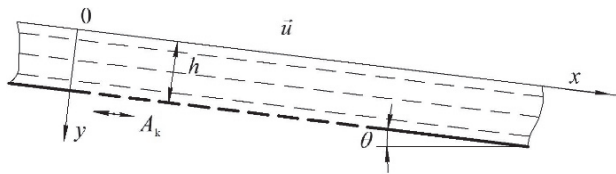


Рис. 1. Розрахункова схема

Згідно з [9], рух суміші описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{du}{dy} = -c \left[ \int_0^y v(t) dt \right]^{1/2}, \quad (1)$$

де  $c = \sqrt{\frac{\gamma g}{\mu_*}} (\sin \theta - f \cos \theta)$ ;  $\gamma$  – питома маса матеріалу зерен;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\mu_*$ ,  $f$  – реологічні сталі, причому перша характеризує в'язкий опір деформуванню зсуву, а друга сухе тертя;  $v = v(y)$  – концентрація зерен в суміші.

Рівняння (1) треба інтегрувати при крайовій умові:

$$u(h) = u_0, \quad (2)$$

де  $u_0$  – швидкість ковзання суміші по поверхні решета.

Задача Коші, подана виразами (1), (2), має розв'язок у вигляді квадратури [9]:

$$u = u(y) = c \int_y^h \int_0^y v(t) dt dy + u_0. \quad (3)$$

Отже, для розрахунку  $u(y)$  треба знати розподіл концентрації зерен по товщині шару.

Дотримуючись роботи [6], його апроксимуємо квадратним трьохчленом:

$$v(y) = v_0(1 + 2ay + 3by^2), \quad (4)$$

у якому:

$$a = \frac{0,3483}{2h} \left( \frac{\beta h^3}{v_0} \right)^{\lambda/3}; \quad b = \frac{0,6797}{3h^2} \left( \frac{\beta h^3}{v_0} \right)^{\lambda/3};$$

$$\lambda = 1,579; \quad \psi = \frac{\sqrt{1 + \varphi^2} - \varphi}{\varphi};$$

$$\varphi = \frac{f_0}{2} (1 + e^{-B}); \quad B = \frac{A_k \omega^2}{g};$$

$f_0$  – коефіцієнт сухого тертя в суміші в стані спокою;  $\alpha$  – множник, значення якого залежать від наявності на поверхні решета інтенсификаторів процесу сегрегації [2, 3, 4].

Після підстановки (4) в (3), отримуємо інтегральне подання швидкості зернопотоку:

$$u(y) = c\sqrt{v_0} \int_y^h \sqrt{t(1 + at + bt^2)} dt + u_0. \quad (5)$$

Розглянемо два способи наближеного обчислення цього інтеграла.

У першому використовуємо часткову суму ряду:

$$\sqrt{1 + at + bt^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2} - j \right) \frac{(at + bt^2)^n}{n!}.$$

Обмежуючись у правій частині сумою з трьох доданків, після підстановки її в (5), отримуємо:

$$u(y) \approx c\sqrt{v_0} \left[ \frac{2}{3} (h^{3/2} - y^{3/2}) + \frac{a}{5} (h^{5/2} - y^{5/2}) + \frac{1}{7} \left( b - \frac{a^2}{4} \right) (h^{7/2} - y^{7/2}) - \frac{ab}{18} \times \right. \\ \left. \times (h^{9/2} - y^{9/2}) - \frac{b^2}{44} (h^{11/2} - y^{11/2}) \right] + u_0. \quad (6)$$

У другому способі залуцаємо до обчислень поправки формулу Сімпсона [10], після виділення з (5) основної частини інтеграла:

$$(y) = \int_y^h \sqrt{t(1 + at)} dt = \\ = \sqrt{a} \int_y^h \sqrt{\left( t + \frac{1}{2a} \right)^2 - \frac{1}{4a^2}} dt = \\ = \frac{\sqrt{a}}{2} \left[ \left( h + \frac{1}{2a} \right) \sqrt{h^2 + \frac{h}{a} - \left( y + \frac{1}{2a} \right)} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{y^2 + \frac{y}{a}} - \frac{1}{4a^2} \ln \frac{\left( h + \frac{1}{2a} \right) + \sqrt{h^2 + \frac{h}{a}}}{\left( y + \frac{1}{2a} \right) + \sqrt{y^2 + \frac{y}{a}}} \right]. \quad (7)$$

Указаний спосіб дає наближену формулу:

$$u(y) \approx c\sqrt{v_0} \left[ S(y) + \frac{h-y}{6} \delta(y) \right] + u_0, \quad (8)$$

де, крім (7),

$$\delta(y) = \sqrt{y + ay^2 + by^3} - \sqrt{y + ay^2} + \\ + 4(\sqrt{y_c + ay_c^2 + by_c^3} - \sqrt{y_c + ay_c^2}) + \\ + \sqrt{h + ah^2 + bh^3} - \sqrt{h + ah^2} \\ y_c = 0,5(y + h).$$

Щоб знайти продуктивність решета з шириною робочої частини  $H$ , потрібно обчислити інтеграл:

$$P = \gamma H \int_0^h v(y) u(y) dy. \quad (9)$$

Підставивши в нього вирази (4) і (6) та

відкинувши малі доданки, одержуємо наближену розрахункову формулу:

$$P \approx cv_0 \sqrt{v_0} \gamma h^{5/2} H \left[ \frac{2}{5} + \frac{3ah}{7} + \frac{1}{3} \left( b + \frac{a^2}{4} \right) h^2 + \frac{a}{22} \left( 3b - \frac{a^2}{2} \right) h^3 + \frac{3}{52} b(b - a^2) h^4 \right] + \gamma h H v_0 u_0 (1 + ah + bh^2). \quad (10)$$

Знаючи  $P$ , легко обчислити і питоме завантаження решета  $q$ , бо  $q = P/(LH)$ , де  $L$  – довжина робочої частини решета.

Отже, використовуючи одержані вище формули, досить просто розрахувати розподіл питомої маси  $\rho = \gamma v(y)$  по товщині шару суміші та основні кінематичні характеристики зернопотоку.

З метою перевірки вірогідності виведених вище формул проведено розрахунки кінематичних характеристик. Дотримуючись роботи [9], було використано наступні числові дані:  $A_k = 0,0075$  м;  $\omega = 41,86$  с<sup>-1</sup>;  $\theta = 8^\circ$ ;  $\gamma = 1350$  кг/м<sup>3</sup>;  $f_0 = 0,47$ ;  $u_0 = 0$ ;  $h = 0,012$  м та різні  $v_0$ ,  $\mu_*$ ,  $f$ .

Обчислені трьома способами значення  $u(0)$  при  $v_0 = 0,4$  записано в табл.1. Там же, для порівняння, вказано розрахункові швидкості, одержані іншим способом в роботі [9]. Аналіз показує, що виведені тут формули для обчислення  $u(y)$  дають близькі результати, які добре узгоджуються з тим, що було отримано раніше [9].

**Таблиця 1.** Обчислені за трьома формулами значення  $u(0)$

$\mu_*$ , Па·с <sup>2</sup>	$f$	числ. інт. в (5)	форм. (6)	форм. (8)	в [9]
		Значення $10u(0)$ м/с			
0,010	0,005	2,4412	2,4410	2,4410	2,437
0,010	0,020	2,3021	2,3020	2,3019	2,299
0,010	0,080	1,6315	1,6314	1,6313	1,629
0,015	0,005	1,9932	1,9931	1,9930	1,990
0,015	0,020	1,8797	1,8796	1,8795	1,877
0,015	0,080	1,3321	1,3320	1,3320	1,330
0,020	0,005	1,7262	1,7261	1,7260	1,723
0,020	0,020	1,6279	1,6277	1,6277	1,625
0,020	0,080	1,1537	1,1536	1,1535	1,152

Цей висновок стосується і значень  $u(y)$ , записаних для інших  $y$  в табл. 2, де розбіжності теж становлять долі відсотка. Швидкості в табл. 2 обчислено при  $\mu_* = 0,015$  Па·с<sup>2</sup>;  $f = 0,05$ ;  $v_0 = 0,4$  та попередніх інших даних.

**Таблиця 2.** Обчислені за трьома формулами значення  $u(y)$

$y/h$	числ.інт. в (5)	форм. (6)	форм. (8)	в [9]
	Значення $10u(y)$ м/с			
0,0	1,6291	1,6290	1,6289	1,627
0,1	1,5797	1,5795	1,5796	1,577
0,2	1,4888	1,4887	1,4888	1,487
0,3	1,3705	1,3704	1,3705	1,369
0,4	1,2295	1,2293	1,2295	1,228
0,5	1,0682	1,0681	1,0682	1,067

Про вплив пористості на швидкість зернопотоку надана інформація в табл. 3. Там наведено результати обчислень  $u(0)$  при  $\mu_* = 0,02$  Па·с<sup>2</sup>;  $f = 0,01$  для різних  $v_0$ . Зі збільшенням  $v_0$  зростає і швидкість руху зерносуміші по решету, що пояснюється збільшенням проекції сили гравітації на вісь  $ox$ .

**Таблиця 3.** Значення  $u(0)$  при різних  $v_0$

$v_0$	числ.інт. в (5)	форм. (6)	форм. (8)	в [9]
	Значення $10u(0)$ м/с			
0,3	1,4770	1,4768	1,4768	1,474
0,4	1,6941	1,6939	1,6939	1,691
0,5	1,8853	1,8852	1,8850	1,883
0,6	2,0581	2,0580	2,0579	2,055

Результати обчислення продуктивності віброрешета записано в табл. 4. В чисельниках вказано значення  $P/H$ , одержані числовим інтегруванням в (9), після підстановки туди виразів (4) і (6). В дужках записано  $P/H$ , до яких призводить формула (10). У знаменниках записано  $P/H$ , записані з [9].

Спостерігається гарна узгодженість і теоретичних продуктивностей віброрешета. Розбіжності знаходяться в межах одного відсотка.

**Висновки.**

1. Розрахунки підтвердили вірогідність виведених формул.

2. Запропонований спосіб моделювання зернопотоків, з урахуванням зміни пористості по товщині рухомого шару суміші, зводиться до використання компактних аналітичних залежностей і може бути альтернативою відомим методам, де раніше проводили числове комп'ютерне інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь.

Таблиця 4. Обчислені різними способами продуктивності віброрешета

$\mu_s$ , $Па \cdot c^2$	$f$	$\nu_0 = 0,3$	$\nu_0 = 0,4$	$\nu_0 = 0,4$
		Значення $10 P/H$ , $кг/(м \cdot c)$		
0,02	0,005	<u>5,034</u>	<u>7,559</u>	<u>10,384</u>
		(5,035)	(7,560)	(10,385)
		5,02	7,53	10,35
0,02	0,020	<u>4,748</u>	<u>7,129</u>	<u>9,793</u>
		(4,748)	(7,130)	(9,793)
		4,73	7,10	9,76
0,02	0,080	<u>3,365</u>	<u>5,052</u>	<u>6,940</u>
		(3,365)	(5,053)	(6,941)
		3,35	5,03	6,92
0,03	0,005	<u>4,111</u>	<u>6,172</u>	<u>8,473</u>
		(4,111)	(6,173)	(8,474)
		4,09	6,15	8,45
0,03	0,020	<u>3,876</u>	<u>5,820</u>	<u>7,996</u>
		(3,877)	(5,821)	(7,996)
		3,86	5,80	7,97
0,03	0,080	<u>2,747</u>	<u>4,125</u>	<u>5,666</u>
		(2,748)	(4,125)	(5,667)
		2,74	4,11	5,65
0,04	0,005	<u>3,560</u>	<u>5,345</u>	<u>7,343</u>
		(3,560)	(5,346)	(7,343)
		3,55	5,33	7,32
0,04	0,020	<u>3,357</u>	<u>5,041</u>	<u>6,924</u>
		(3,358)	(5,041)	(6,925)
		3,34	5,02	6,90
0,04	0,080	<u>2,379</u>	<u>3,572</u>	<u>4,907</u>
		(2,380)	(3,573)	(4,908)
		2,37	3,56	4,89

## Література

1. Ольшанський В.П. Математичні моделі зернопотоку по віброрешетах/ В.П. Ольшанський, О.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2016 – 140 с.

2. Тищенко Л.Н. К исследованию движения зерновой смеси на решете под действием вибраций/ Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень// Науковий вісник НАУ. – К.: НАУ, 2002 – Вип. 49. – С. 329 - 336.

## Аннотація

## О нелинейной модели зернопотока неоднородной смеси по наклонному плоскому виброрешету

В.П. Ольшанский, В.В. Бурлака, О.Н. Малец, М.В. Слипченко

С использованием квадратической реологической зависимости типа Сэвиджа описано установившееся движение слоя мелкозернистой смеси переменной пористости, по плоскому виброрешету, наклоненному к горизонту. При этом распределение удельной массы по высоте движущегося слоя аппроксимировано квадратным трехчленом, коэффициенты которого зависят от амплитуды и частоты колебаний виброрешета, а также от механических свойств зерносмеси. В выражениях коэффициентов есть множитель, которым учтено наличие на поверхности решета

3. Пивень М.В. Обоснование параметров процесса решетного сепарирования зерновых смесей: дис. канд.тех. наук: 05.05.11 / М.В. Пивень. – Харьков: ХНТУСХ им. П. Василенка, 2006. – 260 с.

4. Тищенко Л.Н. Исследование послыоного движения зерновых смесей на плоских вибрационных решетах/ Л.Н. Тищенко, А.В. Миняло, М.В. Пивень, С.А. Харченко // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – Вип. 59. – Т. 1. – С. 69-76.

5. Ольшанський В.П. Апроксимації розподілу пористості в шарі зерноsumіші на плоскому віброрешеті / В.П. Ольшанський, О.В. Ольшанський, М.В. Любін // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2016. – №2 (82). – С. 94 - 99.

6. Ольшанський В.П. Про квадратичну апроксимацію розподілу питомої маси в шарі вібросепарованої зерноsumіші / В.П. Ольшанський, О.В. Ольшанський// Інженерія переробних і харчових виробництв. – Харків, 2016, №2 (2). – С. 66-70.

7. Сэвидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов в лотках и каналах. / С. Сэвидж // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений/ Сб. ст.: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. – С. 86 -146.

8. Savage S.B. Granular flows down rough Inclines – Review and Extension [Text] / S.B. Savage // Mechanics of granular materials, Elsevier Science publishers. – Amsterdam, 1983. – P. 261 - 282.

9. Ольшанський В.П. Про нелінійну модель руху зерноsumіші змінної пористості по плоскому виброрешету / В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Слипченко, С.О. Харченко // Вісник СНАУ. Механізація та автоматизація виробничих процесів. – Суми: СНАУ, 2016. Вип. 10/1 (29). – С. 107 -112.

10. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512с.

интенсификаторов процесса сегрегации (ребер, рифлей и пр.). Благодаря указанной аппроксимации удалось аналитическим способом решить составленное нелинейное дифференциальное уравнение движения первого порядка. Решение представлено в виде квадратуры, которая не выражается в замкнутой форме через известные функции. Поэтому предложено два варианта приближенного вычисления интеграла. Первый вариант основан на разложении подынтегральной функции в степенной ряд и замене ряда частичной его суммой. Во втором варианте выражена через элементарные функции главная часть интеграла, а дополнительная часть (невязка) определена приближенно по формуле Симпсона. Таким образом, получены приближенные расчетные формулы для вычисления скорости зернопотока, производительности виброрешета и удельной его загрузки. Исследовано влияние различных факторов, в частности реологических постоянных, на расчетные кинематические характеристики зернопотока. Проведено сравнение численных результатов, к которым приводит предложенный способ расчета с опубликованными в литературе. Установлено хорошее соответствие численных результатов, полученных разными методами, чем подтверждена состоятельность выведенных расчетных формул. В отличие от известных исследований, разработанная модель не требует численного интегрирования дифференциальных уравнений при расчетах пористости смеси и кинематических характеристик зернопотока по плоскому виброрешету.

**Ключевые слова:** *плоское наклоненное виброрешето, нелинейная модель зернопотока, переменная пористость смеси, аппроксимация квадратным трехчленом, скорость движения, производительность виброрешета.*

## Abstract

### About nonlinear model of a grain flow of an inhomogeneous mixture along an inclined flat vibrosieve

V.P. Olshansky, V.V. Burlaka, O.M. Malec, M.V. Slipchenko

Using the quadratic rheological dependence of the Savage's type, the steady motion of a layer of a fine-grained mixture of variable porosity is described, along a flat vibrosieve inclined to the horizon. In this case, the distribution of the specific mass over the height of the moving layer is approximated by a square trinomial, the coefficients of which depend on the amplitude and frequency of oscillations of the vibrosieve, and also on the mechanical properties of the grain mixture. In the expressions for the coefficients, there is a factor that takes into account presence on sieve surface of the segregation process intensifiers (ribs, riffles, etc.). Due to shown approximation, we succeeded in solving of analytically compiled nonlinear differential equation of motion of the first order. The solution is represented in the form of an integral, which is not expressed in a closed form through known functions. Therefore, two versions of the approximate calculation of the integral are proposed. The first variant is based on the expansion of the integrand function in the power series and replacement of the series by its partial sum. In the second variant, the principal part of the integral is expressed in terms of elementary functions, and the additional part (residual) is determined approximately by the Simpson's formula. Thus, approximate calculation formulas are obtained for calculating the velocity of the grain flow, the performance of the vibrating sieve and its specific loading. The influence of various factors, in particular rheological constants, on the calculated kinematic characteristics of the grain flow was studied. A comparison of the numerical results, to which the proposed calculation method leads with published in the literature, is compared. A good correspondence of the numerical results obtained by different methods is established, which confirms the consistency of the derived calculation formulas. In contradistinction to well-known studies, the developed model does not require the numerical integration of differential equations in calculating porosity of the mixture and kinematic characteristics of the flow on a flat vibrosieve.

**Keywords:** *flat inclined vibrosieve, nonlinear model of a grain flow, variable porosity of a mixture, approximation by a square trinomial, velocity of movement, vibrosieve performance.*

Представлено від редакції: В.М. Лук'яненко / Presented on editorial: V.M. Lukianenko

Рецензент: М.В. Бакум / Reviewer: M.V. Bakum

Подано до редакції / Received: 17.05.2017