МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧУВАННЯ
ТА ТОРГІВЛІ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ
для самостійної роботи студентів
Модуль № 5: «Кратні інтеграли»,
«Криволінійні інтеграли»

Напрям підготовки: 6.050502 “Інженерна механіка”

Харків 2009

Рекомендовано до видання
кафедрою вищої математики,
протокол № 2
від 29 вересня 2009 р.

Схвалено науково-методичною
комісією факультету обладнання
та технічного сервісу
протокол №
від 26 жовтня 2009 р.

Рецензент: В.В. Полевич, д-р техн. наук, проф.

ЗМІСТ

1. ПЕРЕДМОВА

Відповідно Болонському процесу кредитно-модульна система організації навчального процесу у вузах нашої країни з кожної навчальної дисципліни передбачає два модульних (проміжних) контролі протягом семестру, а потім семестровий (підсумковий) контроль у формі або екзамену, або заліку в обсязі того навчального матеріалу, який визначений робочою програмою.

В зв'язку з цим як у європейську практику вищої школи надійно увійшло використання тестів у навчальному процесі так і на Україні широко розповсюджується, а в Харківському державному університеті отримує подальший розвиток виконання тестових завдань.

У ході цього процесу розвиваються і уявлення про призначення та можливості тестів, і форми тестів, і формати завдань.

Математика як навчальна дисципліна має істотно певні специфічні особливості і складання комплексів тестових завдань з математичних курсів є далеко не простим завданням. Майже відсутні методичні розробки для організації самостійної роботи студентів по підготовці до проміжних контролів, яких на факультеті обладнання і технічного сервісу передбачається вісім.

Запропоновані методичні вказівки спрямовані якраз на усунення цього недоліку і містять тематичні тести по підготовці до виконання модуля №5 і складаються з ретельно підібраних для кожної теми завдань з таких розділів вищої математики ***:***

1) «Кратні інтеграли»;
2) «Криволінійні інтеграли»

Методичні вказівки містять теоретичний довідковий матеріал, до якого можна звертатися як на початку роботи з тестами, так і в процесі розв'язування завдань. Цей же теоретичний матеріал також сприятиме систематизації знань і при підготовці до підсумкового контролю знань.

2. МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

2.1 Подвійні інтеграли

Означення подвійного інтеграла

Нехай функція $z = f(P) = f(x, y)$ задана в обмеженій замкненій області D площини xOy. Розіб'ємо цю область довільно на n клітин $S_1, S_2, \ldots, S_n$ так, щоб вони не мали загальних внутрішніх точок (рис. 1) і площі яких відповідно дорівнювали б $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. В кожній з клітин S_i $(i = 1, \ldots, n)$ візьмемо довільну точку $P_i(x_i, y_i)$ і тоді матимемо n точок $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Обчислимо $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$, значення заданої функції у цих точках і утворимо суму добутків виду $f(P_i)\Delta S_i$

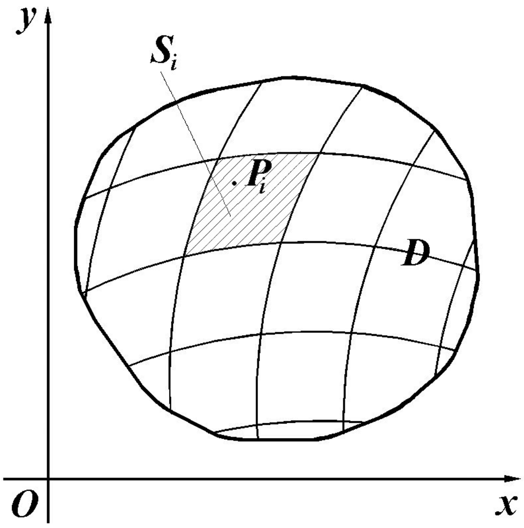


Рис. 1

$$I_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i. \quad (1)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ в області D.

Якщо $f(P) > 0$ в області D, то кожний доданок $f(P_i)\Delta S_i$ цієї суми можна геометрично представити як об'єм циліндричного тіла площа основи якого дорівнює ΔS_i, а висота $f(P_i)$. Позначимо через λ_i діаметр клітини S_i (інакше – відстань між її двома найбільш віддаленими точками), а через $\lambda = \max \lambda_i$ – найбільший з діаметрів цих клітин даного розбиття.

<u>Означення.</u> Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум I_n при умові, що $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття області D на клітини, ні від вибору точок $P_i \in S_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то вона називається подвійним інтегралом від функції $f(P)$ по області D. Позначається $\iint\limits_D f(P)dS$, $\iint\limits_D f(x, y)dS$.

Отже, за означенням $\iint\limits_D f(P)dS = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$.

Умова $\lambda \to 0$ означає, що $n \to \infty$. Якщо така границя існує, то функція $f(P)$ називається інтегровною в області D. Будь-яка неперервна в обмеженій замкненій області D функція $f(P)$ інтегровна в ній. Далі будемо розглядати лише неперервні функції.

Для подвійного інтеграла виконуються найпростіші властивості лінійності і адитивності, тобто

1) якщо $f(P)=C_1 f_1(P)+C_2 f_2(P)$, де C_1 і C_2 – числа, то $\iint\limits_D f(P)dS =$ $C_1\iint\limits_D f_1(P)dS + C_2\iint\limits_D f_2(P)dS$;

2) якщо область D складається з двох областей D_1 і D_2 ($D = D_1 \bigcup D_2$), то $\iint\limits_D f(P)dS = \iint\limits_{D_1} f(P)dS + \iint\limits_{D_2} f(P)dS$.

В декартових координатах елемент площі dS записується у вигляді $dS = dxdy$, а подвійний інтеграл позначається

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (2)$$

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до повторного обчислення двох визначених інтегралів.

Припустимо, що область інтегрування D перетинається будь-якою прямою, що паралельна осі Oy, не більше ніж в двох точках. Така область називається правильною в напрямі осі Oxy. Нехай на межі області l найлівіша точка A, а найправіша – B. Позначимо їх абсциси через a і b. Точки A і B ділять контур l на нижню частину ACB, рівняння якої $y = y_1(x)$ і верхню частину ADB, рівняння якої $y = y_2(x)$ (рис. 1).

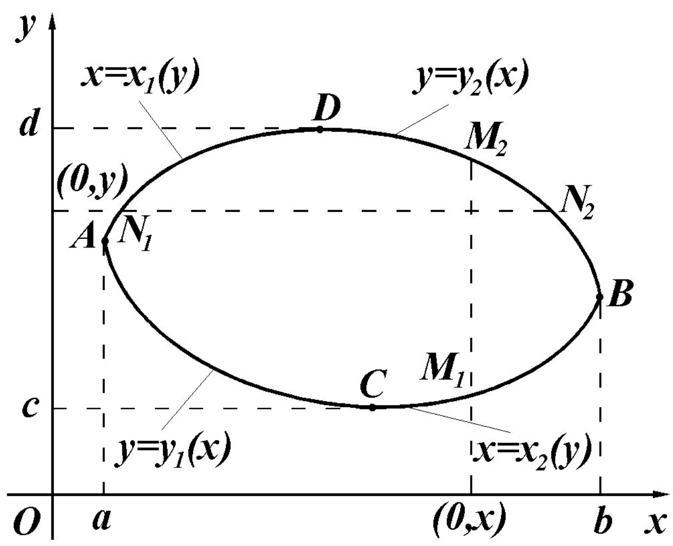


Рис. 2

В цьому випадку, якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в області D і $\forall x \in [a,b]$ існує інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (3)$$

Припустимо тепер, що область правильна в напрямі осі Ox. Позначимо проекцію області на ось Oy через $[c,d]$. Нехай $x = x_1(y)$ є рівняння лівої частини CAD контура l, а $x = x_2(y)$ - рівняння правої частини CBD (рис. 1.2). Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в області D і $\forall y \in [c,d]$ існує інтеграл $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, то подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (4)$$

Інтеграли, що стоять справа у формулах (3) і (4) називаються повторними або двократними. Якщо область інтегрування є неправильною, то її можна розбити на правильні підобласті і, використовуючи властивість адитивності, обчислити інтеграл по кожній з них.

При обчисленні подвійного інтеграла важливо вірно розставити межі інтегрування, при цьому слід дотримуватись такої схеми.

1. Область D проектується на одну з осей, наприклад Ox. Цим визначається відрізок $[a,b]: a \le x \le b$ (рис. 2). Числа a і b будуть відповідно нижньою і верхньою межами у зовнішньому інтегралі в формулі (3), тобто у зовнішньому інтегралі межі завжди є сталими величинами.

2. Для знаходження меж інтегрування у внутрішньому інтегралі через будь-яку точку $(x,0) \in [a,b]$ проведемо пряму, що паралельна осі Oy. Ця пряма перетне межу області D в точках M_1 і M_2. Для знаходження координат точки входу M_1 і виходу M_2 необхідно розв'язати рівняння нижньої ACB і верхньої ADB дільниць межі області D відносно y: $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. При цьому функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ на відрізку $[a,b]$ неперервні, однозначні і зберігають один аналітичний вираз.

Аналогічно визначаються межі інтегрування в повторному інтегралі (4), коли область інтегрування D проектується на вісь ординат.

У внутрішньому інтегралі межі інтегрування в загальному випадку є функції тієї змінної, по якій обчислюється зовнішній інтеграл і яка при обчисленні внутрішнього інтеграла залишається сталою.

Обчислення повторного інтеграла завжди розпочинається з обчислення внутрішнього інтеграла, для якого у випадку інтеграла (3) y є змінною, а x - сталою величиною. Після знаходження первісної межі внутрішнього інтеграла підставляються замість змінної y. В результаті цього приходимо до визначеного інтеграла по змінній x.

В окремому випадку області інтегрування – прямокутнику, що обмежений прямими $x = a, x = b \ (a < b)$ і $y = c, y = d \ (c < d)$, межі інтегрування у внутрішньому і зовнішньому інтегралах формул (3) і (4) є сталі, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \qquad (5)$$

або

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \qquad (6)$$

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то значення повторного інтеграла не залежить від порядку інтегрування. При цьому для зменшення кількості обчислень слід вибрати, якщо це можливо, такий порядок інтегрування, при якому не доводиться розбивати область інтегрування на частини.

Заміна змінних в подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат

При обчисленні подвійних інтегралів інколи необхідно зробити заміну змінних.

Нехай функції

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases} \tag{7}$$

визначені на всій площині xOy або в деякій її області D і мають неперервні частинні похідні. Припустимо також, що систему рівнянь (7) можна однозначно розв’язати відносно x і y:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v); \end{cases} \tag{8}$$

тоді кожній точці $M(x, y)$ із області D буде взаємно однозначно відповідати пара чисел (u, v), які називаються криволінійними координатами цієї точки. Якщо область D розміщена в тій частині площини xOy, в якій введено криволінійні координати u, v, то справедлива наступна формула:

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| dudv, \tag{9}$$

де D' - область зміни криволінійних координат u і v, що відповідає області D, а $J(u, v)$ - якобіан перетворення (8):

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Часто обчислення подвійного інтеграла спрощується заміною прямокутних координат x і y полярними координатами за формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) здійснює перехід від прямокутних координат x, y до полярних ρ і φ при умові, що полюс розміщено на початку координат і полярна вісь направлена вздовж осі Ox (рис. 3).

В цьому випадку якобіан дорівнює

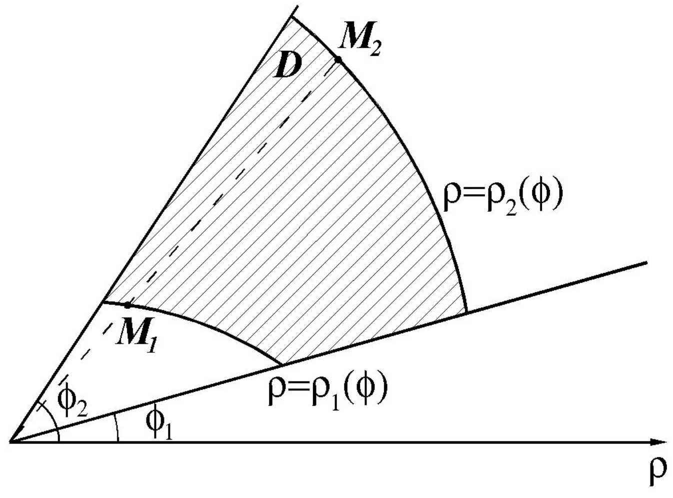


Рис. 3

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho. \quad (11)$$

Таким чином,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D'} f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\rho d\rho d\varphi. \quad (12)$$

Якщо область інтегрування D обмежена променями, що утворюють з полярною віссю кути φ_1 і φ_2 $(\varphi_1<\varphi_2)$ та двома кривими $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi))$ (рис. 3) і функції $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ в проміжку $[\varphi_1,\varphi_2]$ неперервні, однозначні і зберігають аналітичний вираз, то відповідні цій області полярні координати змінюються у межах

$$D':\{\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2;\, \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)\},$$

і тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\rho d\rho. \quad (13)$$

Інтеграл в правій частині цієї формули – повторний. У внутрішньому інтегралі змінну φ треба розглядати як сталу величину, а ρ - змінну. Для визначення меж внутрішнього інтеграла по змінній ρ (полярного радіуса) проведемо із полюса O будь-який промінь $\varphi=const, \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$. В точці входу M_1 цього променя в область інтегрування $\rho=\rho_1(\varphi)$, а в точці M_2 - виходу його із області $\rho=\rho_2(\varphi)$.

Якщо область D містить початок координат, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\rho d\rho, \quad (14)$$

де $\rho=\rho(\varphi)$ - полярне рівняння кривої, що обмежує область D.

Якщо область інтегрування є круг з центром на початку координат і радіуса R, то межі інтегрування в полярній системі координат, як внутрішнього так і зовнішнього інтегралів, будуть сталими, тобто

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\rho d\rho. \quad (15)$$

Формулами (13)-(15) зручно користуватись при розв’язанні задач, коли область D є круг або сектор круга.

Застосування подвійних інтегралів в геометрії

1. Обчислення площ плоских областей.

Площа S плоскої області D на площині xOy обчислюється за формулою

$$S = \iint_D dxdy. \qquad (16)$$

2. Обчислення об'ємів.

Об'єм циліндричного тіла, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x,y)$. а знизу областю D площини xOy, з боків циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні осі Oz і з напрямною – межею області D (рис. 4), знаходиться за формулою

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (17)$$

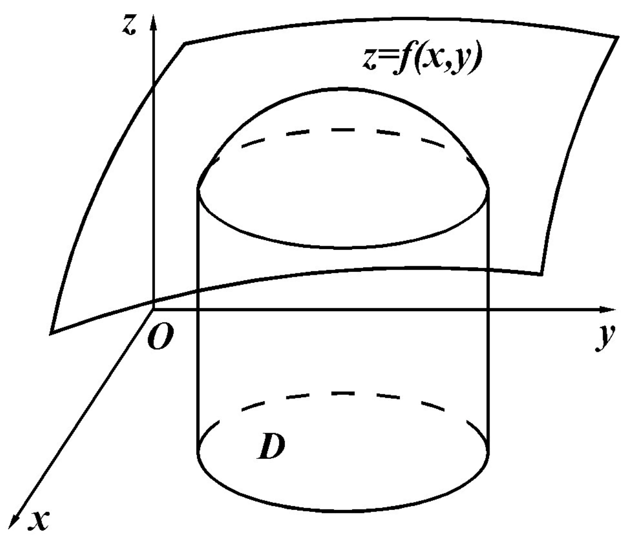


Рис. 4

3. Обчислення площі поверхні.

Нехай поверхня σ, що задана рівнянням $z = f(x,y)$, проектується на площину xOy в область D (рис. 4). Тоді її площу S знаходять за формулою

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (18)$$

Застосування подвійних інтегралів в механіці та фізиці

Нехай D - плоска пластинка, яка лежить в площині xOy, а $\gamma(x,y)$ - поверхнева густина деякої величини (кількість величини, що припадає на одиницю площі пластинки), тоді подвійний інтеграл

$$\iint_D \gamma(x,y)dxdy$$

дає сумарне значення цієї величини в області D.

Якщо $\gamma(x,y)$ - поверхнева густина електричного заряду, то формула

$$q = \iint_D \gamma(x,y)dxdy$$

визначає заряд пластинки D. Якщо $\gamma(x,y)$ - поверхнева густина маси, то:

1) масу m пластинки обчислюють за формулою

$$m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy; \qquad (19)$$

2) статичні моменти M_x і M_y пластинки відносно координатних осей Ox і Oy знаходять за формулами

$$M_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy, \qquad (20)$$

$$M_y = \iint_D x\gamma(x,y)dxdy; \qquad (21)$$

3) координати центра мас x_c і y_c - за формулами

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x\gamma(x,y)dxdy = \frac{M_y}{m}, \qquad (22)$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_D y\gamma(x,y)dxdy = \frac{M_x}{m}. \qquad (23)$$

Правильність обчислень координат центра мас перевіряють виходячи з того, що повинні виконуватись умови $x_1 \le x_c \le x_2$, $y_1 \le y_c \le y_2$, де x_1, y_1 - мінімальні, а x_2, y_2 - максимальні значення координат точок області D.

4) моменти інерції J_x, J_y і J_0 пластинки відповідно відносно координатних осей Ox, Oy і початку координат – за формулами

$$J_x = \iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad (24)$$

$$J_y = \iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad (25)$$

$$J_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)dxdy. \qquad (26)$$

Для однорідних пластинок $\gamma(x,y) = const$. В такому випадку, як правило, вважають $\gamma(x,y) = 1$.

2.2 Потрійні інтеграли
Означення потрійного інтеграла та його обчислення в прямокутній системі координат.

Нехай функція $f(P) = f(x,y,z)$ задана в деякій обмеженій замкненій просторовій області V. Розіб'ємо цю область на n довільних частинних областей $V_1, V_2, \ldots, V_n$, що не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких позначимо відповідно $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. В кожній області $V_i (i = 1, \ldots, n)$ довільно виберемо точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ і помножимо значення функції $f(P_i)$ в цій точці на об'єм ΔV_i області V_i. Сума таких добутків по всім областям

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i = f(M_i)\Delta V_i + \ldots + f(M_n)\Delta V_n \qquad (27)$$

називається інтегральною сумою для функції $f(x,y,z)$ по області V. Позначимо через λ найбільший із діаметрів областей V_i (діаметр області V_i – відстань між її найбільш віддаленими точками).

Означення. Потрійним інтегралом $\iiint\limits_V f(P)dv$ від функції $f(P)$ по області V називається скінченна границя послідовності інтегральних сум I_n при умові, що $\lambda \to 0$, тобто $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$.

Яка не залежить від способу розбиття області V на області V_i і вибору точок $P_i \in \Delta v_i$, $i=\overline{1,n}$. Потрійний інтеграл позначається $\iiint\limits_V f(P)dv$, $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$. Отже, за означенням $\iiint\limits_V f(P)dv = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$. Умова $\lambda \to 0$ означає, що $n \to \infty$, то функція $f(P)$ називається інтегровною в області V. Будь-яка неперервна в обмеженій замкненій області V функція $f(P)$ інтегровна в ній. Ми будемо далі розглядати тільки неперервні функції.

Потрійний інтеграл має ті ж властивості , що і подвійний інтеграл.

В декартових координатах елемент об'єму dV записується у вигляді $dV = dxdydz$, а потрійний інтеграл позначається

$$\iiint\limits_V f(P)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz. \tag{28}$$

Обчислення потрійного інтеграла в декартовій системі координат зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції D об'єму V на будь-яку координатну площину і внутрішнього інтеграла по третій змінній.

Нехай V проектується в область D на площині xOy так, що будь-яка пряма, яка паралельна осі Oz і проходить всередині області D, перетинає область V рівно в двох точках. Така область називається правильною відносно осі Oz. В загальному випадку ця область обмежена зверху поверхнею $z=z_2(x,y)$,знизу - поверхнею $z=z_1(x,y)$ і з боків – циліндричною поверхнею з твірними , які паралельні осі Oz (рис.5). В окремих випадках бічна поверхня циліндричного тіла може перетворитися в лінію (рис. 6). При цьому будь-яка пряма, що паралельна осі Oz має точку входу M_1 в область V, що належить поверхні $z=z_1(x,y)$, і точку виходу M_2, що належить поверхні $z=z_2(x,y)$, із цієї області (рис. 5 і 6). Тому змінна z змінюється в межах від $z_1(x,y)$ до $z_2(x,y)$. Функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$ вважаємо неперервними. Потрійний інтеграл по такій області обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dxdydz. \tag{29}$$

Тут внутрішній інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ береться по змінній z при фіксованих, але довільних в D значеннях x і y від нижньої межі області V до її верхньої межі (тобто по відрізку M_1M_2, рис. 5). В результаті одержуємо деяку функцію від x і y, яка потім інтегрується по області D.

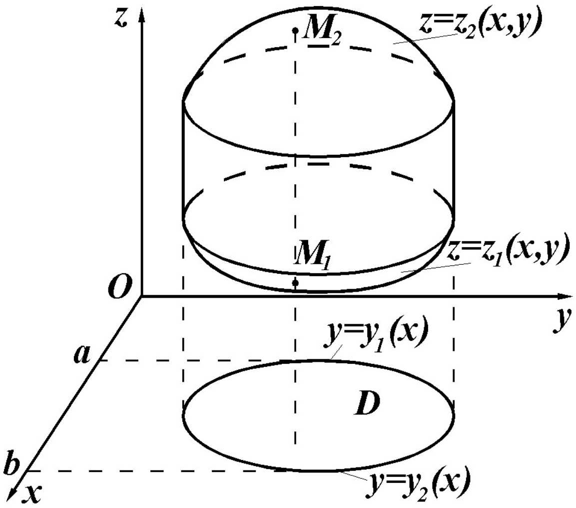


Рис. 5

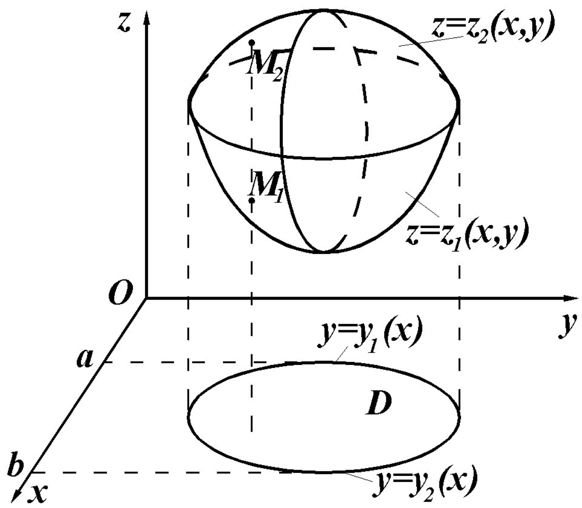


Рис. 6

Враховуючи правила обчислення подвійного інтеграла останню формулу можна записати у вигляді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (30)$$

Якщо область V є неправильною, то її розбивають на скінченну кількість правильних областей і обчислюють інтеграл, використовуючи властивість адитивності потрійного інтеграла.

Якщо областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, обмежений площинами $x=a, x=b (a<b), y=c, y=d, (c<d), z=m, z=n, (m<n)$, то межі інтегрування будуть сталими, тобто:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz \qquad (31)$$

Потрійний інтеграл в циліндричних і сферичних системах координат

В багатьох задачах обчислення потрійних інтегралів зручно виконувати в циліндричній або сферичній системах координат.

Питання про заміну змінних в потрійному інтегралі вирішується тим же шляхом, що і у випадку подвійного інтеграла. Нехай

$$\begin{cases} u = u(x, y, z), \\ v = v(x, y, z), \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \tag{32}$$

функції, що визначені у всьому просторі або в деякій його області V і мають неперервні частинні похідні в області V. Припустимо також, що цю систему можна однозначно розв'язати відносно x, y і z

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \tag{33}$$

Тоді кожній точці $M(x, y, z)$ із області D буде взаємно однозначно відповідати трійка чисел (u, v, w), які називаються криволінійними координатами цієї точки. Якщо область V розміщена в тій частині простору, в якій введено криволінійні координати u, v, w, то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]|J(u, v, w)|dudvdw \tag{34}$$

де V' - область зміни криволінійних координат u, v, w, що відповідає області V, $J(u, v, w)$ - якобіан перетворення (33)

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

В циліндричній системі координат положення точки M визначається полярними координатами φ, ρ її проекції M' на площину xOy і аплікатою z (рис. 7). Формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні координати, мають вигляд

$$x = \rho\cos\varphi, \ y = \rho\cos\varphi, \ z = z, \tag{35}$$

де $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 < \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, $|J| = \rho$.

Тоді в потрійному інтегралі перехід від прямокутних координат (x, y, z) до циліндричних координат (φ, ρ, z) відбувається за формулою

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\varphi d\rho dz, \tag{36}$$

де V' - область змінювання циліндричних координат, що відповідає об'єму V в декартових координатах.

Якщо областю інтегрування є круговий циліндр з віссю Oz, то потрійний інтеграл по цій області в циліндричній системі координат матиме сталі межі по всім змінним, тобто

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^H f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz \tag{37}$$

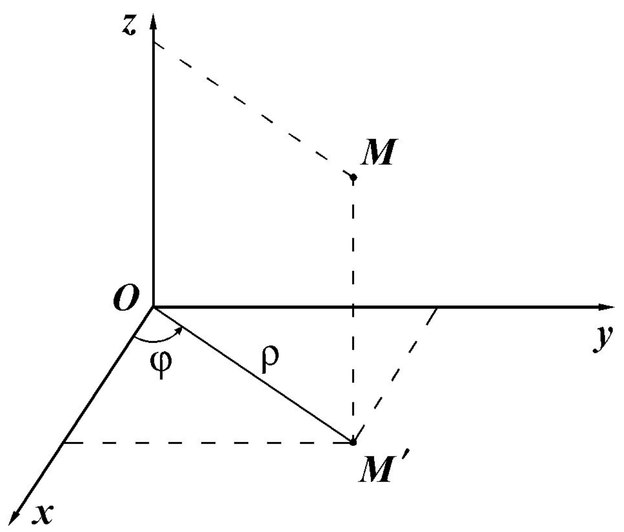


Рис. 7

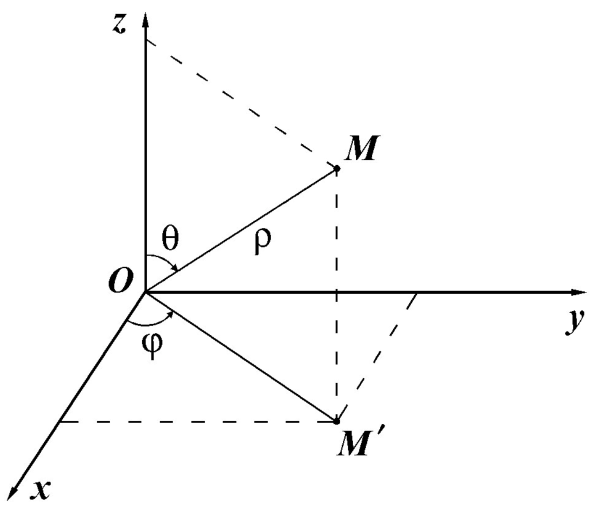


Рис. 8

Сферичні координати точки M області V позначаються через ρ, φ, θ, де ρ - відстань від початку координат до точки $M(x, y, z)$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, φ - кут між додатним напрямком осі Ox і проекцією радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на площину xOy, а θ - кут між додатним напрямом осі Oz і радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис 8). Сферичні координати ρ, φ, θ зв'язані з прямокутними координатами співвідношеннями :

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta, \qquad (38)$$

де $\rho \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi$ або $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $|J| = \rho^2 \sin\theta$.

Перехід в потрійному інтегралі до сферичних координат відбувається за формулою

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho, \qquad (39)$$

де V' - область змінювання сферичних координат, що відповідає об'єму V.

Якщо область інтегрування є куля з центром на початку координат і радіусом R, то потрійний інтеграл по цій області в сферичній системі координат матиме сталі межі інтегрування по всім змінним, тобто

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)d\rho. \qquad (40)$$

Геометричні, механічні і фізичні застосування потрійних інтегралів

1. Об'єм просторового тіла знаходиться за формулою

$$V = \iiint\limits_V dxdydz. \qquad (41)$$

В циліндричних та сферичних координатах відповідно маємо

$$V = \iiint_{V'} \rho d\varphi d\rho dz \tag{42}$$

і

$$V = \iiint_{V'} \rho^2 \sin\theta d\varphi d\rho d\theta \,. \tag{43}$$

2. Маса тіла змінної густини $\gamma(x, y, z)$ обчислюється за формулою

$$m = \iiint_{V} \gamma(x, y, z) dxdydz \,. \tag{44}$$

Якщо задана густина якої-небудь величини (наприклад електричного заряду), то сама величина, що зосереджена у даному об'ємі буде обчислюватись за формулою (44).

3. Статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла V відносно координатних площин xOy, xOz, yOz обчислюються за формулами

$$\begin{gathered} M_{xy} = \iiint_{V} z\gamma(x, y, z) dxdydz \,; \\ M_{xz} = \iiint_{V} y\gamma(x, y, z) dxdydz \,; \\ M_{yz} = \iiint_{V} x\gamma(x, y, z) dxdydz \,. \end{gathered} \tag{45}$$

4. Моменти інерції J_x, J_y, J_z відносно координатних осей Ox, Oy, Oz; J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} відносно координатних площин xOy, xOz, yOz; J_0 відносно початку координат відповідно знаходяться за формулами

$$\begin{gathered} J_x = \iiint_{V} \left(z^2 + y^2\right) \gamma(x, y, z) dxdydz \,; \\ J_y = \iiint_{V} \left(x^2 + z^2\right) \gamma(x, y, z) dxdydz \,; \\ J_z = \iiint_{V} \left(x^2 + y^2\right) \gamma(x, y, z) dxdydz \,; \end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered} J_{xy} = \iiint_{V} z^2 \gamma(x, y, z) dxdydz \,; \\ J_{xz} = \iiint_{V} y^2 \gamma(x, y, z) dxdydz \,; \\ J_{yz} = \iiint_{V} x^2 \gamma(x, y, z) dxdydz \,; \end{gathered} \tag{47}$$

$$J_0 = \iiint_{V} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \gamma(x, y, z) dxdydz \,; \tag{48}$$

5. Координати центра мас тіла V з густиною $\gamma(x, y, z)$ можна обчислити за формулами

$$x_C = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{yz}}{m};$$

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xz}}{m}; \qquad (49)$$

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Для однорідного тіла ($\gamma(x,y,z)=const=c$) всі ці формули спрощуються, оскільки в цьому випадку можна вважати, що $\gamma(x,y,z)=1$. Якщо однорідне тіло симетричне відносно якої-небудь площини, то центр мас лежить у цій площині (останнє допоможе перевірити правильність обчислень).

2.3 Криволінійні інтеграли по довжині дуги (першого роду)
Означення криволінійного інтеграла по довжині дуги

Розглянемо просторову кусково-гладку криву l, що обмежена точками A і B. Крива називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична, що неперервно змінюється вздовж кривої. Кусково-гладкою кривою називається неперервна крива, яка складається із скінченої кількості гладких кусків. Нехай в кожній точці $M(x,y,z)$ цієї кривої визначена неперервна функція $f(M)=f(x,y,z)$. Розіб’ємо дугу AB довільним чином точками $A_0=A, A_1, A_2,...,A_n=B$ на n частинних дуг $l_1,l_2,...,l_n$, довжини яких $\Delta l_1,\Delta l_2,...,\Delta l_n$. На кожній частинній дузі l_i виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ і обчислимо в ній значення функції $f(M_i)=f(x_i,y_i,z_i)$. Число $f(x_i,y_i,z_i)$ помножимо на довжину дуги Δl_i і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i, \qquad (50)$$

яка називається інтегральною сумою по кривій l (або дузі AB) функції $f(x,y,z)$. Покладемо $\lambda = \max \Delta l_i, i=1...n$.

<u>Означення.</u> Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум I_n при умові $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття кривої l на частинні дуги та від вибору точок M_i на них, то ця границя називається криволінійним інтегралом по довжині дуги (або криволінійним інтегралом першого роду) від функції $f(x,y,z)$, по дузі l (або по дузі AB).

Позначається $\int\limits_{l} f(x,y)dl$ (або $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$).

Отже, за означенням маємо

$$\int\limits_{l} f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i\,. \quad (51)$$

Умова $\lambda \to 0$ означає, що $n \to \infty$.

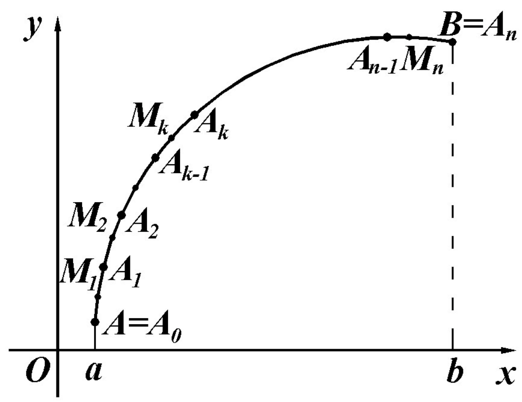


Рис. 9

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна у всіх точках дуги AB, то ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття дуги AB, ні від вибору точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ на кожній із частинних дуг.

Якщо крива l лежить в площині xOy, то функція f залежить тільки від x і y, тоді

$$\int\limits_{l} f(x,y)dl = \lim_{\lambda}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i\,. \quad (52)$$

В формулах (51) і (52) dl – це диференціал довжини дуги.

На рис. 9 наведено розбиття плоскої кривої l на n частинних дуг і довільний вибір точок на кожній із них. При цьому крива повинна бути такою, що кожним двом різним точкам відрізка $[a,b]$ відповідають дві різні точки кривої.

Криволінійний інтеграл по довжині дуги має такі найпростіші властивості:

1) $\int\limits_{l}(C_1 f_1(M) \pm C_2 f_2(M))dl = C_1\int\limits_{l} f_1(M)dl \pm C_2\int\limits_{l} f_2(M)dl$;

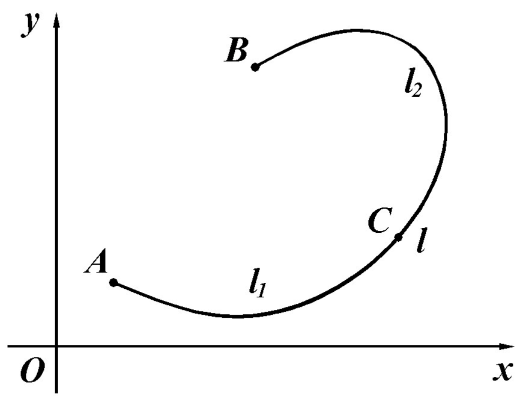


Рис. 10

2) якщо крива l складається із двох частин l_1 і l_2 (рис. 10), то

$$\int\limits_{l} f(M)dl = \int\limits_{l_1} f_1(M)dl + \int\limits_{l_2} f_2(M)dl;$$

3) відповідно із означенням, криволінійний інтеграл по довжині дуги не залежить від напряму шляху інтегрування, тобто

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl,$$

оскільки в формулах (51) і (52) $\Delta l_i > 0$.

Обчислення криволінійного інтеграла по довжині дуги

Обчислення криволінійних інтегралів по довжині дуги зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Розглянемо різні способи задання кривої l і перехід до визначеного інтеграла.

а) Якщо просторова крива l задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \\ z = z(t), \end{cases}$$

то $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$ і

$$\int_l f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt. \qquad (53)$$

Якщо крива лежить в площині xOy, то

$$\int_l f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt. \qquad (54)$$

б) Якщо плоска крива l задана рівнянням $y = y(x)$, де $a \le x \le b$, то $dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$

$$\int_l f(x,y)dl = \int_b^a f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx. \qquad (55)$$

Аналогічно, якщо крива l задана рівнянням $x = x(y)$, $c \le y \le d$, то $dl = \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,dx$ і

$$\int_l f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(y), y)\sqrt{1 + x'(y)^2}\,dy. \qquad (56)$$

в) Якщо крива l задається у полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$

$$\int_l f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (57)$$

Застосування криволінійних інтегралів по довжині дуги

1. Довжина дуги AB кривої l обчислюється за формулою

$$l_{AB} = \int_{AB} dl \qquad (58)$$

2. Маса матеріальної дуги AB кривої l, в кожній точці якої задана густина маси $\gamma(x,y,z)$, обчислюється за формулою

$$m = \int_{AB} \gamma(x,y,z)dl \qquad (59)$$

Якщо l – плоска крива, то густина маси $\gamma(x,y)$ і формула для обчислення маси матеріальної дуги AB буде такою

$$m = \int_{AB} \gamma(x,y)dl \qquad (60)$$

3. Статичні моменти плоскої дуги AB відносно координатних осей визначаються за формулами

$$M_x = \int_{AB} y\gamma(x,y)dl$$
$$M_y = \int_{AB} x\gamma(x,y)dl \qquad (61)$$

4. Координати центра тяжіння плоскої матеріальної дуги AB визначається за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{AB} x\gamma(x,y)dl}{\int_{AB} \gamma(x,y)dl}$$
$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{AB} y\gamma(x,y)dl}{\int_{AB} \gamma(x,y)dl} \qquad (62)$$

5. Моменти інерції матеріальної дуги AB відносно координатних осей і початку координат обчислюються за формулами

$$J_x = \int_{AB} y^2\gamma(x,y)dl$$
$$J_y = \int_{AB} x^2\gamma(x,y)dl \qquad (63)$$
$$J_0 = \int_{AB} \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)dl$$

6. Притягання точкової маси матеріальної кривої. Якщо AB – дуга матеріальної кривої з густиною розподілу маси $\gamma(x,y)$, а m_0 - точкова маса, що займає положення (x_0,y_0), то дуга AB притягає масу m_0 з силою $\vec{F}\left(F_x,F_y\right)$, проекції якої на осі координат обчислюються за формулами

$$F_x = \nu m_0 \int_{AB} \frac{\gamma(x,y)(x-x_0)}{r^3}dl$$
$$F_y = \nu m_0 \int_{AB} \frac{\gamma(x,y)(y-y_0)}{r^3}dl \qquad (64)$$

де ν - стала тяжіння, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

2. 4 Криволінійні інтеграли по координатах (другого роду)
Означення криволінійного інтеграла по координатах

Нехай задана гладка або кусково-гладка просторова крива l, яка обмежена точками A і B, кожній точці якої задана вектор-функція $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, де функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$,

$R(x,y,z)$ – неперервні на кривій l. Розіб'ємо криву l на n частинних дуг точками $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$. Кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$. Позначимо його довжину Δl_i, тобто $\left|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right| = \Delta l_i$. Покладемо $\lambda = \max \Delta l_i$, $i=\overline{1,n}$. На кожній частинній дузі візьмемо точку $M_i = (\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ і обчислимо скалярний добуток

$$\left(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right) = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i.$$

Складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right), \qquad (65)$$

яка називається інтегральною сумою від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)$ вздовж кривої l від точки A до точки B.

Означення. Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум I_n при умові $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття кривої l на частинні дуги та від вибору точок M_i на них, то ця границя називається криволінійним інтегралом по координатах (або криволінійним інтегралом другого роду) від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)$ по кривій l (або дузі AB). Позначається

$$\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

або

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Отже, за означенням маємо

$$\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right). \qquad (66)$$

Криволінійний інтеграл по плоскій кривій l від вектор-функції $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ має вигляд

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i\right). \qquad (67)$$

Як і раніше, умова $\lambda \to 0$ означає, що $n \to \infty$.

Криволінійні інтеграли по координатах мають ті ж найпростіші властивості, що і інтеграли по довжині дуги. Але на відміну від останніх вони залежать від вибору напряму обходу кривої: якщо змінити напрям обходу, то інтеграл змінює знак, тобто

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= -\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

або

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

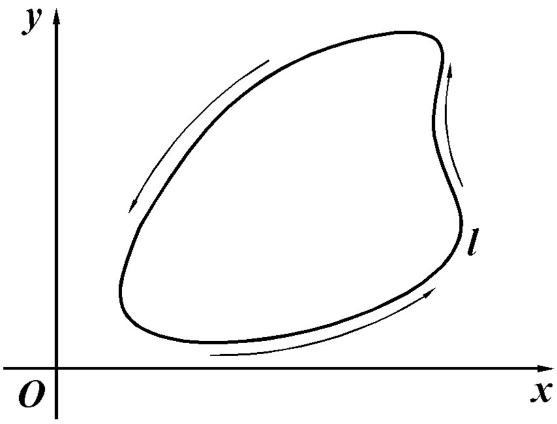


Рис. 11

У випадку замкненої кривої напрям обходу кривої l, як правило, такий, що область, обмежена цією кривою l, залишається завжди зліва (рис. 11). При цьому інтеграл позначається

$$\oint\limits_{l} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

або

$$\oint\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

а напрям обходу називається додатним.

2.4 Обчислення криволінійних інтегралів по координатах

Обчислення криволінійних інтегралів по координатах зводиться до обчислення визначеного інтегралу:

1. Якщо просторова крива l задана параметрично

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

тоді

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt, \quad dz = z'(t)dt,$$

а при переміщенні із точки A в точку B параметр змінюється від t_1 до t_2, то

$$\int\limits_{l} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)dt. \quad (68)$$

2. Якщо плоска крива задана параметрично

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

то по аналогії з формулою (4.4) маємо

$$\int\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt. \quad (69)$$

3. Якщо плоска крива задана рівнянням $y = y(x)$ і при переміщенні із точки A в точку B x змінюється від a до b, то $dy = y'(x)dx$ і тоді

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x)y'(x))]dx \qquad (70)$$

4. Якщо плоска крива задана рівнянням $x = x(y)$ і при переміщенні із точки A в точку B y змінюється від c до d, то $dx = x'(y)dy$ і тоді

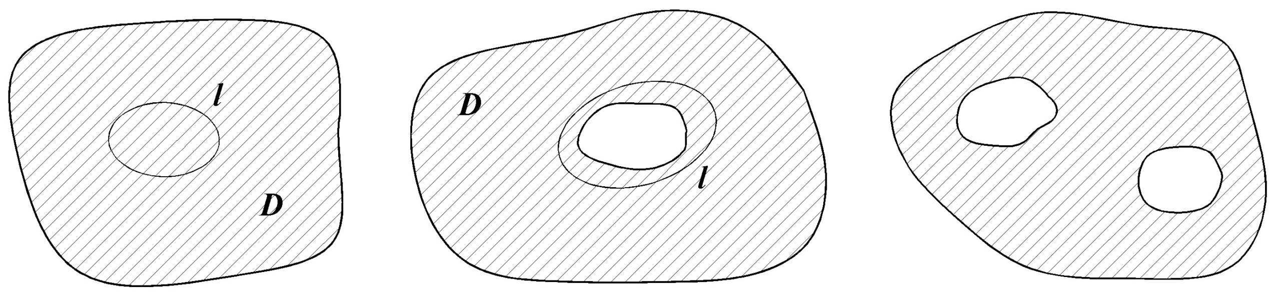
$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]dy \qquad (71)$$

Слід відмітити, що нижня межа визначених інтегралів у правій частині наведених формул для обчислення криволінійних інтегралів другого роду не завжди менша за верхню.

Формула Гріна

Означення. Плоска область D називається однозв'язною, якщо для будь-якого замкненого контуру l, що лежить в ній, обмежена цим контуром область також цілком лежить в області D.

На рис. 12 наведено: а) однозв'язну, б) двозв'язну, в) тризв'язну області.



а) б) в)

Рис. 12

Як показано на рис. 12 однозв'язна область не має „дірок".

Означення. Просторова область V називається однозв'язною, якщо на будь-який замкнений контур l, що лежить в ній, можна натягнути поверхню, що також цілком лежить в області V.

Нехай l – кусково-гладкий контур на площині xOy, а D – обмежена цим контуром замкнена однозв'язна область. В області D задані неперервні функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, що мають в цій області неперервні частинні похідні. Тоді має місце формула Гріна

$$\oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (72)$$

де напрям на контурі l вибрано так, щоб при переміщенні по контуру область D весь час залишалась зліва. Формула Гріна встановлює зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом.

Незалежність криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування.

Розглянемо як плоску так і просторову області.

1. Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в замкненій однозв'язній плоскій області D. Тоді рівносильними між собою є такі твердження:

а) $\int\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де l – будь-який замкнений контур, що лежить в області D;

б) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від форми шляху, що з'єднує точки A і B, якщо AB лежить в області D;

в) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$, тобто вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, яка визначена в області D;

г) рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{73}$$

виконується у всіх точках області D.

При цьому, як наслідок, маємо формулу

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} dU(x,y) = U(x,y)\Big|_A^B = U(B) - U(A) \tag{74}$$

2. Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій однозв'язній просторовій області V. Тоді рівносильними між собою є такі твердження:

а) $\int\limits_{l} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$, де l – будь-який замкнений контур, що лежить в області V;

б) $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ не залежить від форми шляху, що з'єднує точки A і B, якщо AB лежить в області V;

в) $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z)$, тобто вираз $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y,z)$, яка визначена в області V;

г) рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial X}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \tag{75}$$

виконуються у всіх точках області V.

При цьому, як наслідок, маємо формулу

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{AB} dU(x,y,z) = U(x,y,z)\Big|_A^B = U(B) - U(A). \qquad (76)$$

Знаходження функції за її повним диференціалом

На підставі розглянутих вище тверджень можна відшукати функцію, якщо відомий її повний диференціал.

1. Рівність (73) $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ є умовою того, що вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Тоді

$$\int\limits_{M_0M} dU(x,y) = \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy ,$$

або

$$U(x,y) = \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy ,$$

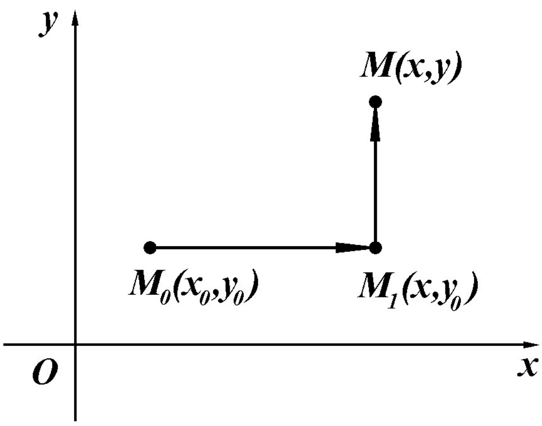


Рис. 13

де $M_0(x_0,y_0), M(x,y)$ є точки області D, причому M - довільна точка, а D – область визначення функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ і криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а тільки від початкової і кінцевої точок цього шляху. Як правило, цей шлях вибирається у вигляді ламаної, відрізки якої паралельні осям координат (рис. 13). Тоді формулу для знаходження функції за її повним диференціалом в цьому випадку можна записати у вигляді

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \qquad (77)$$

2. Якщо виконуються умови (75):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial X}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

то вираз $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y,z)$, тобто

$$dU(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz .$$

Тоді

$$\int\limits_{M_0M} dU(x,y,z) = \int\limits_{M_0M} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

або

$$U(x, y, z) = \int\limits_{M_0M} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz\,,$$

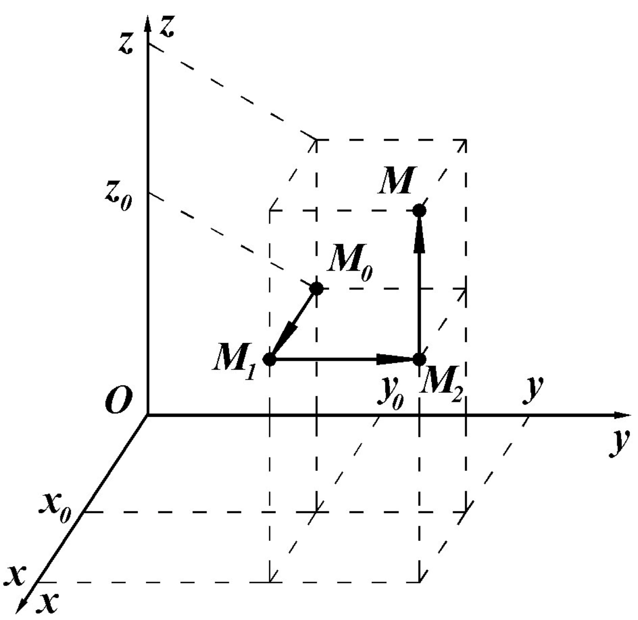


Рис. 14

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ є точками просторової області V, в якій визначені функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Як і раніше, за шлях інтегрування M_0M береться ламана, що з'єднує точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$, відрізки якої паралельні осям координат (рис. 14) і формула для знаходження функції за її повним диференціалом в даному випадку набуває вигляду

$$U(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz \quad (78)$$

Застосування криволінійних інтегралів по координатах

1. Площа області D, обмеженої замкненим контуром l, знаходиться за формулою

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{l} xdy - ydx\,, \quad (79)$$

де напрям обходу l – додатний.

2. Нехай $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ є змінна сила, яка виконує роботу W вздовж шляху l, а функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні на кривій l, тоді

$$W = \int\limits_{l} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (80)$$

або

$$W = \int\limits_{l} P(x, y)dx + Q(x, y)dy\,, \quad (81)$$

де сила

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

виконує роботу вздовж плоского шляху l.

3. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ
3.1. Подвійні інтеграли

Завдання № 1

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	Область D визначається нерівностями: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
2.	Область D визначається нерівністю $x^2 + y^2 \leq 4$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
3.	Область D визначається нерівністю $x^2 + y^2 \leq x$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
4.	Область D визначається нерівностями: $y \geq x$, $x \geq -1$, $y \leq 1$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
5.	Область D обмежена лініями $y = 0$, $y = 2x - x^2$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
6.	Область D визначається нерівностями: $y \geq -2x$, $x \leq 2$, $y \leq 0$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
7.	Область D обмежена лініями $x = 2$, $x = 3$, $y = -1$, $y = 5$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
8.	Область D обмежена лініями $y = 0$, $y = 1 - x^2$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
9.	Область D обмежена лініями $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$, $y = x^2$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
10.	Область D обмежена лініями $y = 0$, $y = 2$, $y = x$, $y = x - 4$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	Область D обмежена лініями $x^2+y^2=2$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
12.	Область D обмежена лініями $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=1$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
13.	Область D обмежена лініями $y=0$, $y=4-x^2$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
14.	Область D обмежена лініями $y=0$, $y=3$, $x+y=1$, $x+y=3$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
15.	Область D обмежена лініями $y=2x$, $x=-3$, $y=2$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
16.	Область D обмежена лініями $y=0$, $x^2+y^2-x=0$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
17.	Область D обмежена лініями $x=0$, $y=x$, $x^2+y^2=2$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
18.	Область D обмежена лініями $x=0$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
19.	Область D обмежена лініями $x=1$, $x=2$, $y=2x$, $y=2x+3$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.
20.	Область D обмежена лініями $x=0$, $x=1$, $y=e^{-x}$, $y=e^x$.	Розставити межі інтегрування для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і зобразити область інтегрування D.

Завдання № 2

Подвійний інтеграл

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \left(x^2+2y\right)dx$	Обчислити I
2.	$I=\iint\limits_D \left(x+y^2\right)dxdy$, де область D обмежена прямими $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=2$.	Обчислити I
3.	$I=\int\limits_3^4 dx\int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$	Обчислити I
4.	$I=\iint\limits_D \left(y^2+2y\right)dxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$.	Обчислити I
5.	$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}$	Обчислити I
6.	$I=\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, де область D обмежена прямими $x=3$, $x=4$, $y=1$, $y=2$.	Обчислити I
7.	$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}$	Обчислити I
8.	$I=\iint\limits_D xydxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.	Обчислити I
9.	$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_1^2 \left(x^2+y^2\right)dx$	Обчислити I
10.	$I=\iint\limits_D xydxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$.	Обчислити I

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xydy$	Обчислити I
12.	$I=\iint\limits_D x^2y^{-2}dxdy$, де область D обмежена прямими $x=2$, $y=x$ і гіперболою $\frac{1}{x}$.	Обчислити I
13.	$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y-1}^{2y} xydx$	Обчислити I
14.	$I=\iint\limits_D e^x dxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $y=1$, $y=2$ і кривою $x=\ln y$.	Обчислити I
15.	$I=\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} (1-2y)dy$	Обчислити I
16.	$I=\iint\limits_D (1+2x)dxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $y=0$, $y=-x+1$.	Обчислити I
17.	$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1 (x+y)dy$	Обчислити I
18.	$I=\iint\limits_D (x-1)dxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $y=0$, $y=x+1$.	Обчислити I
19.	$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_2^5 \left(x^2+1\right)dy$	Обчислити I
20.	$I=\iint\limits_D \left(2x+3y^2\right)dxdy$, де область D - квадрат з вершинами в точках $A(1;1)$, $B(1;2)$, $C(2;2)$, $F(2;1)$.	Обчислити I

Завдання № 3

Подвійний інтеграл в полярних координатах

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\iint\limits_D \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, де область D обмежена колом $x^2+y^2=1$.	Обчислити I
2.	$I=\iint\limits_D ydxdy$, де область D обмежена верхньою половиною дуги кола $x^2+y^2=2x$ і відрізком осі Ox від точки (0;0) до точки (2;0).	Обчислити I
3.	$I=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, де область D обмежена колом $x^2+y^2=\pi^2$.	Обчислити I
4.	$I=\iint\limits_D (1-2x-3y)dxdy$, де область D обмежена колом $x^2+y^2=1$.	Обчислити I
5.	$I=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де D - круг $x^2+y^2\le 2x$.	Обчислити I
6.	$I=\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, де D - круг $x^2+y^2\le x$.	Обчислити I
7.	$I=\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де D - верхня частина круга $x^2+y^2\le 4$.	Обчислити I
8.	$I=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де D - круг $x^2+y^2\le 2y$.	Обчислити I
9.	$I=\iint\limits_D \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, де D - круг $x^2+y^2\le y$.	Обчислити I
10.	$I=\iint\limits_D xdxdy$, де область D обмежена правою половиною дуги кола $x^2+y^2=2y$ і відрізком осі Oy від точки (0;0) до точки (0;2).	Обчислити I

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$I = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, де область D обмежена колом $x^2 + y^2 = \pi^2$.	Обчислити I
12.	$I = \iint\limits_D (2 - 2x - 3y)dxdy$, де D - круг $x^2 + y^2 \le 4$.	Обчислити I
13.	$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, де D - кільце $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.	Обчислити I
14.	$I = \iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$, де D - кільце $\frac{\pi^2}{9} \le x^2 + y^2 \le \pi^2$.	Обчислити I
15.	$I = \iint\limits_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$, де область D обмежена колом $x^2 + y^2 = \pi^2$.	Обчислити I
16.	$I = \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$, де D - півкільце $1 \le x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge 0$.	Обчислити I
17.	$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$, де D - півкруг $x^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$.	Обчислити I
18.	$I = \iint\limits_D xydxdy$, де D - чверть круга $x^2 + y^2 \le 4$, що лежить в першому квадранті.	Обчислити I
19.	$I = \iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$, де D - півкільце $1 \le x^2 + y^2 \le 9$, $x \ge 0$.	Обчислити I
20.	$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, де D - кільце $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.	Обчислити I

Завдання № 4

Застосування подвійного інтеграла

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	Фігура обмежена параболою $y^2 = 2x$ і прямою $y = x$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
2.	Фігура обмежена лініями $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y = 0$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
3.	Фігура обмежена лініями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
4.	Фігура обмежена прямою $y = 2$ і параболою $y = x^2 - 1$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
5.	Фігура обмежена прямими $y = 0$, $x = 1$ і кубічною параболою $y = x^3$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
6.	Фігура обмежена координатними осями, прямою $x = 2$ і експонентою $y = e^x$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
7.	Фігура обмежена прямими $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$ і гіперболою $y = \frac{1}{x}$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
8.	Фігура обмежена параболою $y^2 = x + 2$ і прямою $x = 2$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
9.	Трикутник обмежений відрізками прямих $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$.	Обчислити площу S трикутника і зобразити його
10.	Трикутник обмежений відрізками прямих $x = 0$, $y = 2x$, $y + x = 3$.	Обчислити площу S трикутника і зобразити його

Продовження завдання № 4

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	Трикутник обмежений відрізками прямих $y=-x$, $y=-3x$, $x=-1$.	Обчислити площу S трикутника і зобразити його
12.	Трикутник обмежений відрізками прямих $x=0$, $y=3x$, $y+3x=6$.	Обчислити площу S трикутника і зобразити його
13.	Фігура обмежена лініями $y=0$, $y=4-x^2$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
14.	Паралелограм обмежений відрізками прямих $y=0$, $y=2$, $y=x$, $y=x-4$.	Обчислити площу S паралелограма і зобразити його
15.	Вершини паралелограма знаходяться в точках $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(2;7)$ і $D(1;5)$.	Обчислити площу S паралелограма і зобразити його
16.	Фігура обмежена прямими $x=2$, $y=x$ і гіперболою $y=\frac{1}{x}$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її
17.	Трикутник обмежений відрізками прямих $y=2x$, $y=4x$, $x=1$.	Обчислити площу S трикутника і зобразити його
18.	Трикутник обмежений координатними осями і прямою $2x+y=6$.	Обчислити площу S трикутника і зобразити його
19.	Трикутник обмежений відрізками прямих $x=0$, $y=-2x$, $y+4x=-4$.	Обчислити площу S трикутника і зобразити його
20.	Фігура обмежена прямими $x=0$, $y=2$ і кривою $y=e^x$.	Обчислити площу S фігури і зобразити її

Завдання № 5

Застосування подвійних інтегралів

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	Однорідна пластинка обмежена лініями $y = x^2$ та $y = 1$.	Центр тяжіння цієї пластинки
2.	Пластинка має форму чверті круга: $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, поверхнева густина якої у кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.	Масу цієї пластинки
3.	Однорідна пластинка має форму півкруга: $x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge 0$.	Центр тяжіння цієї пластини
4.	Однорідний прямокутник обмежений прямими $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$.	Момент інерції площі цього прямокутника відносно початку координат
5.	Однорідний рівносторонній трикутник обмежений відрізками прямих $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $x = \sqrt{3}$.	Центр тяжіння цього трикутника
6.	Однорідний прямокутник обмежений прямими $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$.	Статичний момент прямокутника відносно осі Ox
7.	Однорідна пластинка має форму півкруга: $x^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$.	Статичний момент пластинки відносно осі Ox
8.	Квадрат обмежений прямими $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, поверхнева густина якого дорівнює y.	Момент інерції площі цього квадрата відносно вершини, яка співпадає з початком координат
9.	Однорідна пластинка обмежена лініями $y = x^2$ і $y = 2$.	Масу цієї пластинки
10.	Однорідна пластинка має форму круга: $x^2 + y^2 \le 1$.	Момент інерції пластинки відносно центра круга

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	Пластинка обмежена лініями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y\ge 0$, поверхнева густина якої $\gamma(x,y)=x^2+2y^2$.	Масу цієї пластинки
12.	Однорідний прямокутник обмежений прямими $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=3$.	Статичний момент прямокутника відносно осі Oy
13.	Однорідна пластинка має форму чверті круга $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.	Статичний момент пластинки відносно осі Oy
14.	Однорідна пластинка обмежена параболою $y=x^2$ і прямою $y=0$.	Статичний момент пластинки відносно осі Ox
15.	Однорідна пластинка має форму круга $x^2+y^2\le 1$.	Момент інерції пластинки відносно діаметра круга
16.	Пластинка обмежена лініями $y=x^2-1$, $y=0$ поверхнева густина якої $\gamma(x,y)=x^2$.	Масу пластинки
17.	Однорідна пластинка обмежена лініями $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$.	Масу пластинки
18.	Однорідна пластинка обмежена лініями $x^2=2-y$, $y=x$.	Масу пластинки
19.	Однорідна пластинка обмежена лініями $y=x^2$, $y=x$.	Статичний момент відносно осі Oy
20.	Пластинка обмежена лініями $xy=6$, $x+y=7$ поверхнева густина якої $\gamma(x,y)=x$.	Масу пластинки

Завдання № 6
Застосування подвійних інтегралів

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	Тіло обмежене площинами координат, площинами $x=4$, $y=4$ та круговим параболоїдом $z=x^2+y^2+1$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
2.	Тіло обмежене площинами $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$ та $x+y+z=6$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
3.	Тіло обмежене круговим параболоїдом $z=x^2+y^2$ та площинами $z=0$, $y=1$, $y=2x$, $y=6-x$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
4.	Тіло обмежене параболічними циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ та площинами $z=0$, $x+z=6$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
5.	Тіло обмежене параболічним циліндром $z=4-x^2$, координатними площинами та площиною $2x+y=4$ $(x\geq 0)$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
6.	Тіло обмежене гіперболічним параболоїдом $z=x^2-y^2$ та площинами $y=0$, $z=0$, $x=1$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
7.	Тіло обмежене площинами $z=0$, $y+z=2$ і параболічним циліндром $y=x^2$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
8.	Тіло обмежене координатними площинами та площиною $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
9.	Тіло обмежене координатними площинами, площиною $x+y=1$ і параболоїдом $z=x^2+y^2$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy
10.	Тіло обмежене координатними площинами, площиною $2x+3y-12=0$ і параболічним циліндром $z=\frac{1}{2}y^2$.	Об’єм тіла v та зобразити проекцію тіла на площину xOy

Продовження завдання № 6

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	Тіло обмежене площинами $z=0$, $y=1$, круговим параболоїдом $z=x^2+y^2$ та параболічним циліндром $y=x^2$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
12.	Тіло обмежене круговим циліндром $x^2+y^2=1$, координатними площинами та площиною $z+x=1$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
13.	Тіло обмежене круговим циліндром $x^2+y^2=1$ та площинами $z=0$, $x+y+z=3$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
14.	Тіло обмежене круговим циліндром $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, гіперболоїдом $z=xy$ та площиною $z=0$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
15.	Тіло обмежене площинами $z=0$, $x=0$, $2x-y=0$, $x+y=9$ та параболічним циліндром $z=x^2$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
16.	Тіло обмежене параболічними циліндрами $z=(x-1)^2$, $y^2=x$ та площиною $z=0$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
17.	Тіло обмежене параболічним $z=4-x^2$ та круговим $x^2+y^2=4$ циліндрами і площиною $z=0$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
18.	Тіло обмежене координатними площинами, площиною $x+y=1$ та параболічним циліндром $z=y^2+1$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
19.	Тіло обмежене координатними площинами, площиною $x+y=1$ та еліптичним параболоїдом $z=x^2+3y^2$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy
20.	Тіло обмежене площинами $x=0$, $z=0$, $2x+3y=6$ та параболічним циліндром $z=y^2$.	Об'єм тіла V та зобразити проекцію тіла на площину xOy

Завдання № 7

3.2 Потрійні інтеграли

Потрійний інтеграл в декартових координатах

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\iiint\limits_{v} x dv$; область v визначається нерівностями $0\le x\le 2$, $1\le y\le 2$, $0\le z\le 1$.	Обчислити I
2.	$I=\iiint\limits_{v} y dv$; область v визначається нерівностями $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, $1\le z\le 2$.	Обчислити I
3.	$I=\iiint\limits_{v} z dv$; область v визначається нерівностями $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 2$.	Обчислити I
4.	$I=\iiint\limits_{v} x^2 dv$; область v визначається нерівностями $0\le x\le 3$, $1\le y\le 2$, $0\le z\le 1$.	Обчислити I
5.	$I=\iiint\limits_{v} y^2 dv$; область v визначається нерівностями $0\le x\le 1$, $0\le y\le 3$, $1\le z\le 2$.	Обчислити I
6.	$I=\iiint\limits_{v} z^2 dv$; область v визначається нерівностями $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 3$.	Обчислити I
7.	$I=\iiint\limits_{v} xy dv$; область v визначається нерівностями $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $1\le z\le 2$.	Обчислити I
8.	$I=\iiint\limits_{v} xz dv$; область v визначається нерівностями $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 2$.	Обчислити I
9.	$I=\iiint\limits_{v} yz dv$; область v визначається нерівностями $1\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 2$.	Обчислити I
10.	$I=\iiint\limits_{v} x^2 y dv$; область v визначається нерівностями $0\le x\le 3$, $0\le y\le 2$, $1\le z\le 2$.	Обчислити I

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$I=\iiint\limits_{v} x^2 z dv$; область $_v$ визначається нерівностями $0 \le x \le 3$, $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$.	Обчислити I
12.	$I=\iiint\limits_{v} xy^2 dv$; область v визначається нерівностями $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $1 \le z \le 2$.	Обчислити I
13.	$I=\iiint\limits_{v} xz^2 dv$; область v визначається нерівностями $0 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.	Обчислити I
14.	$I=\iiint\limits_{v} y^2 z dv$; область v визначається нерівностями $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 2$.	Обчислити I
15.	$I=\iiint\limits_{v} yz^2 dv$; область v визначається нерівностями $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.	Обчислити I
16.	$I=\iiint\limits_{v} xyz dv$; область v визначається нерівностями $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$.	Обчислити I
17.	$I=\iiint\limits_{v} (x+y+z) dv$; область v визначається нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 2$.	Обчислити I
18.	$I=\iiint\limits_{v} (x+y) dv$; область v визначається нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$.	Обчислити I
19.	$I=\iiint\limits_{v} (x+z) dv$; область v визначається нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 2$.	Обчислити I
20.	$I=\iiint\limits_{v} (y+z) dv$; область v визначається нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 2$.	Обчислити I

Завдання № 8

Потрійний інтеграл

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y xyzdz$	Обчислити I
2.	$I=\int_0^3\int_0^2\int_2^5 x^2y^2zdzdydx$	Обчислити I
3.	$I=\int_0^2 dx\int_0^x dy\int_0^{y^2} xydz$	Обчислити I
4.	$I=\int_0^2\int_0^{x-1}\int_2^2 (x+1)dzdydx$	Обчислити I
5.	$I=\int_1^2 dx\int_0^x dy\int_0^x (z+y)dz$	Обчислити I
6.	$I=\int_{-1}^1\int_{-x}^0\int_{-x}^0 (z-y)dzdydx$	Обчислити I
7.	$I=\int_0^1 dx\int_0^{1+x} dy\int_1^2 (1-x)dz$	Обчислити I
8.	$I=\int_1^2 dx\int_0^1 dy\int_0^{1+y} (1-y)dz$	Обчислити I
9.	$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x dy\int_1^2 zdz$	Обчислити I
10.	$I=\int_0^1\int_0^x\int_{x^2}^x ydzdxdy$	Обчислити I

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$I=\int_0^1\int_0^x\int_{y^2}^y xdzdydx$	Обчислити I
12.	$I=\int_0^2\int_0^{x-1}\int_2^3 (x+1)dzdydx$	Обчислити I
13.	$I=\int_1^2\int_0^3\int_0^4 (x+y+z)dzdydx$	Обчислити I
14.	$I=\int_1^2 dx\int_0^x dy\int_0^y (2z+2y)dz$	Обчислити I
15.	$I=\int_0^1\int_0^x\int_0^x (z+x)dzdydx$	Обчислити I
16.	$I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dy\int_0^{x+y} (x-y)dz$	Обчислити I
17.	$I=\int_1^2 dx\int_x^{2x} dy\int_y^{2y} zdz$	Обчислити I
18.	$I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dy\int_0^{y^2} zdz$	Обчислити I
19.	$I=\int_0^2 dx\int_0^x dy\int_0^{y-1} (y+1)dz$	Обчислити I
20.	$I=\int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^y ydzdydx$	Обчислити I

Завдання № 9
Потрійний інтеграл в циліндричних та сферичних координатах

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	Тіло обмежене параболоїдом $z=8-x^2-y^2$ та площиною $z=4$.	Обчислити об'єм v цього тіла
2.	Тіло обмежене параболоїдом $12z=x^2+y^2$ та сферою $x^2+y^2+z^2=64$.	Обчислити об'єм v цього тіла
3.	Тіло обмежене циліндром $x^2+y^2=9$ та плоскостями $z=0$, $x+y+z=6$.	Обчислити об'єм v цього тіла
4.	Тіло обмежене параболоїдом $z=x^2+y^2$ та площиною $z=4$.	Обчислити об'єм v цього тіла
5.	Тіло обмежене конусом $z^2=x^2+y^2$ та параболоїдом $z=6-x^2-y^2$.	Обчислити об'єм v цього тіла
6.	Тіло обмежене площиною $z=0$ та циліндрами $z=4-x^2$, $x^2+y^2=4$.	Обчислити об'єм v цього тіла
7.	Тіло обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=4$ та параболоїдом $3z=x^2+y^2$.	Обчислити об'єм v цього тіла
8.	Тіло обмежене параболоїдом $x^2+y^2=2z$, циліндром $x^2+y^2=2x$ і площиною $z=0$.	Обчислити об'єм v цього тіла
9.	Тіло обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=4$, циліндром $x^2+y^2=2x$ і площиною $z=0$.	Обчислити об'єм v цього тіла
10.	Тіло обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=1$ і конусом $z^2=x^2+y^2$ (зовнішній по відношенню до конуса) $(z\geq 0)$.	Обчислити об'єм v цього тіла

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	Тіло обмежене площиною $z=1$ та параболоїдом $z=x^2+y^2$.	Обчислити об'єм v цього тіла
12.	Тіло обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=2z$ і поверхнею вписаного конуса $z^2=x^2+y^2$ з прямим кутом при вершині.	Обчислити об'єм v цього тіла
13.	Тіло обмежене параболоїдом $z=7-x^2-y^2$ та площиною $z=3$.	Обчислити об'єм v цього тіла
14.	Тіло обмежене циліндром $x^2+y^2=4x$, параболоїдом $4z=x^2+y^2$ та площиною $z=0$.	Обчислити об'єм v цього тіла
15.	Тіло зверху обмежене півсферою $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$, знизу – площиною $z=1$, а з боків циліндром $x^2+y^2=16$.	Обчислити об'єм v цього тіла
16.	Тіло зверху обмежене конусом $z^2=x^2+y^2$, а знизу – параболоїдом $2z=x^2+y^2$.	Обчислити об'єм v цього тіла
17.	Тіло обмежене конусом $z^2=x^2+y^2$, циліндром $x^2+y^2=2x$ і площиною $z=0$.	Обчислити об'єм v цього тіла
18.	Тіло обмежене параболоїдами $z=x^2+y^2$, $z=2\left(x^2+y^2\right)$ та площиною $z=8$.	Обчислити об'єм v цього тіла
19.	Тіло обмежене параболоїдом $z=1+x^2+y^2$ та площиною $z=5$.	Обчислити об'єм v цього тіла
20.	Тіло обмежене параболоїдом $z=3-x^2-y^2$ та площиною $z=-1$.	Обчислити об'єм v цього тіла

Завдання № 10
Застосування потрійних інтегралів у механіці та фізиці

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	Тіло має форму куба з стороною, що дорівнює одиниці. Об'ємна густина маси тіла в будь-якій його точці $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.	Знайти масу m цього тіла
2.	Піраміда обмежена координатними площинами та площиною $x + y + z = 1$, об'ємна густина в кожній точці дорівнює абсцисі цієї точки.	Знайти масу m цієї піраміди
3.	Тіло має форму куба з стороною, що дорівнює двом; об'ємна густина електричного заряду тіла $\gamma(x, y) = x + 2y$.	Знайти заряд Q, що зосереджений в об'ємі куба
4.	Тіло має форму паралелепіпеда: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$; об'ємна густина електричного заряду тіла $\gamma(x, y, z) = (2 - x)(3 - y)(2 - z)$	Знайти заряд Q, що зосереджений в об'ємі паралелепіпеда
5.	Тіло має форму паралелепіпеда: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, $1 \le z \le 2$; об'ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = x^2 y^2$	Знайти масу m цього тіла
6.	Однорідне тіло має форму піраміди, обмеженої координатними площинами та площиною $x + y + z = 2$.	Знайти масу m цього тіла
7.	Тіло має форму паралелепіпеда: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$; об'ємна густина маси $\gamma(x, y, z) = xyz$	Знайти масу m цього тіла
8.	Тіло має форму куба з стороною, що дорівнює одиниці, об'ємна густина маси тіла в будь-якій його точці $\gamma(x, y, z) = (x + 1)(2y + 1)(z + 1)$.	Знайти заряд Q, що зосереджений в об'ємі куба
9.	Тіло має форму паралелепіпеда: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$; об'ємна густина електричного заряду тіла $\gamma(x, y) = (1 + 2x)yz$.	Знайти заряд Q, що зосереджений в об'ємі паралелепіпеда
10.	Однорідне тіло має форму кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.	Знайти момент інерції кулі I_o відносно її центру

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	Однорідне тіло обмежене параболоїдом $z=3-x^2-y^2$ і площиною $z=0$.	Знайти координати центру тяжіння цього тіла
12.	Однорідне тіло обмежене сферою $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ та площиною $z=0$.	Знайти центр тяжіння цього тіла
13.	Однорідна піраміда обмежена координатними площинами та площиною $3x+2y+3z=6$.	Знайти масу m піраміди
14.	Тіло має форму паралелепіпеда: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 2$; об'ємна густина тіла в кожній точці дорівнює добутку координат цієї точки.	Знайти масу m тіла
15.	Тіло має форму паралелепіпеда: $0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$; об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=(4-x)(3-y)(2-z)$.	Знайти масу m тіла
16.	Тіло має форму куба з стороною, що дорівнює одиниці. Об'ємна густина маси тіла $\gamma(x,y,z)=x+y+z$	Знайти цент тяжіння тіла
17.	Тіло має форму трикутної призми, обмеженої координатними площинами та площинами $x+y=1,\ z=2$, об'ємна густина тіла в кожній точці дорівнює добутку абсциси і аплікати цієї точки.	Знайти масу m тіла
18.	Однорідна призма обмежена координатними площинами та площинами $3x+2y=6,\ z=3$.	Знайти масу m призми
19.	Тіло має форму піраміди, обмеженої координатними площинами та площиною $x+y+z=2$, об'ємна густина електричного заряду тіла в кожній точці дорівнює абсцисі цієї точки.	Знайти заряд Q, що зосереджений в об'ємі тіла
20.	Тіло має форму призми, обмеженої координатними площинами та площинами $x+y=2,\ z=2$, об'ємна густина електричного заряду тіла в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.	Знайти заряд Q, що зосереджений в об'ємі тіла

Завдання № 11

3.3. Криволінійні інтеграли по довжині дуги

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\int_l y^2dl$; l - відрізок прямої $y=x+1$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
2.	$I=\int_l \left(x^2+y\right)dl$; l - відрізок прямої $y=2x-1$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
3.	$I=\int_l \left(y-x^2\right)dl$; l - відрізок прямої $y=2x+2$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
4.	$I=\int_l \left(x^2-y^2\right)dl$; l - відрізок прямої $y=x-1$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
5.	$I=\int_l (x+y)^2dl$; l - відрізок прямої $y=2x$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
6.	$I=\int_l (y-2x)dl$; l - відрізок прямої $y=4x-2$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
7.	$I=\int_l x(y-x)dl$; l - відрізок прямої $y=x+2$, $0\le x\le 3$.	Обчислити I
8.	$I=\int_l (y+3x)dl$; l - відрізок прямої $y=4-3x$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
9.	$I=\int_l y(x+y)dl$; l - відрізок прямої $y=1-x$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
10.	$I=\int_l (6x-y)^2dl$; l - відрізок прямої $y=3x$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
11.	$I=\int_l (2x+y)^2dl$; l - відрізок прямої $y=x$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
12.	$I=\int_l (x-y)^3dl$; l - відрізок прямої $y=-x$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
13.	$I=\int_l (y+2x)x^2dl$; l - відрізок прямої $y=3-2x$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
14.	$I=\int_l y(y-3x)dl$; l - відрізок прямої $y=3x+1$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
15.	$I=\int_l x(3x+y)dl$; l - відрізок прямої $y=2-3x$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
16.	$I=\int_l \left(y^2-x^2\right)dl$; l - відрізок прямої $y=1-x$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
17.	$I=\int_l \left(3x^2-y\right)dl$; l - відрізок прямої $y=2x-1$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
18.	$I=\int_l \left(y^2+2x^2\right)dl$; l - відрізок прямої $y=x-1$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
19.	$I=\int_l xydl$; l - відрізок прямої $y=3x+2$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
20.	$I=\int_l yx^2dl$; l - відрізок прямої $y=3-4x$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I

Завдання № 12

Криволінійні інтеграли по довжині дуги

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\int\limits_l \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$; l - дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$.	Обчислити I
2.	$I=\int\limits_l \sqrt{1+4y+9xz}dl$; l - дуга кривої $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$.	Обчислити I
3.	$I=\int\limits_l \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$; l - дуга косинусоїди $y=\cos x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$.	Обчислити I
4.	$I=\int\limits_l (x+y-3z)dl$; l - відрізок прямої між точками $A(1;3;-1)$, $B(3;5;-1)$.	Обчислити I
5.	$I=\int\limits_l \sqrt{1+\cos^4 x}dl$; l - дуга тангенсоїди $y=tgx$, $0\le x\le \frac{\pi}{4}$.	Обчислити I
6.	$I=\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$; l - відрізок прямої між точками $O(0;0)$, $A(1;2)$.	Обчислити I
7.	$I=\int\limits_l \sqrt{1+\sin^4 x}dl$; l - дуга кривої $y=ctgx$, $\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2}$.	Обчислити I
8.	$I=\int\limits_l (x^2+y^2+z^2)dl$; l - дуга гвинтової лінії $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3t$, $0\le t\le 2\pi$.	Обчислити I
9.	$I=\int\limits_l \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x}dl$; l - дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le \frac{\pi}{4}$.	Обчислити I
10.	$I=\int\limits_l \frac{dl}{x-y}$; l - відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ між точками $A(0;-2)$, $B(4;0)$.	Обчислити I

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$I=\int\limits_l \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$; l - дуга косинусоїди $y=\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.	Обчислити I
12.	$I=\int\limits_l \sqrt{1+x^8}dl$; l - дуга кривої $5y=x^5$ між точками $A(0;0)$ і $B\left(1;\frac{1}{5}\right)$.	Обчислити I
13.	$I=\int\limits_l \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sin^2 x}dl$; l - дуга косинусоїди $y=\cos x$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$.	Обчислити I
14.	$I=\int\limits_l xy^2dl$; l - відрізок прямої між точками $A(0;0)$, $B(4;3)$.	Обчислити I
15.	$I=\int\limits_l \sin^4 x\cos x dl$; l - дуга кривої $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$.	Обчислити I
16.	$I=\int\limits_l ydl$; l - дуга кривої $y=x^3$ між точками $A(0;0)$ і $B(1;1)$.	Обчислити I
17.	$I=\int\limits_l \cos^4 x\sin x dl$; l - дуга кривої $y=\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.	Обчислити I
18.	$I=\int\limits_l y^2dl$; l - дуга кривої $y=e^x$ між точками $A(0;1)$ і $B(1;e)$.	Обчислити I
19.	$I=\int\limits_l \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$; l - дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.	Обчислити I
20.	$I=\int\limits_l xdl$; l - дуга кривої $y=x^2+1$ між точками $A(0;1)$ і $B(1;2)$.	Обчислити I

Завдання № 13
Застосування криволінійних інтегралів по довжині дуги

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$l:\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 3t \end{cases}$ $-$ *гвинтова лінія*	Знайти довжину дуги $(0 \le t \le 2\pi)$ цієї лінії
2.	$l:\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ - чверть однорідного кола, що лежить в першому квадранті.	Знайти момент інерції I_x, I_y відносно координатних осей
3.	Лінійна густина кривої $y = \ln x$ в кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.	Знайти масу дуги цієї кривої між точками з абсцисами $\sqrt{3}$ і $\sqrt{8}$
4.	$y = -2x + 1$ - однорідна пряма.	Знайти моменти інерції I_x, I_y відносно координатних осей відрізка цієї прямої, що знаходиться між осями координат.
5.	$l:\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$ - чверть однорідного кола, що лежить в першому квадранті.	Знайти координати центру тяжіння
6.	$l:\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ - циклоїда.	Знайти довжину дуги $(0 \le t \le \pi)$ цієї лінії
7.	$l:\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ - чверть однорідного кола, що лежить в першому квадранті.	Знайти момент інерції I_0 відносно початку координат
8.	$2x + y - 1 = 0$ - однорідна пряма.	Знайти момент інерції I_0 відносно початку координат відрізка цієї прямої, що знаходиться між осями координат.
9.	l - відрізок прямої між точками $A(4;1;6)$ і $B(5;3;8)$, лінійна густина якої $\gamma(x,y,z) = 3x + 5y + z + 2$.	Масу цього відрізка
10.	$l:\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$ - чверть кола, що лежить в першому квадранті, лінійна густина якого $\gamma(x,y,z) = y$.	Масу дуги цього кола

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$l:\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$ - циклоїда.	Знайти довжину першої арки цієї циклоїди $(0\le t\le 2\pi)$
12.	$l:\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$ - коло, лінійна густина якого $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$.	Знайти масу цього кола
13.	l - відрізок прямої між точками $A(8;9;3)$ і $B(6;10;5)$, лінійна густина якої $\gamma(x,y,z)=2x+4y-4z+7$.	Знайти масу цього відрізка
14.	$l:\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$ - чверть однорідного кола, що лежить в другому квадранті.	Знайти координати центру тяжіння
15.	$l:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=t\sqrt{3} \end{cases}$ - гвинтова лінія, лінійна густина якої $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$	Знайти масу дуги $(0\le t\le \pi)$ цієї лінії
16.	$l:\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$ - верхнє однорідне півколо.	Знайти моменти інерції $I_x,\ I_y$ відносно координатних осей
17.	l - відрізок прямої між точками $A(1;3;-1)$ і $B(3;5;-1)$, лінійна густина якої $\gamma(x,y,z)=x+2y-3z$.	Знайти масу цього відрізка
18.	$l:\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$ - верхнє однорідне півколо.	Знайти координати центру тяжіння
19.	l - відрізок прямої між точками $O(0;0;0)$ і $A(1;1;1)$, лінійна густина якої $\gamma(x,y,z)=x+y+z$.	Знайти масу цього відрізка
20.	$l:\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$ - верхнє однорідне півколо.	Знайти момент інерції I_0 відносно початку координат

Завдання № 14

3.4. Криволінійні інтеграли по координатах

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\int\limits_l ydx+x^2dy$; l - відрізок прямої $y=6x+2$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
2.	$I=\int\limits_l (2y+1)dx+(2x-1)dy$; l - відрізок прямої $y=1-x$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
3.	$I=\int\limits_l xydx+(y-x)dy$; l - відрізок прямої $y=3x$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
4.	$I=\int\limits_l 3y^2dy-(y-x)dx$; l - відрізок прямої $y=x$, $-1\le x\le 0$.	Обчислити I
5.	$I=\int\limits_l y^2dx-2xdy$; l - відрізок прямої $y=1-x$, $0\le x\le 3$.	Обчислити I
6.	$I=\int\limits_l y^2dy-2xdx$; l - відрізок прямої $y=x+1$, $0\le x\le 3$.	Обчислити I
7.	$I=\int\limits_l (y-2x)dx+\frac{y}{4}dy$; l - відрізок прямої $y=4x-2$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
8.	$I=\int\limits_l ydx-xdy$; l - відрізок прямої $y=3x+5$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I
9.	$I=\int\limits_l 4xdx-ydy$; l - відрізок прямої $y=3-2x$, $0\le x\le 2$.	Обчислити I
10.	$I=\int\limits_l (y+2)dx-3x^2dy$; l - відрізок прямої $y=2x+1$, $0\le x\le 1$.	Обчислити I

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$I=\int_l 2ydx+3x^2dy$; l - відрізок прямої $y=x+3,\ 0\le x\le 1$.	Обчислити I
12.	$I=\int_l 2ydx+3xydy$; l - відрізок прямої $y=x,\ 0\le x\le 1$.	Обчислити I
13.	$I=\int_l x(y-1)dx+\frac{2}{3}ydy$; l - відрізок прямої $y=3x+1,\ 0\le x\le 1$.	Обчислити I
14.	$I=\int_l (y+1)dx-3x^2dy$; l - відрізок прямої $y=2x-1,\ 0\le x\le 2$.	Обчислити I
15.	$I=\int_l (y+x)dx+(y-x)dy$; l - відрізок прямої $y=3x+1,\ 0\le x\le 1$.	Обчислити I
16.	$I=\int_l (y-2)dx+3xdy$; l - відрізок прямої $y=2-x,\ -1\le x\le 0$.	Обчислити I
17.	$I=\int_l x^2dx-xydy$; l - відрізок прямої $y=4x,\ -1\le x\le 0$.	Обчислити I
18.	$I=\int_l 3y^2dx+6xdy$; l - відрізок прямої $y=x-1,\ 0\le x\le 1$.	Обчислити I
19.	$I=\int_l (1+y)dx+xydy$; l - відрізок прямої $y=x-1,\ 0\le x\le 3$.	Обчислити I
20.	$I=\int_l (6x-y)^2dx+2ydy$; l - відрізок прямої $y=3x,\ 0\le x\le 1$.	Обчислити I

Завдання № 15
Криволінійні інтеграли по координатах

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\int\limits_l 2xydx-x^2dy$; де l - відрізок прямої від точки $O(0;0)$, до точки $A(2;1)$.	Обчислити I
2.	$I=\int\limits_l \cos ydx-\sin xdy$; де l - відрізок прямої від точки $A(2;-2)$ до точки $B(-2;2)$.	Обчислити I
3.	$I=\int\limits_l 2xydx-x^2dy$; де l - дуга параболи $y=\frac{1}{4}x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$.	Обчислити I
4.	$I=\int\limits_l ydx+xdy$; де l - чверть кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, що лежить в першому квадранті і обхід якої відбувається проти годинникової стрілки.	Обчислити I
5.	$I=\int\limits_l 2xydx-x^2dy$; де l - дуга параболи $x=2y^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$.	Обчислити I
6.	$I=\int\limits_l xdx+ydy+(x+y-1)dz$; де l - відрізок прямої від точки $A(1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$.	Обчислити I
7.	$I=\int\limits_l (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$; де l - дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.	Обчислити I
8.	$I=\int\limits_l \frac{y}{x}dx+xdy$; де l - дуга кривої $y=\ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.	Обчислити I
9.	$I=\int\limits_l \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$; де l - перша чверть кола $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, обхід якої відбувається проти годинникової стрілки.	Обчислити I
10.	$I=\int\limits_l xy(dx+dy)$; де l - дуга еліпса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ від $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$.	Обчислити I

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	$I=\int\limits_l ydx-xdy$; де l - еліпс $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, обхід якого відбувається в додатному напрямі.	Обчислити I
12.	$I=\int\limits_l x^2ydx+y^2xdy$; де l - дуга кривої $x=t$, $y=t^3$ від $t_1=0$ до $t_2=1$.	Обчислити I
13.	$I=\int\limits_l \left(x^2-y^2\right)dx$; де l - дуга параболи $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$.	Обчислити I
14.	$I=\int\limits_l xydx+y^2dy$; де l - дуга кривої $x=t^2$, $y=t$ від $t_1=0$ до $t_2=1$.	Обчислити I
15.	$I=\int\limits_l (x+y)dx+2xydy$; де l - відрізок прямої від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.	Обчислити I
16.	$I=\int\limits_l xydx-(y-x)dy$; де l - дуга параболи $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.	Обчислити I
17.	$I=\int\limits_l \left(x^2+y^2\right)dx$; де l - дуга параболи $y=3x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;3)$.	Обчислити I
18.	$I=\int\limits_l \left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$; де l - дуга кубічної параболи $y=x^3$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$.	Обчислити I
19.	$I=\int\limits_l (x+y)dx+(x-y)dy$; де l - дуга кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ від $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{\pi}{2}$.	Обчислити I
20.	$I=\int\limits_l \left(x^2-y^2\right)dy$; де l - дуга кубічної параболи $y=2x^3$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.	Обчислити I

Завдання № 16

Криволінійні інтеграли по координатах. Знаходження функції $u(x,y)$за її повним диференціалом.

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	$I=\int_{(0;0)}^{(2;4)}(2x+3y)dx+(3x-4y)dy$	$u(x,y)$ та I
2.	$I=\int_{(0;0)}^{(1;1)}(4x^3-3y^2+5y)dx+(5x-6xy-4y)dy$	$u(x,y)$ та I
3.	$I=\int_{(0;0)}^{(2;2)}(xy+x+y)dx+\left(\frac{1}{2}x^2+x-y\right)dy$	$u(x,y)$ та I
4.	$I=\int_{(0;0)}^{(1;1)}(x+y)dx+(x-y)dy$	$u(x,y)$ та I
5.	$I=\int_{(0;0)}^{(3;3)}(x^2+1)dx+(y^2-1)dy$	$u(x,y)$ та I
6.	$I=\int_{(0;0)}^{(5;1)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$	$u(x,y)$ та I
7.	$I=\int_{(0;0)}^{(1;2)}(3x^2y+2x)dx+(x^3+4y)dy$	$u(x,y)$ та I
8.	$I=\int_{(0;0)}^{(2;1)}2xydx+x^2dy$	$u(x,y)$ та I
9.	$I=\int_{(-2;0)}^{(2;0)}x^2dx+y^2dy$	$u(x,y)$ та I
10.	$I=\int_{(0;0)}^{(-1;1)}(2x+y)dx+(x+2y)dy$	$u(x,y)$ та I

	Умова	*Що зробити*
11.	$I=\int\limits_{(1;0)}^{(0;1)} x\left(x^2-y^2\right)dx-y\left(x^2-y^2\right)dy$	$u(x,y)$ та I
12.	$I=\int\limits_{(0;0)}^{\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)} \cos x\cos y dx-\sin x\sin y dy$	$u(x,y)$ та I
13.	$I=\int\limits_{(-1;1)}^{(-2;1)} (2xy+2x+y)dx+\left(x^2+x\right)dy$	$u(x,y)$ та I
14.	$I=\int\limits_{(1;1)}^{(2;2)} \left(3x^2-3y\right)dx+\left(3y^2-3x\right)dy$	$u(x,y)$ та I
15.	$I=\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} \left(3x^2y-y^3\right)dx+\left(x^3-3xy^2\right)dy$	$u(x,y)$ та I
16.	$I=\int\limits_{(0;0)}^{(1;2)} \left(4xy+3y^2+3x^2\right)dx+\left(2x^2+6xy\right)dy$	$u(x,y)$ та I
17.	$I=\int\limits_{(2;1)}^{(1;2)} y^2dx+2xydy$	$u(x,y)$ та I
18.	$I=\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \left(x^2+y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy$	$u(x,y)$ та I
19.	$I=\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} \left(2xy^3+3x^2y^2\right)dx+\left(3x^2y^2+2yx^3\right)dy$	$u(x,y)$ та I
20.	$I=\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} \left(x^2-2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy$	$u(x,y)$ та I

Завдання № 17
Застосування криволінійних інтегралів по координатах

№	*Умова*	*Що зробити*
1.	Сила $\vec{F}(x, y) = (xy,\ x + y)$ переміщує матеріальну точку по параболі $y = x^2$ із початку координат в точку $A(1;1)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
2.	Під дією сили $F\left(\overrightarrow{x, y}\right) = xy\vec{i} + (x + y)j$ матеріальна точка рухається по прямій $y = x$ із точки $O(0;0)$ в точку $A(1;1)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
3.	Фігура обмежена еліпсом $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$	Знайти площу фігури
4.	Під дією сили $\vec{F}(x, y) = (x + y,\ x - y)$ матеріальна точка рухається по параболі $y = x^2$ із точки $A(-1;1)$ в точку $B(1;1)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
5.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x, y) = \left(x, \dfrac{1}{y^2}\right)$ рухається по гіперболі $xy = 1$ із точки $A(-1;1)$ в точку $B\left(4; \dfrac{1}{4}\right)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
6.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x, y) = \left(x^2 + y,\ x + y^2\right)$ рухається по відрізку прямої із точки $A(-1;1)$ в точку $B(0;2)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
7.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x, y) = \left(\sin x, -y^2\right)$ рухається по дузі кривої $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
8.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x, y, z) = \left(y,\ x^2, z\right)$ рухається по дузі просторової кривої $x = t$, $y = t^3$, $z = t^5$, $0 \le t \le 1$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
9.	Під дією сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)j$ матеріальна точка переміщується по ламаній, що проходить через точки $O(0;0)$, $B(1;0)$ і $A(1;1)$, відрізки якої паралельні осям координат.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
10.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x, y) = \left(x^2,\ xy^2\right)$ рухається вздовж відрізка прямої із точки $A(0;1)$ в точку $B(1;2)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$

№	*Умова*	*Що зробити*
11.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x,y)=\left(xy-x,\dfrac{x^2}{2}\right)$ рухається по дузі кривої $y=2\sqrt{x}$ із точки $A(0;0)$ в точку $B(1;2)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
12.	Під дією сили $\vec{F}=xy\vec{i}+(x+y)j$ матеріальна точка переміщується по ламаній, що проходить через точки $O(0;0)$, $C(0;1)$ і $A(1;1)$, відрізки якої паралельні координатним осям.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
13.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x,y)=\left(y^2,-2xy\right)$ рухається по дузі кола $x^2+y^2=9$ із точки $A(0;3)$ в точку $B(3;0)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
14.	Фігура обмежена астроїдою $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$.	Знайти площу фігури
15.	Під дією сили $F(x,y)=\cos x\vec{i}+\vec{y}\vec{j}$ матеріальна точка переміщується по дузі кривої $y=\sin x$ від $x_1=0$ до $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
16.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x,y,z)=(z,x,y)$ рухається по дузі кривої $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ від точки $O(0;0;0)$ в точку $A(1;1;1)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
17.	Під дією сили $\vec{F}(x,y,z)=\left(2xy;-x^2;z\right)$ матеріальна точка рухається по відрізку прямої від точки $O(0;0;0)$ в точку $A(2;1;1)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
18.	Під дією сили $\vec{F}(x,y)=(x+y;\ x-y)$ матеріальна точка рухається по першій чверті кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $t_1=\dfrac{\pi}{2}$, $t_2=0$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
19.	Під дією сили $\vec{F}(x,y,z)=\left(y+z,\ z^2,\ x\right)$ матеріальна точка рухається по відрізку прямої від точки $A(2;1;0)$ до точки $B(3;2;1)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$
20.	Матеріальна точка під дією сили $\vec{F}(x,y,z)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ рухається по відрізку прямої від точки $O(0;0;0)$ до точку $A(-2;4;5)$.	Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F}$

4. ВІДПОВІДІ НА ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

4.1 Подвійні інтеграли

Завдання № 1.

1) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$; 2) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$; 3) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$; 4) $\int_{-1}^1 dx \int_x^1 f(x,y)dy$;

5) $\int_0^2 dx \int_{2x-x^2}^0 f(x,y)dy$; 6) $\int_0^2 dx \int_{-2x}^0 f(x,y)dy$; 7) $\int_2^3 dx \int_{-1}^5 f(x,y)dy$; 8) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x,y)dy$;

9) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,y)dy$; 10) $\int_0^2 dy \int_y^{y+4} f(x,y)dx$; 11) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$; 12) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;

13) $\int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x,y)dy$; 14) $\int_0^3 dy \int_{1-y}^{3-y} f(x,y)dx$; 15) $\int_{-3}^1 dx \int_{2x}^2 f(x,y)dy$; 16) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$;

17) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$; 18) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$; 19) $\int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy$; 20) $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)dy$.

Завдання № 2.

1) $\frac{14}{3}$; 2) 7; 3) $\ln\frac{25}{24}$; 4) $\frac{20}{3}$; 5) $\frac{\pi}{12}$; 6) $\ln\frac{25}{24}$; 7) $\frac{9}{4}$; 8) $\frac{1}{24}$; 9) $\frac{8}{3}$; 10) 1; 11) $\frac{15}{4}$; 12) $\frac{9}{4}$; 13) $\frac{11}{24}$; 14) $\frac{1}{2}$; 15) -6; 16) $\frac{5}{6}$; 17) 2; 18) $\frac{2}{3}$; 19) 10; 20) 10.

Завдання № 3.

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $4\pi^2$; 4) π; 5) $\frac{3}{2}\pi$; 6) $\frac{\pi}{3}$; 7) $\frac{16}{3}$; 8) $\frac{3}{2}\pi$; 9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $\frac{2}{3}$; 11) 4π; 12) 8π; 13) $\frac{14}{3}\pi$; 14) 3π; 15) π^3; 16) 8; 17) $\frac{1}{2}\pi\ln 2$; 18) 2; 19) 8; 20) $\frac{15}{2}\pi$.

Завдання № 4.

1) $S=\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x}}^x dy = \frac{2}{3}$ (кв. од.); 2) $S=\int_0^2 dy \int_{y^2/4}^{3-y} dx = \frac{10}{3}$ (кв. од.);

3) $S=\int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy = \left(\sqrt{2}-1\right)$ (кв. од.); 4) $S=2\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2-1}^2 dy = 4\sqrt{3}$ (кв. од.);

5) $S=\int_0^1 dx\int_0^{x^3} dy=\frac{1}{4}$ (кв. од.); 6) $S=\int_0^2 dx\int_0^{e^x} dy=\left(e^2-1\right)$ (кв. од.); 7) $S=\int_1^3 dy\int_0^{1/y} dx=\ln 3$ (кв. од.); 8) $S=2\int_0^2 dy\int_{y^2-2}^{2} dx=\frac{32}{3}$ (кв. од.); 9) $S=\int_0^2 dx\int_x^{2x} dy=2$ (кв. од.);

10) $S=\int_0^1 dx\int_{2x}^{3-x} dy=\frac{3}{2}$ (кв. од.); 11) $S=\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^{-3x} dy=1$ (кв. од.); 12) $S=\int_0^1 dx\int_{3x}^{6-3x} dy=3$ (кв. од.); 13) $S=2\int_0^2 dx\int_0^{4-x^2} dy=\frac{32}{3}$ (кв. од.); 14) $S=\int_0^2 dy\int_y^{y+4} dx=8$ (кв. од.);

15) $S=\int_1^2 dx\int_{2x}^{2x+3} dy=3$ (кв. од.); 16) $S=\int_1^2 dx\int_{1/x}^{x} dy=\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right)$ (кв. од.); 17) $S=\int_0^1 dx\int_{2x}^{4x} dy=1$ (кв. од.); 18) $S=\int_0^3 dx\int_0^{6-2x} dy=9$ (кв. од.); 19) $S=\int_{-2}^0 dx\int_{-4x-4}^{-2x} dy=4$ (кв. од.); 20) $S=\int_0^{\ln 2} dx\int_{e^x}^{2} dy=2\ln 2-1$ (кв. од.)

Завдання № 5.

1) $x_c=0,\ y_c=\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $x_c=0,\ y_c=\frac{8}{3\pi}$; 4) 26; 5) $x_c=\frac{2}{\sqrt{3}},\ y_c=0$; 6) 9; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{40}{8}$; 9) $\frac{8\sqrt{3}}{2}$; 10) $\frac{\pi}{2}$; 11) $\frac{45\pi}{8}$; 12) 6; 13) $\frac{1}{3}$; 14) $\frac{16\sqrt{2}}{5}$; 15) $\frac{\pi}{4}$; 16) $\frac{32}{105}$; 17) 2; 18) 5; 19) $\frac{9}{4}$; 20) $\frac{125}{6}$.

Завдання № 6

1) $v=\int_0^4 dx\int_0^4\left(x^2+y^2+1\right)dy=\frac{560}{3}$ (куб. од.); 2) $v=\int_0^6 dy\int_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{2}{3}(6-y)}(6-x-y)dx=12$ (куб. од.);

3) $v=\int_1^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{6-y}\left(x^2+y^2\right)dx=\frac{2511}{32}$ (куб. од.); 4) $v=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=\frac{48\sqrt{6}}{5}$ (куб. од.);

5) $v=\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}\left(4-x^2\right)dy=\frac{40}{3}$ (куб. од.); 6) $v=\int_0^1 dx\int_0^x\left(x^2-y^2\right)dy=\frac{1}{6}$ (куб. од.);

7) $v=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_{x^2}^{2}(2-y)dy=\frac{32\sqrt{2}}{15}$ (куб. од.); 8) $v=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}\frac{12-6x-4y}{3}dy=4$ (куб. од.);

9) $v=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{1}{6}$ (куб. од.); 10) $v=\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}}\frac{1}{2}y^2dy=16$ (куб. од.);

11) $v=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{88}{105}$ (куб. од.); 12) $v=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1(1-\rho\cos\varphi)\rho d\rho=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$ (куб. од.); 13) $v=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1(3-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\rho d\rho=3\pi$ (куб. од.);

14) $v=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1(1+\rho\cos\varphi)(1+\rho\sin\varphi)\rho d\rho=\pi$ (куб. од.); 15) $v=\int_0^3 dx\int_{2x}^{9-x}x^2dy=\frac{81}{4}$ (куб. од.); 16) $v=\int_{-1}^1 dy\int_{y^2}^1(x-1)^2dx=\frac{32}{105}$ (куб. од.); 17) $v=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2\left(4-\rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho=12\pi$ (куб. од.); 18) $v=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(y^2+1\right)dy=\frac{7}{12}$ (куб. од.); 19) $v=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+3y^2\right)dy=\frac{1}{3}$ (куб. од.); 20) $v=\int_0^3 dx\int_{2x}^{\frac{6-2x}{3}}y^2dy=2$ (куб. од.)

4.2 Потрійний інтеграл

Завдання № 7.

1) 2; 2) 2; 3) 2; 4) 9; 5) 9; 6) 9; 7) 4; 8) 4; 9) 4; 10) 18; 11) 18; 12) 18; 13) 18; 14) 18; 15) 18; 16) 8; 17) 4; 18) 3; 19) 3; 20) 3.

Завдання № 8.

1) $\frac{1}{48}$; 2) $\frac{728}{3}$; 3) $\frac{32}{15}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{15}{4}$; 6) 0; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\frac{1}{40}$; 11) $\frac{7}{120}$; 12) $\frac{2}{3}$; 13) 60; 14) $\frac{15}{4}$; 15) $\frac{3}{8}$; 16) $\frac{16}{105}$; 17) $\frac{105}{8}$; 18) $\frac{1}{110}$; 19) $-\frac{2}{3}$; 20) $\frac{4}{3}$.

Завдання № 9.

1) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_4^{8-\rho^2}dz=8\pi$ (куб. од.); 2) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{48}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{12}}^{\sqrt{64-\rho^2}}dz=\frac{608}{3}$ (куб. од.);

3) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho d\rho\int_0^{6-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}dz=54\pi$ (куб. од.); 4) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho^2}^4 dz=8\pi$ (куб. од.);

5) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_\rho^{6-\rho^2}dz=\frac{32}{3}\pi$ (куб. од.); 6) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_0^{4-\rho^2\cos^2\varphi}dz=12\pi$ (куб. од.);

7) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=\frac{19}{6}\pi$ (куб. од.); 8) $v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho\int_0^{\frac{\rho^2}{2}}dz=\frac{3\pi}{4}$ (куб. од.);

9) $v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=\frac{8}{9}(3\pi-4)$ (куб. од.); 10) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^1\rho d\rho=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (куб. од.); 11) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 dz=\frac{\pi}{2}$ (куб. од.); 12) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho=\pi$ (куб. од.); 13) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_3^{7-\rho^2}dz=8\pi$ (куб. од.); 14) $v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho d\rho\int_0^{\frac{\rho^2}{4}}dz=24\pi$

(куб. од.); 15) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\int_1^{\sqrt{25-\rho^2}}dz=\frac{148}{3}\pi$ (куб. од.); 16) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{\rho}dz=\frac{4}{3}\pi$

(куб. од.); 17) $v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho\int_0^{\rho}dz=\frac{32}{9}\pi$ (куб. од.);

18) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_2^{\sqrt{8}}\rho d\rho\int_{\rho}^{2\rho}dz=\frac{16}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)\pi$ (куб. од.); 19) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_{1+\rho^2}^{5}dz=8\pi$ (куб.

од.); 20) $v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_{-1}^{3-\rho^2}dz=8\pi$ (куб. од.)

Завдання № 10.

1) $m=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x+y+z)dzdydx=\frac{2}{3}$; 2) $m=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz=\frac{1}{24}$;

3) $Q=\int_0^2\int_0^2\int_0^2(x+2y)dzdydx=24$; 4) $Q=\int_0^1dx\int_0^2dy\int_0^1(2-x)(3-y)(2-z)dz=\frac{99}{8}$;

5) $m=\int_0^3dx\int_0^2dy\int_1^2x^2y^2dz=24$; 6) $m=\int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y}dzdydx=\frac{4}{3}$; 7) $m=\int_0^1\int_0^2\int_0^3xyzdzdydx=\frac{9}{2}$;

8) $Q=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x+1)(2y+1)(z+1)dzdydx=\frac{9}{2}$; 9) $Q=\int_0^1\int_0^2\int_0^2(1+2x)yzdzdydx=8$;

10) $I_0=\iiint\limits_v\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1\rho^4d\rho=\frac{4\pi}{5}$; 11) $m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_0^{3-\rho^2}dz$,

$Z_c=\frac{\iiint\limits_v \gamma zdxdydz}{m}=1$ $x_c=y_c=0,\ z_c=1$;

12) $I_c=\frac{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\rho\cos\theta\rho^2\sin\theta d\rho\right)d\theta\right)d\varphi}{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\rho^2\sin\theta d\rho\right)d\theta\right)d\varphi}$ $x_c=y_c=0,\ z_c=\frac{3}{8}$; 13) $m=\int_0^2dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}dy\int_0^{\frac{6-3x-2y}{3}}dz=2$;

14) $m=\int_0^2dx\int_0^1dy\int_0^2xyzdz=2$; 15) $m=\int_0^3\int_0^2\int_0^1(4-x)(3-y)(2-z)dzdydx=45$;

16) $x_c=y_c=z_c=\frac{5}{9}$; 17) $m=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^2xzdz=\frac{1}{3}$; 18) $m=\int_0^2dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}dy\int_0^3dz=9$;

19) $Q=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\int\limits_0^{2-x-y} xdx=\frac{2}{3}$; 20) $Q=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\int\limits_0^2 ydz=\frac{8}{3}$.

4.3 Криволінійні інтеграли по довжині дуги

Завдання № 11.

1) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$; 4) $2\sqrt{2}$; 5) $3\sqrt{5}$; 6) 0; 7) $9\sqrt{2}$; 8) $4\sqrt{10}$; 9) 0; 10) $3\sqrt{10}$; 11) $24\sqrt{2}$; 12) $2\sqrt{2}$; 13) $8\sqrt{5}$; 14) $8\sqrt{10}$; 15) $\sqrt{10}$; 16) 0; 17) $\sqrt{5}$; 18) $\sqrt{2}$; 19) $2\sqrt{10}$; 20) $-8\sqrt{17}$.

Завдання № 12.

1) $\frac{1}{2}\pi$; 2) $\frac{62}{15}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $30\sqrt{2}$; 5) $\frac{10+\pi}{8}$; 6) $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$; 7) $\frac{10+\pi}{8}$; 8) $8\pi\sqrt{13}\left(1+3\pi^2\right)$; 9) $\frac{4+\pi}{4}$; 10) $\sqrt{5}\ln 2$; 11) $\frac{\pi}{4}$; 12) $\frac{10}{9}$; 13) $\frac{4+\pi}{4}$; 14) 45; 15) $\frac{3}{16}$; 16) $\frac{10\sqrt{10}-1}{54}$; 17) $\frac{3}{16}$; 18) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{\left(1+e^2\right)^3}-1\right)$; 19) $\frac{2}{3}$; 20) $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$.

Завдання № 13.

1) 10π; 2) $I_x=I_y=2\pi$; 3) $\frac{19}{3}$; 4) $I_x=\frac{\sqrt{5}}{6},\ I_y=\frac{\sqrt{5}}{24}$; 5) $x_c=y_c=\frac{6}{\pi}$; 6) 4; 7) 4π; 8) $\frac{5\sqrt{5}}{24}$; 9) $\frac{185}{2}$; 10) 9; 11) 12; 12) 16π; 13) 129; 14) $x_c=-\frac{4}{\pi},\ y_c=\frac{4}{\pi}$; 15) $2\pi\left(1+\pi^2\right)$; 16) $I_x=I_y=4\pi$; 17) $12\sqrt{2}$; 18) $x_c=0,\ y_c=\frac{4}{\pi}$; 19) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 20) 8π.

4.4 Криволінійні інтеграли по координатах

Завдання № 14.

1) 7; 2) 0; 3) 4; 4) 2; 5) 12; 6) 12; 7) -1; 8) 5; 9) -12; 10) 2; 11) 8; 12) 2; 13) 6; 14) -12; 15) 9; 16) 2; 17) -5; 18) 4; 19) 9; 20) 10.

Завдання № 15.

1) $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sin 2$; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{12}{5}$; 6) 13; 7) $-\frac{14}{15}$; 8) $e-\frac{1}{2}$; 9) $\frac{\pi}{2}$; 10) -2; 11) -12π; 12) $\frac{7}{15}$; 13) $-\frac{22}{5}$; 14) $\frac{11}{15}$; 15) 28; 16) $\frac{5}{12}$; 17) $\frac{32}{15}$; 18) $\frac{388}{3}$; 19) -4;

20) $-\frac{22}{15}$.

Завдання № 16.

1) $x^2+3xy-2y^2+c,\ -4$; 2) $x^4+5xy-3xy^2-2y^2+c, 1$;

3) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2y+xy-\frac{1}{2}y^2+c,\ 8$; 4) $\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+c,\ 1$;

5) $\frac{1}{3}x^3+x+\frac{1}{3}y^3-y+c,\ 18$; 6) $\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5+c,\ 674$; 7) $x^2+x^3y+2y^2+c, 11$;

8) $x^2y+c, 4$; 9) $\frac{1}{3}\left(x^3+y^3\right)+c, \frac{16}{3}$; 10) $x^2+xy+y^2+c, 1$;

11) $\frac{1}{4}\left(x^4+y^4\right)-\frac{1}{2}y^2x^2+c, 0$; 12) $\sin x \cos y+c,\ \frac{1}{4}$; 13) $x^2+x^2y+xy+c,\ 7$;

14) $x^3+y^3-3xy+c,\ 5$; 15) $x^3y-xy^3+c,\ 0$; 16) $x^3+2x^2y+3xy^2+c,\ 17$;

17) $xy^2+c,\ 2$; 18) $\frac{1}{3}\left(x^3+y^3\right)+xy+c,\ 0$; 19) $x^2y^3+y^2x^3+c,\ 2$;

20) $\frac{1}{3}\left(x^3+y^3\right)-2xy+c, -\frac{4}{3}$.

Завдання № 17.

1) $\frac{17}{12}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 6π; 4) 2; 5) $\frac{9}{2}$; 6) $\frac{11}{3}$; 7) $\frac{8}{3}$; 8) $\frac{27}{20}$; 9) $\frac{3}{2}$; 10) $\frac{7}{4}$; 11) $\frac{1}{2}$; 12) 1; 13) 36; 14) $\frac{3}{2}\pi$; 15) $\frac{3}{2}$; 16) $\frac{91}{60}$; 17) $\frac{1}{2}$; 18) 8; 19) $\frac{29}{6}$; 20) $\frac{46}{3}$.

5. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. Посібник. Ч.1/ За ред. проф. Г.Л.Кулініча, - К.: Либідь, 2005.
2. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. Посібник. Ч.2/ За ред. проф. І.П.Васильченка, - К.: Либідь, 2005.

Додаткова література

3. Общий курс математического анализа в сжатом изложении. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 2002.
4. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1999.

5. Данко Е.П., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах – М.: Высш. шк., 2006. – Ч. 1, 2.

Перелік методичних вказівок

6. Методичні вказівки для організації самостійної роботи студентів з курсу „Вища математика”. Тема: „Диференціальне числення функцій кількох змінних” спеціальності „Обладнання харчових виробництв”. Укладачі: Кравченко Л.К., Торяник Д.О., ХДУХТ, 2004.
7. Методичні вказівки для організації самостійної роботи і виконання контрольних робіт з курсу „Вища математика”. Розділ „Диференціальне і інтегральне числення функцій комплексної змінної”. Укладачі: Ільюшко В.М., Золочевська Л.О., ХДУХТ, 2006.
8. Методичні вказівки з вищої математики для організації самостійної роботи і виконання контрольних робіт студентами денної та заочної форми навчання за спеціальністю 8.090221. Укладачі: : Ільюшко В.М., Золочевська Л.О., ХДУХТ, 2005.

Навчальне видання

Укладачі: **Кравченко** Лідія Кузьмівна
Соколовська Олена Георгіївна
Торяник Дмитро Олександрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ
для самостійної роботи студентів
Модуль № 5: «Кратні інтеграли»,
«Криволінійні інтеграли»

Напрям підготовки: 6.050502 "Інженерна механіка"

Підп. до друку , формат . Папір газ. Друк. офс. Умов. друк. арк.
обл.-вид. арк. Умовн. фарб.-відб. Тир. прим. Зам № .

Харківський державний університет харчування та торгівлі.
61051, Харків-51, вул. Клочківська, 333.

ДОД ХДУХТ Харків-51, вул. Клочківська, 333.