МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський державний університет харчування та торгівлі

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки та індивідуальні контрольні завдання для самостійної роботи студентів економічних спеціальностей

Харків
ХДУХТ
2016

Методичні вказівки та індивідуальні контрольні завдання для самостійної роботи студентів економічних спеціальностей з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» [Електронний ресурс] / М.С. Синєкоп, М.С. Софронова – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2016. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Укладачі: М. С. Синєкоп, М. С. Софронова

Рецензент: доц., к. ф.-м. н. Д. О. Торяник

Кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін

Схвалено методичною комісією вищого навчального закладу за напрямом підготовки (спеціальністю) 6.030508 «Фінанси та кредит», 6.030509 «Облік та аудит»
Протокол від 16 травня 2016 року № 8

Схвалено вченою радою ХДУХТ

Протокол від 25 лютого 2016 року № 7

Схвалено редакційно-видавничою радою ХДУХТ

Протокол від 24 лютого 2016 року № 3

П Е Р Е Д М О В А

Посилення фундаментальної підготовки студентів є одним з найважливіших аспектів підвищення освітньо-кваліфікаційного рівня студентів. Ефективним напрямом підвищення знань з фундаментальних дисциплін взагалі і, з теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема, є удосконалення засобів організації самостійної роботи студентів та поточного (рубіжного) контролю набутих навичок та вмінь.

Організація такої роботи вимагає підготовки методичних матеріалів, що міститимуть:

а) основні теоретичні відомості з поточного розділу;

б) найбільш типові приклади для засвоєння матеріалу;

в) індивідуальні завдання для оцінки якісного рівня засвоєння знань студентів.

Дане методичне видання складається з лаконічного, але достатньо повного об’єму теоретичних відомостей з теорії ймовірностей та математичної статистики, що підкріплюються достатньою кількістю прикладів. Також у методічці надано 5 індивідуальних завдань з 25 варіантами в кожному.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН ТА КОМБІНАТОРИКИ

1. Основні поняття теорії множин

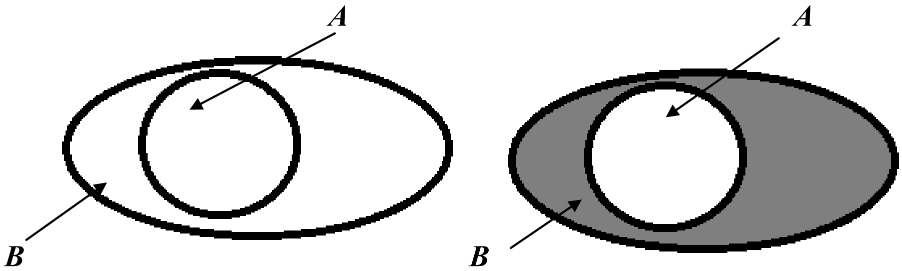
Множина – це сукупність об'єктів, що називаються елементами або точками множини, об'єднаних за деякою ознакою.

Позначають множини великими латинськими буквами *A, B, C*, …, їх елементи – малими: *a, b, c*, … .

Операції над множинами

Множину A з елементами a, b, c ... позначимо $A=\{a,b,c,\ldots\}$. Якщо a належить множині A, то позначають $a \in A$, якщо не належить – $a \notin A$. Пуста множина $\varnothing$ – це множина, що не містить жодного елемента.

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то A є підмножиною множини B: $A \subset B$ (рис. 1*а*).



а *б*

Рис. 1

$A \subset A$ завжди, оскільки кожен елемент множини звісно належить A.

Будь-яка множина містить пусту множину в якості своєї підмножини.

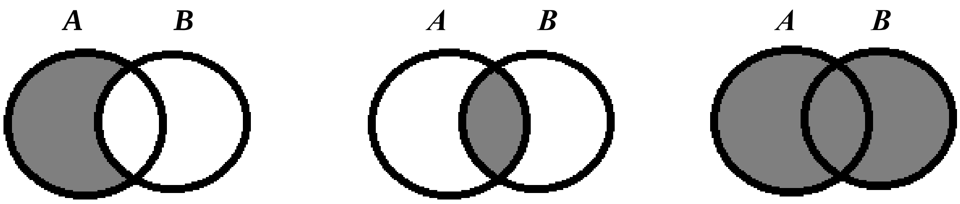
Якщо $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ то A і B називаються рівними, тобто $A = B$. Тут $\wedge$ – логічна операція «кон'юнкція», означає, що вислови справедливі одночасно.

Якщо $A \subset B$, то множина елементів множини B, що не належить A, називається доповненням множини A до B (рис. 1 *б*): cA або $c_B A$,

$$c_B A = \{x : (x \in B) \wedge (x \notin A)\}.$$

Різниця множин A і B (рис. 2*а*):

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$



$A \setminus B$ $A \cap B$ $A \cup B$

а *б* *в*

Рис. 2

Аналогічно симетрична різниця множин A і B:

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Нехай A і B – підмножини X. Перетин множин A і B (рис. 2*б*) – це множина $A\cap B=\{x:(x\in A)\wedge(x\in B)\}$.

Об'єднання множин A і B (рис. 2*в*) – це множина $A\cup B=\{x:(x\in A)\vee(x\in B)\}$. Тут $\vee$ – логічна операція «диз'юнкція», означає, що справедлив хоча б один вислів з A або B.

Приклад. Нехай $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,c,k,l,m\}$. Тоді $C=A\cup B=\{a,b,c,d,k,l,m\}$, $D=A\cap B=\{b,c)$, $E=B\setminus A=\{k,l,m\}$, $F=A\Delta B=\{a,d,k,l,m\}$.

Два елементи a, b називаються впорядкованою парою (a, b), якщо вказано, який з цих елементів перший, який другий, при цьому $((a,b)=(c,d))\Leftrightarrow((a=c)\wedge(b=d))$.

Сукупність усіх можливих впорядкованих пар (a, b), де $a\in A,b\in B$, називається добутком множин A і B – $A\times B$.

Булева алгебра

Нехай A, B, C – довільні підмножини множини X. Тоді безпосередньо з визначень об'єднання, перетину та доповнення виникають співвідношення:

1) $A\cap B\subset X$, $A\cup B\subset X$ (замкненість операцій об'єднання та перетину);
2) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (комутативність операцій об'єднання та перетину);
3) $A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D$, $A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D$ (асоціативність операцій об'єднання і перетину);
4) $A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$ (дистрибутивність операції об'єднання відносно операції перетину);
 $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$ (дистрибутивність операції перетину відносно операції об'єднання);
5) $A\cup A=A\cap A=A$;
6) $(A\cup B=B)\Leftrightarrow A\cup B=A$;
7) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap X=A, A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cup X=X$;
8) $A\cup cA=X$, $A\cap cA=\varnothing$.

Якщо для елементів множини $\sigma=\{A,B,C,\ldots\}$ визначені операції об'єднання $\cup$ та перетин $\cap$, для яких виконуються відношення 1)-8), то трійка $(\sigma,\cap,\cup)$ називається *булевою алгеброю*.

Принцип двоїстості

Для довільних підмножин A, B з X має місце рівність

$$c(A\cup B)=cA\cap cB,\ c(A\cap B)=cA\cup cB,$$

Що називається принципом двоїстості.

2. Основні поняття комбінаторики

При розвязанні деяких задач з теорії ймовірностей часто викоритовують поняття розділу елементарної математики – комбінаторика.

Нагадаємо, що комбінаторика вивчає кількість сполук, підпорядкованих певним умовам, які можна скласти з елементів заданої скінченної множини.

Основні правила комбінаторики.

1. Правило суми: якщо деякий об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів n способами, а другий об'єкт В із цієї ж сукупності k способами, то вибрати або A, або B можна $n+k$ способами;

2. Правило добутку: якщо деякий об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів n способами, і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати k способами, то пара об'єктів (A,В) у вказаному порядку може бути обрана nk способами.

Означення 1. Різні групи, складені з будь-яких елементів, що відрізняються елементами або порядком цих елементів, називають сполуками, або комбінаціями цих елементів.

Сполуки бувають трьох видів: перестановками, розміщення, сполучення.

Означення 2. Сполуки з n елементів, що відрізняються лише порядком елементів, називаються перестановками.

Кількість перестановок з n елементів знаходять за формулою

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n = n! \qquad (1)$$

Приклад. Скільки п'ятизначних чисел можна записати, використовуючи п'ять різних цифр (крім нуля)?

Розв'язання. Сполуки, що утворюють з п'яти різних цифр п'ятизначні числа, можуть відрізнятися лише порядком цифр, тому такі сполуки будуть перестановками з 5 елементів, тобто

$$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$$

Означення 3. Розміщенням з n елементів по m називають такі комбінації, які складаються з m елементів, взятих з даних n елементів ($m<n$) і відрізняються як порядком, так і елементами. Кількість розміщень A_n^m знаходять за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Приклад. Студенти другого курсу згідно навчального плану вивчають 10 дисциплін. На один день можна планувати заняття з 4 дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?

Розв'язання. Усі можливі розклади занять на один день – це сполуки з 10 по 4, які можуть відрізнятися дисциплінами або їх порядком, тобто ці сполуки – розміщення. Згідно з формулою (2)

$$A_{10}^4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040.$$

Означення 4. Сполученням з n елементів по m називають комбінації, що складаються з m елементів, взятих з даних n елементів і які відрізняються хоч би одним елементом.

Кількість сполучень з n елементів по m знаходять за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3}$$

Властивості сполучень:

а) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

б) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

в) $C_n^n = 1$;

г) $C_n^1 = n$.

Приклад. У ящику 10 виробів, з яких 2 нестандартні. Навмання беруть 6 виробів. Яка ймовірність того, що усі взяті вироби будуть стандартними ?

Розв'язання. Позначимо подію A – навмання взято 6 стандартних виробів. Згідно умови задачі, немає значення, в якому порядку беруть 6 виробів, тобто це будуть сполучення. Тому кількість усіх можливих елементарних наслідків буде $n = C_{10}^6$. Події A сприяють лише сполуки по 6 виробів з 8 стандартних, тобто $m = C_8^6$.

Отже $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^6}{C_{10}^6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \div \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{8! \cdot 4!}{2! \cdot 10!} = \frac{2}{15}$

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

~~2.1~~ 3. Випробування та подія. Види подій

Випробування – це експеримент, що може бути повторений нескінченне число разів за одних і тих самих обставин.

Подія – результат випробування. Події поділяються на вірогідну, неможливу та випадкову.

Достовірна подія – це подія, що за даних умов обов’язково відбудеться. Наприклад, при підкиданні монети подія «поява герба або числа» – достовірна.

Неможлива подія – – це подія, що за даних умов ніколи не відбудеться. Наприклад, з чотирьох відмінної якості деталей неможливо обрати п’ять бракованих.

Випадкова подія – це подія, що за даних умов може відбутися, а може і не відбутися. Наприклад, при підкиданні грального кубика поява двох очок – це випадкова подія.

Кожну можливу випадкову подію досліджуваного випробування назвемо *елементарною подією* (або *наслідком*) й позначимо через ω.

Простір елементарних подій Ω – множина всіх можливих подій, що можуть з’явитися при данному випробуванні. Наприклад, при підкиданні двох кубиків $\omega = (i, j)$, де i – кількість очок, одержаних на першому кубику, $i = \overline{1{,}6}$, j – кількість очок, одержаних на другому кубику, $j = \overline{1{,}6}$. Загальна кількість елементарних подій (потужність множини Ω – $|\Omega|$) становить $|\Omega| = 36$.

Дві випадкові події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в данному випробуванні. В іншому випадку події називаються сумісними. Наприклад, влучення в мішень та промах при одному пострілі – дві несумісні події. Поява числа 2 та парного чи~~м~~сла очок при одному підкиданні грального кубика – це сумісн~~7~~і події.

Події A і B називаються *рівноможливими*, якщо при випробуванні може відбутися декілька подій і немає підстав вважати появу однієї з них більш можливою, ніж інша. Наприклад, поява герба та числа при підкиданні монети – рівноможливі події.

Події A, B і C називаються *єдиноможливими*, якщо при випробуванні обовязково відбудеться одне і тільки одне з них. Наприклад, якщо в урні знаходяться білі та чорні кулі, то при добуванні двох куль єдиноможливими є події: A – поява двох білих куль, B – поява двох чорних, C – поява однієї білої та однієї чорної куль.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо

1) Сума цих подій – достовірна подія, тобто $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$;

2) A_i – попарно несумісні.

Події A і B називаються протилежними, якщо це єдиноможливі події, що утворюють повну групу подій. Подія, протилежна до події A, позначається $\overline{A}$.

Дії над подіями

Сумою $A+B$ двох випадкових подій називають таку випадкову подію, яка полягає у появі події A або B, або A і B водночас.

Різницею $B–A$ двох випадкових поді називають усі наслідки B, які виключають появу події A

Добутком двох випадкових подій A і B називають таку випадкову подію, яка полягає у появі події A і B одночасно.

~~2~~4.~~2~~ Класичне та геометричне визначення ймовірностей. Відносна частота

В практичній діяльності часто доводиться спостерігати випадкові події, які важко передбачити: виграш в лотереї, псування продуктів, приймання управлінських рішень в умовах ризику тощо. Вивчення імовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій є предметом теорії ймовірностей.

Означення 1. Ймовірність події є чисельна міра степеня об'єктивної можливості цієї події.

Означення 2. (Класичне) Ймовірність події A дорівнює відношенню числа елементарних наслідків, які сприяють появі події A, до загального числа усіх єдиноможливих та рівноможливих елементарних наслідків

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

де m – число елементарних наслідків, що сприяють події A,

n – число усіх єдиноможливих та рівноможливих наслідків.

Приклад. В урні 6 однакових за розміром куль: 2 червоні, 3 сині, 1 біла. Знайти ймовірність появи червоної кулі, якщо беруть одну кулю з урни навмання.

Розв'язання. Нехай подія A – навмання взята червона куля. Усіх можливих наслідків $n = 6$. Появі червоної кулі будуть сприяти лише дві кулі, тому $m = 2$. За формулою (1) одержуємо

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Зауваження. Класичне означення ймовірності має місце лише тоді, коли m та n скінчені, усі елементарні наслідки рівноможливі.

Означення 3. (геометричне). Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню міри g до міри G

$$P(A)=\frac{m(g)}{m(G)} \qquad (2)$$

Означення 4. Відносною частотою або частотою події *A* називають відношення числа випробувань, у яких подія *A* з'явилась, до числа фактично виконаних випробувань

$$W(A)=\frac{m}{n},$$

де *m* – кількість випробувань, у яких з'явилась подія *A*,
n – кількість усіх випробувань.

Приклад. Відділ технологічного контролю серед 100 виробів виявив 8 якісних. Чому дорівнює відносна частота появи якісних виробів.
Розв'язання. Позначимо *A* – подія появи якісного виробу. Тоді за означенням частоти події *A* одержимо

$$W(A)=\frac{8}{100}=0.08.$$

Зауваження. Ймовірність *P(A)* події *A* обчислюється до випробування, а частота *W(A)* обчислюється після випробування.

При великій кількості випробувань частота коливається біля деякого постійного числа – ймовірності появи цієї події, тобто

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} W(A).$$

Аксіоми теорії ймовірностей
1. $P(A)\ge 0$;
2. $P(\Omega)=1$;
3. $P(A+B)=P(A)+P(B)$, якщо *A* і *B* несумісні, тобто $A\cdot B=\varnothing$.

Властивості ймовірностей
1. $0\le P(A)\le 1$;
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$;
3. $P(\varnothing)=0$;
4. якщо $A\subset B$, то $P(B-A)=P(B)-P(A)$;
5. якщо $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$.

~~3. АЛГЕБРА ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ~~

~~3.1.~~ 5. Додавання ймовірностей несумісних подій

<u>**Теорема**</u>. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, наприклад A і B, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1)$$

Отформатировано: нумерованный + Уровень: 1 + Стиль нумерации: 1, 2, 3, … + Начать с: 1 + Выравнивание: слева + Выровнять по: 6,25 см + Табуляция после: 6,88 см + Отступ: 6,88 см

Отформатировано: без нумерации

Цю рівність називають формулою додавання ймовірностей. Якщо подія є об'єднання будь-якого скінченого числа попарно несумісних подій A_1, A_2,~~…~~…, A_n, то формула додавання ймовірностей теж справедлива

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (2)$$

Теорема. Сума ймовірностей повної групи випадкових подій дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Наслідок. Дві протилежні події A та $\bar{A}$ утворюють повну групу, тому має місце рівність

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \qquad (3)$$

з якої одержимо формулу знаходження ймовірності протилежної події

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \qquad (4)$$

Приклад. Ймовірність влучення стрілком у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область – 0,35, у третю – 0,15. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілок влучить у першу або другу області мішені.

Розв'язання. Позначимо за подію A_1 – влучення у першу область мішені, за подію A_2 – влучення у другу область мішені. При одному пострілі події A_1 та A_2 несумісні. Тому ймовірність влучення в першу або другу області мішені буде

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.45 + 0.35 = 0.8 \ .$$

Ймовірність добутку подій

Нехай A і B – незалежні події, тобто настання події A не позначається на умовах досліду, внаслідок якого може настати подія B.

Теорема. Ймовірність одночасної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (5)$$

~~3.2.~~ 6. Додавання ймовірностей сумісних подій

Отформатировано: украинский

Отформатировано: Отступ: Слева: 1,27 см, без нумерации

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірностей їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \ . \qquad (6)$$

Приклад. У залежності від наявності сировини підприємство може виробити та відправити замовникам щодобово певну кількість певної продукції від 1 до 100. Яка ймовірність того, що одержану кількість продукції можна розподілити без залишку:

а) трьом замовникам;
б) чотирьом замовникам;
в) дванадцяти замовникам;
г) трьом або чотирьом замовникам.

Розв'язання. Позначимо події.

A – одержана кількість виробів ділиться на 3 без залишку;

Отформатировано: Шрифт: курсив

B – одержана кількість виробів ділиться на 4 без залишку.

Використовуючи класичне означення ймовірності, знаходимо

а) $P(A)=\frac{33}{100}$;   б) $P(B)=\frac{25}{100}$;   в) $P(AB)=\frac{8}{100}$

Події *A* та *B* – сумісні, тому за формулою додавання ймовірностей сумісних подій одержимо

Отформатировано: Шрифт: курсив

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{33}{100}+\frac{25}{100}-\frac{8}{100}=\frac{1}{2}.$$

Умовна ймовірність

Ймовірність настання події *B* за умови, що подія *A* відбулася, називають умовною ймовірністю події *B* за умови *A* і позначають $P(B/A)$ або $P_A(B)$.

<u>**Теорема**</u>. Ймовірність сумісної події появи двох випадкових подій *A* та *B* дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій та умовної ймовірності другої події при умові, що перша подія з'явилась

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A). \qquad (7)$$

Приклад. Студент знає 20 з 25 питань програми іспиту. Знайти ймовірність того, що він дасть правильну відповідь на три питання, які він отримав на іспиті.

Розв'язання. Нехай подія ~~A~~A_1 – студент знає відповідь на перше питання, ~~A~~A_2 – на друге, ~~A~~A_3 – на третє. Тоді подія A – «він дав відповідь на три питання» має вигляд $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$ Використовуючи теорему добутку ймовірностей залежних подій, знайдемо

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}.$$

Ймовірність настання хоча б однієї події

Нехай події $A_1,A_2,...,A_n$ незалежні у сукупності, причому $P(A_1)=P_1,P(A_2)=P_2,...,P(A_n)=P_n$. Ймовірність настання події *A*, яка полягає в настанні хоча б однієї з подій $A_1,A_2,...,A_n$, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1,\bar{A}_2,...,\bar{A}_n$:

$$P(A)=1-q_1q_2...q_n. \qquad (8)$$

Зокрема, якщо всі *n* подій мають однакову ймовірність *P*, то формула (8) має вигляд

$$P(A)=1-q^n. \qquad (9)$$

Приклад. Ймовірність влучення у мішень першого стрілка дорівнює 0,7, другого стрілка – 0,8, а третього стрілка – 0,9. Знайти ймовірність влучення у мішень хоча б одного стрілка.

Розв'язання. Позначимо події ~~*A*~~A_1 – у мішень влучив перший стрілок, ~~*A*~~A_2 – у мішень влучив другий стрілок, ~~*A*~~A_3 – у мішень влучив третій стрілок;~~–~~ A – у мішень влучив хоча б один стрілок. За умовою задачі події A_1, A_2, A_3 незалежні, тому події $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ та $\overline{A_3}$ також незалежні. Згідно з формулою (8) маємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}),$$

так як

$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0.7 = 0.3, \quad P(\overline{A_2}) = 1 - 0.8 = 0.2, \quad P(\overline{A_3}) = 1 - 0.9 = 0.1,$$

одержимо $P(A) = 1 - 0.3 \cdot 0.2 \cdot 01 = 1 - 0.006 - 0.994.$

Формули повної ймовірності та Байєса

<u>**Теорема**</u>. Якщо випадкова подія A може з'явитися лише сумісно з однією із несумісних між собою подій B_1, B_2, B_n, що утворюють повну групу, тоді ймовірність події A обчислюється за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A). \tag{10}$$

Приклад. У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти ймовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика стандартна.

Розв'язання. Позначимо події~~–~~. A – з першого ящика взято стандартну деталь; гіпотезу ~~*B*~~A_1 – з другого ящика переклали до першого стандартну деталь; ~~*B*~~A_2 – з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь. Події B_1 та B_2 несумісні, а подія A може з'явитись лише сумісно з однією із них. Тому згідно з формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A). \tag{11}$$

Знайдемо потрібні ймовірності

$$P(B_1) = \frac{9}{10}; \quad P(B_2) = \frac{1}{10}; \quad P_{B_1}(A) = \frac{16}{21}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{15}{21}.$$

Підставимо ці значення у формулу і одержимо

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{16}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{21} = \frac{144 + 15}{210} = \frac{159}{210} = \frac{53}{70}.$$

Нехай випробування проведено і в результаті з'явилась подія A. Визначимо, як змінилася (в зв'язку з тим, що подія A вже наступила) ймовірність гіпотез

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A)},\quad k=1,2...n. \tag{12}$$

Формулу (12) називають формулами Байєса. Вони дозволяють переоцінювати ймовірність гіпотез. Це важливо при контролях та ревізіях.

Приклад. Для заліку викладач підготував 50 задач: 20 з вищої математики, 20 з теорії ймовірності і 10 з математичного програмування. Для отримання заліку необхідно розв'язати першу задачу, запропоновану викладачем. Студент вміє розв'язувати 18 задач з вищої математики, 15 задач з теорії ймовірностей і 5 задач з математичного програмування. Студент склав залік. Знайти ймовірність того, що йому дісталася задача з теорії ймовірностей.

Розв'язання. Нехай подія A – «студент склав залік». Розглянемо гіпотези: B_1 – «дісталася задача з вищої математики», B_2 – «дісталася задача з теорії ймовірностей», B_3 – «дісталася задача з математичного програмування». Очевидно, що $P(B_1)=\frac{2}{5}$, $P(B_2)=\frac{2}{5}$, $P(B_3)=\frac{1}{5}$. Умовні ймовірності дорівнюють $P(A/B_1)=\frac{18}{20}$; $P(A/B_2)=\frac{3}{4}$; $P(A/B_3)=\frac{1}{2}$.

Тоді ймовірність гіпотези B_2, за умови, що він її розв'язав, за формулою Байєса дорівнює

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{15}{38}$$

.

Отформатировано: нумерованный + Уровень: 1 + Стиль нумерации: 1, 2, 3, … + Начать с: 1 + Выравнивание: слева + Выровнять по: 6,25 см + Табуляция после: 6,88 см + Отступ: 6,88 см

Отформатировано: По левому краю, без нумерации

Отформатировано: нумерованный + Уровень: 1 + Стиль нумерации: 1, 2, 3, … + Начать с: 1 + Выравнивание: слева + Выровнять по: 6,25 см + Табуляция после: 6,88 см + Отступ: 6,88 см

4.7. Послідовності випробувань.

4.1 Схема та формула Бернуллі

У багатьох задачах теорії ймовірностей, статистики та повсякденної практики треба досліджувати послідовність (серію) n випробувань.

Означення. Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах і ймовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова та не залежить від появи або непояви A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають схемою Бернуллі.

Нехай випадкова подія A може з'явитися у кожному випробуванні з ймовірністю $P(A) = P$, або не з'явитися з ймовірністю

$$q = P(\overline{A}) = 1 - P.$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що при n випробуваннях подія A з'явиться k разів і не з'явиться $(n - k)$ разів. Шукану ймовірність позначають $P_n(k)$ і знаходять за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k}. \tag{1}$$

Зауваження. Ймовірність появи події A в n випробуваннях схеми Бернуллі менш m разів можна знайти за формулою

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1). \tag{2}$$

Ймовірність появи події A не менше m разів можна знайти за формулою

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n) \tag{3}$$

або за формулою

$$P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k). \tag{4}$$

Ймовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях доцільно знаходити за формулою

$$P_n(1 \leq m \leq n) = 1 - q^n. \tag{5}$$

У багатьох випадках треба знаходити найбільш ймовірне значення m_0 числа m появ події A. Це значення визначається співвідношенням

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \tag{6}$$

Число m_0 повинно бути цілим. Якщо $(n+1)p$ - ціле число, тоді найбільше значення ймовірність має при двох числах

$$m_1 = (n+1)p - 1 \quad \text{та} \quad m_2 = (n+1)p.$$

Приклад 1. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовить не менше двох блоків.

Розв'язання. Позначимо подію A – відмова блоку. Тоді

p=$P(A)$=1–0.8=0.2 тому q=1–p=1–0.2=0.8. Згідно з умовою задачі n=10. Використовуючи формулу Бернуллі та зауваження, одержимо:

а) $p_{10}(2)=C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 (0.2)^2 (0.8)^8 = 0.202$;

б) $p_{10}(1<m\le 10)=1-p_{10}(0)=1-C_{10}^0 (0.2)^0 (0.8)^{10} = 0.8926$;

в) $p_{10}(2\le m\le 10)=1-\left(p_{10}(0)+p_{10}(1)\right)=1-\left(C_{10}^0 (0.2)^0 (0.8)^{10}+C_{10}^1 (0.2)^1 (0.8)^9\right)=$ $=0.6244$.

Приклад 2. При новому технологічному процесі 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш ймовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

Розв'язання. Позначимо шукане число m_0. Згідно з формулою

$$np-q\le m_0\le np+p$$

за умовою n=250, p=0.8, q=0.2 тому

$$199.8\le m_0\le 200.8.$$

Але m_0 повинно бути цілим числом, тому m_0=200.

~~4.2~~8. Граничні теореми у схемі Бернуллі

Знаходження ймовірностей $P_n(k)$ та $P_n(k_1\le k\le k_2)$ за формулою Бернуллі ускладнюється при досить великих значеннях n та при малих $p(p\le 0.1, npq\le 9)$. У таких випадках використовують наближені асимптотичні формули.

<u>Теорема 1</u>. (Теорема Пуассона). Якщо $n\to\infty$ і $p\to 0$ так, що $np\to\lambda,\ 0<\lambda<\infty$, то

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda},\quad k=0,1,2... \tag{7}$$

Формулу (1) доцільно застосовувати при великих n та малих p.

Для відомих значень k і λ використовують табличні значення функції.

Приклад. Підручник надруковано тиражем 100000 екземплярів. Ймовірність невірного брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

Розв'язання. Випробування – брошурування кожного підручника – незалежні і мають однакову ймовірність невірного брошурування, тому маємо схему Бернуллі. Згідно з умовою задачі n=100000 досить велике, p=0.0001 мала; k=5.

Застосовуючи формулу Пуассона, одержимо

$$P_{100000}(5)=\frac{10^5}{5!}e^{-10}=0.037.$$

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань *n* достатньо велика, а ймовірність Р появи події *А* в усіх випробуваннях однакова, то ймовірність появи події *А k* разів може бути знайдена за наближеною формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (8)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

В таблиці у додатку наведено значення функції $\varphi(x)$. Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна теорема Маувра-Лапласа

Щоб знайти ймовірність $P_n(k_1,k_2)$ того, що кількість k появи події *А* в *n* випробуваннях знаходиться в межах $k_1 \le k \le k_2$, використовують інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (9)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – інтегральна функція Лапласа,

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення інтегральної функції Лапласа знаходиться у таблиці 2 додатку. Функція $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Приклад. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться 267 разів.

Розв'язання. У даному випадку *n* та *k* досить великі. Тому для знаходження $P_{800}(267)$ можна використати формулу $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$. Маємо

$P = \frac{2}{6}, q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{40/3} = \frac{801 - 800}{40} = \frac{1}{40} = 0.025.$ Підставляючи в формулу, одержимо

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40} \cdot \varphi(0.025) = \frac{3}{40} \cdot 0.3988 = 0.03.$$

Значення *φ(0,025) = 0,3988* взято з таблиці 1 додатку.

Ймовірність відхилення відносної частоти від її ймовірності у незалежних випробуваннях

Якщо у n незалежних випробуваннях ймовірність P появи події A однакова і подія A з'явилась m разів, то справедлива формула

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що частість появи події відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

Розв'язання. За умовою n=625, p=0.8, q =1–0.8=0.2, ε=0.04. Треба знайти

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0.8\right|\le 0.0.4\right).$$

За формулою маємо

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0.8\right|\le 0.0.4\right)\approx 2\Phi\left(0{,}04\cdot\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 02}}\right)=2\Phi(2{,}5)$$

З таблиці значень функції Лапласа *Φ(x)* знаходимо *Φ(2,5)*=0,4938.

Отже,

$$2\Phi(2{,}5)=2\cdot 0{,}4938=0{,}987\rightarrow P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 04\right)=0{,}9876$$

Таким чином, шукана ймовірність наближено дорівнює 0,9876.

Отформатировано: По левому краю

~~5~~9. Випадкові величин~~И~~

5.~~1~~ Дискретні випадкові величини

Випадковою величиною називають таку величину, яка внаслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.
Випадкові величини бувають дискретними та неперервними.

Означення. Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка може приймати відокремлені ізольовані одне від одного числові значення (їх можна пронумерувати) з відповідними ймовірностями.

Приклад. Кількість влучень у мішень при трьох пострілу буде випадкова величина X: можливі значення якої 0, 1, 2, 3. Отже, X може приймати чотири ізольовані значення з різними ймовірностями. Тому X – ДВВ

Отформатировано: По ширине

Отформатировано: По левому краю

~~5.2~~10. Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин (ДВВ)

Способи задання та закони розподілу ДВВ

Нехай випадкова дискретна величина X приймає значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \ldots p_n$. Задати закон розподілу такої випадкової величини – це задати рівність $p_k = P(X = x_k)$, яку можна розглядати як функцію. Тому закон розподілу X можна задати аналітично, таблично, графічно. Функція розподілу для дискретної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i).$$

Табличний спосіб задання ДВВ, який називають рядом розподілу і зображують у вигляді

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(x)$	P_1	P_2	…	P_n

У першому ряду записані усі можливі значення X, а у другому рядку – відповідні ймовірності, які мають властивість $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Приклад. Умовами лотереї передбачено: один виграш 100 гривень, а два – 50 гривень, вісім – 10 гривень, дев'ятнадцять – 1 гривня. Знайти закон розподілу суми виграшу власником одного лотерейного білету, якщо продано 1000 білетів.

Розв'язання. Будемо шукати закон розподілу суми виграшу X у вигляді ряду розподілу. Тоді

X	100	50	10	1	0
$P(x)$	0,001	0,002	0,008	0,19	0,97

де $p(0)$ = 1 – (0,001 + 0,002 + 0,008 + 0,019) = 1 – 0,03 = 0,97

Графічний спосіб. У прямокутній системі координат побудуємо точки з координатами $(x_1,\ p_1)$, $(x_2,\ p_2)$, ... , $(x_n,\ p_n)$. Поєднавши ці точки прямими, одержимо графік у вигляді багатокутника розподілу ДВВ.

Значення ДВВ, ймовірність якого найбільша, називають модою.

На рис. 1 мода – x_3

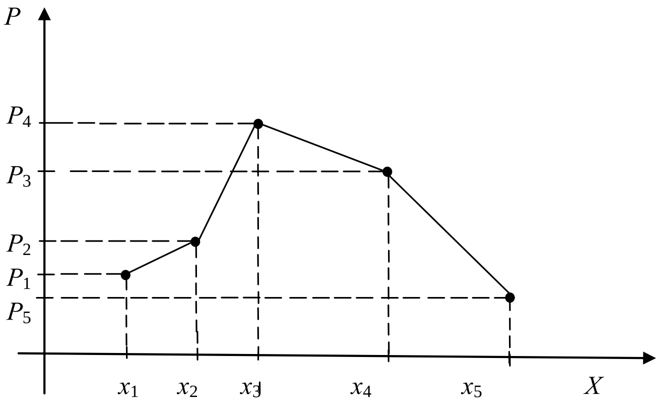


Рис. 1

Аналітичний спосіб задання ДВВ базується на заданні певної функції, за якою можна знайти ймовірність P відповідного значення $x_к$, тобто $P_k = f(x_k), k = 1,2,...,n.$

Розглянемо деякі закони розподілу ДВ.

~~В.~~

1. Біноміальний закон розподілу

Цей закон має вигляд

$$P(x = k) = C_n^k p^n (1 - p)^{n-k}, k = 0,1,2,...,n.$$

і використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку n незалежних повторних випробувань, в кожному з яких деяка подія з'являється з ймовірністю p.

2. Закон розподілу Пуассона

Якщо число випробувань велике, а $p \le 0.1$, то використовують наближену формулу

$$P(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{де } \lambda = np \ (\lambda > 0).$$

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1,25 см

Цей розподіл використовується у задачах статистичного контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування, для обчислення: кількості вимог на виплату страхових сум за рік, кількості дефектів однакових виробів.

Зауваження. Якщо перебіг подій пуассонівський, то ймовірність появи події *A* *k* разів за час *t* можна знайти за формулою

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \text{де } \lambda \text{ – інтенсивність течії.}$$

Приклад. Середня кількість замовлень, що поступають до комбінату побутового обслуговування кожну годину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві години поступлять 5 замовлень.

Розв'язання. Використовуючи формулу $P_t(k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ при $k=5$, $t = 2$, $\lambda = 3$, маємо

$$P_2(5) = \frac{(3 \cdot 2)^5}{5!} e^{-3 \cdot 2} = \frac{(6)^5}{5!} e^{-6}.$$

Числові характеристики ДВВ

Найбільш часто використовуються три числові характеристики: математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення від математичного сподівання.

Математичне сподівання

Математичним сподіванням ДВВ називають суму добутків всіх її можливих значень *X* на відповідні їм ймовірності:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій:
$$M(C) = C.$$
2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:
$$M(CX) = C \cdot M(X).$$
3. Математичне сподівання сум ДВВ дорівнює сумі математичних сподівань складових
$$M(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n).$$
4. Математичне сподівання добутку взаємно незалежних величин дорівнює добутку математичних сподівань співмножників:
$$M(x_1 x_2 \dots x_n) = M(x_1) \cdot M(x_2) \dots M(x_n).$$

Математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює добутку числа випробувань *n* на ймовірність *p* появи події в одному випробуванні

$$M(x) = np.$$

Для розподілу Пуассона $M(x) = \lambda$.

Приклад. Знайти математичне сподівання суми числа очок, які можуть з'явитися при киданні двох гральних кубиків.

Розв'язання. Нехай *X* – кількість очок, які можуть з'явитись на першому кубику, а на другому – *У*. Можливі значення цих величин 1, 2, 3, 4, 5, 6 однакові, ймовірність кожного з цих значень дорівнює $\frac{1}{6}$. Тому $M(x) = M(y) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.

Математичне сподівання суми числа очок, що можуть з'явитись при наданні двох гральних кубиків, дорівнює

$$M(x+y) = M(x) + M(y) = \frac{7}{2} + \frac{2}{7} = 7.$$

Математичне сподівання характеризує центр розподілу ДВВ.

Для характеристики розсіювання можливих значень *X* відносно центру розподілу введемо дисперсію.

Означення. Дисперсією (розсіюванням) ДВВ називається математичне сподівання квадрата відхилення ДВВ *X* від її математичного сподівання

$$D(x) = M(x - M(x))^2.$$

Властивості дисперсії

1. $D(x) \geq 0$
2. Дисперсія сталої величини дорівнює 0:
$$D(C) = 0.$$
3. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:
$$D(Cx) = C^2 D(x).$$
4. Дисперсія алгебраїчної суми різниці двох незалежних ДВВ дорівнює сумі їх дисперсій
$$D(x \pm y) = D(x) + D(y).$$

При обчисленні дисперсії доцільно використовувати формулу

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2.$$

Величина $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини *x*.

Дисперсія біноміального закону розподілу дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності появи і непояви події в одному випробуванні.

$$D(x) = npq.$$

Для розподілу Пуассона

$$D(x) = \lambda .$$

Приклад. Знайти дисперсію ДВВ *X*, що задана законом

X	-5	0	4	5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Розв'язання. Будемо шукати $D(X)$ за формулою
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Математичне сподівання буде

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i, \text{ тобто}$$

$$M(X) = (-5)\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} + 5\cdot\frac{1}{8} = 1 \Rightarrow M^2(X) = 1.$$

Знайдемо $M(X^2)$. Запишемо закон розподілу X^2 у вигляді таблиці

X^2	25	0	16	25
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Звідки $M(X^2) = 25\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot\frac{1}{4} + 25\cdot\frac{1}{8} = \frac{82}{8}$.
Згідно з формулою знаходимо

$$D(X) = \frac{82}{8} - 1 = \frac{74}{8} = 9{,}25.$$

11.

~~4.3.~~ Неперервні випадкові величини (НВВ)

Означення. Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченого або нескінченого інтервалу (*а; в*). Кількість можливих значень такої величини є нескінчена.

Прикладами НВВ можуть бути: величина похибки, яка має місце при вимірюванні відстані, час безвідмовної роботи приладу; зріст людини; розміри деталі, яку виготовляє станок-автомат.

Означення. Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливим значенням випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Для повної характеристики НВВ вводять інтегральну та диференціальну функцію розподілу.

Інтегральна функція розподілу

Означення. Інтегральною функцією розподілу називають ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення, менше x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1)$$

Властивості інтегральної функції розподілу

1. Значення інтегральної функції розподілу належать відрізку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ якщо } x_2 > x_1.$$

3. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу $(a;b)$, дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі:

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

4. Ймовірність того, що випадкова величина X прийме одне конкретне значення, дорівнює нулю.
5. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то

а) $F(x) = 0$ при $x \le a$

б) $F(x) = 1$ при $x \ge b$

Графік функції розподілу $F(x)$ може мати вигляд, (рис. 2)

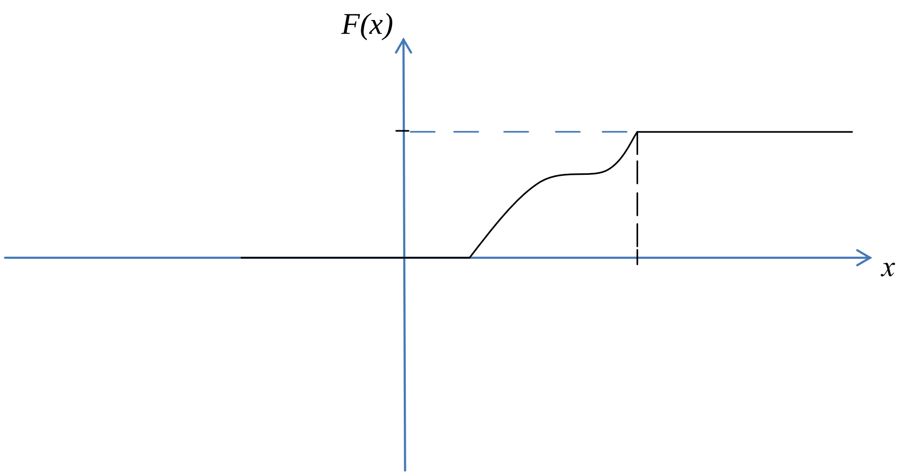


Рис. 2

Диференціальна функція розподілу

Означення. Диференціальною функцією розподілу або щільністю ймовірностей неперервної випадково величини називають похідну від її інтегральної функції розподілу

$$f(x) = F'(x). \qquad (2)$$

Назва «щільність ймовірностей» випливає з рівності

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(X < x + \Delta x) - F(X < x)}{\Delta x}.$$

Знаючи диференціальну функцію *f(x)*, можна знайти інтегральну функцію *F(x)* за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (3)$$

Властивості диференціальної функції розподілу

1. Диференціальна функція невід'ємна:

$$f(x) \geq 0.$$

2. Інтеграл від диференціальної функції в інтервалі (-∞; ∞) дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

3. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення зінтервалу (*а; в*) дорівнює

$$P(a \leq X \leq в) = F(в) - F(a) = \int_{a}^{в} f(x)dx.$$

Приклад. Випадкова величина має щільність ймовірностей $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$. Визначити параметр *а* та функцію розподілу.

Розв'язання. Параметр *а* знаходимо, використовуючи властивість 2 диференціальної функції розподілу

$$1 = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{adx}{1+x^2} = a \cdot arctgx \Big|_{-\infty}^{x} = a\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = a\pi.$$

Отже, одержали $1 = a\pi \Rightarrow a = \dfrac{1}{\pi}$.

Знайдемо функцію розподілу за формулою (3)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{\frac{1}{\pi}dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \cdot arctgx \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi} arctgx - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} arctgx + \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\pi} arctgx + \frac{1}{2}.$$

Числові характеристики НВВ

1. Математичне сподівання НВВ *X*, яка має щільність ймовірностей *f(x)*, визначається формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \qquad (4)$$

2. Дисперсією НВВ *X* називається число

$$D(x) = M(x - M(x))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx, \qquad (5)$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 . \qquad (6)$$

Якщо можливі значення *x* належать проміжку (*a;в*), то рівності (5) та (6) приймають вигляд

$$D(x) = \int_{a}^{в} (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx; \qquad (7)$$

$$D(x) = \int_{a}^{в} x^2 f(x)dx - M^2(x). \qquad (8)$$

3. Середнє квадратичне відхилення НВВ

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (9)$$

Приклад. Знайти числові характеристики ВВ *X*, яка задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0 < x < 5, \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо щільність ймовірності $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{25}x, & 0 \le x \le 5, \\ 0, & x \notin [0,5]. \end{cases}$$

Тепер за формулою (4) знайдемо математичне сподівання

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot \frac{2}{25} x dx = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{10}{3}.$$

Дисперсію знайдемо за формулою (8)

$$D(X) = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2}{25} x dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^5 - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення одержимо за формулою (9)

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{25}{18}}=\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}\approx 1.17.$$

412.~~.~~4 Закони розподілу ~~НВВ~~ та ~~їх~~ числові характеристики НВВ

Основні закони розподілу НВВ розділяють за виглядом їх диференціальних функцій розподілу (щільності ймовірностей) *f(x)*.

Отформатировано: украинский

Найчастіше зустрічаються рівномірний розподіл.

Рівномірний розподіл

Величина *X* розподілена рівномірно у проміжку (*а,в*), якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність її ймовірностей у цьому проміжку постійна, тобто

$$f(x)=\begin{cases} C=\dfrac{1}{в-a}, \text{ коли } & x\in(a,в),\\ 0, \text{ коли } & x\notin(a,в). \end{cases}$$

Якщо *X* рівномірно розподілена на проміжку (*а,в*), то ймовірність належності *X* будь-якому інтервалу (x_1, x_2) ∈ (*а, в*) пропорційна довжині цього інтервалу

$$P(x_1<X<x_2)=C(x_2-x_1)=\frac{x_2-x_1}{в-a}.$$

Цей розподіл задовольняють, наприклад, похибки округлення різноманітних розрахунків.

Графік рівномірного розподілу НВВ *X* зображено на рисунку 3.

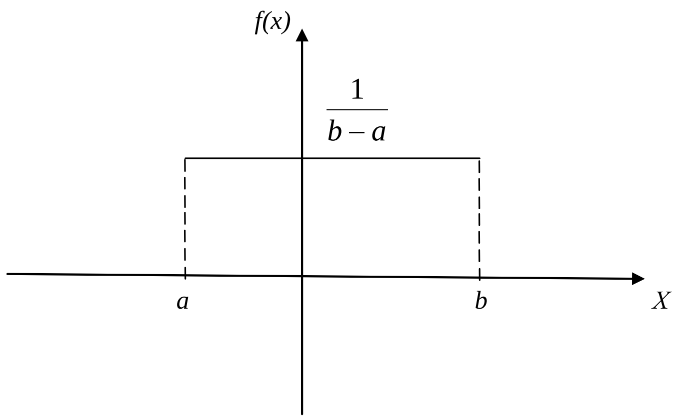


Рис. 3

Числові характеристики НВВ *X*, розподіленої за рівномірним законом дорівнюють

$$M(X)=\frac{a+в}{2},\quad D(X)=\frac{(в-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{(в-a)\sqrt{3}}{6}\,. \qquad (10)$$

Показниковий розподіл

Випадкову величину *X* називають розподіленою за показниковим законом, якщо щільність її ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{коли } x\ge 0\\ 0, & \text{коли } x<0\end{cases},$$

де λ > параметр.

Показниковому розподілу задовольняють: час телефонної розмови, гарантійний термін ремонту техніки, час безвідмовної роботи холодильника тощо.

Числові характеристики показникового розподілу дорівнюють

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (11)$$

Зауваження. Якщо випадкова величина *X* розподілена за показниковим законом, то її інтегральна функція розподілу має вигляд $F(x)=1-e^{-\lambda x}$.

Приклад. Знайти числові характеристики випадкової веичини, розподіленої за законом

$$f(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & \text{коли } x\ge 0\\ 0, & \text{коли } x<0\end{cases}.$$

Розв'язання. У даному випадку ВВ *X* розподілена за показниковим законом із параметром λ = 4. Згідно з формулами (11) маємо

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{4}=0{,}25;\quad D(X)=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}=0{,}0625\,.$$

Нормальний розподіл

ВВ *X* називають розподіленою нормально, якщо щільність її ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a та σ – параметри розподілу.

Графік цієї функції *f(x)* називають нормальною кривою або кривою Гаусса (рис. 4).

При $a = 0$ та $\sigma = 1$ нормальну криву називають нормованою та записують формулою

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Тобто це є функція Лапласа, яка табульована.

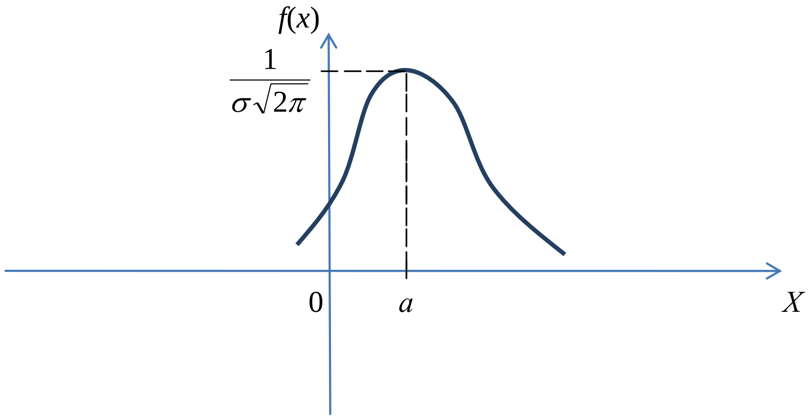


Рис. 4

Заміна змінної $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$, використання інтеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

та формул (4), (5), (8) дозволяють одержати числові характеристики нормального розподілу НВВ у вигляді

$$M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2; \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Інтегральною функцією нормального закону розподілу буде

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Ймовірність попадання в інтервал (c,d) нормально розподіленої випадкової величини X знаходять за формулою

$$P(c < X < d) = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right). \qquad (12)$$

Приклад. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом, її математичне сподівання дорівнює 30, а середнє квадратичне відхилення – 10. Знайти ймовірність того, що X матиме значення з інтервалу (10,50).

Розв’язання. Згідно умови $a = 30, \sigma = 10,$ тому за формулою (12) одержимо

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544.$$

Правило трьох сигм

Якщо випадкова величина X розподілена нормально, то

$$P(|X-a| > 3\sigma) \to 0,$$

тобто ймовірність того, що абсолютна величина відхилення X від її математичного сподівання прямує до 0, а це означає, що $|x-a| < 3\sigma$ – практично достовірна подія.

У практиці це правило використовують так: –якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але $|x-a| < 3\sigma$, тоді можна припустити, що X розподілена нормально.

Отформатировано: По ширине, Отступ: Первая строка: 1,5 см

Отформатировано: По левому краю

~~6.~~ ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

~~6.~~13. Основні поняття математичної статистики

Мета кожного наукового дослідження – виявлення закономірностей явищ, які спостерігають, та використання цих закономірностей у повсякденній практичній діяльності. Для встановлення цих закономірностей проводять спеціальні досліди та спостереження. Далі роблять узагальнений висновок у вигляді закону.

У тих випадках, коли явище знаходиться під дією багатьох факторів і неможливо виявити вплив усіх цих факторів, застосовують інший метод вивчення – статистичний, тобто систематизацію та обробку статистичних даних однорідних дослідів.

Закономірним є використання статистичних методів в економіці, технології, товарознавстві тощо. Нехай, наприклад, темп приросту промислового виробництва за певний період часу дорівнює 5%. Це означає, що в середньому для усієї сукупності підприємств показник 5% є статистичною закономірністю зростання промислового виробництва. Цей середній показник не виключає, а, навпаки, припускає, що на окремих підприємствах темп приросту може бути більшим або меншим 5%.

Предмет математичної статистики полягає у розробці методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків.

Вкажемо основні задачі, які розв’язує математична статистика:

1) збір та групування (якщо даних дуже багато) статистичних відомостей;
2) визначення закону розподілу випадкової величини за статистичними даними;
3) визначення невідомих параметрів розподілу;
4) перевірка правдоподібності припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв’язку між випадковими величинами або про значення параметрів, які оцінюються.

Отже основна задача математичної статистики – розробка методів аналізу статистичних даних в залежності від мети дослідження.

Методи математичної статистики ефективно використовують при розв’язанні багатьох задач науки, організації технологічного процесу, планування, управління, ціноутворення та ін.

Генеральна та вибіркова сукупності

Нехай потрібно вивчити сукупність об’єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки, яка характеризує ці об’єкти. Кожен об’єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Розглядаючи лише одну ознаку кожного об’єкта, ми припускаємо, що інші ознаки рівноправні, або що множина об’єктів однорідна. Такі множини однорідних об’єктів називаються статистичними сукупностями.

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називається сукупність випадково взятих об’єктів.

Генеральною називається сукупність об’єктів, з яких зроблено вибірку.

Об’ємом сукупності (вибіркової або генеральної) називається кількість об’єктів цієї сукупності.

Наприклад, якщо з 5000 виробів для дослідження взято 50, тоді об’єм генеральної сукупності N=5000, а об’єм вибірки n=50

Первинним результатом статистичного спостереження є перелік елементів сукупності та відповідних їм значень ознаки.

Приклад. Спостерігають ціну коровaю з 10 хлібозаводів міста. Результати спостережень представлені у таблиці (ознака X – ціна в грн, ознака N – номер хлібозавода)

X	15.2	19.1	17.1	20.8	18.4	16.4	22	20.4	17.6	18.2
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Таке зведення називають рядом варіант або простим статистичним рядом. Вибірки бувають повторні та безповторні. Повторною називається вибірка, при якій відібраний об’єкт повертається до генеральної сукупності перед відбором іншого об’єкта. Вибірка називається безповторною, якщо взятий об’єкт до генеральної сукупності не повертається. Найчастіше використовують безповторні вибірки.

Вибірку можна ефективно використовувати для вивчення відповідної ознаки генеральної сукупності лише тоді, коли дані вибірки вірно відображають цю ознаку. Ця умова як правило формулюється так – вибірка повинна бути репрезентативною, тобто представницькою.

Способи відбору

У практичній діяльності використовують різноманітні способи відбору об’єктів із генеральної сукупності. Усі способи відбору можна поділити на два види: 1) Відбір, який не потребує розділення генеральної сукупності на частини; 2) Відбір, при якому генеральна сукупність розділяється на частини. До першого виду відбору відносять: а) простий випадковий безповторний відбір; б) простий випадковий повторний відбір.

Під простим випадковим відбором розуміють відбір, при якому об’єкти із генеральної сукупності беруть по одному.

До другого виду відбору відносять: а) типовий відбір; б) механічний відбір; в) серійний відбір.

Типовим називається відбір, при якому об’єкти відбирають не з усієї генеральної сукупністю, а лише з її типових частин. Механічним називається відбір, при якому генеральна сукупність механічно поділяється на стільки частин, скільки має бути об’єктів у вибірці. З кожної частини випадковим чином відбирають один об’єкт.

Серійним називають відбір, при якому об'єкти із генеральної сукупності відбирають не по одному, а серіями, які досліджують.

Серійний відбір використовують тоді, коли ознака, яку досліджують, мало змінюється в різних серіях.

В економічних дослідженнях іноді використовують комбінацію названих відборів.

Статистичний розподіл вибірки

Для детального вивчення вибірки в простому статистичному ряді доцільно зробити первинну обробку, тобто згрупувати члени вибіркової сукупності, що приймають рівні значення ознаки, або значення в середині певного інтервалу.

Так, наприклад, групування даних у наведеному вище прикладі, на інтервалах ціни дозволяє одержати таблицю

Інтервали (грн)	15–17	17–19	19–21	21–23	Усього
Кількість хлібозаводів	2	4	3	1	10

Аналогічно, групуванням сукупності із 20 грейптфруктів, що продані протягом двох годин, за їх вагою, одержимо таблицю

Вага грейптфрукта (г)	380	390	400	410	420	430	440	Усього
Кількість проданих грейптфруктів	1	3	3	6	4	2	1	20

Нехай із генеральної сукупності взята вибірка об'єктів для вивчення ознаки X, яка прийняла значення $x_1 - n_1$ раз, значення $x_2 - n_2$ раз, …, $x_m - n_m$ раз. Значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають варіантами ознаки X.

Варіанти, що записані у таблиці у зростаючому порядку, називають варіаційним рядом. Кількість спостереження варіант $n_1, n_2, \ldots, n_m$ називають рядом частот. Відмітимо, що сума усіх частот повинна дорівнювати об'єму вибірки, тобто

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = n.$$

Відношення частоти $n_к$ варіанти $x_к$ до об'єму вибірки n називається відносною частотою варіанти $x_к$ і позначається $\omega_к$. Отже,

$$\omega_k = \frac{n_k}{n}.$$

Сума усіх відносних частот задовольняє рівність

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k = 1.$$

Статистичним розподілом вибірки називається перелік варіант та відповідних їм частот або відносних частот, тобто

$x_к$	x_1	x_2	...	x_m
$n_к$	n_1	n_2	...	n_m

або

$x_к$	x_1	x_2	...	x_m
$\omega_к$	ω_1	ω_2	...	ω_m

де n – об'єм вибірки і $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$.

Емпірична функція розподілу та її властивості

Нехай відомий статистичний розподіл деякої ознаки X. Позначимо через n загальну кількість спостережень, тобто об'єм вибірки; n_x – кількість спостережень, при яких спостерігалися ознаки X менше x.

Означення. Емпіричною функцією розподілу (або функцією розподілу вибірки) називається функція $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$.

Математично це означення має вигляд

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – кількість варіант, які менші від x, n – об'єм вибірки.

Таким чином, щоб знайти, наприклад, $F^*(x_3)$, треба кількість варіант, що менші x_3 поділити на об'єм вибірки, тобто

$$F^*(x_3) = \frac{n_1 + n_2}{n}.$$

Слід зауважити, що, інтегральна функція розподілу $F(x)$ генеральної сукупності у математичній статистиці називається теоретичною функцією розподілу. Вона відрізняється від емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ тим, що визначає ймовірність події $X < x$, а не відносну частоту цієї події.

З теореми Бернуллі випливає, що відносна частота

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

події $X < x$ при $n \to \infty$ прямує до ймовірності

$$F(x) = P(X < x)$$

цієї події. Тому $F(x)$ та $F^*(x)$ як завгодно мало відрізняються одна від одної при $n \to \infty$.

Доцільно використовувати $F^*(x)$ для наближеного представлення функції розподілу $F(x)$ генеральної сукупності.

Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ має такі властивості:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$;
2. $F^*(x)$ – неспадна функція;
3. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ 1, & x > x_m \end{cases}$

де x_1 – найменша варіанта, x_m – найбільша варіанта.

Графічне зображення статистичних розподілів

Якщо в результаті вибірки ми одержали статистичний розподіл ознаки X, яку треба дослідити, то будемо мати перелік варіант ознаки

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m$$

та відповідних їм частот

$$n_1,\ n_2, \ldots,\ n_m\ ,$$

або відносних частот

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_m\ .$$

Полігоном частот називається ламана, відрізки якої з'єднують точки

$$(x_1,\ n_1),\ (x_2,\ n_2), \ldots,\ (x_m,\ n_m).$$

Полігоном відносних частот (частостей) називається ламана, відрізки якої проходять через точки $(x_1,\ \omega_1),\ (x_2,\ \omega_2), \ldots,\ (x_m,\ \omega_m)$.

Приклад. У результаті вибірки одержали такі значення ознаки X

$$-3,\ 2,\ -1,\ -3,\ 5,\ -3,\ 2.$$

Побудувати полігон частот цієї вибірки.

Розв'язання. У цьому випадку варіантами будуть

$$x_1 = -3,\ \ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 5.$$

Відповідні частоти

$$n_1 = 3,\ n_2 = 1,\ n_3 = 2,\ n_4 = 1.$$

Відклавши у системі координат $(x0n)$ точки

$$M_1(-3,\ 3),\ M_2(-1,1),\ M_3(2,\ 2),\ M_4(5,1)$$

та з'єднавши їх відрізками прямих, одержимо полігон частот цієї вибірки (рис. 1).

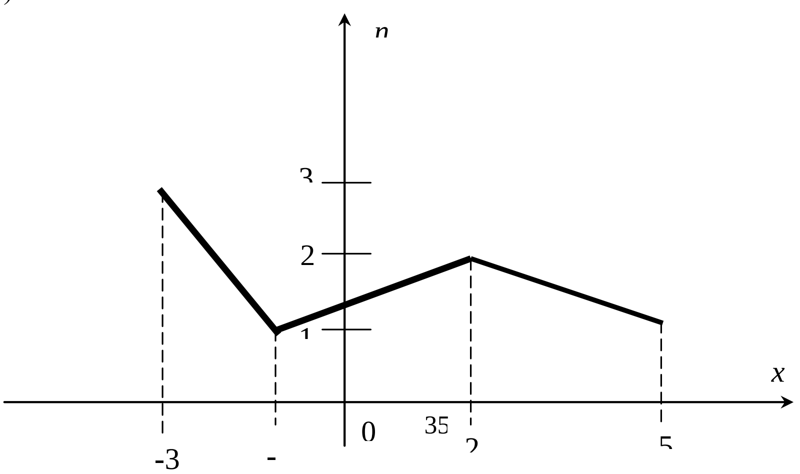


Рис. 1

У деяких випадках (особливо для неперервного розподілу ознаки *X*) кращим представленням випадкової величини є гістограми частот або відносних частот.

Гістограмою частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант довжиною

$h = x_k - x_{k-1}$, а висоти дорівнюють $\frac{n_k}{h}$ –(щільність відносної частоти).

Гістограмою відносних частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{\omega_k}{h}$ –(щільність частоти).

Для побудови гістограми частот (відносних частот) проміжок варіант $[x_{min}, x_{max}]$ розбивають на ряд відрізків довжини h. Потім підраховують суму частот (відносних частот) значень варіант ознаки *X*, які належать кожному із одержаних відрізків.

Якщо в k-ому відрізку ($k = 1, 2, \ldots$) кількість варіант, що спостерігали, з врахуванням їх частот дорівнює n_k, то будують прямокутник Π_k, основою якого буде k-ий відрізок довжиною h, а висотою буде $\frac{n_k}{h}$ (для відносних частот висота – $\frac{\omega_k}{h}$).

Площа такого прямокутника дорівнює $h \cdot \frac{n_k}{h} = n_k$ (у випадку частостей $h \cdot \frac{\omega_k}{h} = \omega_k$). Тому площа усіх прямокутників буде дорівнювати сумі n_k, тобто $S = \sum_{k=1}^{m} n_k = n -$ об’єму вибірки.

У випадку гістограми відносних частот площа прямокутників буде дорівнювати 1:

$$S = \sum_{k=1}^{m} \omega_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} n_k = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Таким чином, площа гістограми частот дорівнює об’єму вибірки, а площа гістограми відносних частот – одиниці.

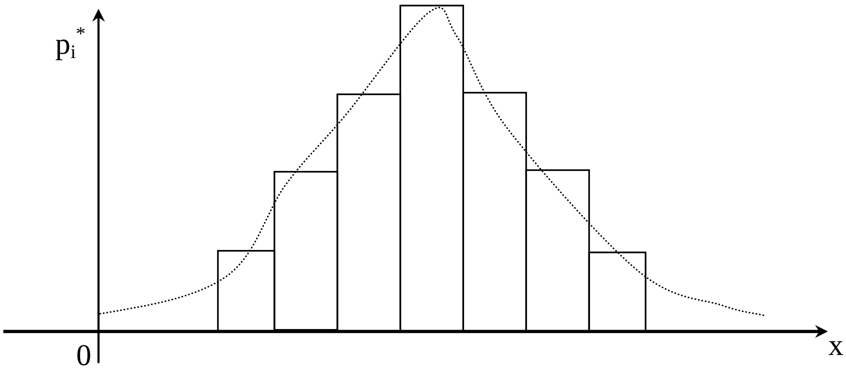


Рис. 2. Гістограма щільності відносних частот ВВХ

Зауваження. Якщо через верхні сторони прямокутників, що складають гістограму провести неперервну криву, то за її формою можна прогнозувати закон розподілу ВВХ, яку досліджують на практиці (рис. 2).

Приклади гістограм, які характеризують

~~ь:~~
1) показниковий закон розподілу

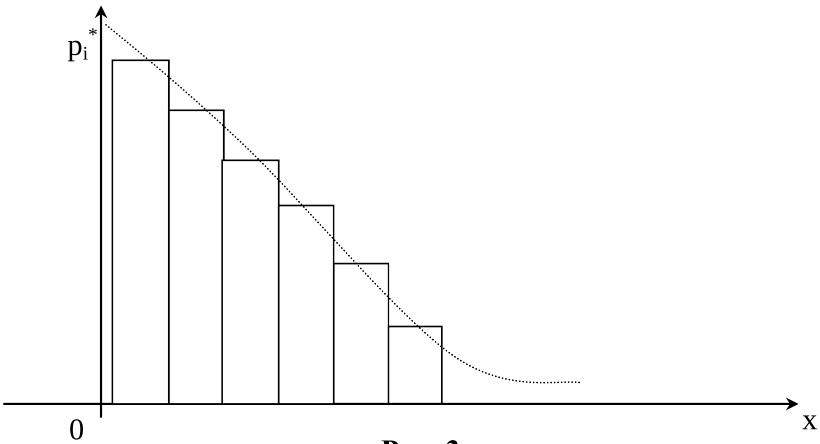


Рис. 3

~~2~~2) закон рівномірного розподілу
на відрізку [a, b]

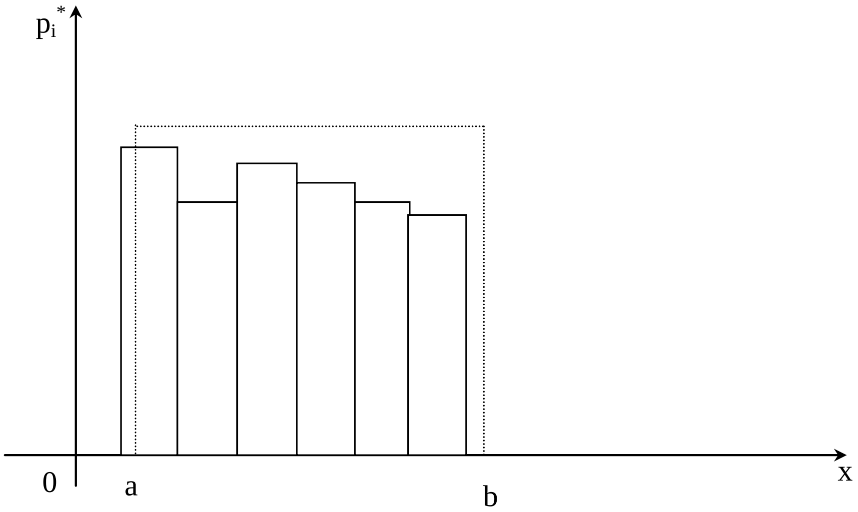


Рис. 4

Приклад. Аналізується прибуток X(%) підприємств галузі. Обстежено $n = 100$ підприємств. Дані подані в наступному статистичному ряді.

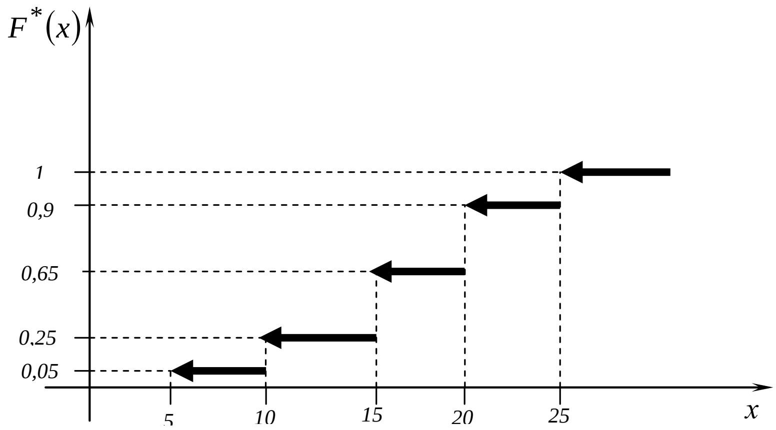
X	5	10	15	20	25
n_i	5	20	40	25	10
$\frac{n_i}{n}$	0,05	0,2	0,4	0,25	0,1

Знайти *а*) емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$, *б*) числові характеристики статистичного ряду, *в*) побудувати графіки полігону частот та відносних частот.

Розв'язання. Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ є оцінкою теоретичної функції розподілу $F(x) = P(X < x)$. За означенням $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – кількість варіант, які менше від x, n – об'єм вибірки.

Маємо

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5, \\ 0{,}05 & 5 < x \le 10, \\ 0{,}25 & 10 < x \le 15, \\ 0{,}65 & 15 < x \le 20, \\ 0{,}90 & 20 < x \le 25, \\ 1, & x > 25. \end{cases}$$



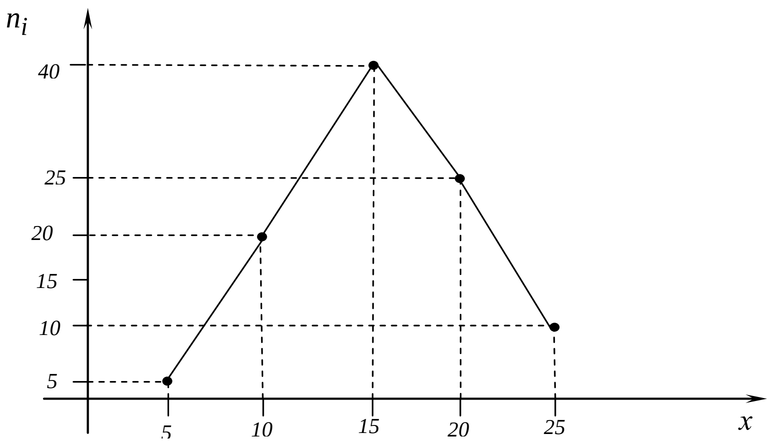


Рис. 1*а*

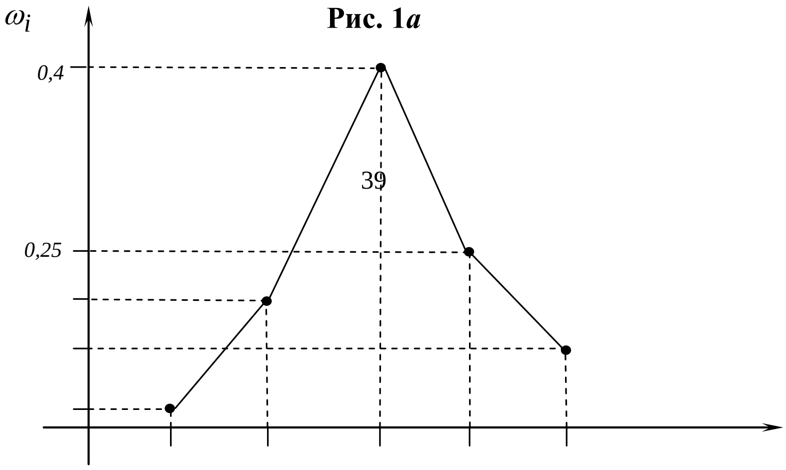


Рис. 1*б*

Графік полігону частот (рис. 1*а*) та полігону відносних частот (рис. 1*б*) є ламані, відрізки яких з'єднують точки $M_1(x_1, n_1)$, $M_2(x_2, n_2)$, … , $M_n(x_n, n_n)$ або $M_1(x_1, \omega_1)$, $M_2(x_2, \omega_2)$, … , $M_n(x_n, \omega_n)$.

Обчислимо вибіркові числові характеристики статистичного ряду. Вибіркова середня $\overline{X}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$.

$$\overline{X}_B = \frac{1}{100}(5 \cdot 5 + 20 \cdot 10 + 40 \cdot 15 + 25 \cdot 20 + 10 \cdot 25) = 15{,}75.$$

Вибіркова дисперсія $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{X}_B\right)^2$.

$$D_B = \frac{1}{100}\left(5 \cdot 10{,}75^2 + 20 \cdot 5{,}75^2 + 40 \cdot 0{,}75^2 + 25 \cdot 4{,}75^2 + 10 \cdot 9{,}75^2\right) \approx 27{,}76.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \qquad \sigma_B = \sqrt{27{,}76} \approx 5{,}27.$$

14.

Отформатировано: Шрифт: полужирный

Отформатировано: По центру

~~7.~~ Статистичні оцінки параметрів розподілу

~~7.1 Основні поняття~~

Основні вимоги до статистичних оцінок

У багатьох випадках треба дослідити кількісну ознаку X генеральної сукупності, використовуючи результати вибірки. Часто для цього достатньо знати наближені значення математичного сподівання $M(x)$, дисперсії $D(x)$, середньоквадратичного відхилення $\sigma(x)$, випадкової величини X.

Іноді, з деяких міркувань, вдається встановити закон розподілу X. Тоді виникає задача оцінювання параметрів цього закону розподілу.

Наприклад, відомо, що випадкова величина X розподілена рівномірно, треба за даними вибірки наближено знайти відрізок, у якому знаходяться значення випадкової величини X.

Якщо X розподілена у генеральній сукупності за нормальним законом, то її щільність ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Необхідно оцінити, тобто знайти наближені значення параметра a, який дорівнює $M(X)$, та σ, який дорівнює $\sigma(X)$. Ці параметри повністю визначають нормальний розподіл X.

Якщо X розподілена за законом Пуассона, то необхідно оцінити лише один параметр λ, який цей розподіл визначає.

Дослідник має у своєму розпорядженні лише дані вибірки, одержані в результаті спостережень. Саме через ці дані і треба виразити потрібні параметри випадкової величини X генеральної сукупності.

Означення. Статистичною оцінкою невідомого параметра випадкової величини X генеральної сукупності (теоретичного розподілу X) називається функція від випадкових величин (результатів вибірки), що спостерігаються.

Щоб статистичні оцінки давали найкращі наближення параметрів, вони повинні задовольняти певним вимогам. Розглянемо їх.

Припустимо, що за вибіркою об'єму n знайдена оцінка θ_1*. При інших вибірках того ж об'єму одержимо деякі інші оцінки θ_2*, θ_3*, …, θ_m*. Числа θ_1*, θ_2*, θ_3*, …, θ_m* будемо розглядати як можливі значення випадкової величини θ* – статистичної оцінки невідомого параметра θ теоретичного розподілу.

Відомо, що використання статистичної оцінки θ*, математичне сподівання якої не дорівнює параметру θ, приводить до систематичних (одного знаку) похибок. Вимога $M(\theta^*) = \theta$ застерігає від систематичних похибок.

Статистична оцінка θ* параметра θ називається незміщеною, якщо $M(\theta^*) = \theta$. Оцінку θ* називають зміщеною, якщо ця рівність не виконується.

Вимога про незміщеність оцінки θ^* є необхідною, але недостатньою, тому що значення θ^* можуть бути сильно розсіяні навколо свого середнього значення, тобто дисперсія $D(\theta^*)$ може бути великою. Тоді знайдена за даними однієї вибірки оцінка, наприклад, $\theta_к^*$ може набагато відрізнятися від середнього значення θ^*, отже і від параметра θ. Якщо $D(\theta^*)$ буде малою, тоді можливість припустити значну похибку буде виключена. Тому до статистичної оцінки ставиться вимога про її ефективність.

Ефективною називається така статистична оцінка θ^*, якщо при заданому об'ємі n вибірки вона має найменшу можливу дисперсію.

При розгляді вибірки великого об'єму ($n \to \infty$) до статистичних оцінок висувають вимогу їх обгрунтованості.

Обгрунтованою називається статистична оцінка, яка при $n \to \infty$ прямує за ймовірністю до оцінюваного параметра.

Наприклад, якщо дисперсія незміщеної оцінки при $n \to \infty$ прямує до нуля, то оцінка буде і обгрунтованою.

Числові характеристики вибіркової сукупності

Аналогічно математичному сподіванню, дисперсії та середньому квадратичному відхиленню дискретної випадкової величини визначають вибіркові характеристики, замінюючи при цьому ймовірності $p_к$ відносними частотами вибірки $\frac{n_k}{n}$. Але у статистиці застосовують ще й інші числові характеристики.

Вибірковим середнім або називається середнє арифметичне варіант вибірки із врахуванням їх відносних частот і позначається

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k \cdot x_k , \qquad (1)$$

де $x_к$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) – варіанти вибірки, $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$ – об'єм вибірки.

Вибіркове середнє є аналогом математичного сподівання і використовується дуже часто. Воно може приймати різні числові значення при різних вибірках однакового об'єму. Тому можна розглядати розподіли (теоретичний та емпіричний) вибіркового середнього та числові характеристики цього розподілу (цей розподіл називають вибірковим).

Вибірковою дисперсією D_B називається середнє квадратів відхилення варіант від вибіркового середнього із врахуванням відповідних відносних частот.

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k (x_k - \overline{x_B})^2. \qquad (2)$$

Вибірковим середньоквадратичним відхиленням (стандартом) називається квадратний корінь із вибіркової дисперсії

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}\,. \qquad (3)$$

Зауваження. Вибіркова дисперсія дає занижені значення для дисперсії *D(X)* генеральної сукупності, вона буде зміщеною оцінкою *D(X)*. Математичне сподівання D_B дорівнює

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D(X)\,.$$

Тому вибіркову дисперсію доцільно виправити таким чином, щоб вона стала назміщеною оцінкою. Для цього достатньо D_B домножити на дріб $\frac{n}{n-1}$.

Виправлену вибіркову дисперсію позначають

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{m} n_k (x_k - \overline{x_B})^2. \qquad (4)$$

Тоді виправленим середньоквадратичним відхиленням вибірки буде $S = \sqrt{S^2}$.

Точкові та інтервальні оцінки

Точковими оцінками параметрів розподілу генеральної сукупності називаються такі оцінки, які визначаються одним числом.

Наприклад, вибіркове середнє $\overline{x_B}$, вибіркова дисперсія D_B та вибіркове середньоквадратичне σ_B – точкові оцінки відповідних числових характеристик генеральної сукупності.

Точкові оцінки параметрів розподілу є випадковими величинами, їх можна вважати первинними результатами обробки вибірки тому, що невідомо, з якою точністю кожна з них оцінює відповідну числову характеристику генеральної сукупності.

Якщо об'єм вибірки досить великий, то точкові оцінки задовольняють практичні потреби точності.

Якщо об'єм вибірки малий, то точкові оцінки можуть давати значні похибки, тому питання точності оцінок у цьому випадку дуже важливе і використовують інтервальні оцінки.

Інтервальною називається оцінка параметрів розподілу, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу.

Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність та надійність оцінок.

Нехай знайдена за даними вибірки статистична оцінка θ^* є оцінкою невідомого параметра θ. Ясно, що θ^* тим точніше визначає θ, чим менше абсолютна величина різниці θ - θ^*. Іншими словами, якщо $\delta > o$ і $|\theta - \theta^*| < \delta$, тоді меншому δ відповідає більш точна оцінка. Тому число δ характеризує точність оцінки. Але статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка θ^* задовольняє нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$. Таке твердження можна зробити лише з ймовірністю γ.

Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки параметра θ за θ^* називається ймовірність

$$\gamma = P(|\theta - \theta^*| < \delta), \tag{5}$$

з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Найчастіше число γ задається наперед і, залежно від обставин, воно дорівнює 0,95 або 0,99, або 0,999.

Формулу (5) можна записати у вигляді

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma \tag{6}$$

З цієї рівності випливає, що інтервал (θ^* - δ, θ^* $+\delta$) містить невідомий параметр θ генеральної сукупності.

Інтервал (θ^* - δ, θ^* $+\delta$) називається довірчим, якщо він покриває невідомий параметр θ із заданою надійністю γ.

Зауваження. Кінці довірчого інтервалу є випадковими величинами.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом, середньоквадратичне відхилення σ відоме. Треба знайти довірчий інтервал, що покриває математичне сподівання a генеральної сукупності із заданою надійністю γ.

Згідно із властивістю нормально розподіленої випадкової величини X маємо

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Замінимо X на $\bar{x}_B$, σ на $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ тоді

$$P(\left|\overline{x_B} - a\right| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right). = 2\Phi(t), \tag{7}$$

де

$$t = \frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow \delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

Використовуючи формули (6) та (7), дістанемо

$$P\left(\overline{x_B} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma, \tag{8}$$

тобто з надійністю γ довірчий інтервал

$$\left(\overline{x_B} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

покриває невідомий параметр a. Точність оцінки буде

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Число t визначається із рівності

$$2\Phi(t) = \gamma \Rightarrow \Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \tag{10}$$

з використанням таблиці значень інтегральної функції Лапласа.

Зауваження. З формули (9) випливає, що при зростанні об'єму вибірки n число δ зменшується, а це означає, що точність оцінки збільшується. Коли надійність γ збільшується, функція $\Phi(t)$ зростає, згідно з її властивістю зростає t і, як наслідок, зростає δ. Отже, збільшення надійності оцінки зменшує її точність.

Знаходження об'єму вибірки. Нехай ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом з параметром a і треба знайти об'єм вибірки n, який із заданою точністю δ та надійністю γ дозволить знайти оцінку параметра a. Із формули (9) дістанемо рівність

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma},$$

з якої випливає

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}. \tag{11}$$

Для надійності γ, використовуючи (10) та таблицю значень інтегральної функції Лапласа, знайдемо відповідне число t.

Тепер t, δ та σ відомі, тому за формулою (11) можна знайти потрібний об'єм вибірки.

Зауваження. Якщо невідоме середньоквадратичне відхилення σ ознаки X генеральної сукупності, то в формулах (8), (9), (11) замість σ використовують середньоквадратичне відхилення вибірки σ_B.

Приклад 1. При заготовці яєць на ринку у перший день було витрачено 124 грн з розрахунку 40 коп за штуку. В наступний день було витрачено 152 грн з розрахунку 38 коп за штуку. Знайти середню заготівельну ціну яйця.

Розв'язання. Середня закупочна ціна яйця

$$\overline{X}_{гарм.} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{x_k}}.$$

Знаходимо

$$\overline{X}_{гарм.} = \frac{12400 + 15200}{\frac{1}{40} \cdot 12400 + \frac{1}{38} \cdot 15200} = \frac{27600}{310 + 400} \approx 38{,}87.$$

<u>Зауваження</u>. Середнє гармонічне застосовують у випадку, коли шуканий показник є величина, обернена до середнього значення ознаки.

У статистиці застосовуються структурні середні, які не залежать від значень варіант, що розташовані на краях розподілу, а пов'язані з рядом частот. До структурних середніх відносять моду та медіану. Модою M_0 називається значення варіанти, яка має найбільшу частоту. Медіаною M_e називається значення варіанти, яка знаходиться в середині ряду.

Приклад 2. Товарообіг магазину по місяцям складає (у тис. грн): 35, 36, 33, 34, 32,5; 30; 28; 27; 37; 40; 38; 31,5. Знайти медіану товарообігу.

Розв'язання. Запишемо ряд товарообігу магазину у порядку зростання: 27, 28, 30, 31,5, 32,5, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40. Оскільки варіаційний ряд має парне число варіант, тому

$$M_e = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{33 + 34}{2} = 33{,}5 \text{ тис. грн.}$$

Якщо розподіл ознаки X вибірки має вигляд

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	x_{k+1}	$\cdots$	x_i
n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_k	n_{k+1}	$\cdots$	n_i

і відомо, що медіана знаходиться в інтервалі (x_k, x_{k+1}), то її можна обчислити за формою

$$M_e = x_k + \frac{\frac{n}{2} - S_k}{n_k} \cdot (x_{k+1} - x_k),$$

де n – об’єм вибірки,

$$S_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Приклад 3. Заробітна платня робітників відділу магазину має вигляд

Зароб. платня (у грн)	465–475 470	475–485 480	485–495 490	495–505 500	505–515 510	515–525 520	525–535 530
Число робітників	3	5	12	20	10	6	4

Обчислити медіану для даного розподілу.

Розв’язання. Знаходимо об’єм сукупності (загальне число робітників) $n = 60$, $\frac{n}{2} = 30$.

Оскільки медіана є середнє значення ознаки, то заробітна платня знаходиться в інтервалі (490; 500). За умовою задачі: $n = 60$, $\frac{n}{2} = 30$, $x_k = 490$, $x_{k+1} = 500$.

Отже,

$$M_e = 490 + \frac{30-20}{12} \cdot (500-490) \approx 498{,}3 \text{ грн.}$$

Приклад 4. Магазином в продовж місяця реалізовано 100 пар жіночого взуття. Розподіл його за розміром наведено в таблиці

Розмір (№)	33	34	35	36	37	38	39	40
Число пар	3	9	16	24	29	15	3	1

Знайти модальне значення розміру проданого взуття.

Розв’язання. Ознака X (розмір взуття) приймає дискретні значення. З таблиці видно, що частота 37-го розміру взуття дорівнює 29 є найбільшою.

Отже, $Me = 37$.

Приклад 5. Площа зайнята під посівом пшениці розділена на 1000 рівних ділянок, які за урожайністю розподілені так: 200 ділянок, по 12 ц/га, 500 ділянок по 14 ц/га, 300 ділянок по 15 ц/га. З цієї сукупності відібрано 200 ділянок, які за урожайністю розподілені так: 34 ділянки по 12 ц/га, 100 ділянок по 14 ц/га, 66 ділянок по 15 ц/га. Знайти похибки характеристик допущені при даному відборі.

Розв’язання. Знаходимо середню урожайність генеральної сукупності (генеральну середню $\overline{X}$). Побудуємо розподіл урожаю по всієї площі посіву

Урожайність	12	14	15

(X)			
Кількість ділянок (n_x)	200	500	300

За формулою $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k} x_i n_i$.

Маємо

$$\overline{X} = \frac{12\cdot 200 + 14\cdot 500 + 15\cdot 300}{200+500+300} = 13{,}9 \text{ ц.}$$

Обчислимо генеральну дисперсію $Dr = \sigma^2$.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 \cdot n_i .$$

Маємо

$$\sigma^2 = \frac{(12-13{,}9)^2\cdot 200 + (14-13{,}9)^2\cdot 500 + (15-13{,}9)^2\cdot 300}{200+500+300} = 10{,}9.$$

Знайдемо частку дільниць, наприклад, з урожайністю не нижче 14ц/га

$$\rho = \frac{500+300}{1000} = 0{,}8 \text{ або } 80\%.$$

Знаходимо середню урожайність для цих ділянок (вибіркову середню $\widetilde{X}$). Побудуємо статистичний ряд для вибіркової сукупності

X	12	14	15
n_x	34	100	66

Маємо

$$\widetilde{X} = \frac{12\cdot 34 + 14\cdot 100 + 15\cdot 66}{34+100+66} = 13{,}99 \text{ ц.}$$

Обчислимо вибіркову дисперсію

$$\sigma_B{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \cdot n_i .$$

$$\sigma_B{}^2 = \frac{(-1{,}99)^2\cdot 34 + (0{,}01)^2\cdot 100 + (1{,}01)^2\cdot 66}{200} \approx 1{,}01.$$

Частка дільниць з урожайністю не нижче 14ц/га у вибірки складає:

$$\omega = \frac{100+66}{200} = 0{,}83 \text{ або } 83\%.$$

Порівнюючи характеристики вибірки з відповідними характеристиками генеральної сукупності знайдемо похибки, обумовлені способом відбору:

похибка середньої вибірки $\widetilde{X} - \overline{X} = +0{,}09$ ц;

похибка вибіркової дисперсії $\sigma_B{}^2 - \sigma^2 = -0{,}08$;

похибка вибіркової частки $\omega - \rho = +3\%$.

Зауваження. Якщо у даній вибірці співвідношення ділянок 34:100:66 замінити на 40:100:60, похибок не спостерігається, такий відбір буде репрезентативним.

Приклад 6. З 10000 булочок, що випускає хлібопекарня, зроблено вибірку з 1000 булочок з середньою вагою 50 г, а дисперсію 49. Число бракованих булочок – 20 штук. Обчислити похибки вибіркової середньої і частки.

Розв'язання. За умовою задачі $N = 10000$, $n = 1000$, $\tilde{X} = 50$, $\sigma_B{}^2 = 49$, $\omega = 0{,}02$. Оскільки вибірка безповторна, то похибка для середньої ваги булочки обчислюється за формулою

$$\mu = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}.$$

Маємо

$$\mu = \frac{7}{10\sqrt{10}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1000}{10000}} = 0{,}7\sqrt{\frac{0{,}9}{100}} \approx 0{,}21\text{г}.$$

Отже, середня вага булочки у генеральній сукупності

$$50 - 0{,}21 \le X \le 50 + 0{,}21$$

або

$$49{,}79 \le X \le 50{,}21.$$

Похибку для вибіркової частки обчислимо за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}.$$

Тобто

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{1000}} \cdot \sqrt{0{,}9} \approx 0{,}0042.$$

Таким чином у всій данній сукупності булочок частка браку складає $0{,}02 - 0{,}0042 \le \rho \le 0{,}02 + 0{,}0042$ або знаходиться в інтервалі (0,0158; 0,0242).

Приклад 7. Проведено контроль якості продукції фірми. Випадковим повторним відбором зважено 2500 пакетів. Середня вага одного пакета 32 г, а величина дисперсії – 36 г. З якою ймовірністю можна стверджувати, що генеральна середня не більше 32,1 г?

Розв'язання. За умовою задачі $n = 2500$, $\tilde{X} = 32$, $\sigma_B{}^2 = 36$, $\Delta_X = 0{,}1$. Знайти $\Phi(t)$. Для знаходження $\Phi(t)$ використовуємо формулу

$$\Delta_X = t \cdot \mu, \text{ де } \mu = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}, \text{ звідки } t = \frac{\Delta_X \cdot \sqrt{n}}{\sigma_B}.$$

Маємо

$$t = \frac{0{,}1 \cdot \sqrt{2500}}{\sqrt{36}} \approx 0{,}83.$$

Отже, шукана ймовірність

$$\Phi(0{,}83) \approx 0{,}5935.$$

~~8~~15. Статистична перевірка гіпотез

~~8.1 Основні поняття~~

Статистичні гіпотези та їх різновиди

Часто необхідно знати закон розподілу генеральної сукупності. Якщо закон розподілу невідомий, але є міркування для припущення його певного вигляду А, наприклад, розподіл рівномірний, показниковий або нормальний, тоді висувають гіпотезу: *генеральна сукупність розподілена за законом* А.

У цій гіпотезі йде мова про вигляд невідомого розподілу.

Іноді закон розподілу генеральної сукупності відомий, але його параметри (числові характеристики) невідомі. Якщо є міркування припустити, що невідомий параметр θ дорівнює певному значенню θ_0, то висувають гіпотезу: $\theta = \theta_0$. Ця гіпотеза вказує припущену величину параметра відомого розподілу.

Можливі також інші гіпотези: про рівність параметрів двох різних розподілів, про незалежність вибірок, та багато інших.

Статистичними називають гіпотези про вигляд розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.

Наприклад, статистичними будуть гіпотези:

– генеральна сукупність розподілена за нормальним законом;

– дисперсія двох сукупностей, розподілених за законом Пуассона, рівні між собою.

Разом з припущеною гіпотезою завжди можна розглядати протилежну їй гіпотезу. Якщо припущена гіпотеза була відхилена, тоді має місце протилежна гіпотеза. Отже, ці гіпотези доцільно відрізняти.

Основною (нульовою) називається припущена гіпотеза і позначається H_0.

Альтернативною (конкурентною) називається гіпотеза, що суперечить основній, її позначають H_1.

Наприклад, якщо $H_0 : M(X\} = 6$, то $H_1 : M[X) \neq 6$.

Гіпотези можуть містити тільки одне або більше одного припущення.

Гіпотеза називається *простою*, якщо вона містить лише одне припущення.

Наприклад, якщо λ – параметр показникового розподілу, то гіпотеза $H_0 : \lambda = 5$ буде проста.

Гіпотеза називається *складною*, якщо вона складається із скінченої або нескінченої кількості простих гіпотез.

Наприклад, гіпотеза H_0: математичне сподівання нормального розподілу дорівнює 2 – складна гіпотеза тому, що середнє квадратичне відхилення невідоме і може приймати будь-яке значення.

Гіпотеза H_0: показниковий розподіл має параметр $\lambda > 2$ складається із нескінченої множини гіпотез $H_к : \lambda = c_к$, де $c_к > 2$, $k = 1,2,...$

Отформатировано: интервал Перед: 12 пт

Похибки перевірки гіпотез

Статистична гіпотеза, яка висунута, може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки. Перевірка гіпотези здійснюється за даними вибірки, тобто статистичними методами. Тому перевірку гіпотези за даними вибірки називають *статистичною*.

При перевірці статистичної гіпотези за даними випадкової вибірки можна зробити хибний висновок. При цьому можуть бути похибки першого та другого роду.

Якщо за висновком буде відкинута правильна гіпотеза, то кажуть, що це *похибка першого роду*.

Якщо за висновком буде прийнята неправильна гіпотеза, то кажуть, що це *похибка другого роду*.

Ймовірність здійснити похибку першого роду позначається α і називається *рівнем значущості*.

Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01. Якщо прийнято рівень значущості рівним 0,05, то це означає, що в п’яти випадках із 100 ми ризикуємо одержати похибку першого роду (відкинути правильну гіпотезу).

Зауваження. При контролі якості продукції ймовірність визнати нестандартними стандартні вироби називається *ризиком виробника*, а ймовірність визнати придатними браковані вироби називається *ризиком споживача*.

Статистичний критерій перевірки основної гіпотези.

Перевірку статистичної гіпотези можна здійснити лише з використанням даних вибірки. Для цього слід вибрати деяку випадкову статистичну характеристику (вибіркову функцію), точний або наближений розподіл якої відомий, і за допомогою цієї характеристики перевірити основну гіпотезу.

Статистичним критерієм узгодження перевірки гіпотези (або просто *критерієм*) називається випадкова величина К, розподіл якої (точний або наближений) відомий і яка застосовується для перевірки основної гіпотези.

Зауваження. В цьому означені не враховується вид розподілу статистичної характеристики.

Якщо статистична характеристика розподілена нормально, то критерій позначають не літерою К, а літерами U або Z.

Якщо статистична характеристика розподілена за законом Фішера-Снедекора, то її позначають F.

У випадку розподілу статистичної характеристики за законом Стьюдента її позначають Т, а у випадку закону «~~Х~~хі - квадрат» – χ^2.

Наприклад, для перевірки гіпотез про рівність дисперсії двох нормальних генеральних сукупностей за статистичну характеристику К вибирать відношення виправлених вибіркових дисперсій

$$F = \frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}.$$

У різних дослідах дисперсія буде приймати різні, наперед невідомі значення, тому ця величина випадкова. Вона розподілена за законом Фішера-Снедекора.

Спостереженим значенням критерію узгодження називається значення відповідного критерію, обчислене за даними вибірки.

Наприклад, якщо за даними вибірок із двох нормальних генеральних сукупностей знайдено виправлені вибіркові дисперсії $S^1{}_2 = 18$ та $S^2{}_2 = 6$, тоді спостереженим значенням критерію узгодження буде

$$F_{\text{сп}} = \frac{18}{6} = 3.$$

Існує багато критеріїв узгодження. Наприклад, найбільш точний (асимптотично) критерій Неймана-Пірсона використовує нерівності або відношення функцій правдоподібності.

Критична область

Після вибору певного критерію узгодження множину усіх його можливих значень поділяють на дві підмножини, що не перетинаються: одна з них містить значення критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється, а друга – при яких вона приймається.

Критичною областю називається сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називається сукупність значень критерію, при яких гіпотезу приймають.

Критерій узгодження К – одновимірна випадкова величина, усі її можливі значення належать деякому інтервалу. Тому критична область та область прийняття гіпотези також будуть інтервалами, а це означає, що існують точки, які ці інтервали відокремлюють.

Критичними точками (межами) критерію К називаються точки $k_{кр}$, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Розрізняють однобічну (правобічну, лівобічну) та двобічну критичні області.

Правобічною називається критична область, що визначається нерівністю.

$К > k_{кр}$, де $k_{кр}$ – додатне число.

Лівобічною називається критична область, що визначається нерівністю $К < k_{кр}$, де $k_{кр}$ – від’ємне число~~о.~~

~~3.1~~.

Знаходження критичних областей

Щоб знайти однобічну критичну область, треба знайти критичну точку $k_{кр}$. Для цього задають достатньо малу ймовірність – *рівень значущості* α, а потім шукають критичну точку із врахуванням вимоги

$$P(K > k_{кр}) = \alpha$$

у випадку правобічної критичної області~~,~~ або

$$P(K < k_{кр}) = \alpha$$

у випадку лівобічної критичної області.

У~~у~~ випадку двобічної критичної області повинна виконуватись тотожність

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha.$$

Отформатировано: интервал Перед: 12 пт, После: 12 пт

Для кожного критерію узгодження є відповідні таблиці, які дозволяють знайти точку $k_{кр}$, що задовольняє потрібну умову.

При знаходженні критичної області доцільно враховувати потужність критерію.

Потужністю критерію називається ймовірність належності критерію критичній області за умови, що правильна альтернативна гіпотеза.

Іншими словами, потужність критерію є ймовірність того, що основна гіпотеза буде відхилена, якщо альтернативна гіпотеза правильна.

Якщо рівень значущості α вже вибрано, то критичну область доцільно будувати так, щоб потужність критерію була максимальною. Виконання цієї умови забезпечує мінімальну ймовірність похибки другого роду.

Слід зауважити, що единим способом одночасного зменшення ймовірностей похибок першого та другого роду це є збільшення об'єму вибірки.

~~3.1.6~~ Порядок дій при перевірці статистичних гіпотез. Для перевірки правильності основної статистичної гіпотези H_0 необхідно:

1) визначити гіпотезу H_1 альтернативну до гіпотези H_0;

2) вибрати статистичну характеристику перевірки;

3) визначити допустиму ймовірність похибки першого роду, тобто рівень значущості α;

4) знайти за відповідною таблицею критичну область (критичну точку) для вибраної статистичної характеристики.

До критичної області належать такі значення статистичної характеристики, при яких гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_1.

Підкреслимо, що між рівнем значущості α та критичною областю існує такий зв'язок: *якщо гіпотеза* H_1 *правильна, то з ймовірністю* α *значення вибіркової функції будуть належати критичній області*.

Так, при перевірці гіпотези H_0 про рівність дисперсій двох нормальних сукупностей при альтернативній

$$H_1: D(X) > D(Y)$$

треба знайти спостережене значення критерію Фішера-Снедекора, тобто

$$F = \frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}}.$$

Потім з таблиці критичних точок цього розподілу за заданим рівнем значущості α та степенями волі $k_1 = n_1 - 1$ та $k_2 = n_2 - 1$ треба знайти $F_{kp}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$.

Отформатировано: Отступ: Слева: 0 см, Первая строка: 1,25 см

Якщо $F_{сп} < F_{kp}$, то гіпотеза H_0 приймається.

Якщо $F_{сп} > F_{kp}$, то H_0 відхиляють.

~~8.2~~ Деякі критерії перевірки статистичних гіпотез

Отформатировано: По центру

Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань нормальних генеральних сукупностей.

Нехай дві нормально розподілені генеральні сукупності мають рівні дисперсії, а математичні сподівання можуть бути різними.

Із сукупностей зробили вибірки об'єму n_1 та n_2 і знайшли вибіркові середні $\overline{x}_1$ та $\overline{x}_2$, а також виправлені дисперсії S_1 та S_2 відповідно.

Потрібно перевірити гіпотезу H_0: різниця математичних сподівань цих сукупностей дорівнює числу c_0

$$H_0: a_1 - a_2 = c_0.$$

Альтернативною буде гіпотеза

$$H_1: a_1 - a_2 \neq c_0.$$

Для перевірки гіпотези за статистичну перевірку характеристики (вибіркову функцію) візьмемо функцію

$$v_{сп} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - c_0}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)\cdot S_1^{\,2} + (n_2 - 1)\cdot S_2^{\,2}}{n_1 + n_2 - 2}\cdot\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}, \qquad (1)$$

яка розподілена за законом Стьюдента з ступенями волі, що дорівнює $n_1 + n_2 - 2$.

Для заданого рівня значущості α можна знайти критичну область для статичної характеристики ν з врахуванням альтернативної гіпотези H_1 (табл. 6).

Приклад.

Підприємство виготовляє однакові вироби двома способами. Першим способом виготовлено 10 виробів, витрати сировини були такими

1.4, 1.6, 1.2, 1.5, 1.4, 1.6, 1.5, 1.8, 1.1, 1.4.

Другим способом виготовлено 6 виробів, витрати сировини були такими

1.8, 1.7, 1.9, 1.3, 1.6, 1.5.

Припускаючи, що дисперсія витрат сировини однакова, при рівні значущості $\alpha = 0.02$ перевірити гіпотезу

H_0: $a_1 - a_2 = 0$

при альтернативній гіпотезі

H_1: $a_1 - a_2 \neq 0$.

Розв'язання. Треба перевірити гіпотезу про рівність математичних сподівань двох нормальних генеральних сукупностей. Згідно з гіпотезою H_1 критична область буде двобічною і визначається умовою

$$P\left(\nu > \nu_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\nu < +\nu_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2},$$

де статистична характеристика ν визначена формулою (1).

Ступінь волі дорівнює $n_1 + n_2 - 2 = 10 + 6 - 2 = 14$.

З таблиці (6) критичних значень α для 14 ступенів волі одержимо $(\nu_{\frac{\alpha}{2}})_{кр} = 2.62$.

За даними вибірки можна знайти

$\overline{x_1} = 1.45$; $S_1^2 = 0.04$; $\overline{x_2} = 1.63$; $S^2_2 = 0.05$.

Тепер за формулою (1) одержимо

$$\nu_{сп} = \frac{1.45 - 1.63}{\sqrt{\frac{10 \cdot 0.04 + 6 \cdot 0.05}{10 + 6 - 2} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6}\right)}} = 1{,}717.$$

Отже, 1,7 < 2,62, $\nu_{сп}$ не належать до критичної області, тому гіпотеза H_0 може бути прийнята.

Критерій узгодження Пірсона (χ^2).

Критерій узгодження Пірсона (~~χ~~*хі*-квадрат) ефективно використовують для перевірки гіпотези про розподіл генеральної сукупності, тобто що розподіл випадкової величини має певний функціональний вираз.

Розглянемо застосування цього критерію для перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Нехай вибірка має такий розподіл об'єму n

варіанти x_k	x_1	x_2	...	x_m
частоти n_k	n_1	n_2	...	n_m

або

інтервали l_k	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	...	$(x_{m-1}; x_m)$
частоти n_k	n_1	n_2	...	n_m

Потрібно з рівнем значущості α перевірити основну гіпотезу H_0: *генеральна сукупність розподілена нормально*.

Критерієм перевірки цієї гіпотези беруть випадкову величину χ^2, яка у різних випробуванням приймає різні, наперед невідомі значення.

Критичне значення цієї випадкової величини залежить від рівня значущості α та ступенів волі її розподілу k

$$\chi^2_{кр} = \chi^2\,(\alpha, k).$$

Ці критичні значення табульовано для різних α та k.

Для розподілу генеральної сукупності за нормальним законом ступінь волі буде

$$K = m - 3, \qquad (5)$$

Де m – кількість варіантів вибірки або часткових інтервалів варіант.

Правило Пірсона. Щоб при заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена нормально, треба

1) обчислити теоретичні частоти n'_k для варіант вибірки;
2) обчислити спостережене значення критерію χ^2 за формулою

$$\chi_{сп}{}^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(n_k - n'_k\right)^2}{n'_k}; \qquad (6)$$

3) знайти ступінь волі χ^2 за формулою (5);
4) знайти з таблиці критичну точку $\chi_{кр}{}^2$, яка відповідає заданому рівню значущості α та ступеню волі k;
5) порівняти $\chi_{кр}{}^2$ та $\chi_{сп}{}^2$ і зробити висновок;
   - якщо $\chi_{сп}{}^2 < \chi_{kp}{}^2$, то гіпотезу H_0 треба прийняти;
   - якщо $\chi_{сп}{}^2 > \chi_{kp}{}^2$, то гіпотезу H_0 треба відхилити.

Приклад.

При рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні та теоретичні частоти

n_k	6	13	38	74	106	85	30	14
n'_k	3	14	42	82	99	76	37	13

Розв'язання. У даному випадку теоретичні частоти n'_k задані, кількість варіант вибірки $m = 8$. Тому за формулою (5) знаходимо степінь вільності

$k = 8 – 3 = 5$.

З таблиці критичних точок розподілу χ^2 (α, k) для α = 0.05 та k = 5 знаходимо χ^2_{kp} = 11.1.

Для обчислення $\chi_{сп}^2$ за формулою (6) використовуємо розрахункову таблицю

n_k	n'_k	~~n~~ $_k$ - n'_k	(~~n~~ $_k$ - $n'_k)^2$	$\frac{(n_k - n'_k)^2}{n'_k}$
6	3	-3	9	3
13	14	-1	1	0.07
38	42	-4	16	0.38
74	82	-8	64	0.78
106	99	7	49	0.49
85	76	9	81	1.07
30	37	-7	49	1.32
14	13	1	1	0.08
				$\chi_{сп}^2$ = 7.19

Таким чином, $\chi_{сп}^2 = 7.19 < 11.1 = \chi_{kp}^2$, тому за правилом Пірсона гіпотезу H_0 слід прийняти. Отже, дані вибірки узгоджуються з гіпотезою H_0, тому що розбіжність емпіричних та теоретичних частот незначна.

Приклад 1. Коробки з шоколадом упаковуються на кондитерській фабриці автоматично. Зроблена вибірка об’єму n = 20, знайдена виправлена дисперсія $S^2 = \frac{1}{20-1}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 30(г)^2$. Визначити, чи потрібна термінова підналадка станка-автомата. Прийняти α = 0,05.

Розв’язання. Розглянемо гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = 25$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : \sigma^2 > 25$. Обчислимо спостережене значення критерія χ^2 за формулою

$$\chi^2_{сп} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_{сп}},$$

маємо

$$\chi^2_{сп} = \frac{19 \cdot 30}{25} = 22.8.$$

З таблиці критичних точок розподілу χ^2 (α, к) знаходимо

$$\chi^2_{кр} = \chi^2_{0,05;\ 19} = 30,14.$$

Оскільки $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, то гіпотеза H_0 приймається. Отже, згідно з даними, термінової підналадки станок не потребує .

Приклад 2. Аналізується доход X кафе міста, який має нормальний розподіл. Передбачається (гіпотеза H_0), що середній доход у даному місті не менш 1 млн грн. Зроблена вибірка з 49 кафе. Знайдені $\overline{X}$ = 0,9 млн грн. і S = 1,15 млн грн. Визначити несуперечність цих результатів висунутій гіпотезі при рівні значущості $\alpha = 0,01$?

Розв'язок. Розглянемо дві гіпотези

$$H_0 : a = 1;$$

$$H_1 : a < 1.$$

Для перевірки гіпотези H_0 візьмемо функцію

$$T_{cn} = \frac{\bar{x} - a_0}{S/\sqrt{n}},$$

Яка розподілена за законом Стьюдента з степенями вільності $\nu = n - 1$.

Підставляючи значення $\bar{x} = 0{,}9$, S = 1,15, a_0 = 1, n = 49, маємо

$$T_{cn} = \frac{0{,}9 - 1}{1{,}15/7} = -4{,}67.$$

Критичну точку лівобічної критичної області знайдемо з таблиці критичних значень розподілу Стьюдента $t_{кр} = - t_{0,01,48} = - 2{,}404$.

Одержали $T_{сп} < t_{кр}$, тому гіпотеза H_0 відхилена на користь H_1. Тому є підстави рахувати, що середній доход в місті менше, ніж 1 млн грн.

Приклад 3. В університеті проведено аналіз успішності серед студентів і студенток за останні 25 років. X і Y – відповідно їх сумарний бал за час навчання. Одержані такі результати: $\bar{x}$ = 400, S_x^2 = 300; $\bar{y}$ = 420; S_y^2 = 150. Встановити чи є підстави вважати, що дисперсії двох ВВ X і Y суттєво відрізняються.

Розв'язок. За умовою задачі розглянемо гіпотези:

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2;$$

$$H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2.$$

При перевірці гіпотези H_0 про рівність дисперсій двох ВВ знайдемо спостережене значення критерія Фішера – Снедекора,

$$F_{сп} = \frac{S_x^2}{S_y^2} \text{ знайдемо } F_{сп} = \frac{300}{150} = 2.$$

Критична точка розподілу Фішера

$$F_{кр} = F_{0,05;24;24} = 1,98.$$

Оскільки $F_{сп} > F_{кр}$, то гіпотеза H_0 відхиляється на користь гіпотези H_1.

Отже, є підстави рахувати, що розбіжність в оцінках у студентів значно більша, ніж розбіжність в оцінках у студенток.

Індивідуальні завдання

Отформатировано: Шрифт: полужирный

Індивідуальне завдання № 1
Елементи комбінаторики

В–1

1. З міста A в місто B ведуть 6 доріг, а з міста B у місто C – 7 доріг. Скільки є різних маршрутів поїздки з міста A в місто C через місто B?
2. Скількома способами можна переставити літери у слові «какао»?
3. З 5 офіцерів та 10 солдат необхідно скласти наряд так, щоб в нього входили два офіцери та три солдата. Скількома способами це можна зробити?
4. Скільки дев'ятизначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо жодна не повторюється? Скільки серед них чисел, у яких цифри 2 та 5 стоять поруч?

В–2

1. З чотирьох бігунів та десяти стрибунів потрібно скласти команду з шести чоловік, у яку повинні входити хоча б два бігуни. Скількома способами це можна зробити?
2. Скількома способами можна розсадити за п'ятнадцятьма партами 15 учнів по одному учню за партою?
3. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п'ятизначні числа *abcde* без повторення цифр. Скільки серед них чисел, у яких: 1) a=1; 2) a=3, b=2?
4. У ящику є 11 деталей, з яких 7 не пофарбовані. Скількома способами можна витягти 5 деталей так, щоб дві були пофарбовані, а три – не пофарбовані?

В–3

1. У Олени є дев'ять різних книг з математики, у Зіни – шість різних книг з історії. Скількома способами вони можуть обмінятися одна з одною по чотири книги?
2. Скільки різних шестизначних чисел можна написати, якщо користуватися тільки цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (кожну цифру можна використовувати лише один раз), так, щоб у кожному з них була цифра 5?
3. З семи чоловіків та чотирьох жінок потрібно обрати шість чоловік таким чином, щоб серед них було не менше двох жінок. Скількома способами це можна зробити?
4. Скількома способами можна розмістити дев'ять різних книг на полиці?

В–4

1. Скількома способами можна вибрати трьох чергових із класу з 30 учнів?
2. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п'ятизначні числа *abcde* (повторення цифр дозволяється). Скільки серед них чисел, у яких: 1) a=1; 2) a=3, b=2?
3. На книжній полиці вміщується 30-томне зібрання творів. Скількома способами можна розмістити томи так, щоб при цьому перший та другий томи стояли поруч?
4. Множина C складається з восьми елементів, а множина B – з семи елементів. Відомо, що переріз цих множин $C \cap B$ складається з чотирьох елементів. Скільки елементів містить різниця множин $C \setminus B$?

В–5

1. Скількома способами з групи з 30 чоловік можна обрати старосту та двох його помічників?
2. У ящику є 15 деталей, із яких 10 пофарбовані. Скількома способами можна витягти 3 деталі так, щоб дві були пофарбовані, а одна – не пофарбована?
3. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторень цифр в кожному з них? Скільки серед них таких, що не кратні п'яти?
4. Скількома способами можна переставити літери у слові «зошит»?

В–6

1. Скількома способами можна розподілити сім молодих спеціалістів по трьох цехах, яким відповідно потрібні один, два, чотири спеціалісти?
2. З цифр 7, 8, 3, 1, 4 складені всі можливі п'ятизначні числа *abcde* без повторення цифр. Скільки серед них чисел, у яких: 1) e=1; 2) e=1, d=3?
3. Скількома способами можна з 20 чоловік призначити двох чергових з однаковими обов'язками?
4. Скільки можна скласти цілих чисел, кожне з яких зображується трьома різними цифрами?

В–7

1. З семи бігунів та трьох стрибунів потрібно скласти команду з п'яти чоловік, у яку повинен входити хоча б один стрибун. Скількома способами це можна зробити?
2. Скільки є чотирьохзначних чисел, що не діляться на 2 і 5.
3. Множина С складається з восьми елементів, а множина В – з семи елементів. Відомо, що переріз цих множин $C \cap B$ складається з чотирьох елементів. Скільки елементів містить об'єднання множин $C \cup B$?
4. Скільки восьмизначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, якщо жодна не повторюється? Скільки серед них чисел, у яких цифри 1 та 7 стоять поруч?

В–8

1. Скількома способами можна розділити групу з 15 чоловік на дві підгрупи так, щоб в одній було 4 чоловіка, а в іншій – 11?
2. Скільки існує п'ятизначних чисел, що закінчуються двома сімками?
3. Кодовий замок складається з 4 дисків, на кожному з яких 10 цифр. Скільки різних шифрів може бути набрано на цьому замку?
4. Скількома способами можна скласти шестизначне число, у запис якого входять чотири двійки та дві п'ятірки?

В–9

1. Скільки перестановок можна зробити з літер слова «Міссісіпі»?
2. Є зібрання творів з чотирьох книг одного автора та зібрання творів з шести книг іншого автора. Скільки наборів з чотирьох книг можна зробити, щоб в наборі було дві книги одного автора і дві – іншого автора?
3. Скількома способами можна скласти колону з десяти автобусів та трьох автомобілів, вважаючи, що всі автобуси та всі автомобілі однакових марок?
4. Скількома способами можна скласти список з 11 чоловік по 11 чоловік?

В–10

1. З 20 чоловік потрібно обрати сім. Скількома способами це можна зробити?
2. Скількома способами можна покласти дев’ять різних книг у три сумки відповідно по дві, три, чотири книги у кожній сумці?
3. Скільки існує тризначних чисел, у кожному з яких сусідні цифри різні?
4. На книжній полиці вміщується 30-томне зібрання творів. Скількома способами можна розмістити томи так, щоб при цьому перший та другий томи стояли поруч?

В–11

1. У шахматному турнірі беруть участь 5 студентів та 3 школяра. Скількома способами можуть розподілитися місця, зайняті у турнірі школярами, якщо жодні два учасники не набрали однакової кількості балів?
2. Скільки всього дільників у числа 105?
3. Скільки дев’ятизначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо жодна не повторюється? Скільки серед них чисел, у яких цифри 2 та 5 не стоять поруч?
4. Множина C складається з восьми елементів, а множина B – з семи елементів. Відомо, що переріз цих множин $C \cap B$ складається з чотирьох елементів. Скільки елементів містить симетрична різниця множин $C \Delta B$?

В–12

1. Скількома способами можна переставити літери у слові «абракадабра»?
2. В підрозділі 30 солдат та 3 офіцери. Скількома способами можна виділити патруль, що складається з трьох солдатів та одного офіцера?
3. На книжній полиці вміщується 30-томне зібрання творів. Скількома способами можна розмістити томи так, щоб при цьому перший та другий томи не стояли поруч?
4. Скільки існує тризначних чисел, у кожному з яких немає однакових цифр?

В–13

1. Десять чоловік потрібно розбити на три групи відповідно по 2, 3, 5 чоловік у групі. Скількома способами це можна зробити?
2. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п’ятизначні числа *abcde* без повторення цифр. Скільки серед них чисел, у яких: 1) $a \neq 2$; 2) $a=3$, $b=4$, $c=5$?
3. Скількома способами можна обрати три книги з чотирьох книг різних авторів?
4. Скільки перестановок можна зробити з літер слова «краватка»?

В–14

1. Скільки всього чотиризначних чисел, у яких всі цифри непарні?
2. З 7 троянд та 5 тюльпанів потрібно зробити букет, що складається з трьох троянд та двох тюльпанів. Скількома способами це можна зробити?
3. Множина A складається з п’яти елементів, а множина B – з семи елементів. Відомо, що переріз цих множин $A \cap B$ складається з трьох елементів. Скільки елементів містить об’єднання множин $A \cup B$?

4. На книжній полиці вміщується 10-томне зібрання творів. Скількома способами можна розмістити томи так, щоб при цьому перший та другий томи стояли поруч?

В–15

1. Скількома способами можна скласти список з 10 чоловік по 10 чоловік?

2. З трьох математиків та восьми економістів потрібно скласти комісію з шести чоловік. Скількома способами може бути складена комісія, якщо до неї повинні входити не більше двох математиків?

3. Скільки є тризначних чисел, що починаються з двох однакових цифр?

4. У ящику є 18 деталей, з яких 9 не пофарбовані. Скількома способами можна витягти 5 деталей так, щоб дві були пофарбовані, а три – не пофарбовані або три – пофарбовані, а дві – не пофарбовані?

В–16

1. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п'ятизначні числа *abcde* (повторення цифр дозволяється). Скільки серед них чисел, у яких: 1) $a\neq 2$; 2) $a=3$, $b=4$, $c=5$?

2. У меню їдальні є 3 перші, 5 других і 4 треті страви. Скількома способами можна вибрати обід із трьох страв (першу, другу і третю)?

3. У Ніни є сім різних книг з математики, у Іри – дев'ять різних книг з філософії. Скількома способами вони можуть обмінятися одна з одною по п'ять книг?

4. З шести чоловіків та трьох жінок потрібно обрати шість чоловік таким чином, щоб серед них було не менше трьох чоловіків. Скількома способами це можна зробити?

В–17

1. У класі десять предметів та п'ять уроків на день. Скількома способами можна скласти розклад на один день?

2. У ящику є 21 деталь, з яких 10 не пофарбовані. Скількома способами можна витягти 7 деталі так, щоб чотири були пофарбовані, а три – не пофарбовані?

3. Номер автомашини складається із двох букв українського алфавіту (що містить 33 букви) і чотирьох цифр. Скільки можна скласти різних номерів автомашин?

4. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п'ятизначні числа *abcde* без повторення цифр. Скільки серед них чисел, у яких: 1) $a=3$; 2) $a=2$, $b=5$?

В–18

1. Скільки є п'ятизначних чисел, що діляться на 4, у записі яких не використовуються цифри 0,4,6,8?

2. Скількома способами можна переставити літери у слові «заняття»?

3. Скількома способами можна з 20 чоловік призначити двох чергових, з яких один старший?

4. З п'яти математиків та трьох економістів потрібно скласти комісію з шести чоловік. Скількома способами може бути складена комісія, якщо до неї повинні входити хоча б один економіст?

В–19

1. Скільки існує чотиризначних чисел, що закінчуються двійками?

2. У класі дев’ять предметів та шість уроків в день. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?
3. Скількома способами можна скласти колону з п’ятнадцяти автобусів та чотирьох автомобілів, вважаючи, що всі автобуси та всі автомобілі однакових марок?
4. Скількома способами можна з 15 чоловік призначити: а) трьох чергових з однаковими обов’язками; б) двох чергових, з яких один старший?

В–20

1. Скільки є шестизначних чисел, що діляться на 4, у записі яких не використовуються цифри 0,4,6,8?
2. Скількома способами можна переставити літери у слові «комбінаторика»?
3. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторів цифр в кожному з них? Скільки серед них таких, що не кратні п’яти?
4. Скільки всього тризначних чисел, що діляться: 1) на 2; 2) на 3?

В–21

1. З міста A в місто B ведуть 7 доріг, а з міста В у місто C – 9 доріг. Скільки є різних маршрутів поїздки з міста A в місто C через місто B?
2. Скільки різних п’ятизначних чисел можна записати, використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторів цифр в одному числі) так, щоб в кожному з них була цифра 8?
3. Скількома способами можна розсадити за десятьма партами 15 учнів по одному учню за партою?
4. Скільки всього дільників у числа 105?

В–22

1. У меню їдальні є 4 перших, 5 других і 2 третіх страви. Скількома способами можна вибрати обід із трьох страв (першу, другу і третю)?
2. Скількома способами можна покласти чотирнадцять різних книг у чотири сумки відповідно по дві, три, чотири, п’ять книг у кожній сумці?
3. У Андрія є п’ять різних книг по математиці, у Олександра – сім різних книг по економіці. Скількома способами вони можуть обмінятися один з одним по чотири книги?
4. У ящику є 15 деталей, із яких 10 пофарбовані. Скількома способами можна витягти 3 деталі так, щоб дві були пофарбовані, а одна – не пофарбована?

В–23

1. Множина A складається з шести елементів, а множина B – з дев’яти елементів. Відомо, що переріз цих множин $A \cap B$ складається з чотирьох елементів. Скільки елементів містить об’єднання множин $A \cup B$?
2. Скільки можна скласти цілих чисел, кожне з яких зображається п’ятьма різними цифрами?
3. На книжній полиці вміщується 20-томне зібрання творів . Скількома способами можна розмістити тома так, щоб при цьому третій та четвертий томи: 1) стояли поруч; 2) не стояли поруч?
4. З п’яти чоловіків та чотирьох жінок необхідно обрати 5 чоловік так, щоб серед них було не менше двох жінок. Скількома способами це можна зробити?

В–24

1. Скільки існує шестизначних чисел, у кожному з яких немає однакових цифр?
2. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п’ятизначні числа *abcde* (повторення цифр дозволяється). Скільки серед них чисел, у яких: 1) e=1; 2) e≠2; 3) e=3, d=2; 4) a=3, d=4, c=5?
3. Скількома способами можна скласти список з восьми чоловік по 8 чоловік?
4. Скількома способами можна розділити групу з 13 чоловік на дві підгрупи так, щоб в одній було 3 чоловіка, а в іншій – 10?

В–25

1. Скільки існує чотиризначних чисел, у кожному з яких сусідні цифри різні?
2. Скількома способами з групи з 35 чоловік можна обрати старосту та двох його помічників?
3. Скільки дев’ятизначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо жодна не повторюється? Скільки серед них чисел, у яких цифри 6 та 9 стоять поруч?
4. З 6 офіцерів та 9 солдат необхідно скласти наряд так, щоб в нього входили два офіцери та три солдати. Скількома способами це можна зробити?

Індивідуальне завдання № 2
Класична та статистична ймовірності. Теорема додавання ймовірностей

В – 1

1. Провівши 100 пострілів, стрілець влучив у ціль 89 разів. Чому дорівнює частота потрапляння в ціль даним стрільцем?
2. В урні a білих і b чорних куль. З урни виймають навмання одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла.
3. Навмання взятий телефонний номер складається з 5 цифр. Як велика ймовірність, що в ньому всі цифри непарні?
4. Для виробничої практики на 30 студентів надано 15 місць в Києві, 8 – в Харкові і 7 – в Одесі. Знайти ймовірність того, що два певних студента потраплять на практику в одне місто.

В – 2

1. Чи є несумісними наступні події: A – поява герба, B – поява цифри (випробування – підкидання монети)?
2. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірність появи парного числа очок.
3. Чому дорівнює ймовірність того, що у випадково взятій перестановці з n елементів дані елементи a і b не опиняться поруч? (Підказка: можна спочатку розглянути подію, коли елементи a і b опиняться поруч).
4. В ящику знаходяться котушки чотирьох кольорів: білих котушок 50%, червоних – 20%, зелених – 20%, синіх – 10%. Знайти ймовірність того, що взята навмання котушка виявиться зеленою або синьою.

В – 3

1. Чи є рівноможливими події: A – поява герба; B – поява цифри (випробування – підкидання симетричної монети)?

2. В партії, що складається з k виробів, є l дефектів. З партії обирається для контролю r виробів. Знайти ймовірність того, що з них рівно s виробів будуть з дефектами.

3. Чому дорівнює ймовірність того, що, розділивши колоду з 36 карт навпіл, у кожній пачці отримаємо по два тузи?

4. Майстер обслуговує 5 верстатів. 10% робочого часу він проводить у першого верстата, 20% – другого, 30% – у третього, 25% – у четвертого і, нарешті, 15% – ~~у~~у п’ятого. Знайти ймовірність того, що у навмання обраний момент часу він знаходиться у першого або третього верстата.

В – 4

1. Чи утворюють повну групу такі події: A – жодного влучення; B – одне влучення; C – два влучення (випробування – два постріли по мішені).

2. Повна колода карт (52 карти) ділиться навмання на дві рівні пачки по 26 карт. Знайти ймовірність того, що в кожній пачці по два тузи.

3. На окремих картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Картки перемішують, після чого беруть 4 з них і розкладають в ряд одна за одною у порядку появи. Яка ймовірність отримати при цьому парне число?

4. Майстер обслуговує 5 верстатів. 30% робочого часу він проводить у першого верстата, 25% – у другого, 15% – у третього, 10% – у четвертого і, нарешті, 20% – ~~у~~у п'ятого. Знайти ймовірність того, що у навмання обраний момент часу він перебуває у другого аб~~о~~о п’ятого верстата.

В – 5

1. Серед 1000 новонароджених виявилося 517 хлопчиків. Знайти частоту народження хлопчиків.

2. ~~З~~З п’яти букв абетки, яку розрізали, складено слово «книга». Букви розсипали і зібрали в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що знову вийшло слово «книга».

3. Навмання взятий телефонний номер складається з 5 цифр. Знайти ймовірність того, що в ньому всі цифри, кратні 3.

4. З колоди в 36 карт навмання виймають 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться хоча б один туз.

В – 6

1. Чи є рівноможливими такі події: A – поява герба; B – поява цифри (випробування – підкидання монети, що погнули)?

2. В урні a білих і b чорних куль ($a\geq 2$; $b\geq 2$). З урни виймають відразу 2 кулі. Знайти ймовірність того, що кулі одного кольору.

3. Колода з 36 карт розділена навмання на дві рівні частини. Знайти ймовірність того, що кожна з півколод буде однієї масті.

4. На електростанції 15 змінних інженерів, з яких 3 жінки. В зміну зайнято 3 людини. Знайти ймовірність того, що у випадково обрану зміну чоловіків виявиться не менше 2.

В – 7

1. Чи утворюють повну групу подій: A – поява карти червової масті; B – поява карти бубнової масті; C – поява трефи (випробування – добування карти з колоди).

2. В урні a білих і b чорних куль. З урни виймають одну кулю і відкладають у бік. Ця куля виявилася білою. Після цього з урни беруть ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля теж буде білою.
3. З партії, в якій 31 деталь без дефектів і 6 з дефектами навмання беруть 3 деталі. Чому дорівнює ймовірність наступних подій: 1) всі три деталі без дефектів, 2) принаймні одна деталь без дефектів?
4. Кинуто два гральних кубики. Чому дорівнює ймовірність того, що хоча б на одному з них випаде 5 очок?

В – 8

1. Чи є несумісними такі події: A – хоча б одне влучення, B – хоча б один промах (випробування – два постріли по мішені)?
2. Гральний кубик кидається один раз. Знайти ймовірність появи не менше 5 очок.
3. З партії, у якій 31 деталь без дефектів і 6 з дефектами навмання беруть 3 деталі. Чому дорівнює ймовірність того, що принаймні одна деталь без дефектів?
4. В урні 25 білих, 20 чорних, 15 синіх та 10 червоних куль. Витягли одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля: 1) синя; 2) біла або чорна.

В – 9

1. Чи є рівноможливими наступні події: A – поява не менше трьох очок; B – поява не більше чотирьох очок (випробування – підкидання грального кубика).
2. Серед 1000 новонароджених виявилися 517 хлопчиків. Знайти частоту народження дівчаток?
3. З колоди в 36 карт навмання обирають 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться два тузи.
4. В урні 20 білих, 25 чорних, 10 синіх і 15 червоних куль. Витягли одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля : 1) біла; 2) синя або червона.

В – 10

1. Чи є несумісними наступні події: A – жодного влучення, B – одне влучення, C – два влучення (випробування – два постріли по мішені).
2. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірність появи не більше 5 очок.
3. В урні 3 білих, 21 чорна і 5 червоних куль. Чому дорівнює ймовірність того, що навмання вийнята куля виявиться: 1) червоною, 2) не чорною?
4. У супермаркеті 15 продавців, з яких 3 чоловіки. У зміну зайнято 5 чоловік. Знайти ймовірність того, що у випадково обрану зміну жінок виявиться не менше 3.

В – 11

1. Чи є рівноможливими наступні події: A – поява карти червової масті, B – поява карти бубнової масті, C – поява карти трефової масті (випробування – виймання однієї карти з колоди).
2. В урні a білих і b чорних куль ($a\geq 2$; $b\geq 2$). З урни виймають одразу 2 кулі. Знайти ймовірність того, що кулі різних кольорів?
3. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірність появи парного числа очок.

4. Майстер обслуговує 5 верстатів. 20% робочого часу він проводить у першого верстата, 10% – у другого, 15% – у третього, 25% – у четвертого і, нарешті, 30% – у п'ятого. Знайти ймовірність того, що в навмання обраний момент часу він знаходиться біля першого або другого, або третього.

В – 12

1. Чи є несумісними наступні події: *А* – поява двох чорних карт, *В* – поява туза, *С* – поява дами (випробування – виймання двох карт з колоди).
2. З відділу, що складається з 25 чоловік, серед яких 5 жінок, направляють 3 людини у відрядження. Вважаючи, що кожен з присутніх з однаковою ймовірністю може бути обраний, знайти ймовірність того, що у відрядження поїдуть дві жінки і один чоловік.
3. Підкидаються одночасно два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що добуток очок, що випали, дорівнює 8.
4. 12 співробітників отримали путівки в 4 санаторії: 3 – в перший 3 – в другий, 2 – в третій, 4 – в четвертий. Знайти ймовірність того, що три співробітники поїдуть в один санаторій.

В – 13

1. Зробивши 100 пострілів, стрілець потрапив у мішень 89 разів. Чому дорівнює частота промахів цього стрільця?
2. Суспільство з 10 чоловік сідає на лавку. Знайти ймовірність того, що дві певні особи виявляться поруч.
3. На окремих картках написані цифри 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Картки перемішують, після чого беруть 4 з них і розкладають в ряд одну за одною в порядку появи. Яка ймовірність отримати при цьому число 1234?
4. В урні 10 білих, 15 чорних, 20 синіх і 25 червоних куль. Вийняли одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля : 1) червона; 2) біла, синя або чорна.

В – 14

1. Серед 1000 новонароджених виявилися 517 хлопчиків. Знайти частоту народження дівчаток?
2. Підкидаються одночасно дві гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума випавших очок дорівнює 8.
3. В урні a білих і b чорних куль ($a \geq 2$; $b \geq 2$). З урни виймають відразу 2 кулі. Знайти ймовірність того, що кулі одного кольору.
4. Майстер обслуговує 5 верстатів. 25% робочого часу він проводить у першого верстата, 30% – у другого, 15% – у третього, 20% – у четвертого і, нарешті, 10% – у п’ятого. Знайти ймовірність того, що в навмання обраний момент часу він знаходиться біля четвертого або п'ятого.

В – 15

1. Серед 4000 перших чисел натурального ряду є 551 просте число. Знайти частоту появи простого числа.
2. В урні 3 білих, 21 чорна і 5 червоних куль. Чому дорівнює ймовірність того, що навмання вийнята куля виявиться : 1) червоною 2) не чорною?
3. З відділу, що складається з 25 чоловік, серед яких 5 жінок, направляють 3 людини у відрядження. Вважаючи, що кожен з присутніх з однаковою

ймовірністю може бути обраний, знайти ймовірність того, що у відрядження поїдуть дві жінки і один чоловік.
4. Підприємство в середньому дає 21% продукції вищого сорту і 70% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що випадково взятий виріб виявиться першого або вищого сорту.

В – 16

1. Чи є несумісними наступні події: *А* – поява герба на першій монеті, *В* – поява цифри на другій монеті (випробування – підкидання двох монет).
2. В урні *a* білих і *b* чорних куль ($a\geq2$). З урни виймають відразу 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білими.
3. Суспільство з 10 чоловік сідає на лавку. Знайти ймовірність того, що дві певні особи виявляться поруч.
4. Для виробничої практики на 30 студентів надані 10 місць в Києві, 15 – в Харкові і 5 – в Одесі. Знайти ймовірність того, що два певні студенти потраплять на практику в одне місто.

В – 17

1. Чи є рівноможливими такі події: *А* – поява не менше трьох очок; *В* – поява не більше чотирьох очок (випробування – підкидання грального кубика).
2. Навмання взятий телефонний номер складається з 5 цифр. Як велика ймовірність, що в ньому всі цифри різні?
3. З партії, в якій 31 деталь без дефектів і 6 з дефектами, беруть навмання 3 деталі. Чому дорівнює ймовірність того, що всі три деталі без дефектів?
4. У супермаркеті 20 продавців, з яких 3 чоловіки. В зміну зайнято 4 людини. Знайти ймовірність того, що в випадково обрану зміну жінок виявиться не менш 3.

В – 18

1. Чи утворюють повну групу подій: *А* – поява двох гербів; *В* – поява двох цифр (випробування – підкидання двох монет).
2. Підкидаються одночасно два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що добуток очок, що випали, дорівнює 8.
3. На окремих картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Картки перемішують, після чого беруть 4 з них і розкладають в ряд одна за одною у порядку появи. Яка ймовірність отримати при цьому парне число?
4. Майстер обслуговує 5 верстатів. 15% робочого часу він проводить у першого верстата, 10% – другого, 20% – у третього, 30% – у четвертого і, нарешті, 25% – ~~у~~у п’ятого. Знайти ймовірність того, що у навмання обраний момент часу він знаходиться у першого або четвертого верстата.

В – 19

1. Провівши 50 пострілів, стрілець влучив у ціль 39 разів. Чому дорівнює частота потрапляння в ціль даним стрільцем?
2. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірність появи парного числа очок.
3. Чому дорівнює ймовірність того, що, розділивши колоду з 36 карт навпіл, у кожній пачці отримаємо по два тузи?

4. Майстер обслуговує 5 верстатів. 30% робочого часу він проводить у першого верстата, 25% – другого, 15% – у третього, 10% – у четвертого і, нарешті, 20% – у’ п'ятого. Знайти ймовірність того, що у навмання обраний момент часу він знаходиться у другого або п’ятого верстата.

В – 20

1. Серед 100 новонароджених виявилося 57 хлопчиків. Знайти частоту народження дівчаток.
2. В урні *a* білих і *b* чорних куль ($a \geq 2$; $b \geq 2$). З урни виймають відразу 3 кулі. Знайти ймовірність того, що кулі одного кольору.
3. В урні 25 білих, 20 чорних, 15 синіх і 10 червоних куль. Витягли одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля : 1) червона; 2) синя або біла.
4. З партії, в якій 29 деталей без дефектів і 8 з дефектами навмання беруть 4 деталі. Чому дорівнює ймовірність наступних подій: 1) всі чотири деталі без дефектів, 2) принаймні дві деталі без дефектів?

В – 21

1. Чи є рівноможливими наступні події: *A* – поява не менше трьох очок; *B* – поява не більше чотирьох очок (випробування – підкидання грального кубика).
2. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірність появи не більше 4 очок.
2. З відділу, що складається з 14 чоловік, серед яких 6 жінок, направляють 3 людини у відрядження. Вважаючи, що кожен з присутніх з однаковою ймовірністю може бути обраний, знайти ймовірність того, що у відрядження поїдуть одна жінка і два чоловіки.
4. 12 співробітників отримали путівки в 4 санаторії: 3 – в перший 3 – в другий, 2 – в третій, 4 – в четвертий. Знайти ймовірність того, що три співробітники поїдуть в один санаторій.

В – 22

1. Провівши 60 пострілів, стрілець влучив у ціль 29 разів. Чому дорівнює частота промахів цього стрільця?
2. Підкидаються одночасно дві гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума випавших очок дорівнює 7.
3. На окремих картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Картки перемішують, після чого беруть 5 з них і розкладають в ряд одну за одною в порядку появи. Яка ймовірність отримати при цьому число 12345?
4. Для виробничої практики на 30 студентів надано 13 місць в Києві, 10 – в Харкові і 7 – в Одесі. Знайти ймовірність того, що два певних студента потраплять на практику в одне місто.

В – 23

1. Чи є рівноможливими наступні події: *A* – поява не менше двох очок; *B* – поява не більше трьох очок (випробування – підкидання грального кубика).
2. Підкидаються одночасно два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що добуток очок, що випали, дорівнює 6.
3. Навмання взятий телефонний номер складається з 5 цифр. Як велика ймовірність, що в ньому всі цифри парні?

4. В ящику знаходяться котушки чотирьох кольорів: білих котушок 60%, червоних – 15%, зелених – 10%, синіх – 15%. Знайти ймовірність того, що взята навмання котушка виявиться зеленою або червоною.

В – 24

1. Чи є рівноможливими такі події: A – поява герба; B – поява цифри (випробування – підкидання симетричної монети)?
2. Повна колода карт (52 карти) ділиться навмання на дві рівні пачки по 26 карт. Знайти ймовірність того, що в кожній пачці по два тузи.
3. Навмання взятий телефонний номер складається з 6 цифр. Як велика ймовірність, що в ньому всі цифри кратні 3?
4. На електростанції 20 змінних інженерів, з яких 4 жінки. В зміну зайнято 5 осіб. Знайти ймовірність того, що у випадково обрану зміну чоловіків виявиться не менше 3.

В – 25

1. Чи утворюють повну групу подій: A – поява карти червової масті; B – поява карти бубнової масті; C – поява трефи (випробування – добування карти з колоди).
2. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірність появи не менше 5 очок.
3. З колоди в 36 карт навмання обирають 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться два тузи.
4. У супермаркеті 25 продавців, з яких 5 чоловіки. У зміну зайнято 5 осіб. Знайти ймовірність того, що у випадково обрану зміну жінок виявиться не менше 4.

Індивідуальне завдання № 3
Теорема множення ймовірностей. Умовна ймовірність. Формула повної ймовірності. Формула Байєса (Бейєса). Формула Бернуллі. Теореми Пуассона, Муавра-Лапласа

В – 1

1. У першому ящику a білих і b чорних куль; у друго~~м~~му – c білих і d чорних куль. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що одна куля біла, а інша – чорна?
2. На склад надходить продукція з трьох фабрик. Причому продукція першої фабрики становить 20%, другої – 46% і третьої – 34%. Відомо, що середній відсоток нестандартних виробів для першої фабрики дорівнює 3%, для другої – 2% і для третьої – 1%. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб вироблено на першій фабриці, якщо він виявився нестандартним.
3. Ймовірність появи події A дорівнює 0,4. Яка ймовірність того, що при 10 випробуваннях подія ~~A~~ з’явиться не більше трьох разів?
4. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив відбудеться ~~в~~на п'яти веретенах.

В – 2

1. Три стрільця незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,75, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Визначити ймовірність того, що всі три стрільця одночасно влучать у ціль.
2. Є три однакових на вигляд ящики. У першому ящику 20 білих куль, у другому – 10 білих і 10 чорних куль, у третьому – 20 чорних куль. З обраного навмання ящика дістали білу кулю. Обчислити ймовірність того, що цю кулю дістали з першого ящика.
3. В урні 10 білих і 40 чорних куль. Виймають поспіль 14 куль, причому колір вийнятої кулі реєструють, а потім куля повертають в урну. Визначити найімовірніше число появ білої кулі.
4. Ймовірність виготовлення деталей вищого сорту на даному верстаті дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 26 деталей половина виявиться вищого сорту.

В – 3

1. У першому ящику 1 біла, 2 червоних та 3 синіх кулі; у другому ящику 2 білі, 6 червоних та 4 синіх кулі. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль немає синіх?
2. Прилад працює в двох режимах: 1) нормальному і 2) ненормальний. Нормальний режим спостерігається у 80% всіх випадків роботи приладу; ненормальний – у 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час T в нормальному режимі дорівнює 0,1; в ненормальному – 0,7. Знайти повну ймовірність p виходу приладу з ладу за час T.
3. У кожному з чотирьох ящиків по 5 білих та по 15 чорних куль. З кожного ящика дістали по одній кулі. Яка ймовірність дістати дві білі і дві чорні кулі?
4. Монета підкинута 40 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде у 25 випадках.

В – 4

1. Ймовірність влучення в ціль першим стрільцем дорівнює p_1, а другим стрільцем – p_2. Стрільці вистрілили одночасно. Яка ймовірність того, що один з них влучить у ціль, а інший не влучить?
2. Є чотири урни. У першій урні 1 біла і 1 чорна кулі, у другій – 2 білих і 3 чорних кулі, у третій – 3 білих і 5 чорних куль, і в четвертій – 4 білих і 7 чорних куль. Подія H_i – вибір i-й урни (i=1,2,3,4). Відомо, що ймовірність вибору i-ой урни дорівнює $i/10$, тобто $P(H_1)=1/10$, $P(H_2)=1/5$, $P(H_3)=3/10$, $P(H_4)=2/5$. Обирають навмання одну з урн і виймають з неї кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля чорна.
3. Ймовірність влучення стрільцем у ціль дорівнює 0,7. Зроблено 25 пострілів. Визначити найімовірніше число влучень у ціль.
4. Ймовірність виходу з ладу за деякий час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що зі 100 конденсаторів протягом часу T вийде з ладу не менше 30 конденсаторів.

В – 5

1. У першому ящику a білих і b чорних куль; у друго~~м~~му – c білих і d чорних куль. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що одна куля біла, а інша – чорна?

2. Лиття у болванках надходить з двох заготівельних цехів: 70% з першого і 30% – з другого. При цьому матеріал першого цеху має 10% браку, а другого – 20. Знайти ймовірність того, що взята навмання болванка без дефектів.

3. Визначити ймовірність того, що в родині, яка ма~~є~~є п’ять дітей, буде три дівчинки і два хлопчика. Ймовірність народження хлопчика і дівчинки передбачаються однаковими.

4. З партії, в якій частка першосортних деталей дорівнює 0,8, відібрано 60 одиниць (з поверненням). Визначити ймовірність того, що серед відібраних деталей виявиться 30 деталей першого сорту.

В – 6

1.З повної колоди карт (52 аркуша) виймають відразу чотири карти. Знайти ймовірність того, що ці карти разних мастей.

2. Є три однакових на вигляд урни. У першій урні міститься a білих куль та b чорних; у другій – c білих та d чорних; у третій – тільки білі кулі. Хтось підходить навмання до однієї з урн і виймає з неї одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла (a=3, b=5, c=6, d=4).

3. У результаті багаторічних спостережень встановлено, що ймовірність випадіння дощу 1 жовтня в даному місті дорівнює 1/7. Визначити найімовірніше число дощових днів 1 жовтня в даному місті за 40 років.

4. Яка ймовірність, що при 100 підкиданнях монети герб~~»~~ з’явиться від 40 до 60 разів?

В – 7

1. У першому ящику 2 білі і 10 чорних куль; у другому – 8 білих і 4 чорних кулі. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

2. Прилади одного найменування виготовляються двома заводами; перший завод постачає 2/3 всіх виробів, що надходять на виробництво; другий 1/3. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) приладу, виготовленого першим заводом, дорівнює 0,7 , другого – 0,6. Визначити повну надійність p приладу, що надійшов на виробництво.

3. Визначити ймовірність того, що в родині, яка ма~~є~~є п’ять дітей, буде не більше трьох дівчинок. Ймовірність народження хлопчика і дівчинки передбачаються однаковими.

4. З партії, в якій частка першосортних деталей дорівнює 0,8, відібрано 60 одиниць (з поверненням). Визначити ймовірність того, що серед відібраних деталей виявиться 45 деталей першого сорту.

В – 8

1. В ящику a білих і b чорних куль. Яка ймовірність того, що з двох добутих куль одна біла, а інша – чорна? (Добута куля в урну не повертається).

2. Є чотири урни. У першій урні 1 біла і 1 чорна кулі, у другій – 2 білих і 3 чорних кулі, у третій – 3 білих і 5 чорних куль, і в четвертій – 4 білих і 7 чорних

куль. Подія H_i – вибір i-й урни (i=1, 2, 3, 4). Відомо, що ймовірність вибору i-ой урни дорівнює i/10, тобто $P(H_1)=1/10$, $P(H_2)=1/5$, $P(H_3)=3/10$, $P(H_4)=2/5$. Обирають навмання одну з урн і виймають з неї кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.
3. Є 20 ящиків однорідних деталей. Ймовірність того, що в одному взятому навмання ящику деталі виявляться стандартними, дорівнює 0,75. Знайти найімовірніше число ящиків, в яких всі деталі стандартні.
4. Ймовірність виходу з ладу за деякий час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що зі 100 конденсаторів протягом часу T вийде з ладу не менше 30 конденсаторів.

В – 9

1. У першому ящику a білих і b чорних куль; у другому – c білих і d чорних куль. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі чорні?
2. На склад надходить продукція з трьох фабрик. Причому продукція першої фабрики становить 20%, другої – 46% і третьої – 34%. Відомо, що середній відсоток нестандартних виробів для першої фабрики дорівнює 3%, для другої – 2% і для третьої – 1%. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться нестандартним.
3. Монету підкидають 8 разів. Яка ймовірність того, що 6 разів вона впаде гербом догори?
4. При масовому виробництві напівпровідникових діодів ймовірність браку при формовці дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що з 400 взятих навмання діодів 50 будуть бракованими?

В – 10

1. Три стрільця незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,75, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Визначити ймовірність того, що в ціль влучить хоча б один стрілець.
2. Є три однакових на вигляд ящики. У першому ящику 20 білих куль, у другому – 10 білих і 10 чорних куль, у третьому – 20 чорних куль. З обраного навмання ящика дістали чорну кулю. Обчислити ймовірність того, що цю кулю дістали з другого ящика.
3. Робітник за зміну може виготовити 120 виробів, причому ймовірність того, що ці вироби вищого сорту, становить 0,94. Визначити найімовірніше число виробів вищого сорту, виготовлених робітником.
4. Проведено 700 незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події A дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що частота появи події A виявиться укладеною між 460 і 600.

В – 11

1. У першому ящику 2 білих і 10 чорних куль; у другому – 8 білих і 4 чорних кулі. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що одна куля біла, а інша – чорна?
2. Чоловік, заблукавши у лісі, вийшов на галявину, звідки вело 5 доріг. Відомо, що ймовірність виходу з лісу за годину для різних доріг дорівнюють відповідно

0,6, 0,3, 0,2, 0,1, 0,1. Чому дорівнює ймовірність того, що чоловік пішов по першій дорозі, якщо відомо, що він вийшов з лісу за годину?
3. В урні 20 білих і 10 чорних куль. Вийняли поспіль 4 кулі, причому кожну вийняту кулю повертають в урну перед витяганням наступної і кулі в урні перемішують. Яка ймовірність того, що з чотирьох вийнятих куль виявиться дві білі?
4. З партії, в якій частка першосортних деталей дорівнює 0,8, відібрано 70 одиниць (з поверненням). Визначити ймовірність того, що серед відібраних деталей виявиться 48 деталей першого сорту.

В – 12

1. У першому ящику 1 біла, 2 червоних і 3 синіх кулі; у другому ящику 2 білих, 6 червоних та 4 синіх кулі. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль немає червоних?
2. Є 10 однакових на вигляд урн, з яких у 9 знаходиться по 2 чорні та 2 білі кулі, а в одній – 5 білих і 1 чорна кулі. З навмання взятої урни вилучено кулю. Чому дорівнює ймовірність того, що кулю взято з урни, що містить 5 білих куль, якщо вона виявилася білою?
3. Робітник за зміну може виготовити 140 виробів, причому ймовірність того, що ці вироби вищого сорту, становить 0,8. Визначити найімовірніше число виробів вищого сорту, виготовлених робітником.
4. Стрілець зробив 30 пострілів з імовірністю влучення при окремому пострілі 0,3. Знайти ймовірність того, що при цьому буде 8 влучень.

В – 13

1. Ймовірність того, що протягом дня відбудеться пошкодження верстата, дорівнює 0,03. Яка ймовірність того, що протягом чотирьох днів поспіль не відбудеться жодного пошкодження?
2. Є три однакових на вигляд ящики. У першому ящику 20 білих куль, у другому – 10 білих і 10 чорних куль, у третьому – 20 чорних куль. З обраного навмання ящика дістали білу кулю. Обчислити ймовірність того, що цю кулю дістали з другого ящика.
3. Монету підкидають 6 разів. Яка ймовірність того, що вона впаде гербом догори не більше трьох разів?
4. Було посаджено 400 дерев. Знайти ймовірність того, що число дерев, що укоренилися, більше 250, якщо ймовірність, що окреме дерево укорениться, дорівнює 0,8.

В – 14

1. З повної колоди карт (52 аркуша) виймають послідовно чотири карти (карта після виймання повертається до колоди). Знайти ймовірність того, що ці карти будуть разних мастей.
2. Є дві урни, в першій a білих куль і b чорних; у другий c білих і d чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою. (a=5, b=3, c=4, d=2).
3. Є 100 урн з білими і чорними кульками. Ймовірність появи білої кулі з кожної урни дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число урн, в яких всі кулі білі.

4. З партії, в якій частка першосортних деталей дорівнює 0,7, відібрано 60 одиниць (з поверненням). Визначити ймовірність того, що серед відібраних деталей виявиться 50 деталей першого сорту.

В – 15

1. У першому ящику a білих і b чорних куль; у другому – c білих і d чорних куль. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що куля з першого ящика біла, з другого – чорна?
2. Є 10 однакових на вигляд урн, з яких у 9 знаходиться по 2 чорні та 2 білі кулі, а в одній – 5 білих і 1 чорна кулі. З навмання взятої урни вилучено кулю. Чому дорівнює ймовірність того, що куля виявиться білою?
3. В класі 20 хлопчиків і 10 дівчаток. На кожне з трьох питань, заданих вчителем, відповіли по одному учню. Яка ймовірність того, що серед тих, хто відповів, було два хлопчики і одна дівчинка?
4. Ймовірність ураження цілі при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що ціль буде уражена від 200 до 250 разів у серії з 600 пострілів?

В – 16

1. Роблять три постріли по одній мішені. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що в результаті цих пострілів відбудеться тільки одне влучення.
2. Є три однакових на вигляд ящики. У першому ящику 20 білих куль, у другому – 10 білих і 10 чорних куль, у третьому – 20 чорних куль. З обраного навмання ящика дістали чорну кулю. Обчислити ймовірність того, що цю кулю дістали з третього ящика.
3. Оптова база забезпечує 90 магазинів. Ймовірність заявки на цей день від кожного магазину дорівнює 0,4. Знайти найімовірніше число заявок на даний день.
4. З партії, в якій частка першосортних деталей дорівнює 0,6, відібрано 80 одиниць (з поверненням). Визначити ймовірність того, що серед відібраних деталей виявиться 55 деталей першого сорту.

В – 17

1. В ящику 6 білих і 8 чорних куль. З ящика вийняли дві кулі (не повертаючи вийняту кулю в ящик). Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.
2. Чоловік, заблукавши у лісі, вийшов на галявину, звідки вело 5 доріг. Відомо, що ймовірність виходу з лісу за годину для різних доріг дорівнюють відповідно 0,6, 0,3, 0,2, 0,1, 0,1. Чому дорівнює ймовірність того, що чоловік пішов з лісу за годину?
3. Монету підкидають 7 разів. Яка ймовірність того, що вона впаде гербом догори не менше п’яти разів?
4. Бюффон кинув монету 4040 разів. При цьому герб випав 2048 разів. З якою ймовірністю можна очікувати цей результат?

В – 18

1. У першому ящику 1 біла, 2 червоних і 3 синіх кулі; у другому ящику 2 білих, 6 червоних та 4 синіх кулі. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль немає білих?

2. Є три однакових на вигляд урни. У першій урні міститься a білих куль та b чорних; у другій – c білих та d чорних; у третій – тільки чорні кулі. Хтось підходить навмання до однієї з урн і виймає з неї одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля чорна (a=3, b=5, c=6, d=4).
3. В урні 20 білих і 10 чорних куль. Вийняли поспіль 4 кулі, причому кожну вийняту кулю повертають в урну перед витяганням наступної і кулі в урні перемішують. Яка ймовірність того, що з чотирьох вийнятих куль виявиться дві чорних?
4. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив відбудеться ~~в~~на п’яти веретенах.

В – 19

1. У першому ящику a білих і b чорних куль; у друго~~м~~му – c білих і d чорних куль. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що одна куля біла, а інша – чорна?
2. Є три однакових на вигляд ящики. У першому ящику 20 білих куль, у другому – 10 білих і 10 чорних куль, у третьому – 20 чорних куль. З обраного навмання ящика дістали білу кулю. Обчислити ймовірність того, що цю кулю дістали з першого ящика.
3. У кожному з чотирьох ящиків по 10 білих та по 13 чорних куль. З кожного ящика дістали по одній кулі. Яка ймовірність дістати дві білі і дві чорні кулі?
4. Ймовірність виходу з ладу за деякий час T одного конденсатора дорівнює 0,3. Визначити ймовірність того, що з 80 конденсаторів протягом часу T вийде з ладу не менше 30 конденсаторів.

В – 20

1. У першому ящику a білих і b чорних куль; у друго~~м~~му – c білих і d чорних куль. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?
2. Є три однакових на вигляд урни. У першій урні міститься a білих куль та b чорних; у другій – c білих та d чорних; у третій – тільки білі кулі. Хтось підходить навмання до однієї з урн і виймає з неї одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла (a=3, b=9, c=7, d=2).
3. Визначити ймовірність того, що в родині, яка має’ п'ять дітей, буде не менше трьох дівчинок. Ймовірність народження хлопчика і дівчинки передбачаються однаковими.
4. Ймовірність виходу з ладу за деякий час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що зі 100 конденсаторів протягом часу T вийде з ладу не більше 20 конденсаторів.

В – 21

1. У першому ящику a білих і b чорних куль; у друго~~м~~му – c білих і d чорних куль. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі чорні?
2. Є три однакових на вигляд ящики. У першому ящику 20 білих куль, у другому – 10 білих і 10 чорних куль, у третьому – 20 чорних куль. З обраного

навмання ящика дістали чорну кулю. Обчислити ймовірність того, що цю кулю дістали з другого ящика.
3. В урні 20 білих і 10 чорних куль. Вийняли поспіль 5 куль, причому кожну вийняту кулю повертають в урну перед витяганням наступної і кулі в урні перемішують. Яка ймовірність того, що з чотирьох вийнятих куль виявиться дві білі?
4. Стрілець зробив 20 пострілів з імовірністю влучення при окремому пострілі 0,4. Знайти ймовірність того, що при цьому буде 9 влучень.

В – 22

1. Три стрільця незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,7, для другого – 0,85, для третього – 0,95. Визначити ймовірність того, що всі три стрільця одночасно влучать у ціль.
2. Прилад працює в двох режимах: нормальному і ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% всіх випадків роботи приладу; ненормальний – у 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час T в нормальному режимі дорівнює 0,1; в ненормальному – 0,7. Знайти повну ймовірність p виходу приладу з ладу за час T.
3. Ймовірність влучення стрільцем у ціль дорівнює 0,8. Зроблено 20 пострілів. Визначити найімовірніше число влучень у ціль.
4. З партії, в якій частка першосортних деталей дорівнює 0,8, відібрано 46 одиниць (з поверненням). Визначити ймовірність того, що серед відібраних деталей виявиться 25 деталей першого сорту.

В – 23

1. З повної колоди карт (52 аркуша) виймають відразу чотири карти. Знайти ймовірність того, що ці карти будуть різних мастей.
2. Прилади одного найменування виготовляються двома заводами; перший завод постачає 2/3 всіх виробів, що надходять на виробництво; другий 1/3. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) приладу, виготовленого першим заводом, дорівнює 0,7 , другого – 0,6. Визначити повну надійність p приладу, що надійшов на виробництво.
3. Є 20 ящиків однорідних деталей. Ймовірність того, що в одному взятому навмання ящику деталі виявляться стандартними, дорівнює 0,75. Знайти найімовірніше число ящиків, в яких всі деталі стандартні.
4. При масовому виробництві напівпровідникових діодів ймовірність браку при формовці дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що з 300 взятих навмання діодів 70 будуть бракованими?

В – 24

1. Три стрільця незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,7, для другого – 0,85, для третього – 0,95. Визначити ймовірність того, що в ціль влучить хоча б один стрілець.
2. Чоловік, заблукавши у лісі, вийшов на галявину, звідки вело 5 доріг. Відомо, що ймовірність виходу з лісу за годину для різних доріг дорівнюють відповідно

0,6, 0,3, 0,2, 0,1, 0,1. Чому дорівнює ймовірність того, що чоловік пішов по третій дорозі, якщо відомо, що він вийшов з лісу за годину?
3. Робітник за зміну може виготовити 130 виробів, причому ймовірність того, що ці вироби вищого сорту, становить 0,9. Визначити найімовірніше число виробів вищого сорту, виготовлених робітником.
4. Було посаджено 400 дерев. Знайти ймовірність того, що число дерев, що укоренилися, більше 310, якщо ймовірність, що окреме дерево укорениться, дорівнює 0,7.

В – 25

1. З повної колоди карт (52 аркуша) виймають послідовно чотири карти (карта після виймання повертається до колоди). Знайти ймовірність того, що ці карти будуть різних мастей.
2. Є 10 однакових на вигляд урн, з яких у 9 знаходиться по 3 чорних та 3 білих кулі, а в одній – 7 білих і 1 чорна кулі. З навмання взятої урни вилучено кулю. Чому дорівнює ймовірність того, що кулю взято з урни, що містить 7 білих куль, якщо вона виявилася білою?
3. Оптова база забезпечує 75 магазинів. Ймовірність заявки на цей день від кожного магазину дорівнює 0,35. Знайти найімовірніше число заявок на даний день.
4. Бюффон кинув монету 3840 разів. При цьому герб випав 1848 разів. З якою ймовірністю можна очікувати цей результат?

Індивідуальне завдання № 4

Закони розподілу та числові характеристики дискретних та неперервних випадкових величин. Функція розподілу та щільність ймовірності

Отформатировано: интервал После: 12 пт

В ~~—~~ 1

1~~.~~

Отформатировано: Шрифт: полужирный

Отформатировано: интервал После: 0 пт

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(Х+У), D(У).

Х	0	1	2	3
Р	0,4	0,3	0,2	0,1

та

У	0	1	2
Р	0,25	0,5	0,25

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.
2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ Ax^2, 0 < x \le 1, \\ 0, x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, F(X), $\text{P}(-2 \le X < \frac{1}{2})$, М(Х), D(X) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~
3. Знайти середнє значення числа влучень у мішень при 6 пострілах, якщо дана ймовірність влучення при окремому пострілі p=2/3.

В ~~2~~ 2

Отформатировано: интервал Перед: 12 пт

Отформатировано: Шрифт: полужирный

~~1.~~

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(ХУ), М(Х+У), D(X).

Отформатировано: интервал После: 0 пт

X	1	2	3
P	0,1	0,3	0,6

та

У	–2	–1	0
P	0,6	0,3	0,1

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.
2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{A}{3}x, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, F(X), $\mathrm{P}(-3\le X<\frac{3}{4})$, M(X), D(X) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.
~~у.~~
3. Ймовірність влучення зі знаряддя в ціль при одному пострілі p=2/3. Скласти таблицю розподілу числа влучень при 7 пострілах; визначити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

В ~~3~~ 3

Отформатировано: Шрифт: полужирный

~~1~~

~~.~~1 Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(X), $\sigma(X)$.

X	2	4	5	6
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.
2. Функція розподілу дискретної ВВ X має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 2,\\ 0{,}3,\ 2<x\le 3\\ 0{,}5,\ 3<x\le 4,\\ 1,\ x>4.\end{cases}$$

Знайти $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$, таблицю розподілу ймовірностей.

3. З 20 приладів є в середньому 6 неточних. Скласти таблицю розподілу числа точних приладів серед навмання відібраних 5 приладів. Визначити математичне сподівання та дисперсію цієї ВВ.

В—4
14.

Отформатировано: Шрифт: полужирный

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(ХУ), М(Х+У), D(Х).

Х	–1	0	1
Р	0,3	0,4	0,3

та

У	–2	1	2	3
Р	0,3	0,3	0,3	0,1

Знайти F(Х), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.
2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \frac{3}{2}x^2, 0\le x<1,\\ \frac{3}{2}(2-x)^2, 1\le x<2,\\ 0, x\ge 2.\end{cases}$$

Знайти $P(-2\le X<1/2)$, М(Х), D(Х), побудувати графік щільності розподілу.
~~у.~~
3. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до витрачення усіх наявних патронів. Скласти таблицю розподілу випадкової величини- Х – числа витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при окремому пострілі постійна, р=0,3, а число усіх патронів *n*=4.
В—5
15.

Отформатировано: Шрифт: полужирный

1 Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(Х), $\sigma(X)$. Знайти F(Х), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

Х	1	2	5	7
Р	0,2	0,3	0,4	0,1

2. Функція розподілу дискретної ВВ *X* має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0{,}1, & 1<x\le 2,\\ 0{,}25, & 2<x\le 3,\\ 0{,}45, & 3<x\le 4,\\ 0{,}8, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Знайти P($X=3$), P($3\le X\le 5$), таблицю розподілу ймовірностей ВВ

~~X.~~

3. Монету підкидають 7 разів Знайти математичне сподівання і дисперсію числа появ герба.

В ~~6~~ 6

~~1)~~

1. -Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти M(X), D(X), $\sigma(X)$.

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A\sin x, & 0<x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, P$(\frac{\pi}{6}\le X<\frac{\pi}{2})$ M(X), D(X) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

3. Визначити, дискретними чи неперервними є наступні ВВ:
1) Число виграшів у шаховому турнірі.
2) Число відмінних оцінок у студентів однієї групи на іспиті.
3) Відстань від центру мішені до точки влучення кулі при стрільбі.

В ~~7~~

~~1~~7.

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти M(X), M(У), M(X+У), D(У).

X	-3	-2	0
P	0,2	0,4	0,4

та

У	4	6	7
P	0,7	0,2	0,1

Отформатировано: Шрифт: полужирный

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ X.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{A}{2}x^2, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, F(X), $P(-2\le X<1/2)$, M(X), D(X), побудувати графік функції розподілу та щільності розподіл

~~у.~~

3. У деякому цеху брак складає 5% усіх виробів. Скласти таблицю розподілу числа бракованих виробів з 6 узятих навмання. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї ВВ.

В~~—~~8

~~1~~8

Отформатировано: Шрифт: полужирный

1. Дано розподіл дискретної ВВ X. Знайти M(X), D(X), $\sigma(X)$.

X	2	4	5	6
P	0,25	0,1	0,25	0,4

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

2. Функція розподілу ВВ X має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ \sin x,\ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $P(\frac{\pi}{4}\le X<\frac{\pi}{3})$, M(X), D(X), побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

3. Визначити, дискретними чи неперервними є наступні ВВ:

1) Число вантажних машин, що проїжджають за одну годину через контрольний пункт автоінспекції.

2) Відстань точки падіння диска від точки кидання.

3) Периметр перпендикулярного перерізу ствола дерева

4) Сума виграшу, що приходиться на один квиток грошово-речової лотереї.

В – 9

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(ХУ), М(Х+У), D(Х). Знайти F(Х), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.

Х	0	1	2
Р	0,25	0,5	0,25

та

У	0	1	2	3
Р	0,4	0,3	0,2	0,1

2. Функція розподілу ВВ
X має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le\frac{3}{2},\\ 2x-3,\ \frac{3}{2}<x\le 2,\\ 1,\ x>2.\end{cases}$$

Знайти Р($1{,}7<X<1{,}9$), М(Х), D(Х), побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~

3. Робітник обслуговує 4 верстати. Ймовірність того, що впродовж години верстат не потребує уваги робітника, дорівнює для першого верстата 0,9, для друго~~г~~го – 0,8, для третьо~~г~~го – 0,75 і четверто~~г~~го – 0,7. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа верстатів, які не потребують уваги робітника впродовж години.

В – 10

~~**0**~~

1. Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(Х), $\sigma(X)$. Знайти F(Х), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

Х	1	2	5	7
Р	0,2	0,1	0,4	0,3

2. Функція розподілу ВВ X має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ x^2,\ 0<x\le 1\\ 1,\ x>1\end{cases}$$

Знайти Р($0{,}25<X<0{,}75$), М(Х), D(Х), побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~

3. При обстеженні групи спортсменів у складі 25 чоловік відносно розмірів окола грудей встановлено було, що у трьох цей розмір виявився рівним 88 см, у чотирь~~о~~ох – 92 см, у п'я~~т~~ти – 96 см, у шість~~о~~ох – 98 см і у сім~~о~~ох – 100 .

Визначити середнє значення розміру окола грудей у членів цієї групи і середнє квадратичне відхилення.

В – 11

~~1~~

1~~)~~. Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(X), $\sigma(X)$.

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

2. Функція розподілу ВВ *X* має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ Ax^2,\ 0<x\le 4,\\ 1,\ x>4.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт *A*, $P(1<X<3)$, М(Х), D(X), побудувати графік функції розподілу та щільності розподіл

~~у.~~

3. Стрільбу по цілі ведуть до отримання двох влучень. Знайти математичне сподівання числа зроблених пострілів, якщо ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,2.

В – 12

~~2~~

1. Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(X), $\sigma(X)$.

X	-2	1	2	3
P	0,3	0,3	0,3	0,1

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ Ax^3, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт *A*, F(*X*), $P(-2{,}5\le X<\frac{1}{5})$, М(Х), D(X) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~

3. Ймовірність влучення у мішень дорівнює 0,5. Стрілець з 6 патронами веде вогонь по мішені до першого влучення або до витрачення усіх наявних

патронів. Скласти таблицю розподілу випадкової величини— Х – числа витрачених патронів.

В – 13
~~3~~

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), D(Х), D(У), D(Х+У).

Х	-2	-1	0
Р	0,6	0,3	0,1

та

У	1	2	3
Р	0,1	0,3	0,6

Знайти F(Х), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ Ax, 0<x\le 1,\\ 0, >1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, F(X), $P(-1\le X<3)$, М(Х), D(Х) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.
~~у.~~

3. Скласти таблицю розподілу ймовірностей числа очок, що випали при підкиданні навмання грального кубика. Побудувати багатокутник розподілу.

В – 14

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(ХУ), М(Х+У), D(Х).

Х	4	6	7
Р	0,7	0,2	0,1

та

У	-3	-2	0
Р	0,2	0,4	0,4

Знайти F(Х), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.

2. З 25 виробів, серед яких 5 відміче~~н~~ні «Знаком яко~~є~~сті», навмання витягають три вироби. Скласти таблицю розподілу виробів, що відміче~~н~~ні «Знаком яко~~є~~сті» і виявилися у вибірці (ВВ Х). Знайти функцію розподілу ВВ Х, М(Х), D(Х). Побудувати багатокутник розподілу та графік функції розподілу

3. У коробці 4 червоних і 3 зелених олівці. Витягнуто три олівці. Знайти закон розподілу дискретної ВВ- X – числа витягнутих при цьому червоних олівців, а також ймовірність події- А – «витягнуто не менше двох червоних олів~~н~~ців».

В – 15

~~5~~

1. Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(Х), $\sigma(X)$.

Х	1	3	6	8
Р	0,2	0,3	0,4	0,1

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ X.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{a}, 0<x\le a, \ \ a>0.\\ 0, x>a\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, F(X), $P(-2\le X<1/2)$, M(X), D(X), побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~

3. У коробці 4 червоних і 3 зелених олівці. Витягнуто три олівці. Знайти закон розподілу дискретної ВВ– X – числа витягнутих при цьому зелених олівців, а також ймовірність події- А – «витягнуто не більше одного зеленого олі~~в~~вця».

В – 16

~~**6**~~

1. Дано розподіл дискретної ВВ X. Знайти M(X), D(X), $\sigma(X)$.

X	0	3	5	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ X.

2. Відбувається чотири незалежних постріли в однакових умовах по деякій цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює p=0,25. Знайти закон розподілу для числа влучень у ціль (ВВ X), функцію розподілу ВВ X, M(X), D(X). Побудувати багатокутник розподілу та графік функції розподілу.

3. Завод випускає 96% виробів першого сорту і 4% виробів другого сорту. Навмання обрана партія з 1000 виробів. Знайти M(X), D(X), де X – число виробів першого сорту в цій вибірці.

В – 17

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ X та У. Знайти M(X), M(У), M(XУ), M(X+У), D(X).

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

та

У	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ X.

2. Є шість квитків у театр, чотири з яких на місця в першому ряду. Навмання обирають три квитки. Скласти таблицю розподілу ВВ X – числа квитків першого ряду. Знайти P(X<3). Знайти функцію розподілу ВВ X, M(X), D(X). Побудувати багатокутник розподілу та графік функції розподілу.

3. У коробці 4 червоних і 3 зелених олівці. Витягнуто три олівці. Знайти закон розподілу дискретної ВВ- X – числа витягнутих при цьому червоних олівців, а також ймовірність події- А – «витягнуто не більше одного червоного олі~~в~~вця».

В – 18

~~8~~

1. Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(X), $\sigma(X)$.

X	0	3	5	7
P	0,4	0,1	0,3	0,2

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

2. Скласти функцію розподілу для дискретної ВВ- X – числа появ події A при 4 незалежних випробуваннях, якщо в кожному випробуванні p=1/3. Побудувати графік.

3. У коробці 4 червоних і 3 зелених олівці. Витягнуто три олівці. Знайти закон розподілу дискретної ВВ X числа витягнутих при цьому зелених олівців, а також ймовірність події A={витягнуто не менше двох зелених олівців}

В-~~19~~

19

Отформатировано: Шрифт: полужирный

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(Х+У), D(У).

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

та

У	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ Ax^2, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, F(X), $P(-2\le X<\frac{1}{2})$, М(Х), D(X) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~

3. Знайти середнє значення числа влучень у мішень при 6 пострілах, якщо дана ймовірність влучення при окремому пострілі p=2/3.

В – 20

~~0~~

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(ХУ), М(Х+У), D(X).

X	1	2	3
Р	0,1	0,3	0,6

та

У	-2	-1	0
Р	0,6	0,3	0,1

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{A}{3}x, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт *A*, F(*X*), Р$(-3\le X<\frac{3}{4})$, М(Х), D(Х) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~

3. Ймовірність влучення зі знаряддя в ціль при одному пострілі *p*=2/3. Скласти таблицю розподілу числа влученьнь при 7 пострілах; визначити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

В – 21

~~1~~

1. Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(Х), $\sigma(X)$.

Х	2	4	5	6
Р	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

2. Функція розподілу дискретної ВВ *X* має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 2,\\ 0{,}3, 2<x\le 3\\ 0{,}5, 3<x\le 4,\\ 1, x>4.\end{cases}$$

Знайти Р($1\le X\le 3$), таблицю розподілу ймовірностей.

3. З 20 приладів є в середньому 6 неточних. Скласти таблицю розподілу числа точних приладів серед навмання відібраних 5 приладів. Визначити математичне сподівання та дисперсію цієї ВВ.

В –22

~~-22~~

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(ХУ), М(Х+У), D(Х).

X	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

та

У	-2	1	2	3
P	0,3	0,3	0,3	0,1

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ X.

2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ \frac{3}{2}x^2, 0\le x<1, \\ \frac{3}{2}(2-x)^2, 1\le x<2 \\ 0, x\ge 2. \end{cases}$$

Знайти $P(-2\le X<1/2)$, M(X), D(X), побудувати графік щільності розподілу.

~~у.~~

3. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до витрачення усіх наявних патронів. Скласти таблицю розподілу випадкової величини- X – числа витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при окремому пострілі постійна, p=0,3, а число усіх патронів *n*=4.

В –23

~~**23**~~

1. Дано розподіл дискретної ВВ X. Знайти M(X), D(X), $\sigma(X)$.

X	1	2	5	7
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.

2. Функція розподілу дискретної ВВ *X* має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, x\le 1, \\ 0{,}1, 1<x\le 2, \\ 0{,}25, 2<x\le 3, \\ 0{,}45, 3<x\le 4, \\ 0{,}8, 4<x\le 5, \\ 1, x>5. \end{cases}$$

Знайти $P(X=3)$, $P(3\le X\le 5)$, таблицю розподілу ймовірностей ВВ.

~~X.~~

3. Монету підкидають 7 разів. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа появ герба.

В –24

24

1). Дано розподіл дискретної ВВ Х. Знайти М(Х), D(X), $\sigma(X)$.

Х	1	3	6	8
Р	0,2	0,1	0,4	0,3

Отформатировано: русский
Отформатировано: русский
Отформатировано: русский

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу.
2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ A\sin x,\ 0<x\le\pi,\\ 0,\ x>\pi.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, $P(\frac{\pi}{6}\le X<\frac{\pi}{2})$ М(Х), D(X) і $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.
3. Визначити, дискретними чи неперервними є наступні ВВ:
1) Число виграшів у шаховому турнірі.
2) Число відмінних оцінок у студентів однієї групи на іспиті.
3) Відстань від центру мішені до точки влучення кулі при стрільбі.

В – 25

~~5~~

1. Дано розподіл незалежних дискретних ВВ Х та У. Знайти М(Х), М(У), М(Х+У), D(У).

Х	-3	-2	0
Р	0,2	0,4	0,4

та

У	4	6	7
Р	0,7	0,2	0,1

Знайти F(X), побудувати полігон розподілу та графік функції розподілу ймовірностей ВВ Х.
2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{A}{2}x^2, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, F(X), $P(-2\le X<1/2)$, М(Х), D(X), побудувати графік функції розподілу та щільності розподілу.

~~у.~~

3. У деякому цеху брак складає 5% усіх виробів. Скласти таблицю розподілу числа бракованих виробів з 6 узятих навмання. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї ВВ.

Індивідуальне завдання № 5
Закони розподілу неперервних випадкових величин.
Елементи математичної статистики

Розв'язати задачі, підставивши конкретні значення параметрів з таблиці 1.

1. Вага окремого яблука даної партії є випадкова величина Х, розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням σ. Визначити ймовірність того, що вага обраного випадковим образом з даної партії яблука: а) знаходиться в межах від X_1 до X_2; б) відхиляється від середньої ваги а не більш, ніж на $\pm\delta$.

2. При проведенні контрольних іспитів n духових шаф були визначені оцінки математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення їхнього терміну служби і виявилися рівними $\bar{x}$ год і σ год. Вважаючи, що термін служби кожної духової шафи є нормально розподіленою випадковою величиною, визначити надійний інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання а при довірливій ймовірності (надійності) $\gamma = 0{,}95$.

3. За даними вибіркового обстеження п'яти супермаркетів залежність затрат на маркетинг X (тис. грн) і обсягом реалізації Y (млн грн) має вигляд

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline y_i & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array}$$

Припускаючи, що між X і Y має місце лінійний кореляційний зв'язок, визначити вибіркове рівняння лінійної регресії. Знайти також силу лінійного кореляційного зв'язку між затратами та маркетингом і обсягом реалізації.

Таблиця 1

Вихідні дані до задач 1, 2

Варіант	Задача						
	1				2		
	a	σ	X_1	X_2	δ	n	$\bar{x}$	δ
1	100	5	90	110	10	16	3100	10
2	105	10	90	120	5	25	3150	15
3	110	15	95	140	15	36	3200	20
4	115	10	100	130	20	49	3250	25
5	120	10	100	145	15	64	3300	30
6	125	20	105	135	10	81	3350	10
7	130	5	120	150	5	100	3050	15
8	135	15	125	150	10	121	3000	20
9	140	4	132	144	8	144	2500	25
10	145	5	140	155	5	169	2550	30
11	150	6	144	162	12	16	2600	5
12	155	5	150	170	10	25	2650	10
13	160	10	150	180	5	36	2700	15

14	165	15	150	190	15	49	2750	20
15	170	10	160	185	20	64	2800	25
16	175	10	160	185	20	81	2850	30
17	180	5	170	195	10	100	2900	35
18	185	20	165	200	10	121	2950	40
19	190	5	185	200	10	144	3400	30
20	195	5	190	205	20	169	3450	25
21	200	10	190	220	20	36	3500	20
22	90	20	80	105	10	25	3550	15
23	95	15	170	100	15	64	3570	10
24	205	10	200	220	20	16	3600	10
25	210	5	200	215	10	81	3650	5

Вихідні дані до задачі 3

1.

x_i	2	3	5	7	8
y_i	35	40	65	70	100

2.

x_i	2	3	5	8	9
y_i	25	30	60	70	95

3.

x_i	1	2	5	8	9
y_i	15	25	40	85	100

4.

x_i	5	8	11	12	15
y_i	25	70	100	110	130

5.

x_i	3	5	7	9	10
y_i	20	45	60	100	110

6.

x_i	2	4	5	7	9
y_i	35	40	60	85	120

7.

x_i	2	3	5	7	8
y_i	35	40	65	70	100

8.

x_i	5	7	10	12	15
y_i	45	70	100	125	145

9.

x_i	3	6	7	10	11
y_i	25	60	75	95	100

13.

x_i	2	4	7	9	12
y_i	20	45	65	100	115

14.

x_i	3	5	8	10	14
y_i	35	55	90	100	150

15.

x_i	1	4	6	8	9
y_i	15	45	70	90	100

16.

x_i	3	4	5	7	10
y_i	25	40	60	80	110

17.

x_i	2	5	7	10	12
y_i	20	45	65	95	110

18.

x_i	3	6	10	12	14
y_i	35	70	105	110	150

19.

x_i	2	5	6	8	11
y_i	25	60	75	90	120

20.

x_i	1	3	5	7	10
y_i	20	33	65	80	95

21.

x_i	2	6	7	10	14
y_i	25	65	80	100	150

10.

x_i	2	4	5	7	9
y_i	35	50	65	70	100

11.

x_i	1	3	7	8	10
y_i	15	35	70	80	95

12.

x_i	1	2	5	6	8
y_i	20	25	40	55	75

22.

x_i	3	5	7	10	13
y_i	35	50	80	110	120

23.

x_i	2	5	8	9	11
y_i	15	45	75	100	120

24.

x_i	3	6	7	9	12
y_i	30	55	75	100	130

25.

x_i	2	4	5	8	10
y_i	25	45	60	90	100

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Полевич В. В. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики – Х. : ХДУХТ, 2007.
2. Барковський В. В. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика – К. : КНАУ, 2006.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М. : Высшая школа, 2010.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. – М. : Высшая школа, 2004.
5. Кулинич Г. Л. Вища математика. Спеціальні розділи. – К. : Либідь, 2003.

ЗМІСТ

Отформатированная таблица
Отформатировано: русский
Отформатировано: Цвет шрифта: Черный
Отформатировано: русский
Отформатированная таблица
Отформатировано: Цвет шрифта: Черный
Отформатировано: Шрифт: не полужирный
Отформатировано: По центру, Междустр.интервал: одинарный
Отформатировано: русский
Отформатировано: Цвет шрифта: Черный
Отформатировано: Шрифт: не полужирный
Отформатировано: русский
Отформатировано: Шрифт: не полужирный
Отформатировано: русский
Отформатировано: Цвет шрифта: Черный
Отформатировано: украинский
Отформатированная таблица
Отформатировано: русский
Отформатировано: Цвет шрифта: Черный
Отформатировано: украинский
Отформатировано: Цвет шрифта: Черный

Навчальне електронне видання
комбінованого використання

Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки та індивідуальні контрольні завдання
для самостійної роботи студентів
економічних спеціальностей

Укладачі:
СИНЄКОП Микола Сергійович
СОФРОНОВА Марина Сергіївна

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних
та інженерно-технічних дисциплін д.т.н., проф. М.І. Погожих

Технічний редактор О. В. Щегельська

План 2015 р., поз. 36

Підп. до друку 02.06.2016. Один електронний оптичний диск (CD-ROM);
супровідна документація. Об’єм даних 1,84 Мб. Тираж 100 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі.
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.12 р.