УДК 534.1.539.3

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗРАХУНОК КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ПОЗИЦІЙНИМ І В'ЯЗКИМ ТЕРТЯМ

Бурлака В.В., к.т.н., Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., Малець О.М. асп.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Методом енергетичного балансу виведено компактні наближені формули для обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань механічної системи з одним ступенем вільності при спільній дії сил комбінованого опору у вигляді в'язкого і позиційного сухого тертя. Висока точність одержаних формул підтверджена близькістю числових результатів, до яких вони приводять, з відомими, що були отримані раніше на підставі точних розв'язків цієї задачі динаміки

Вступ. Нерідко в техніці коливання елементів машин відбуваються при спільній дії сил комбінованого опору, пов'язаного з в'язким і позиційним сухим тертям. Тому вивчення закономірностей руху механічних систем, що проходить в цих умовах, відноситься до актуальних прикладних задач. Заздалегідь зазначимо, що закономірності затухання механічних коливань, спричинених дією сил тільки в'язкого або тільки позиційного сухого тертя, описано в багатьох літературних джерелах, зокрема в [1 - 4]. Точні розв'язки задачі коливань в умовах спільної дії згаданих дисипативних сил, методом припасовування розв'язків диференціальних рівнянь руху, одержано в [5]. Як альтернативу їм, тут методом енергетичного балансу будуємо наближені розв'язки цієї нелінійної задачі.

Метою роботи є виведення та перевірка на адекватність наближених формул для обчислення амплітуд затухаючих коливань системи з одним ступенем вільності при одночасній дії сил в'язкого та позиційного сухого тертя.

Для досягнення вказаної мети використано метод енергетичного балансу, який був ефективним при моделюванні вільних коливань систем з нелінійним опором [3]. На відміну від [3], тут названий метод реалізовано на алгебраїчному рівні, без складання та розв'язування диференціального рівняння огинаючої графіка коливань.

Виведення розрахункових формул. Коливальний рух системи, аналогічно [5], описуємо диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} + \left(c + \Delta c \cdot sign x \cdot sign\dot{x}\right)x = -k\dot{x}, \qquad (1)$$

з початковими умовами:

$$x(0) = -a_o < 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \qquad (2)$$

В (1), (2) m - маса системи; k - коефіцієнт лінійного в'язкого опору; c - коефіцієнт жорсткості пружини; Δc - коефіцієнт позиційного сухого тертя;

$x = x(t)$ - лінійне переміщення системи від положення стійкої рівноваги $x = 0$; a_o - стартове відхилення системи вліво від положення $x = 0$; крапкою над x позначено похідну за часом t.

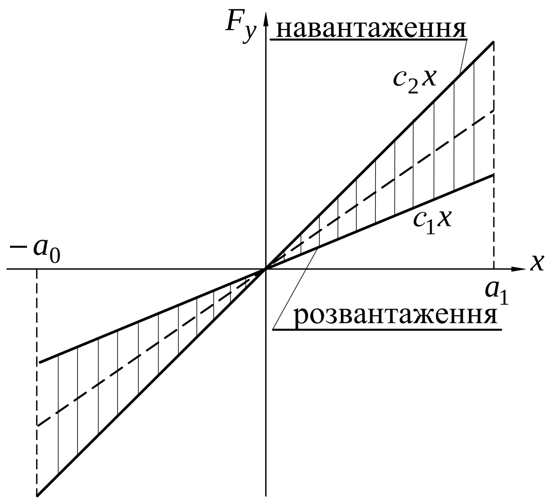

Рис. 1 – Розрахункова схема

Внаслідок наявності позиційного тертя, відновлююча сила F_y в (1) залежить від знаків переміщення і швидкості [1], що графічно показано на рис.1

Переміщення системи зліва направо під час першого розмаху (напівциклу), коли $sign\dot{x} = 1$, апроксимуємо виразом

$$x = -a\cos\omega t, \tag{3}$$

де $\omega = \sqrt{c/m}$; $t \in (0; \pi/\omega)$; $a = const$, яку задамо пізніше.

Апроксимації (3) відповідає наступна швидкість руху

$$\dot{x} = a\omega \sin \omega t. \tag{4}$$

Обчислимо далі роботу *A*, яку виконує сила в’язкого опору на першому розмасі. Враховуючи (4), одержуємо

$$A = -k \int_0^{\pi/\omega} \dot{x}^2 dt = -ka^2\omega^2 \int_0^{\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = -\frac{\pi}{2} k\omega a^2. \tag{5}$$

Позначимо через a_0 і a_1 відхилення системи від положення рівноваги відповідно на початку і в кінці першого розмаху. Тоді зміна потенціальної енергії на цьому напівциклі буде дорівнювати

$$\Delta u = \frac{1}{2}\left(c_2 a_1^2 - c_1 a_0^2\right), \tag{6}$$

де $c_{1,2} = c \mp \Delta c$.

У відповідності з методом енергетичного балансу має місце рівність [3]

$$\Delta u = A,$$

що, з урахуванням (5) і (6), дає

$$\left(\sqrt{c_2}a_1\right)^2 - \left(\sqrt{c_1}a_0\right)^2 = -\pi k\omega a^2. \tag{7}$$

1.Перший наближений розв'язок рівняння (7). Прийнявши в (7)

$$a = \frac{1}{2}(a_0 + a_1),$$

одержуємо квадратне рівняння

$$(c_2 + в)a_1^2 + 2вa_0a_1 - (c_1 - в)a_0^2 = 0, \tag{8}$$

у якому $в = \frac{\pi}{4}k\omega$.

Розв'язавши рівняння (8), знаходимо, що

$$a_1 = a_0 q. \tag{9}$$

Тут $q = \sqrt{\left(\frac{в}{c_2 + в}\right)^2 + \frac{c_1 - в}{c_1 + в}} - \frac{в}{c_2 + в}$. (10)

Залежність (9) збереже структуру і для *n*-го розмаху. Тому

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \qquad n = 1,\ 2,\ 3... \tag{11}$$

Отже, спадання амплітуд відбувається за законом геометричної прогресії, що має місце і в точному розв'язку цієї задачі в [5]. Формула (11) відрізняється від точного розв'язку лише виразом для q, де, замість (10) в [5]:

$$q = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \exp\left\{-\mu\left[\sqrt{\frac{m}{c_1}}\left(\pi - arctg\frac{\sqrt{c_1}}{\mu\sqrt{m}}\right) + \sqrt{\frac{m}{c_2}} arctg\frac{\sqrt{c_2}}{\mu\sqrt{m}}\right]\right\}; \quad \mu = \frac{k}{2m}.$$

Із (10) випливає, що при відсутності в'язкого тертя $(в = 0)$ обчислення q зводиться до компактної формули:

$$q = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}.$$

Її іншим шляхом одержано в [1], [4], де затухання амплітуд в умовах позиційного сухого тертя теж відбудеться за законом геометричної прогресії.

Таким чином, у відповідності з (11), при спільній дії сил в'язкого та позиційного сухого тертя, коливальна система за час руху здійснює нескінченну кількість розмахів.

2. Другий наближений розв'язок рівняння (7). Поклавши в (7), аналогічно [6]:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\sqrt{c_2}a_1 + \sqrt{c_1}a_0\right),$$

одержуємо лінійне рівняння, що має розв'язок:

$$a_1 = a_0 \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}} \frac{1-в/c}{1+в/c}.$$

Узагальнюючи цю залежність для *n*-го размаху, знову приходимо до формули (11), але тепер у ній:

$$q = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}} \frac{1-в/c}{1+в/c} \quad . \qquad (12)$$

Отже, обидва наближені розв'язки відрізняються від точного розв'язку лише виразами для q.

Порівняльний аналіз числових результатів. Для проведення обчислень приймаємо: $m_0 = 5\ кг$; $c = 4900\ H/м$; $\Delta c = 0,02\ \cdot c$; $\Delta c = 0,05\ \cdot c$; $k = 10;\ 20\ кг/с$. Одержані трьома способами значення q^n записано в табл. 1 і табл. 2.

Таблиця 1 - Значення q^n, при $\Delta c = 0,02\ \cdot c$

n	із [5]		формула (10)		формула (12)	
	$k=10\frac{кг}{с}$	$k=20\frac{кг}{с}$	$k=10\frac{кг}{с}$	$k=20\frac{кг}{с}$	$k=10\frac{кг}{с}$	$k=20\frac{кг}{с}$
1	0,8865	0,8015	0,8864	0,8010	0,8865	0,8014
2	0,7859	0,6423	0,7857	0,6416	0,7859	0,6422
3	0,6967	0,5148	0,6965	0,5140	0,6968	0,5147
4	0,6176	0,4126	0,6174	0,4117	0,6177	0,4125
5	0,5475	0,3307	0,5472	0,3298	0,5476	0,3306
6	0,4854	0,2650	0,4851	0,2642	0,4855	0,2649
7	0,4303	0,2124	0,4300	0,2116	0,4304	0,2123

Таблиця 2 - Значення q^n, при $\Delta c = 0,05\ \cdot c$

n	із [5]		формула (10)		формула (12)	
	$k=10\frac{кг}{с}$	$k=20\frac{кг}{с}$	$k=10\frac{кг}{с}$	$k=20\frac{кг}{с}$	$k=10\frac{кг}{с}$	$k=20\frac{кг}{с}$
1	0,8602	0,7774	0,8599	0,7766	0,8603	0,7777
2	0,7399	0,6044	0,7395	0,6031	0,7401	0,6048
3	0,6364	0,4699	0,6359	0,4684	0,6367	0,4703
4	0,5474	0,3653	0,5468	0,3637	0,5478	0,3658
5	0,4708	0,2840	0,4702	0,2825	0,4712	0,2845
6	0,4050	0,2808	0,4043	0,2194	0,4054	0,2212
7	0,3484	0,1716	0,3477	0,1704	0,3488	0,1720

Розрахунки показують, що наближені значення q^n досить близькі до точних значень, причому кращі наближення дає формула (12).

Висновки. Метод енергетичного балансу дозволив побудувати компактні наближені формули для обчислення амплітуд затухаючих коливань механічної системи в умовах комбінованого тертя. Апробація на конкретних прикладах підтвердила адекватність отриманих розрахункових формул.

Список використаних джерел

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980 – 480 с.
2. Лойцянский Л.Г. Теоретическая механика. Т.2. Динамика / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.
4. Сурьянинов Н.Г. Теоретические основы динамики машин / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А. Белоус. – Одесса: ОГПУ, 2000. – 306 с.
5. Бурлака В.В. Про коливання механізмів з позиційним сухим тертям / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець // Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. – Х.: ХНТУСГ, 2014, вип. 152. – С. 51-58.
6. Ольшанський В.П. Нестационарные колебания механической системы линейно-переменной массы с комбинированным трением / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вісник ХНТУСГ: Проблеми надійності машин та засобів сільськогосподарського виробництва. – Х.: ХНТУСГ, 2014. Вип. 151.- С. 342-333.

Аннотация

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОЗИЦИОННЫМ И ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Бурлака В.В., Ольшанский В.П., Малец О.Н.

Методом энергетического баланса выведены компактные приближенные формулы для вычисления амплитуд свободных затухающих колебаний механической системы с одной степенью свободы при общем действии сил комбинированного сопротивления в виде вязкого и позиционного сухого трения. Высокая точность полученных формул подтверждена близостью численных результатов, к которым они приводят, с известными, которые были ранее получены на основе точных решений этой задачи динамики

Abstract

APPROXIMATE CALCULATION OF THE OSCILLATIONS OF A MECHANICAL SYSTEM WITH POSITION AND VISCOUS FRICTION

V. Burlaka, V. Olshanskii, O. Malets

Method of energy balance derived compact approximate formulas for calculating the amplitudes of free damped oscillations of a mechanical system with one degree of freedom in general, the combined action of the forces of resistance in the form of a viscous and dry friction position. The high accuracy of the formulas is confirmed by the closeness of the numerical results to which they lead, with well-known, which were previously obtained on the basis of exact solutions to the problems of dynamics