УДК 539.3:534.1

МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА В РАСЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С КОМБИНИРОВАННЫМ ТРЕНИЕМ

Ольшанский В.П., д.ф.-м.н., проф., Тищенко Л.Н., д.т.н., академик НААНУ,
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко

Ольшанский С.В., к.ф.-м.н.
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Модифицированным методом энергетического баланса построены приближённые формулы для расчёта амплитуд колебаний осциллятора переменной массы. Модификация метода состоит в учёте работы дополнительной силы инерции, которая возникает вследствие изменения массы колебательной системы. Показано, что выведенные компактные приближённые формулы имеют хорошую точность и удобны для инженерных расчётов

Введение. В технике используют механизмы, массы которых монотонно меняются в ходе их работы. Много примеров таких механизмов есть в монографиях [1, 2]. В указанных публикациях исследованы особенности колебаний этих механизмов при действии сил вязкого или сухого трения. Здесь, в отличие от названных работ, для расчета нестационарных затухающих колебаний, предлагается использовать метод энергетического баланса [3], который оказался эффективным при математическом моделировании свободных колебаний осцилляторов постоянной массы с учетом различных диссипативных сил. Но для проведения расчетов колебаний систем переменной массы нужна соответствующая модернизация метода энергетического баланса, так как без нее он приводит к существенным погрешностям [4].

Заметим, что предложенная в [5], [6] модернизация метода энергетического баланса существенно улучшила его точность при расчёте нестационарных колебаний системы с линейным изменением массы во времени. Но пока неясно повысит ли точность такая модернизация энергетического метода в случае других (нелинейных) законов изменения массы? Ответ на это вопрос может дать только дополнительное исследование, что послужило мотивом к данной статье.

Целью работы является усовершенствование метода энергетического баланса применительно к расчету колебаний систем переменной массы с учетом совместного действия сил вязкого и сухого трения, а также анализ погрешностей расчетных формул, к которым приводит этот метод после модернизации. Для реализации указанной цели рассматриваем конкретный (квадратичный) закон изменения массы, когда без учета вязкого трения, задача колебаний имеет точное аналитическое решение в элементарных функциях [4]. Рассматриваем движение осциллятора в условиях отсутствия реактивной силы.

1. Колебания при постоянном значении силы сухого трения. Их описываем дифференциальным уравнением [4]

$$\left(\sqrt{m_0}+\delta t\right)^2\ddot{x}+\mu\dot{x}+cx=-F_T sign\left(\dot{x}\right), \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$x\left(0\right)=-a_0<0;\ \dot{x}\left(0\right)=0. \tag{2}$$

В (1) и (2) – m_0 – начальное значение массы системы; δ – коэффициент, характеризующий изменение массы во времени t; c – коэффициент жесткости системы; $F_T=const$ – сила сухого трения; μ – коэффициент вязкого трения; $x\left(t\right)$ – перемещение осциллятора в направлении координатной оси ox, показанной на рис. 1; a_0 – величина начального отклонения системы влево от положения равновесия; точкой над x обозначена производная по t.

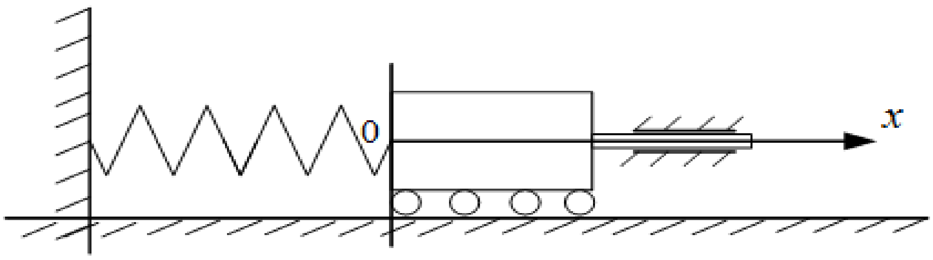

Рисунок 1 – Расчётная схема

Расчетная схема, заимствована из работы [1], где узел сухого трения удален от массы вправо.

Рассмотрим движение системы вправо на первом размахе колебаний, когда $\dot{x}>0$, $sign\left(\dot{x}\right)=1$. Вводя обозначение

$$\Phi\left(t,\dot{x},\ddot{x}\right)=\left(2\sqrt{m_0}\delta t+\delta^2t^2\right)\ddot{x}+\mu\dot{x}, \tag{3}$$

преобразуем (1) к виду

$$m_0\ddot{x}+cx=-F_T-\Phi\left(t,\dot{x},\ddot{x}\right). \tag{4}$$

Перемещение аппроксимируем выражением

$$x\left(t\right)=-a\cos\omega t,$$

в котором $\omega=\sqrt{c/m_0}$; $a=a\left(t\right)$ – функция медленного изменения, такая, что $\left|\dot{a}\right|<<1$ и $\left|\ddot{a}\right|<<1$.

С учетом этих ограничений, приближенно полагаем

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t);\ \ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t). \qquad (5)$$

Вычислим работу сил F_T и $\Phi(t,\dot{x},\ddot{x})$, которые находятся в правой части уравнения (4), на первом размахе колебаний, когда $t \in [0; \pi/\omega]$. Она выражается интегралом

$$A = -\int_0^{\pi/\omega} \left[F_T + \Phi(t,\dot{x},\ddot{x}) \right] \dot{x} dt. \qquad (6)$$

Подставив (3) и (5) в (6), находим

$$A = \frac{1}{2}\pi\delta\omega\left(\sqrt{m_0} + \frac{\pi\delta}{2\omega} - \frac{\mu}{\delta} \right)a^2 - 2F_T a.$$

Согласно методу энергетического баланса [3], эта работа должна равняться изменению потенциальной энергии Δu на первом размахе колебаний.

Изменение потенциальной энергии приближенно представлено в [3] выражением

$$\Delta u = \frac{\pi}{\omega} ca \frac{da}{dt}. \qquad (8)$$

Поэтому равенство $\Delta u = A$, с учетом (7) и (8), сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{da}{dt} = \gamma(a-b), \qquad (9)$$

в котором $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{m_0}}\left(\delta + \frac{\pi\delta^2}{2\sqrt{c}} - \frac{\mu}{\sqrt{m_0}} \right);\ b = \frac{2F_T\omega}{\pi\gamma c}$.

Согласно (2), начальным условием к (9) является

$$a(0) = a_0. \qquad (10)$$

Задача Коши, представленная выражением (9) и (10), имеет решение

$$a(t) = b + (a_0 - b)\exp(\gamma t). \qquad (11)$$

Используя решение (11), вычислим амплитуду отклонения a_1 в конце первого размаха. Подставив в (11) значение $t = \pi/\omega$, получаем

$$a_1 = a_0 \exp\frac{\pi\gamma}{\omega} + b\left(1 - \exp\frac{\pi\gamma}{\omega}\right).$$

Масса осциллятора в этот момент времени равна

$$m_1 = m_0\left(1 + \frac{\pi\delta}{\sqrt{c}}\right)^2.$$

Обобщая эти результаты на случай $k-$го размаха колебаний, получаем рекуррентные соотношения:

$$a_K = a_{K-1}\exp\left(s_{K-1}\right) + p_{K-1}\left[1 - \exp\left(s_{K-1}\right)\right];$$

$$m_K = m_{K-1}\left(1 + \frac{\pi\delta}{\sqrt{c}}\right)^2. \qquad (12)$$

В них $p_{K-1} = \dfrac{4F_T}{\pi\sqrt{c}\left(\delta + \dfrac{\pi\delta^2}{2\sqrt{c}} - \dfrac{\mu}{\sqrt{m_{K-1}}}\right)}$; $s_{K-1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{c}}\left(\delta + \dfrac{\pi\delta^2}{2\sqrt{c}} - \dfrac{\mu}{\sqrt{m_{K-1}}}\right)$.

Используя (12), рассмотрим отдельные частные случаи.

1. При отсутствии силы сухого трения $F_T = 0$, $p_{K-1} = 0$ и, согласно (12),

$$a_K = a_{K-1}\exp\left(s_{K-1}\right).$$

Изменение амплитуд происходит по экспоненциальному закону. Процесс колебаний будет затухающим, когда

$$\delta + \frac{\pi\delta^2}{2\sqrt{c}} - \frac{\mu}{\sqrt{m_{K-1}}} < 0.$$

В случае возрастания массы ($\delta > 0$), это неравенство выполняется для значений

$$\mu > \sqrt{m_{K-1}}\left(\delta + \frac{\pi\delta^2}{2\sqrt{c}}\right). \qquad (13)$$

Но с увеличением k возрастают m_{K-1} и наступит момент времени, когда неравенство (13) перестанет выполняться. С этого момента времени убывание амплитуд перейдет в их увеличение, т. е. начнется раскачка колебаний. Таким образом, за счет вязкого трения можно достичь затухания колебаний в осцилляторе возрастающей массы, при отсутствии реактивной силы, только на некотором начальном интервале времени. Это свойство колебательной системы возрастающей массы ранее отмечали в [4].

В осцилляторе убывающей массы ($\delta < 0$) колебания затухают, независимо от значения μ, при $|\delta| < \dfrac{2}{\pi}\sqrt{c}$.

2. В случае отсутствия сухого трения $\left(F_T = 0\right)$, при постоянной массе ($\delta = 0$ или $m_{K-1} = m_0$), формула (12) упрощается и принимает вид

$$a_K = q a_{K-1},$$

где $q = \exp\left(-\dfrac{\pi\mu}{2\sqrt{cm_0}}\right) < 1$. Убывание амплитуд происходит по закону геометрической прогрессии, что соответствует классическому положению об убывании амплитуд при вязком трении.

3. В случае $F_T > 0$, $\mu > 0$ и $\delta = 0$, соотношение (12) сводится к выражению

$$a_K = a_{K-1} q - \frac{4F_T}{\pi \mu} \sqrt{\frac{m_0}{c}} (1 - q). \tag{14}$$

В пределе $\mu \to 0$ (или $q \to 1$) формула (14) принимает известный вид [3, 5]

$$a_K = a_{K-1} - \frac{2F_T}{c},$$

где убывание амплитуд происходит по закону арифметической прогрессии.

Таким образом, из (12) вытекают известные отдельные частные результаты.

Для проведения расчетов по формулам (12) и сопоставления численных результатов принимаем: $m_0 = 5$ кг; $c = 2000$ Н/м; $F_T = 10$ Н; $a_0 = 0{,}05$ м; $\delta = \pm 0{,}5$ и ± 1 $\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$. Вычисленные значения амплитуд a_K, при $\mu = 0$, записаны в числители табл. 1. В знаменатели записаны результаты полученные в [4, табл. 4.10 и 4.11] на основе точного решения задачи колебаний.

Символом * помечены размахи, при которых осциллятор не проходит положения $x = 0$.

Отличия числителей от знаменателей в табл. 1 небольшие, что подтверждает простоту и эффективность метода энергетического баланса, модифицированного путем учета работы дополнительной силы инерции, возникающей вследствие изменения массы колебательной системы.

Таблица 1 – Значения a_K при $\mu = 0$; $F_T = const$

k	$100a_K$, м			
	$\delta = 0{,}5\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$	$\delta = 1\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$	$\delta = -0{,}5\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$	$\delta = -1\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$
1	$\frac{4{,}081}{4{,}080}$	$\frac{4{,}167}{4{,}161}$	$\frac{3{,}923}{3{,}922}$	$\frac{3{,}850}{3{,}845}$
2	$\frac{3{,}146}{3{,}143}$	$\frac{3{,}303}{3{,}292}$	$\frac{2{,}865}{2{,}862}$	$\frac{2{,}739}{2{,}729}$
3	$\frac{2{,}193}{2{,}189}$	$\frac{2{,}406}{2{,}392}$	$\frac{1{,}824}{1{,}821}$	$\frac{1{,}664}{1{,}652}$
4	$\frac{1{,}224}{1{,}219}$	$\frac{1{,}477}{1{,}459}$	$\frac{0{,}801}{0{,}798}$	$\frac{0{,}625}{0{,}613}$
5	$\frac{0{,}237}{0{,}233}$	$\frac{0{,}514}{0{,}493}$	$\frac{0{,}204^*}{0{,}207^*}$	$\frac{0{,}379^*}{0{,}391^*}$

О совместном влиянии сил вязкого и сухого трения на колебания позволяют судить числа в табл. 2. Для проведения расчетов задавали: $m_0 = 5$ кг; $c = 2000$ Н/м; $F_T = 10$ Н; $a_0 = 0{,}06$ м; $\delta = \pm 1$ $\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$; $\mu = 4; 8$ кг/с. Расчет значений a_K проводили по формуле (12). Он подтвердил, что наличие вязкого трения, существенно усиливает убывание амплитуд и сокращает количество размахов осциллятора до его полной остановки. Это особенно четко проявляется при уменьшении массы колебательной системы.

Таблица 2 – Значения a_K при $\mu > 0$; $F_T = const$

k	$100a_K$, м, $\delta = 1\sqrt{кг}/с$		$100a_K$, м, $\delta = -1\sqrt{кг}/с$	
	$\mu = 4$ кг/с	$\mu = 8$ кг/с	$\mu = 4$ кг/с	$\mu = 8$ кг/с
1	4,856	4,531	4,494	4,191
2	3,760	3,217	3,109	2,619
3	2,700	2,026	1,846	1,274
4	1,668	0,928	0,705	0,142
5	0,655	0,096*	0,317*	-
6	0,347*	-	-	-

2. Колебания осциллятора при переменном значении силы сухого трения. Ее считаем пропорциональной массе, т. е. принимаем

$$F_T = fg\left(\sqrt{m_0} + \delta t\right)^2. \tag{15}$$

Здесь f – коэффициент сухого трения; g – ускорение свободного падения.

Вычислим работу A_1 силы сухого трения (15) во время первого размаха

$$A_1 = -fg\int_0^{\pi/\omega}\left(\sqrt{m_0} + \delta t\right)^2 \dot{x}dt.$$

Подставив сюда выражения $\dot{x}$ из (5), находим:

$$A_1 = -2fgm_0\left(1 + \frac{\pi\delta}{\sqrt{c}} + \frac{\pi^2 - 4}{2c}\delta^2\right)a.$$

Выше, при $F_T = const$, работа A_1 равнялась $-2F_T a$. Из равенства работ получаем усредненное значение силы трения во время первого полуцикла

$$F_T = fgm_0\left(1 + \frac{\pi\delta}{\sqrt{c}} + \frac{\pi^2 - 4}{2c}\delta^2\right).$$

На k – ом размахе в нем надо заменить m_0 на m_{K-1}.

Поэтому для расчета амплитуд колебаний при переменной силе трения сохраняются прежние выражения (12), но теперь в них:

$$p_{K-1} = \frac{4fgm_{K-1}\left(1 + \frac{\pi\delta}{\sqrt{c}} + \frac{\pi^2 - 4}{2c}\delta^2\right)}{\pi\sqrt{c}\left(\delta + \frac{\pi\delta^2}{2\sqrt{c}} - \frac{\mu}{\sqrt{m_{K-1}}}\right)}. \tag{16}$$

Если $\delta \to 0$, $m_{K-1} \to m_0$, то формула (12), с учетом (16), принимает вид

$$a_K = a_{K-1}q - \frac{4fgm_0}{\pi\mu}\sqrt{\frac{m_0}{c}}\left(1-q\right) \tag{17}$$

и может быть использована для расчета амплитуд затухающих колебаний системы постоянной массы с комбинированным трением.

При $\mu \to 0$ из (17) следует известное рекуррентное соотношение [3, 7]

$$a_K = a_{K-1} - \frac{2}{c}fgm_0.$$

Для проведения расчетов по формулам (12), (16), принимаем: $m_0 = 5$ кг; $c = 2000$ Н/м; $f = 0,2$; $a_0 = 0,05$ м; $\delta = \pm0,1$ и $\pm0,5$ $\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$. Результаты расчетов при $\mu = 0$ записаны в числители табл. 3. В знаменатели помещены значения a_K, заимствованные из [4, табл. 4.12 и 4.13], где задачу колебаний решали ВБК-методом.

Таблица 3 – Значения a_K при $\mu = 0$; $F(t) = fg\left(\sqrt{m_0} + \delta t\right)^2$

k	$100a_K$, м			
	$\delta = 0,1\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$	$\delta = 0,5\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$	$\delta = -0,1\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$	$\delta = -0,5\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$
1	$\frac{4,028}{4,028}$	$\frac{4,065}{4,063}$	$\frac{4,010}{4,010}$	$\frac{3,976}{3,974}$
2	$\frac{3,039}{3,038}$	$\frac{3,040}{3,035}$	$\frac{3,037}{3,037}$	$\frac{3,034}{3,029}$
3	$\frac{2,032}{2,031}$	$\frac{1,918}{1,909}$	$\frac{2,081}{2,081}$	$\frac{2,168}{2,160}$
4	$\frac{1,007}{1,006}$	$\frac{0,692}{0,676}$	$\frac{1,142}{1,141}$	$\frac{1,374}{1,362}$
5	$\frac{0,036^*}{0,037^*}$	$\frac{0,646^*}{0,671^*}$	$\frac{0,219}{0,218}$	$\frac{0,645}{0,629}$
6	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{0,023^*}{0,044^*}$

В целом расхождения результатов, полученных разными методами, небольшие, за исключением малых амплитуд колебаний у области застоя.

Информация об изменении амплитуд колебаний за счет комбинированного трения представлена в табл. 4 и табл. 5. Для проведения расчетов по формулам (12), (16) задавали: $m_0 = 5$ кг; $c = 2000$ Н/м; $a_0 = 0,06$ м; $\delta = \pm0,5$ $\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$ и различные f и μ.

Анализ результатов в табл. 4 показывает, что при отсутствии диссипативных сил ($\mu = f = 0$) в системе возрастающей массы происходит раскачивание колебаний. Если нет сухого трения, а вязкое трение мало ($f = 0$;

$\mu = 1{,}25$ кг/с), то на начальном этапе движения колебания затухают, а затем затухание прекращается и переходит в рост амплитуд. При наличии сухого трения ($f = 0{,}2$) колебания быстро затухают и этот процесс усиливается с увеличением вязкого трения. Осциллятор совершает конечное число размахов до полной остановки.

Таблица 4 – Значения $100a_K$, м при $\delta = 0{,}5\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$ и разных f и μ

k	$f=0$, $\mu=0$	$f=0$, $\mu=5/4$ кг/с	$f=0$, $\mu=8$ кг/с	$f=0{,}2$, $\mu=0$	$f=0{,}2$, $\mu=5/4$ кг/с	$f=0{,}2$, $\mu=8$ кг/с
1	6,108	5,989	5,387	5,083	4,975	4,424
2	6,218	5,983	4,857	4,077	3,881	2,955
3	6,330	5,980	4,397	2,973	2,713	1,565
4	6,445	5,981	3,997	1,766	1,464	0,231
5	6,561	5,986	3,647	0,447	1,259	-
6	6,679	5,994	3,341	-	-	-
7	6,780	6,005	3,071	-	-	-
8	6,922	6,020	2,832	-	-	-

Таблица 5 – Значения $100a_K$, м при $\delta = -0{,}5\sqrt{\text{кг}}/\text{с}$ и разных f и μ

k	$f=0$, $\mu=0$	$f=0$, $\mu=5/4$ кг/с	$f=0$, $\mu=8$ кг/с	$f=0{,}2$, $\mu=0$	$f=0{,}2$, $\mu=5/4$ кг/с	$f=0{,}2$, $\mu=8$ кг/с
1	5,897	5,783	5,201	4,959	4,853	4,319
2	5,796	5,569	4,488	4,000	3,809	2,907
3	5,697	5,360	3,854	3,118	2,860	1,735
4	5,600	5,154	3,294	2,307	2,001	0,776
5	5,504	4,953	2,800	1,562	1,226	0,003
6	5,410	4,755	2,368	0,879	0,528	-
7	5,317	4,561	1,992	0,253	0,098*	-
8	5,226	4,372	1,666	-	-	-
9	5,137	4,186	1,385	-	-	-
10	5,049	4,004	1,145	-	-	-
11	4,963	3,827	0,940	-	-	-
12	4,878	3,654	0,767	-	-	-

При убывании массы колебания затухают и без диссипативных сил. Наличие этих сил ускоряет процесс затухания, а при действии силы Кулона система совершает конечное число размахов до полного останова.

Выводы. Учет работы дополнительной силы инерции повысил точность метода энергетического баланса при определении амплитуд колебаний системы переменной массы. Полученные расчетные формулы позволяют с небольшой погрешностью вычислять амплитуды колебаний осциллятора при совместном действии сил сухого и вязкого трения.

Список использованных источников

1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с.
2. Cveficanin L. Dynamics of machines with Variable Mass / L. Cveficanin. – Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.
4. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.
5. Ольшанский В.П. Нестационарные колебания механических систем переменной массы с комбинированным трением / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Проблеми надійності машин та засобів сільськогосподарського виробництва. Х.: ХНТУСГ, 2014. Вип. 151. – С. 324-332.
6. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси з сухим тертям / В.П. Ольшанський , С.В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал, 2014, № 1(73). – С.33-39.
7. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: Т. 2 / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.

Анотація

МЕТОД ЕНЕРГЕТИЧНОГО БАЛАНСУ ПРИ РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ ЗМІННОЇ МАСИ З КОМБІНОВАНИМ ТЕРТЯМ

Ольшанський В.П., Тіщенко Л.М., Ольшанський С.В.

Модифікованим методом енергетичного балансу побудовано наближені формули для розрахунку амплітуд коливань осцилятора змінної маси. Модифікація метода полягає в урахуванні роботи додаткової сили інерції, яка виникає внаслідок зміни маси коливальної системи. Показано, що виведені компактні наближені формули мають хорошу точність та зручні для інженерних розрахунків

Abstract

ENERGY BALANCE METHOD FOR CALCULATION OF VIBRATIONS OSCILLATOR WERIABLE MASS AND COMPOSITE FRICTION

Olshanskii V.P., Tishchenko L.M., Olshanskii S.V.

By modified method of energy balance approximate formulas for calculating the vibration amplitude of the oscillator variable mass were built. Modification of the method lies in the account of the work of additional inertial forces resulting from changes in the mass oscillating systems. It is shown that the approximate formulas derived compact with good accuracy and convenient for engineering calculations