МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський державний університет харчування та торгівлі

Вища математика

Методичні вказівки та індивідуальні контрольні завдання для самостійної роботи студентів заочної форми навчання спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування»

Харків
ХДУХТ
2016

Вища математика: методичні вказівки та індивідуальні контрольні завдання для самостійної роботи студентів заочної форми навчання спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування» [Електронний ресурс] / М.С. Софронова – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2016. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Укладач: М. С. Софронова

Рецензент: доц., к. ф.-м. н. Д. О. Торяник

Кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін

Схвалено методичною комісією вищого навчального закладу за напрямом підготовки (спеціальністю) 131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування»
Протокол від «28» листопада 2016 року № 3

Схвалено вченою радою ХДУХТ
Протокол від «07» липня 2016 року № 12

Схвалено редакційно-видавничою радою ХДУХТ
Протокол від «06» липня 2016 року № 4

Передмова

Ефективним напрямком раціональної організації занять з вищої математики є удосконалення організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання. Організація такої роботи вимагає завчасної підготовки дидактичних матеріалів, до яких належить:

а) стисле та зрозуміле викладення теоретичного матеріалу з кожного розділу курсу;

б) розв'язання типових індивідуальних задач та прикладів з кожного із розділів вищої математики.

Викладання вищої математики передбачає:

- розвиток логічного та алгоритмічного мислення;
- оволодіння основними методами дослідження та розв'язок математичних задач;
- вироблення вміння самостійно розширювати математичні знання та проводити математичний аналіз прикладних задач.

Загальний курс математики є фундаментом математичної освіти студента, що має важливе значення для успішного вивчення загальнотеоретичних та спеціальних дисциплін, передбачених навчальними планами різних спеціальностей.

Методичне видання охоплює всі найголовніші теми навчальної програми курсу «Вища математика». Воно містять загальні рекомендації студенту-заочнику по роботі над курсом, методичні вказівки по темам курсу та індивідуальні контрольні завдання (у тридцяти варіантах).

.

1. Теоретичні відомості
1.1. Елементи векторної алгебри

Вектор $\vec{a}$, заданий своїми координатами *x*, у і z, записується у вигляді $\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ або у вигляді $\vec{a}(x, y, z)$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти).

Довжина вектора визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Якщо відомі координати початку вектора $A(x_1, y_1, z_1)$ і його кінця $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – є число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію другого на напрямок першого вектора, а саме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_b \vec{a}.$$

Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Кут між векторами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

1.2. Елементи лінійної алгебри

<u>Операції над матрицями</u>

Додавання матриць. Сумою двох матриць А + В називається матриця С, елементи якої

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n.$$

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що можна додавати лише матриці однієї розмірності.

Властивості суми матриць

1) A + B = B + A;
2) (A +B) + C = A + (B + C);
3) A + 0 = A.

Добуток матриці на число. Добуток матриці A на число λ називається матриця B, елементи якої

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Добуток матриць. Добутком AB матриці A розмірності $m \times p$ на матрицю B розмірністю $p \times n$, називається матриця C розмірності $m \times n$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B.

Зауважимо, що добуток AB можливий лише тоді, коли кількість стовпців першого множника A дорівнює кількості рядків другого множника B.

Квадратна матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Властивості добутку матриць

1) $A \times B \neq B \times A$;
2) $A \times E = E \times A = A$;

3) A × B × C = (A × B) × C = A × (B× C);

4) A× (B + C) = A × B + A × C;

5) α × (A × B) = (α × A) × B = A × (α × B) = α × A × B;

6) $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

Обернені матриці мають такі властивовсті:

1) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$;

2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Визначники

Визначником (детермінантом) називається вираз, складений за певним законом з елементів (чисел, функцій, тощо) квадратної матриці.

Позначають визначник так:

$$\Delta = |A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Величина a_{ij} $(a_{ij} = \overline{1, n})$ – елемент детермінанту, причому i –номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких розташований елемент a_{ij}.

Для квадратної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

існує визначник другого порядку, який позначається символом

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Аналогічно, для квадратної матриці з 3^2 елементами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

існує визначник третього порядку, який визначається рівністю

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Числа a_{ij} (індекс i відповідає номеру рядка, j-номеру стовпчика) називають елементами визначника. Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ визначника; елементи a_{31}, a_{22}, a_{13} – його побічну діагональ.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник n –1-го порядку, який утворюється з визначника n-го порядку викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку визначається за формулою

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{M}_{ij} .$$

Під час обчислення визначників порядку n ($n > 3$) користуються правилом: визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot \mathrm{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \mathrm{A}_{i2} + \dots + a_{in} \cdot \mathrm{A}_{in} .$$

Якщо визначник матриці $|\mathrm{A}| \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}, яка знаходиться згідно з формулою:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \dots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими x_1, x_2, …, x_n має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases},$$

де a_{ij} (i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, m) – відомі коефіцієнти; числа b_1, b_2, …, b_m називаються вільними членами.

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається будь-яка сукупність значень невідомих $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$, підставивши які, всі рівняння системи лінійних алгебраїчних рівнянь обертаються в тотожності. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок. В іншому випадку система називається несумісною.

Використовуючи поняття добутку матриць, систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у матричній формі $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Розглянемо систему з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Якщо визначник цієї системи $|A| \neq 0$, то розв'зок СЛАУ можна знайти

а) за правилом Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

де Δ – визначник системи; а Δ_j – визначник, який утворюється з Δ заміною j – го стовпця стовпцем вільних членів B;

б) за формулою $X = A^{-1}B$ (методом оберненої матриці).

1.3 Елементи аналітичної геометрії

Рівняння прямої на площині

1) $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ – загальне;

2) $y = kx + b$ – із заданим кутовим коефіцієнтом;

3) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – через дану точку $\mathrm{M}_0(x_0;\ y_0)$ з заданим кутовим коефіцієнтом;

4) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – через дві дані точки $\mathrm{M}_1(x_1; y_1)$ і $\mathrm{M}_2(x_2; y_2)$;

Нехай маємо дві прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, тоді

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 \cdot k_2} \quad (k_1 \cdot k_2 \neq -1),$$

де φ – кут між даними прямими.

Для прямої $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$, кутовий коефіцієнт

$$k = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} \quad (k_1 \cdot k_2 = -1)$.

Відстань d від точки $\mathrm{M}_0(x_0;\ y_0)$ до даної прямої $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}.$$

Рівняння площини у просторі

1) $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$ – загальне рівняння площини, де (A, B, C) – координати нормального вектора;

2) $\mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) + \mathrm{C}(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, яка проходить через дану точку $\mathrm{M}_0(x_0; y_0; z_0)$ і має даний нормальний вектор $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A}; \mathrm{B}; \mathrm{C})$.

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Відстань від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Нехай маємо дві площини

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, тоді

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$$

де φ – кут між даними площинами.

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + 0.$$

Рівняння прямої в просторі

1) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ – канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{P} = (m, n, p)$;

2) $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{P} = (m, n, p)$;

3) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – загальне рівняння прямої (як лінії перетину двох площин).

Нехай $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$ рівняння двох заданих прямих, тоді

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

де φ – кут між прямими.

Умови паралельності двох прямих: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Нехай $Ax + By + Cz + D = 0$ – рівняння площини і

$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ – рівняння прямої, тоді

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

де φ – кут між прямою і площиною.

Умова паралельності площини і прямої $Am + Bn + Cp = 0$.

Умови перпендикулярності площини і прямої $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ є кінцями відрізку M_1M_2, тоді координати середини відрізку точки $M(x; y; z)$ обчислюються так $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

1.4. Вступ до математичного аналізу

Властивості границь

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, якщо функція $f(x)$ елементарна та існує в точці x_0.

2. Нехай функції $\mathrm{U}(x)$ та $\mathrm{V}(x)$ мають границі для $x\to a$ відповідно $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{U}(x)=\mathrm{A},\ \lim\limits_{x\to a}\mathrm{V}(x)=\mathrm{B},$ тоді справедливі співвідношення:

а) $\lim\limits_{x\to a}\left[\mathrm{U}(x)+\mathrm{V}(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{U}(x)+\lim\limits_{x\to a}\mathrm{V}(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B};$

б) $\lim\limits_{x\to a}\left[\mathrm{U}(x)\mathrm{V}(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{U}(x)\lim\limits_{x\to a}\mathrm{V}(x)=\mathrm{AB};$

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{U}(x)}{\mathrm{V}(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\mathrm{U}(x)}{\lim\limits_{x\to a}\mathrm{V}(x)}=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}},$ тільки, якщо $\mathrm{B}\neq 0$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n;$ якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ існує.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[a\right]^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)};$ якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, якщо існують скінченні границі

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x),$ причому обидві одночасно не дорівнюють нулю.

6. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\log_a f(x)\right]=\log_a\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]$, якщо існує додатня границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Перша визначна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{f(x)}{\sin(f(x))}=1.$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{f(x)\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\lim_{f(x)\to 0}\left[1+f(x)\right]^{1/f(x)}=e\approx 2{,}718282$$

1.5. Диференціальне числення функції однієї змінної

Зведення формул для обчислення похідних

1. $y = c$ (c – стала), $y' = 0$.
2. $y = cu(x)$, $y' = cu'$.
3. $y = u(x) \pm v(x)$, $y' = u' \pm v'$.
4. $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + u\,v'$.
5. $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v'}$.
6. $y = x$, $y' = 1$.
7. $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$.
8. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$.
9. $y = e^x$, $y' = e^x$.
10. $y = \sin x$, $y' = \cos x$.
11. $y = \cos x$, $y' = -\sin x$.
12. $y = \mathrm{tg}\,x$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
13. $y = \mathrm{ctg}\,x$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
14. $y = \log_a x$, $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$.
15. $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x}$.
16. $y = \arcsin x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
17. $y = \arccos x$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

18. $y = \operatorname{arctg} x$, $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

19. $y = \operatorname{arcctg} x$, $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

20. $y = f(u),\ u = \varphi(x)$. $y' = y'_u u'_x$.

1.6. Дослідження функцій та побудова їх графіків

Короткі відомості з теорії

Загальна схема дослідження функції включає такі етапи:

1. Визначення області існування функції.
2. Дослідження функції на парність та непарність.
3. Знаходження точок розриву функції.
4. Визначення інтервалів зростання та спадання функції.
5. Визначення екстремальних (макс. мін.) точок та екстремальних значень.
6. Знаходження інтервалів опуклості та увігнутості графіка функції та точок перегину.
7. Визначення асимптот графіка функції.
8. Знаходження контрольних точок кривої.

Визначення інтервалів зростання (спадання) функції та дослíджен-ня на екстремум здійснюється у такій послідовності:

а) знаходиться область існування функції, тобто сукупність значень аргументу, для яких функція існує;

б) знаходиться похідна функції $f'(x)$;

в) визначаються критичні точки першого роду, тобто ті значення аргументу (із області існування функції), для яких похідна дорівнює нулю або не існує. Для цього розв'язується рівняння $f'(x) = 0$, а також визначаються ті значення x для яких $f'(x) = \infty$ або не існує. Припустимо, що критичними точками першого роду будуть точки з абсцисами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які знаходяться на інтервалі $(a; b)$;

г) всі критичні точки I роду розміщуються у порядку зростання їх абцис в інтервалі $(a; b)$;

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b.$$

д) на кожному з інтервалів $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, …, $(x_n; b)$, обирається будь-яка точка і визначається знак похідної $f'(x)$ (похідна зберігає знак на кожному із вказаних інтервалів). Якщо $f'(x) > 0$ на деякому інтервалі, то робиться висновок, що функція на цьому інтервалі зростає, якщо ж $f'(x) < 0$, то – спадає.

е) розглядається знак $f'(x)$ на двох сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервала до останнього. Якщо під час такого переходу знаки $f'(x)$ на двох сусідніх інтервалах різні, то у даної критичної точки є екстремум, а саме: максимум, якщо знак похідної змінюється з "+" на "–", і мінімум, якщо він змінюється з "–" на "+". Якщо ж на двох сусідніх інтервалах похідна має однаковий знак, то екстремуму в даній критичній точці немає;

ж) знаходиться значення функції у точках, в яких вона досягає екстремуму, тобто відшукуються екстремальні значення функції.

Для визначення інтервалів опуклості (увігнутості) кривої та точок перегину необхідно:

1. Знайти похідну другого порядку $f''(x)$.

2. Визначити критичні точки другого роду, тобто ті точки (з області існування функції), в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x) = \infty$ або $f''(x)$ не існує.

3. За допомогою критичних точок другого роду розділити область існування функції $y = f(x)$ на інтервали, на яких похідна $f''(x)$ має сталий знак.

4. На кожному з визначених інтервалів визначити знак похідної $f''(x)$. Якщо $f''(x) < 0$ на деякому інтервалі, то крива на цьому інтервалі є опуклою, якщо ж $f''(x) > 0$, то – увігнутою.

5. Розглянути знаки $f''(x)$ на кожних двох сусідніх інтервалах. Якщо знаки $f''(x)$ на двох сусідніх інтервалах різні, то критична точка другого роду, яка розділяє ці інтервали, є точкою перегину. Якщо ж на двох сусідніх інтервалах $f''(x)$ має один і той же знак, то у відповідній критичній точці другого роду перегину немає.

6. Знайти значення функції з такими значеннями аргументу, для яких крива має перегин.

Визначення асимптот

Асимптоти бувають: вертикальні, похил та горизонтальні.

1. Крива $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = a$, якщо, ,коли $x \to a$, або $x \to a - 0$, або $x \to a + 0$, $f(x) \to \infty$. Для визначення вертикальних асимптот необхідно знайти ті значення аргументу, поблизу яких функція $f(x)$ необмежено

зростає за абсолютною величиною. Якщо такими значеннями аргументу будуть $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то рівняння вертикальних асимптот мають вигляд

$$x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n.$$

2. Для визначення похилої асимптоти $y = kx + b$ кривої $y = f(x)$ необхідно знайти числа k та b за формулами

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

Причому необхідно окремо розглянути випадки $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$. Крива має похилиі асимптоти тільки у випадку, коли границі розглянуті вище, є скінченними.

3. Якщо виявиться, що $k = 0$, а коефіцієнт b має скінченне значення, то крива має горизонтальну (горизонтальні) асимптоту $y = b$.

1.7. Контрольна робота № 1

Завдання 1

Дано координати точок A, B і C. Знайти:

а) координати векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d};$

б) модуль вектора $\vec{a}$;

в) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

г) проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

1.1. A(4; 6; 3), B(–5; 2; 6), C(4; –4; –3), $\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.2. A(4; 3; –2), B(–5; –1; 4), C(2; 2; 1), $\vec{a} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$.

1.3. A(–2; –2; 4), B(1; 3; –2), C(1; 4; 2), $\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.4. A(2; 4; 3), B(3;1 ;–4), C(–1; 2; 2), $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{BA} + 4\,\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.5. A(2; 4; 5), B(1; –2; 3), C(–1; –2; 4), $\vec{a} = 3\,\overrightarrow{AB} - 4\,\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

1.6. A(–1; –2; 4), B(–1; 3; 5), C(1; 4; 2), $\vec{a} = 3\,\overrightarrow{AC} - 7\,\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.7. A(1; 3; 2), B(–2; 4; –1), C(1;3 ;–2), $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{AB} + 5\,\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

1.8. A(2; –4; 3), B(–3; –2; 4), C(0; 0; –2), $\vec{a} = 3\,\overrightarrow{AC} - 4\,\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$.

1.9. A(3; 4; –4), B(–2; 1; 2), C(2; –3; 1), $\vec{a} = 5\,\overrightarrow{CB} + 4\,\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.10. A(0; 2; 5), B(2; –3; 4), C(3; 2; –5), $\vec{a} = -3\,\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

1.11. A(–2; –3; –4), B(2; –4; 0), C(1; 4; 5), $\vec{a} = 4\,\overrightarrow{AC} - 8\,\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$.

1.12. A(–2; –3; –2), B(1; 4; 2), C(1; –3; 3), $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{AC} - 4\,\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.13. A(5; 6; 1), B(–2; 4; –1), C(3; –3; 3), $\vec{a} = 3\,\overrightarrow{AB} - 4\,\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

1.14. A(10; 6; 3), B(–2; 4; 5), C(3; –4; 6), $\vec{a} = 5\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.15. A(3; 2; 4), B(–2; 1; 3), C(2; –2; –1), $\vec{a} = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$.

1.16. A(–2; 3; –4), B(3; –1; 2), C(4; 2; 4), $\vec{a} = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$.

1.17. A(4; 5; 3), B(–4; 2; 3), C(5; –6; –2), $\vec{a} = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

1.18. A(2; 4; 6), B(–3; 5; 1), C(4; –5; –4), $\vec{a} = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BA}$.

1.19. A(–4; –2; –5), B(3; 7; 2), C(4; 6; –3), $\vec{a} = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$.

1.20. A(5; 4; 4), B(–5; 2; 3), C(4; 2; –5), $\vec{a} = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.21. A(3; 4; 6), B(–4; 6; 4), C(5; –2; –3), $\vec{a} = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$.

1.22. A(–5; –2; –6), B(3; 4; 5), C(2; –5; 4), $\vec{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$.

1.23. A(3; 4; 1), B(5; –2; 6), C(4; 2; –7), $\vec{a} = 7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.24. A(4; 3; 2), B(–4; –3; 5), C(6; 4; –3), $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.25. A(–5; 4; 3), B(4; 5; 2), C(2; 7; –4), $\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

1.26. A(6; 4; 5), B(–7; 1; 8), C(2; –2; –7), $\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.27. A(6; 5; –4), B(–5; –2; 2), C(3; 3; 2), $\vec{a} = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$.

1.28. A(–3; –5; 6), B(3; 5; –4), C(2; 6; 4), $\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.29. A(3; 5; 4), B(4; 2; –3), C(–2; 4; 7), $\vec{a} = 3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

1.30. A(4; 6; 7), B(2; –4; 1), C(–3; –4; 2), $\vec{a} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

Завдання 2

Для даного визначника Δ знайти мінори і алгебраїчні доповнення елементів a_{i2}, a_{3j}. Обчислити визначник Δ:

а) розклавши його за елементами i-го рядка;

б) розклавши його за елементами j-го стовпця;

в) одержати попередньо нулі в i-му рядку.

2.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$, $i = 1, \quad j = 3.$

2.5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $i = 2, \quad j = 4.$

2.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $i = 1, \quad j = 2.$

2.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2,\quad j=3.$

2.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=1.$

2.9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\quad j=3.$

2.10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\quad j=2.$

2.11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=4.$

2.12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=2.$

2.13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=4.$

2.14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\quad j=4.$

2.15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=3.$

2.16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=2.$

2.17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -7 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=1.$

2.18. $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2,\quad j=4.$

2.19. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ -7 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=4.$

2.20. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $i=3,\quad j=2.$

2.21. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1,\quad j=1.$

2.22. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & -6 \\ 3 & -4 & -0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & -4 \end{vmatrix}$, $i=3, \quad j=2.$

2.23. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 8 \\ -2 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$, $i=1, \quad j=4.$

2.24. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3, \quad j=2.$

2.25. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$, $i=4, \quad j=3.$

2.26. $\begin{vmatrix} -3 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3, \quad j=2.$

2.27. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $i=2, \quad j=1.$

2.28. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$, $i=4, \quad j=2.$

2.29. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -2 & -3 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3, \quad j=1.$

2.30. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2, \quad j=4.$

Завдання 3

Дано дві матриці A і B. Знайти: а) AB; б) BA; в) $|A|$.

3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$

3.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix},$

3.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$

3.4. $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,

3.5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$,

3.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

3.7. $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

3.8. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$,

3.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

3.10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$,

3.11. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, 3.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

3.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$,

3.14. $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

3.15. $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

3.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

3.17. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$,

3.18. $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

3.19. $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 3.20. $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & -8 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3.21. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$,

3.22. $A=\begin{pmatrix} -1 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -8 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3.23. $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

3.24. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3.25. $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

3.26. $A=\begin{pmatrix} -9 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -8 & -0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

3.27. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 3.28. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

3.29. $A=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$,

3.30. $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4

Розв’язати систему рівнянь:
а) методом Крамера; б) методом оберненої матриці.

4.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 17, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 19. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -17. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 28. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 14. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=3 \\ x_1+2x_2+2x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-5x_3=9 \end{cases}$ 4.10 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-7, \\ x_1-4x_2+2x_3=-2, \\ 2x_1+7x_2-x_3=-4. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} x_1+3x_2=7, \\ 2x_1-2x_2-x_3=1, \\ 3x_1-x_2+x_3=-2. \end{cases}$ 4.12. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=8, \\ x_1+5x_2-x_3=5, \\ 2x_1+7x_3=-17. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3=1, \\ x_1+4x_2=-13, \\ 2x_1-3x_2+x_3=-3. \end{cases}$ 4.14. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=1, \\ 3x_1+x_2-2x_3=9, \\ x_1-2x_2=14. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=9, \\ x_1+3x_2-x_3=10, \\ 5x_1+x_3=3. \end{cases}$ 4.16. $\begin{cases} 4x_1+3x_2=19, \\ x_1+2x_2-5x_3=6, \\ 3x_1+2x_2+x_3=14. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-13, \\ 3x_1-x_2=-18, \\ x_1-2x_2+3x_3=-14. \end{cases}$ 4.18. $\begin{cases} 7x_1+x_2=-15, \\ x_1+3x_2-2x_3=-5, \\ 2x_1+x_2-2x_3=-5. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=-5, \\ x_1+6x_2-x_3=-14, \\ x_1+2x_2=-6. \end{cases}$ 4.20. $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=0, \\ 5x_1-x_2-x_3=6, \\ x_1+x_3=5. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=13, \\ x_1+2x_3=8, \\ 3x_1-2x_2-x_3=11. \end{cases}$ 4.22. $\begin{cases} x_1+2x_2 \quad x=1, \\ x_1+3x_2-2x_3=4, \\ x_1-4x_2-2x_3=11. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+x_2+4x_3=13, \\ 4x_1-x_2=1. \end{cases}$ 4.24. $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=13, \\ 2x_1+4x_2-5x_3=19, \\ 4x_2+x_3=7. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 2x_2-3x_3=-17, \\ 2x_1-2x_2-3x_3=-11, \\ 4x_1-3x_2+x_3=12. \end{cases}$ 4.26. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=2, \\ x_1-5x_3=9, \\ x_1+3x_2-2x_3=3. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=8, \\ 3x_1-5x_2+x_3=21, \\ x_1+x_2+4x_3=-1. \end{cases}$ 4.28. $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=10, \\ x_1+2x_3=4, \\ x_1-3x_2+2x_3=13. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 8x_1-x_2=8, \\ 4x_1+3x_2-x_3=8, \\ 2x_1+x_2-3x_3=14. \end{cases}$ 4.30. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=19, \\ 4x_2-x_3=-7, \\ x_1-2x_2-5x_3=16. \end{cases}$

Завдання 5

Дано координати вершин трикутника ABC. Знайти:

а) рівняння сторони AB;
б) рівняння висоти, проведеної з вершини C;
в) рівняння медіани AM;
г) внутрішній кут A;
д) центр ваги трикутника;
ж) рівняння прямої, яка проходить через точку C пара-лельно до медіани AB;
з) відстань від точки C до прямої AB.

5.1.	A(–3; 1),	B(3; 9),	C(7; 6).
5.2.	A(–3; –2),	B(14; 4),	C(6; 8).
5.3.	A(5; 5),	B(13; –1),	C(15; 8).
5.4.	A(–1; 5),	B(6; 0),	C(10; 5).
5.5.	A(1; –3),	B(0; 7),	C(–2; 4).
5.6.	A(–4; 8),	B(4; 2),	C(6; 11).
5.7.	A(7; 0),	B(1; 4),	C(–8; –4).
5.8.	A(6; 1),	B(–6; –4),	C(–10; 3).
5.9.	A(6; 5),	B(14; –1),	C(16; 8).
5.10.	A(1; 5),	B(13; 0),	C(–3; –5).
5.11.	A(0; 2),	B(–7; –4),	C(3; 2).

5.12. A(3; 8), B(11; 2), C(13; 11).
5.13. A(8; 0), B(–4; –5), C(–8; 2).
5.14. A(–7; –2), B(3; –8), C(–4; 6).
5.15. A(0; 8), B(8; 2), C(10; 11).
5.16. A(0; 5), B(12; 0), C(–3; –2).
5.17. A(–2; –6), B(–3; 5), C(4; 0).
5.18. A(–4; 4), B(4; –2), C(6; 7).
5.19. A(7; 1), B(–5; –4), C(–9; –1).
5.20. A(–5; –2), B(0; –4), C(5; 7).
5.21. A(–4; 3), B(4; –3), C(6; 6).
5.22. A(5; 4), B(–2; 7), C(0; –2).
5.23. A(–4; 2), B(8; –6), C(2; 6).
5.24. A(3; 5), B(11; –1), C(13; 8).
5.25. A(4; 3), B(7; 10), C(;–2; –3).
5.26. A(1; –6), B(3; 4), C(–3; 3).
5.27. A(0; 1), B(8; –5), C(10; 4).
5.28. A(3; 2), B(5; –2), C(–3; 0).
5.29. A(–3; –3), B(5; –7), C(7; 7).
5.30. A(–4; 5), B(4; –1), C(6; 8).

Завдання 6

Дано чотири точки A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3), D(x_4; y_4; z_4). Скласти рівняння:

а) площини, якя проходить через точки A, B, C;

б) прямої AB;

в) прямої BN перпендикулярної до площини ABC;

г) прямої CP паралельної до прямої AB;

д) площини, яка проходить через точку D перпендикулярно до прямої AB.

Знайти:

ж) точку перетину прямої BN і площини ABC;

з) синус кута між прямою AD і площиною ABC.

6.1. A(0; 2; 0), B(–1; 2; –3), C(–4; 5; –1), D(1; –2; 3).
6.2. A(3; 5; 4), B(5; 8; 3), C(1; 2; –2), D(–1; 0; 2).
6.3. A(1; –2; –2), B(–6; –1; –2), C(4; 3; 2), D(3; –4; 4).

6.4.	A(4; 3; 5),	B(1; 9; 7),	C(0; 2; 0),	D(5; 3; 10).
6.5.	A(–1; 2; 3),	B(1; –2; 3),	C(4; 5; 1),	D(–1; 2; –1).
6.6.	A(–4; –1; 5),	B(1; 0; 5),	C(–1; 4; 6),	D(–2; –3; 11).
6.7.	A(5; 3; 7),	B(–2; 3; 5),	C(4; 2; 10),	D(1; 2; 7).
6.8.	A(2; 3; 5),	B(–4; 2; 1),	C(2; –2; 2),	D(3; –2; 5).
6.9.	A(–1; 2; 2),	B(4; 3; 2),	C(2; 7; 6),	D(1; 0; 8).
6.10.	A(4; 2; 10),	B(1; 2; 0),	C(3; 5; 7),	D(2; –3; 5).
6.11.	A(7; 2; 2),	B(5; 7; 7),	C(5; 3; 1),	D(2; 3; 7).
6.12.	A(1; –3; –1),	B(6; –2; –1),	C(4; 2; 3),	D(3; –5; 5).
6.13.	A(1; –2; 7),	B(4; 2; 10),	C(2; 3; 5),	D(5; 3; 7).
6.14.	A(6; –6; 5),	B(4; 9; 5),	C(4; 6; 11),	D(6; 9; 3).
6.15.	A(0; –6; –3),	B(5; –5; 3),	C(3; –1; 1),	D(2; –8; 3).
6.16.	A(1; –1; 3),	B(6; 5; 8),	C(3; 5; 8),	D(4; 0; –5).
6.17.	A(10; 6; 6),	B(–2; 8; 2),	C(6; 8; 9),	D(7; 10; 3).
6.18.	A(–3; –2; –2),	B(2; –1; –2),	C(0; 3; 2),	D(–1; –4; 4).
6.19.	A(8; –6; 4),	B(10; 5; –5),	C(5; 6; –8),	D(8;10; 7).
6.20.	A(3; 5; 4),	B(8; 7; 4),	C(5;10; 4),	D(4; 7; 8).
6.21.	A(–4; –3; 1),	B(1; –2; 1),	C(–1; 2; 5),	D(–2; –5; 7).
6.22.	A(7; 2; 2),	B(–5; 7; –7),	C(5; –3; 1),	D(2; 3; 7).
6.23.	A(4; 6; 5),	B(6; 9; 4),	C(2;10; 10),	D(7; 5; 9).
6.24.	A(–2; 2; –6),	B(3; 3; –6),	C(1; 7; –2),	D(0; 1; 0).
6.25.	A(1; 4; –3),	B(5; 0; 3),	C(–5; –5; 3;),	D(5; 4; –1).
6.26.	A(5; 3; 4),	B(0; –2; –3),	C(–1; –2; –3),	D(4; 1; –1).
6.27.	A(–5; 0; –2),	B(2; 3; 4),	C(9; 3; 3),	D(–1; –2; –1).
6.28.	A(1; –1; 4),	B(–2; 0; 4),	C(3; 0; 2),	D(–1; –2; 7).
6.29.	A(1; 7; 3),	B(–2; 6; 0),	C(–3; 2; 3),	D(–2; 1; 3).
6.30.	A(–2; 8; 6),	B(4; –4; –3),	C(–1; 5; –2),	D(5; 1; 1).

Завдання 7

Обчислити границі

7.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x}{x^3-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 16x}{\sin 3x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{5x}$.

7.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4}{x^2+4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\sin 4x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3x}\right)^{7x}$.

7.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-7x^2}{x^5+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x-3}\right)^{6x+2}$.

7.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-7x}{2x^3+8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{\sin 4x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{6x}$.

7.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-10x}{x^2-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 20x}{\sin 4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{3}{2x+5}}$.

7.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-8x}{x^5+3x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x+1}}$.

7.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+10x^2}{x^3-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\sin 6x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{4x}$.

7.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x}{x^2+5x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\operatorname{tg}2x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{5x}$.

7.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x}{3x^3+2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 10x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{4x+1}}$.

7.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+8x}{-2x^3-7x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{7x}$.

7.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7}{x^3-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}5x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-2}\right)^{7x}$.

7.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x}{x^2+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 20x}{\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{4x}$.

7.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^3}{x^4+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}6x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{4x}$.

7.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+x^2}{2x^3-4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}8x}{\sin 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x-3}\right)^{7x}$.

7.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x}{4x^2-2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\sin 4x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{4x}$.

7.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-7x}{x^3+8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\mathrm{tg}4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{2x+1}}$.

7.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^3}{x^4+5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 10x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)^{7x+3}$.

7.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x^2}{x^3+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{\sin 7x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{4x}$.

7.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-6x}{2x^2+3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 12x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{5x}$.

7.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+8x^3}{2x^4-3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\sin 4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{5x+3}}$.

7.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+10x}{x^3-7}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\sin 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{5x}$.

7.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-5x^3}{x^4+13}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}6x}{\sin 4x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^{7x}$.

7.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^4}{4x^5-5x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg}2x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{4x-1}$.

7.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-7x+1}{2x^2+3x-2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{3x+1}}$.

7.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x}{x^4+2x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg}9x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{5x+1}$.

7.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-7x+1}{x^4+x^2-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{3x-1}}$.

7.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-5x^2}{2x^3-4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin 10x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{6x}$.

7.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-7x}{x^5+2x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 13x}{\mathrm{tg}4x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{3x+5}$.

7.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^2}{5x+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 7x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{5x-3}$.

7.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-5x^3}{x^4+7}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{7x}$.

Завдання 8

Знайти похідні функцій

8.1. а) $y = \sin^{10}x$; б) $y = x\arcsin x$; в) $y = \ln(x+\sqrt{1+5x})$;

г) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$, y'_x – ?

8.2. а) $y = \cos^8 x$; б) $y = \dfrac{x^2}{\sin x}$; в) $y = 5^{\sin(4x-1)}$;

г) $x\sin y - y^3 + 5 = 0$, y'_x – ?

8.3. а) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$; б) $y = \mathrm{tg}^7 x$; в) $y = \arcsin(6x + 7)$;

г) $\cos(2y + 1) - x^5y - 7 = 0$, y'_x – ?

8.4. а) $y = \dfrac{x}{\arcsin x}$; б) $y = \mathrm{ctg}^6 x$; в) $y = \arcsin(8x - 4)$;

г) $\sin(x^2 + 2y) - x^3 + 4 = 0$, y'_x – ?

8.5. а) $y = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$; б) $y = \sqrt[3]{\sin x}$; в) $y = \mathrm{arctg}(7x + 4)$;

г) $\cos(x - y) + y^2 - x^3 = 0$, y'_x – ?

8.6. а) $y = \dfrac{3x-1}{\sin x}$; б) $y = \mathrm{ctg}^5 x$; в) $y = 6^{\sin(4x-3)}$;

г) $\sin(3x + 5y) - y^3 + x^2 = 0$, y'_x – ?

8.7. а) $y = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$; б) $y = \sin^6 x$; в) $y = \log_3(x + 2\sqrt{x})$;

г) $\mathrm{tg}(x - 3y) - 4y^2 + 5x^2 = 0$, $y'_x - ?$

8.8. а) $y = (5 - x^2)\sin x$; б) $y = \sin^7 x$; в) $y = 5^{\arcsin 4x}$;

г) $y^3 - \mathrm{ctg}(3x - y) - x^2 = 0$, $y'_x - ?$

8.9. а) $y = x^3 - \mathrm{tg}x$; б) $y = \cos^7 x$; в) $y = \ln(3x^2 + \sqrt[3]{x})$;

г) $\cos(5x - y^2) + 3x^2 + y^3 = 0$, $y'_x - ?$

8.10. а) $y = \dfrac{\mathrm{ctg}x}{x^2+1}$; б) $y = \arcsin(5x^3 - \sqrt{x})$; в) $y = \cos^9 x$;

г) $\sin(2x + 3y) + y^2 + 5x = 0$, $y'_x - ?$

8.11. а) $y = x^2\mathrm{tg}x$; б) $y = \sqrt[3]{\mathrm{ctg}x}$; в) $y = 5^{\arcsin(4x+1)}$;

г) $\mathrm{tg}(3x - 2y) + y^2 - 4x = 0$, $y'_x - ?$

8.12. а) $y = \dfrac{\sin x}{x^2-5}$; б) $y = \sqrt[5]{\mathrm{tg}x}$; в) $y = 4^{\arcsin 3x}$;

г) $\cos(5x + y^2) - 2y^3 + x^4 = 0$, $y'_x - ?$

8.13. а) $y = \sqrt{x}\cos x$; б) $y = \sin^{12} x$; в) $y = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x+2}$;

г) $y^2 + \sin(2x - 3y) + x^3 = 0$, $y'_x - ?$

8.14. а) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[4]{\sin x}$; в) $y = \ln(x^2 + \sqrt[5]{x})$;

г) $2y - \cos(5x - 4y) + x^4 = 0$, $y'_x - ?$

8.15. а) $y=\sqrt[3]{x}\sin x$; б) $y=\mathrm{ctg}^3x$; в) $y=5^{\arcsin 4x}$;

г) $y^2-\sin(3x+y)-x^2=0$, y'_x – ?

8.16. а) $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$; б) $y=\sqrt[4]{\sin^3 x}$; в) $y=\ln(\sqrt[3]{x}-x^2)$;

г) $y^2-\sin(x^2-2y)+x^3=0$, y'_x – ?

8.17. а) $y=\sqrt[3]{x}\,\mathrm{tg}x$; б) $y=\sin^5x$; в) $y=3^{\arcsin 2x}$;

г) $\cos y-\sin(5x+y)+x^2=0$, y'_x – ?

8.18. а) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\sqrt{x}}$; б) $y=\ln(6x+x^3)$;в) $y=\sqrt[3]{\arcsin 4x}$;

г) $3y^2+\cos(4x+2y)-x^4=0$, y'_x – ?

8.19. а) $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y=\sqrt[5]{\mathrm{tg}2x}$; в) $y=5^{\arcsin 4x}$;

г) $y^3-\cos(5x+y^2)-x^3=0$, y'_x – ?

8.20. а) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$; б) $y=\mathrm{ctg}^7x$; в) $y=4^{\arcsin 8x}$;

г) $y^2-\cos(4x+3y)-2x^3=0$, y'_x – ?

8.21. а) $y=x^2\cos x$; б) $y=\sqrt[5]{\arccos 2x}$; в) $y=\ln(3x^2+\sqrt{x})$;

г) $y^5-\cos(7x-3y)+x^3=0$, y'_x – ?

8.22. а) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin 9x}$; б) $y=\cos^4x$; в) $y=7^{\arcsin 3x}$;

г) $\cos y - \sin(2x + 3y) - x^5 = 0$, y'_x – ?

8.23. а) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}$; в) $y = 9^{\sin 4x}$;

г) $y^5 - \sin(3x + 7y) - x^4 = 0$, y'_x – ?

8.24. а) $y = \sqrt[3]{x}\operatorname{tg}x$; б) $y = \sin^4 x$; в) $y = 2^{\arcsin 7x}$;

г) $\sin y - \cos(5x + 2y) - x^3 = 0$, y'_x – ?

8.25. а) $y = \sqrt[4]{x}\operatorname{ctg}x$; б) $y = \sqrt[5]{\sin x}$; в) $y = \log_4(x^2 + 3\sqrt{x})$;

г) $\sin y + \cos(5x - 2y) - 4x^2 = 0$, y'_x – ?

8.26. а) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sin x}$; б) $y = \sqrt[5]{\cos x}$; в) $y = 5^{\operatorname{arctg} 2x}$;

г) $\cos(x^2 - 2y) + \sin y - 2x^3 = 0$, y'_x – ?

8.27. а) $y = \sqrt[7]{x}\operatorname{tg}x$; б) $y = \sin^9 x$; в) $y = 8^{\arcsin 3x}$;

г) $\sin y + \cos(x^2 - y^2) + x^3 = 0$, y'_x – ?

8.28. а) $y = \dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[2]{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\sin 4x}$; в) $y = 5^{\arccos 7x}$;

г) $y^2 - \sin(5x + y) - x^3 = 0$, y'_x – ?

8.29. а) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt[5]{x}}$; б) $y = \sqrt[6]{\sin 2x}$; в) $y = 5^{\operatorname{arctg} 2x}$;

г) $\cos y + \sin(x^2 - 2y) - 5x^3 = 0$, y'_x – ?

8.30. а) $y = \sqrt[6]{x}\text{ctg}x$; б) $y = \sqrt[4]{\sin 6x}$; в) $y = \ln(3x^2 - 2x)$;

г) $\cos y - \sin(x^2 + y^3) - 5x^3 = 0$, $y'_x - ?$

Завдання 9

Знайти:

а) інтервали зростання та спадання функції;

б) екстремуми данної функції;

в) інтервали опуклості та увігнутості графіка функції, точки перегину.

г) асимптоти.

9.1. $y = \dfrac{8x}{4 + x^2}$.

9.2. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

9.3. $y = 8xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

9.4. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

9.5. $y = \dfrac{x}{e^x}$.

9.6. $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

9.7. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

9.8. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

9.9. $y = x^2 e^{-x}$.

9.10. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

9.11. $y = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$.

9.12. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

9.13. $y = \left(x^2 - 1\right)^3$.

9.14. $y = 4e^{-\frac{x^2}{2}}$.

9.15. $y = \dfrac{e^x}{x + 1}$.

9.16. $y = x^2 \ln x$.

9.17. $y = \ln(x^2 - 4)$.

9.18. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

9.19. $y = \dfrac{1 - 2x}{x^2}$.

9.20. $y = \dfrac{e^{2x}}{x}$.

9.21. $y = \dfrac{e^x}{x+1}$. 9.22. $y = \dfrac{e^{3-x}}{3-x}$.

9.23. $y = x + \dfrac{1}{x}$. 9.24. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

9.25. $y = x\ln x$. 9.26. $y = x\ln(1-x)$.

9.27. $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$. 9.28. $y = \ln(1-x)$.

9.29. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. 9.30. $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$.

2. Теоретичні відомості
2.1. Функції багатьох змінних

Диференціювання функцій багатьох змінних

Означення 1. Якщо кожній парі значень двох незалежних змінних x, y із множини D (області їх завдання D) відповідає одне значення змінної z, то кажуть, що z є функцією двох змінних x, y яка визначається на області D і позначається $z = f(x, y)$.

Означення 2. Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по змінній x називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до Δx за умови, Δx прямує до нуля будь-яким чином,
або інакше: похідна функції $z = f(x, y)$ по x, яка обчислюється в припущенні, що y вважається незмінною (сталою) величиною:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогічно

$$z'_y = f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Якщо похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ продиференціювати по x або y, то одержимо похідні другого порядку

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Зауваження. Якщо похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ у деякій точці неперерв-ні, то вони рівні.

Екстремум функції багатьох змінних

Функція $z = f(x, y)$ має у точці $M_0(x_0, y_0)$ максимум (мінімум), якщо для всіх точок $M(x, y)$, близьких до т. M_0 (координати їх одночасно не дорівнюють x_0, y_0), має місце нерівність

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ – максимум,}$$

або

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{ – мінімум.}$$

Необхідні умови існування екстремуму

Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум, то у розглядуваній точці похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю, або не існують.

Достатні умови існування екстремуму

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна разом з своїми похідними до 3-го порядку включно в околі точки $M_0(x_0, y_0)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0.$$

Позначимо

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}=A, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}=B, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}=C.$$

Тоді, якщо

1) $AC - B^2 > 0$,
 $C < 0$, то функція має у точці M_0 максимум;

2) $AC - B^2 < 0$,
 $C > 0$, то функція має у точці M_0 мінімум;

3) $AC - B^2 = 0$, то з допомогою похідних другого порядку нічого сказати не можна стосовно наявності, або відсутньості екстремуму у розглядуваній точці.

2.2. Невизначений інтеграл

Властивості невизначених інтегралів

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. $\int dF(x)dx = F(x) + C.$

4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

5. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
7. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
8. $\int e^x dx = e^x + C.$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$
13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a}.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathrm{C} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \mathrm{C}.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \mathrm{C} = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + \mathrm{C}.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \mathrm{C}.$

Інтегрування методом заміни змінної

$$\int f(x)dx = \left|\begin{array}{l} \text{заміна} \\ x = \varphi(t) \\ dx = \varphi_t'(t)dt \end{array}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi_t'(t)dt.$$

Інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Найпростіші дробі мають вигляд:

1) $\dfrac{\mathrm{A}}{x-a}$; 2) $\dfrac{\mathrm{A}}{(x-a)^k}$;

3) $\dfrac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{(x^2+px+q)^k}$;

Дробі 1 – 2 інтегруються таким чином:

$$\int \frac{\mathrm{A}}{x-a}dx = \mathrm{A}\ln|x-a| + \mathrm{C};$$

$$\int \frac{\mathrm{A}}{(x-a)^k}dx = \mathrm{A}\int (x-a)^{-k}dx = \frac{\mathrm{A}}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + \mathrm{C};$$

Щоб проінтегрувати дроби 3 – 4, треба зробити деякі перетворення: кожну з них розкласти на два дроби таким чином, щоб у першому в чисельнику був повний диференціал квадратного тричлена, що стоїть в знаменнику, а у другому в чисельнику залишиться сталий коефіцієнт, після цього в знаменнику другого виділити повний квадрат.

Дроби типу

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx, \quad m < n,$$

де знаменник є многочлен степеня n, розкладений на множники

$$P_n(x) = (x - a_1)^l \ldots (x - a_k)^r (x^2 + p_1 x + q_1)^t \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^h,$$

перед інтегруванням розкладається на найпростіші дробі за формулою

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^l} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{l-1}} + \ldots + \frac{A_l}{(x-a_1)} +$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^t} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{t-1}} + \ldots + \frac{B_t x + C_t}{(x^2 + p_1 x + q_1)}.$$

Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

Тип інтегралу	Підказка
$\int R(\sin x)\cos x dx$	заміна $\sin x = t$
$\int \sin^n x \cos x dx, \quad n \in N$	———————//———————
$\int \sin^{2n} x \cos^{2m-1} x dx, \quad n, m \in N$	———————//———————
$\int R(\cos x)\sin x dx$	заміна $\cos x = t$
$\int \cos^n \sin x x dx, \quad n \in N$	———————//———————
$\int \sin^{2n-1} x \cos^{2m} x dx, \quad n, m \in N$	———————//———————

$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x dx, \quad n, m \in \mathrm{N}$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\int \mathrm{R}(\sin x \cos x) dx$	$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$
$\int \cos mx \cos nx dx, \quad n, m \in \mathrm{N}$	$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x +$ $+ \cos(m-n)x]$
$\int \sin mx \cos nx dx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x +$ $+ \sin(m-n)x]$
$\int \sin mx \sin nx dx$	$\sin mx \sin x = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x -$ $- \cos(m-n)x]$

Інтегрування деяких класів ірраціональних функцій

Тип інтегралу	Підказка
$\int \mathrm{R}\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	заміна $x = t^k$, де k – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$Aax^2 + bx + c = a(t^2 \pm k^2)$, де $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a} = \pm k^2, \quad t = x + \frac{b}{2a}$
$\int \mathrm{R}\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$	заміна $x = a\sin t$
$\int \mathrm{R}\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$	заміна $x = a\mathrm{tg}t$

2.3. Визначений інтеграл

Властивості визначених інтегралів

$$\int_a^b \mathrm{A} f(x)dx = \mathrm{A}\int_a^b f(x)dx,$$

де A незмінний множник;

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx;$$

Формула Ньютона – Лейбниця

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b, \text{ де } \quad \mathrm{F}(x) = \int f(x)dx.$$

Заміна змінної у визначному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} \text{Заміна} & x = \varphi(t) \\ \varphi(\alpha) = a, & \varphi(\beta) = b \end{matrix} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'_t dt.$$

Обчислення площ фігур

1. Якщо функція $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, то площа фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, знаходиться за формулою

$$\mathrm{S} = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Якщо функція $f(x)$ змінює знак на інтервалі $[a, b]$, то

$$\mathrm{S} = \int_a^b |f(x)|dx.$$

3. Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ згори, $y = f_2(x)$ знизу та прямими $x = a$, $x = b$, причому $f_1(x) \geq f_2(x)$ при $x \in [a, b]$, знаходиться за формулою

$$\mathrm{S} = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$$

Обчислення об'ємів тіл обертання

Якщо фігура, що обмежена лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = 0$, обертається навколо осі OX, то об'єм тіла орбчсислюється за формулою

$$\mathrm{V} = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Якщо фігура, що обмежена лініями: $x = \varphi(x)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$, обертається навколо осі OY, то об'єм тіла обчислюється за формулою

$$\mathrm{V_{OY}} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

2.4. Диференціальні рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням зветься рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію, цієї змінної та її похідні різних порядків.

У загальному вигляді диференціальне рівняння n – го порядку можна записати так:

$$\mathrm{F}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком диференціального рівняння зветься порядок старшої похідної, яка міститься в ньому.

Розв'язком диференціального рівняння зветься будь-яка функція $y = y(x)$, за підставляння якої в рівняння утворюється тотожність.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння зветься його інтегруванням, а графік розв'язку диференціального рівняння – інтегральною кривою.

Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n\text{-}1)})$$

означає знайти такий розв'язок $y = y(x)$, для якого функція $y(x)$ разом зі своїми похідними до $(n - 1)$-го порядку включно набуває значень $y_o, y'_o, y_o'', \ldots, y_o^{(n\text{-}1)}$ при заданому значенні x_o аргументу x, тобто

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots, y^{(n\text{-}1)}(x_0) = y_0^{(n\text{ -}1)}.$$

Ці умови звуться початковими умовами розв'язку $y = y(x)$, а сам розв'язок – частинним розв'язком задачі Коші.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n – го порядку зветься розв'язок вигляду

$$y = y(x, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n),$$

яке залежить від n довільних сталих , $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n$, які можна добрати так, щоб задовольнити будь-яку систему початкових умов.

Частинний розв'язок може бути одержано з загального розв'язку при конкретних числових значеннях довільних сталих

$$\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n.$$

У загальному вигляді диференціальне рівняння першого порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

розв'язане відносно похідної y':
$y' = f(x, y)$ і симетричного вигляду:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Його загальний розв'язок залежить від однієї довільної сталої С, тобто $y = y(x,C)$.

Диференціальне рівняння першого порядку звється рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо його можна записати так:

$$f_1(x)\varphi_2(y)dx + f_2(x)\varphi_1(y)dy = 0.$$

Загальний інтеграл рівняння з відокремлюваними змінними буде таким:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy + C.$$

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку зветься рівняння $y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – однорідна функція нульового степеня однорідності, тобто

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Тут t – довільне число, відмінне від нуля.

Шляхом підставляння $y = ux$ це рівняння приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними ($u = u(x)$).

Диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – задані неперервні функції, звється лінійним.

Загальний розв'язок лінійного рівняння шукаємо у вигляді $y = uv$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тоді $y' = u'v - u'v$.

Диференціальне рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1$$

звється рівнянням Бернуллі. Розв'язується це рівняння (як і лінійне) за допомогою заміни $y = uv$.

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку звється рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

де коефіцієнти $p(x)$ і $q(x)$ і права частина рівняння $f(x)$ – неперервні функції, а відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ звуться лінійно-незалежними, якщо при сталих α_1 і α_2 тотожність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ можлива лише у випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Якщо ж хоча б одна з α_1 і α_2 відмінна від нуля, то $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні.

Наприклад, $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{3x}$ – лінійно незалежні, а $y_1(x) = e^{2x}$ і $y_1(x) = 5e^{2x}$ – лінійно залежні (перевірте).

Якщо y_1, y_2 – будь-які лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку, то його загальним розв'язком буде функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння є сума його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного йому лінійного однорідного диференціального рівняння, тобто

$$y = \overline{y} + C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Тут $\overline{y}$ – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння; y_1 і y_2 – лінійно незалежні розв'язки відповідного йому однорідного рівняння.

Рівняння

$$y'' + py' + qy = 0,$$

де p і q – сталі величини, звється рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Частинним розв'язком його буде функція $y = e^{kx}$, де k задовольняє, так званому, характеристичному рівнянню

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні ($k_1 \neq k_2$), загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y = \mathrm{C}_1 e^{k_1 x} + \mathrm{C}_2 e^{k_2 x};$$

якщо дійсні та рівні ($k_1 = k_2 = k$), то

$$y = \left(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 x\right) e^{kx};$$

якщо комплексні, то

$$y = e^{\alpha x}\left(\mathrm{C}_1 \sin \beta x + \mathrm{C}_2 \cos \beta x\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

добирається залежно від виду функції $f(x)$.

1. Нехай $f(x) \equiv \mathrm{P}_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_k \in \mathrm{R}$,

становить собою многочлен ступеня n з дійсними коефіцієнтами. Тоді частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$\overline{y} = \mathrm{Q}_n(x) x^r,$$

де $\mathrm{Q}_n(x)$ – многочлен того ж ступеня, що й многочлен $\mathrm{P}_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють нулю.

2. Нехай $f(x) = ae^{ax}$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\overline{y} = \mathrm{A} e^{\alpha x} x^r$, де r – число коренів характеристичного рівняння α.

3. Права частина $f(x) = \mathrm{M}\cos\beta x + \mathrm{N}\sin\beta x$, де M, N, β – задані дійсні числа. У цьому випадку частинний розв'язок буде $\overline{y} = (\mathrm{A}\cos\beta x + \mathrm{B}\sin\beta x) x^r$, де A і B – невідомі коефіцієнти, а r – число коренів характеристичного рівняння, що дорівнюють βi.

2.5. Ряди

Нехай задано нескінченну послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. Вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

зветься числовим рядом, а $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ – членами ряду.

Сума n перших членів ряду $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ зветься частковою сумою ряду.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ зветься збіжним, якщо послідовність часткових сум при $n \to \infty$ має границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S зветься сумою ряду.

Необхідна ознака. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя його спільного члена при $n \to \infty$ дорівнює 0, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Ознака порівняння. Нехай дано два ряди з додатніми членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,;$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \,,$$

причому $u_n \le v_n$. Тоді, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

якщо розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Якщо існує скінченна і відмінна від нуля границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k,$ то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду з додатніми членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, якщо $l < 1$, розбігається, якщо $l > 1$, а при $l = 1$ питання про збіжність ряду лишається невирішеним.

У якості рядів для порівняння можна вибрати ряди $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ зветься геометричним рядом. Він збігається, якщо $|q| < 1$, і розбігається, якщо $|q| \ge 1$.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ зветься узагальненим гармонійним рядом. Він збігається, якщо $\alpha > 1$, і розбігається, якщо $\alpha \le 1$. При $\alpha = 1$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонійний ряд (розбіжний).

Теорема Лейбниця. Якщо для знакопереміжного ряду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, \quad (u_n > 0)$$

виконуються умови: а) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

то ряд збігається, а його сума додатня і не перебільшує u_1.

Якщо суму знакопереміжного ряду замінити сумою n перших членів, то допущена при цьому похибка не перебільшує абсолютної величини першого відкинутого члена.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ зветься абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ зветься умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд складений з абсолютних величин його членів розбігається.

Степеневим рядом звється ряд вигляду

$$\mathrm{C_o} + \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_n x^n,$$

де $\mathrm{C_o}$, C_1, C_2, …, C_n – коефіцієнти.

Область збіжності степеневого ряду можна встановити за допомогою теореми Абеля: якщо степеневий ряд збігається при деякому значенні $x = x_o$, то він збігається при всіх $|x| < |x_o|$, причому абсолютно. Якщо степеневий ряд розбігається при $x = x_1$, то він розбігається при всіх значеннях $|x| > |x_1|$.

Інтервал]–R; R[є інтервалом збіжності. Число R звється радіусом збіжності. Для визначення інтервалу збіжності застосовується ознака Даламбера до ряду, складеного з абсолютних величин членів даного степеневого ряду.

Будь-яка функція нескінченно диференційована на інтервалі $|x| < \mathrm{R}$, може бути розкладена в ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Наведемо розкладення в ряд Маклорена функцій

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},\quad]-\infty;\infty[,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\quad]-\infty;\infty[,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad]-\infty;\infty[,$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots,\ ]-1;1[,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad]-1;1[.$$

2.6. Контрольна робота № 2

Завдання 10

Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ від заданої функції $z=f(x,y)$:

10.1. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$.

10.2. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

10.3. $z=\frac{1}{5}\sqrt{(x^2+e^2)^3}$.

10.4. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

10.5. $z=\frac{x-y}{y+x}$.

10.6. $z=\arcsin(xy)$.

10.7. $z=y^{\ln x}$.

10.8. $z=x^y$.

10.9. $z=e^y(\cos x-y\sin x)$.

10.10. $z=arcctg\frac{x}{y}$.

10.11. $z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$.

10.12. $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$

10.13. $z = \dfrac{x+y}{x-y}.$

10.14. $z = \arccos(xy).$

10.15. $z = x^e.$

10.16. $z = y^x.$

10.17. $z = \ln(e^x + e^y).$

10.18. $z = e^x(x\cos y - y\sin x).$

10.19. $z = \dfrac{y}{y^{10} - 2x^2}.$

10.20. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

10.21. $z = y\sin x.$

10.22. $z = x\cos^2 y.$

10.23. $z = xe^y + ye^x.$

10.24. $z = xy^2 + x^2 y.$

10.25. $z = \cos(2x + y).$

10.26. $z = \sin(3y - x).$

10.27. $z = x\sin^2 y.$

10.28. $z = \dfrac{1}{2(x^2 + y^2)}.$

10.29. $z = \dfrac{x}{(x^2 - 3y^2)}.$

10.30. $z = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Завдання 11

Обчислити невизначені інтеграли.

11.1. а) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)dx,$ б) $\displaystyle\int e^{4x}dx.$

11.2. а) $\displaystyle\int\left(3x\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)dx,$ б) $\displaystyle\int \sin 8x dx.$

11.3. а) $\displaystyle\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - x^2\sqrt[3]{x}\right)dx,$ б) $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, 7x dx.$

11.4. а) $\displaystyle\int\sqrt{5x-1}\,dx,$ б) $\displaystyle\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx.$

11.5. а) $\displaystyle\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx,$ б) $\displaystyle\int e^{-4x}dx.$

11.6. а) $\displaystyle\int\left(\frac{7}{x^2} + \sqrt[5]{x}\right)dx,$ б) $\displaystyle\int\sqrt{3+2x}\,dx.$

11.7. а) $\int \frac{6x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{dx}{(4+x)^4}$.

11.8. а) $\int \frac{8\sqrt[3]{x}-7\sqrt{x}}{x}dx$, б) $\int 3^{4x}dx$.

11.9. а) $\int \frac{6x^3-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.

11.10. а) $\int \frac{2\sqrt[4]{x}+x^2}{x^3}dx$, б) $\int \mathrm{tg}\,7x\,dx$.

11.11. а) $\int \frac{2x^5-3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \sqrt{5x-1}\,dx$.

11.12. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int (2-4x)^3 dx$.

11.13. а) $\int \frac{3x+7\sqrt{x}}{x^2}dx$, б) $\int \frac{dx}{(5+x)^3}$.

11.14. а) $\int \frac{5x^2-7}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int e^{-5x}dx$.

11.15. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x}dx$, б) $\int \sqrt[3]{4-x}\,dx$.

11.16. а) $\int \sqrt{4-3x}\,dx$, б) $\int \frac{3x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

11.17. а) $\int \frac{2x^2-4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$.

11.18. а) $\int \frac{3\sqrt{x-x}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \mathrm{ctg}\,4x\,dx$.

11.19. а) $\int \frac{2-5\sqrt{x}}{x^2}dx$, б) $\int e^{-8x}dx$.

11.20. а) $\int \frac{4x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int (3-2x)^5 dx$.

11.21. а) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.

11.22. а) $\int \frac{5\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$, б) $\int \mathrm{tg}\,7x\,dx$.

11.23. а) $\int \frac{x\sqrt{x}-x^2}{x^3}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

11.24. а) $\int \frac{x^3-\sqrt{x}}{x^2}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}}$.

11.25. а) $\int \frac{2x\sqrt{x}+x^3}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{x^2dx}{4x^3-5}$.

11.26. а) $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-x^2}{x^3}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

11.27. а) $\int \frac{4\sqrt{x}-5x}{x^3}dx$, б) $\int \sqrt[3]{5-4x}\,dx$.

11.28. а) $\int \frac{2x^2+4\sqrt[3]{x}}{x}dx$, б) $\int \sin 4x\,dx$.

11.29. а) $\int \frac{x^3-4x^2}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int e^{-5x}dx$.

11.30. а) $\int \frac{2x+6x^3}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int \sqrt{4+5x}\,dx$.

Завдання 12

Обчислити невизначені інтеграли.

12.1. $\int \ln(x+3)dx$.

12.2. $\int x^2\cos x\,dx$.

12.3. $\int x\ln x\,dx$.

12.4. $\int x\sin x\,dx$.

12.5. $\int x\cos x dx$.

12.6. $\int xe^x dx$.

12.7. $\int \ln(8+x)dx$.

12.8. $\int \arcsin x dx$.

12.9. $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

12.10. $\int \mathrm{arctg} x dx dx$.

12.11. $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$.

12.12. $\int xe^{\frac{x}{2}} dx$.

12.13. $\int xe^{3x} dx$.

12.14. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

12.15. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

12.16. $\int xe^{-x} dx$.

12.17. $\int \ln(x^2+1)dx$.

12.18. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

12.19. $\int \sqrt[4]{x}\ln x dx$.

12.20. $\int x^2 \sin x dx$.

12.21. $\int x^2 e^x dx$.

12.22. $\int x^4 \ln x dx$.

12.23. $\int \ln(x-5)dx$.

12.24. $\int xe^{4x} dx$.

12.25. $\int x^2 \ln x dx$.

12.26. $\int xe^{-7x} dx$.

12.27. $\int \ln(x+10)dx$.

12.28. $\int \sqrt[5]{x}\ln x dx$.

12.29. $\int xe^{2x} dx$.

12.30. $\int x^3 \ln x dx$.

Завдання 13

Обчислити невизначені інтеграли.

13.1. а) $\int \sin^2 x \cos x dx$, б) б) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

13.2. а) $\int \cos^5 x \sin x dx$, б) б) $\int \sin^4 x dx$.

13.3. а) $\int \mathrm{tg}^3 x \frac{dx}{\cos x}$, б) б) $\int \cos^4 x dx$.

13.4. а) $\int \cos 5x \sin 3x dx$, б) б) $\int \sin^3 x dx$.

13.5. а) $\int \sin^7 x \cos x dx$, б) б) $\int \cos^3 x dx$.

13.6. а) $\int \cos^{10} x \sin x dx$, б) б) $\int \sin^5 x dx$.

13.7. а) $\int \cos 4x \cos 8x dx$, б) б) $\int \sin^2 x dx$.

13.8. а) $\int \sin x \cos^6 x dx$, б) б) $\int \cos^2 x dx$.

13.9. а) $\int \sin 6x \cos 10x dx$, б) б) $\int \sin^5 x dx$.

13.10. а) $\int \sin x \cos^8 x dx$, б) б) $\int \cos^5 x dx$.

13.11. а) $\int \operatorname{ctg}^2 x \frac{dx}{\sin^2 x}$, б) б) $\int \sin^3 x dx$.

13.12. а) $\int \sin^4 x \cos x dx$, б) б) $\int \cos^2 x dx$.

13.13. а) $\int \sin x \cos^6 x dx$, б) б) $\int \sin^5 x dx$.

13.14. а) $\int \sin 7x \cos 5x dx$, б) б) $\int \cos^9 x dx$.

13.15. а) $\int \sin 10x \sin 4x dx$, б) б) $\int \cos^5 x dx$.

13.16. а) $\int \sin^{10} x \cos x dx$, б) б) $\int \cos^4 x dx$.

13.17. а) $\int \sin x \cos^3 x dx$, б) б) $\int \sin^6 x dx$.

13.18. а) $\int \sin 4x \cos 5x dx$, б) б) $\int \sin^2 x dx$.

13.19. а) $\int \sin x \cos^6 x dx$, б) б) $\int \sin^5 x dx$.

13.20. а) $\int \sin^{12} x \cos x dx$, б) б) $\int \cos^2 x dx$.

13.21. а) $\int \sin^3 x \cos x dx$, б) б) $\int \cos^3 x dx$.

13.22. а) $\int \sin x \cos^7 x dx,$ б) б) $\int \sin^4 x dx.$

13.23. а) $\int \mathrm{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x},$ б) б) $\int \sin^3 x dx.$

13.24. а) $\int \sin 2x \cos 8x dx,$ б) б) $\int \sin^2 x dx.$

13.25. а) $\int \sin 10x \sin 2x dx,$ б) б) $\int \cos^2 x dx.$

13.26. а) $\int \cos 6x \cos 4x dx,$ б) б) $\int \cos^4 x dx.$

13.27. а) $\int \mathrm{ctg} x \frac{dx}{\sin^2 x},$ б) б) $\int \sin^3 x dx.$

13.28. а) $\int \sin x \cos^4 x dx,$ б) б) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

13.29. а) $\int \sin 6x \sin 3x dx,$ б) б) $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

13.30. а) $\int \sin^5 x \cos x dx,$ б) $\int \mathrm{ctg}^2 x dx.$

Завдання 14

Обчислити визначені інтеграли.

14.1. $\int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx.$

14.2. $\int_0^1 \ln(x+1)dx.$

14.3. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$

14.4. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx.$

14.5. $\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\,dx.$

14.6. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x}}.$

14.7. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx.$

14.8. $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 dx.$

14.9. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$

14.10. $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

14.11. $\int_0^3 \ln(x+3)dx.$

14.12. $\int_1^2 x\ln(1+x)dx.$

14.13. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx.$

14.14. $\int_0^1 x^2e^x dx.$

14.15. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx.$

14.16. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$

14.17. $\int\limits_0^{\pi/4} x\sin x\,dx.$

14.18. $\int\limits_0^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx.$

14.19. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 9x\cos 3x\,dx.$

14.20. $\int\limits_0^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$

14.21. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}.$

14.22. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg}^3 x\frac{dx}{\sin^2 x}.$

14.23. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$

14.24. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

14.25. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\,dx.$

14.26. $\int\limits_0^{\pi/2} dx.$

14.27. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx.$

14.28. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin 4x\cos 2x\,dx.$

14.29. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x\,dx.$

14.30. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x\,dx.$

Завдання 15.

Обчислити площу фігури обмеженої лініями.

15.1. $y = x^2, \qquad y = 2x.$

15.2. $y = x^2 + 5x + 6, \qquad y = x + 6.$

15.3. $y = x^3, \qquad y = 8, \quad x = 0.$

15.4. $y = 3x^2, \qquad y = 3x + 1.$

15.5. $y = 3 - 2x - x^2, \qquad y = -2x - 1.$

15.6. $y = 3x^2 + 1, \qquad y = 3x + 7.$

15.7. $y = 2x^2, \qquad y = 6x.$

15.8. $y = x^2 + 2, \qquad y = 4 - x^2.$

15.9. $y = x^2 + 2x, \qquad y = -x + 4.$

15.10. $y = 3x^2, \qquad y = 6x.$

15.11. $y = 2x - x^2, \qquad y = x - 2.$

15.12. $y = -x^2 + 2x - 1, \qquad y = -x - 1.$

15.13. $y = x^2, \qquad y = 2 - x^2.$

15.14. $y = x^2 - 5x + 6, \qquad y = x + 6.$

15.15. $y = x^2 + 3x - 2, \qquad y = x - 2.$

15.16. $y = x^2 - 3x + 1, \qquad y = x + 1.$

15.17. $y = x^2, \qquad y = -x + 6.$

15.18. $y = x^2 - 3x + 1, \qquad y = 2x + 1.$

15.19. $y = x^2 + 2, \qquad y = 4 - x^2.$

15.20. $y = x^2 + 5, \qquad y = x + 4.$

15.21. $y = x^2 - 3x + 2, \qquad y = 2x + 2.$

15.22. $y = 2x^2 + 6x + 3, \qquad y = 4x + 3.$

15.23. $y = x^2 + 5, \qquad y = 7 - x^2.$

15.24. $y = x^2 - 4x + 1, \qquad y = 2x + 1.$

15.25. $y = x^2 + 2x - 4,\qquad y = x - 4.$

15.26. $y = 3x^2 + 1,\qquad y = 3x + 7.$

15.27. $y = -x^2 - 6x - 5,\qquad y = x + 1.$

15.28. $y = x^2,\qquad y = -x + 6.$

15.29. $y = x^2 - 3x + 1,\qquad y = x + 1.$

15.30. $y = x^2 + 4x,\qquad y = x + 4.$

Завдання 16.

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої лініями.

16.1. $y = x^2 + 1,\qquad y = 3 - x^2.$

16.2. $y = \sqrt{8x},\qquad y = \dfrac{x^2}{8}.$

16.3. $y = x^2,\qquad y = 2x.$

16.4. $y = \dfrac{4}{x},\qquad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 3.$

16.5. $y = 3x^2,\qquad y = 3x.$

16.6. $y = 3x^2 + 1,\qquad y = 3x + 1.$

16.7. $y = x^2 + 2,\qquad y = 10 - x^2.$

16.8. $y = x^2 + 4,\qquad y = 2x + 4.$

16.9. $y = 2x^2,\qquad y = 6x.$

16.10. $y = \sqrt{x},\qquad y = x^2.$

16.11. $y = x^2,\qquad y = 4,\quad x = 0.$

16.12. $y = x^2,\qquad y = 4 - x^2.$

16.13. $y = x^2 + 2,\qquad y = 3x + 2.$

16.14. $y = x^2,\qquad y = 8 - x^2.$

16.15. $y = 2x^2,\qquad y = 8,\quad x = 0.$

16.16. $y = x^2 + 2,\qquad y = 4 - x^2.$

16.17. $y = x^2 - 9, \quad y = x - 2.$

16.18. $y = x^2 + 4, \quad y = x + 4.$

16.19. $y = x^2, \quad y = -x + 6.$

16.20. $y = 3x^2, \quad y = 12, \quad x = 0.$

16.21. $y = 3x^2, \quad y = 3x + 7.$

16.22. $y = x^2 - 1, \quad y = 2x - 1.$

16.23. $y = x^2 + 5, \quad y = 7 - x^2.$

16.24. $y = x^2, \quad y = 4x.$

16.25. $y = 2x^2, \quad y = 18, \quad x = 0.$

16.26. $y = x^2, \quad y = -x + 6.$

16.27. $y = 2x^2, \quad y = 4x.$

16.28. $y = 3x^2 + 2, \quad y = x + 2.$

16.29. $y = x^2 + 2x, \quad y = x.$

16.30. $y = 2x^2, \quad y = 8x.$

Завдання 17.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

17.1. $e^x dy = xe^{3y} dx.$

17.2. $\dfrac{dy}{\sin y} = y dx.$

17.3. $y' = (2x - 1)\mathrm{ctg} y.$

17.4. $(1 + e^x) y dy - e^y dx = 0.$

17.5. $\sin y \cos x dx = \cos y \sin x dx.$

17.6. $y' = (2y + 1)\mathrm{tg} x.$

17.7. $(1 + e^x) y y' = e^x.$

17.8. $\sin x \mathrm{tg} y dx = dy.$

17.9. $y' = ye^{2x}.$

17.10. $y' = 5\sqrt{y}.$

17.11. $y' + y^2 = 1.$

17.12. $x^2(y^3 + 5)dx - (x^3 + 5)y^2 dy = 0$

17.13. $y' = 2x^2 + 5x + 12.$

17.14. $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0.$

17.15. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$

17.16. $y - y' x \ln x = 0.$

17.17. $\dfrac{1 - y}{1 + x} + y' = 0.$

17.18. $(xy + x^3 y)y' = 1 + y'.$

17.19. $\dfrac{y'}{7^{y-x}}=3.$

17.20. $y-xy'=1+x^2y'.$

17.21. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0.$

22. $y'\mathrm{ctg}x+y=2.$

17.23. $y'=e^{x^2}x(1+y^2).$

17.24. $y-xy'=1+x^2y'.$

17.25. $(x+4)dy-xydx=0.$

17.26. $y'=2xy+x.$

17.27. $2xyy'=1-x^2.$

17.28. $(x^2-1)y'-xy=0.$

17.29. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy.$

17.30. $xyy'=\dfrac{1+x^2}{1-y^2}.$

Завдання 18

Знайти загальний розв’язок рівняння.

18.1. $(x+2y)dx-xdy=0.$

18.2. $x^2+y^2-xyy'=0.$

18.3. $(x+y)dx+(y-x)dy=0.$

18.4. $(x^2-xy)dy+y^2dx=0.$

18.5. $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y.$

18.6. $(y^2-2xy)dx+x^2dy.$

18.7. $y^2+x^2y'=xyy'.$

18.8. $xy'=y-xe^{y/x}.$

18.9. $y'=\dfrac{y}{x}-1.$

18.10. $(x-y)ydx-x^2dy=0.$

18.11. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}.$

18.12. $xdy-ydx=ydy.$

18.13. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}.$

18.14. $y^2+x^2y'=xyy'.$

18.15. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}.$

18.16. $x(y'+1)=y.$

18.17. $y(x-y)=x^2y'.$

18.18. $(x^2+2xy)dx+xydy=0.$

18.19. $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}.$

18.20. $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'.$

18.21. $y'=\dfrac{y}{x}-1.$

18.22. $\dfrac{y^2+x^2}{xy}=y'.$

18.23. $(x-y)y'=y.$

18.24. $xdy=(y-x)dx.$

18.25. $y'=\dfrac{2x+y}{x}.$

18.26. $\dfrac{y}{x}-y'=1.$

18.27. $yy'=2y-x.$

18.28. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

18.29. $y'x - y + x = 0$.

18.30. $x^2 dy = y(x + y)dx$.

Завдання 19

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння.

19.1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$.

19.2. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$.

19.3. $y' - y = e^x$, $y(0) = 0$.

19.4. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2e}$.

19.5. $x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$.

19.6. $xy' + y = 4x^3 + 3x^3$, $y(2) = 1$.

19.7. $xy' - 3y = -x^2$, $y(0) = 1$.

19.8. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$.

19.9. $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$.

19.10. $xy' - y = x^2$, $y(0) = 1$.

19.11. $y' + \frac{y}{x+1} = x^2 + x$, $y(0) = 0$.

19.12. $xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$.

19.13. $xy' + y = \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

19.14. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - 1$, $y\left(\sqrt{2}\right) = 1$.

19.15. $\left(1 - x^2\right)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$.

19.16. $x^2 y' - 2xy = 3$, $y(0) = -1$.

19.17. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

19.18. $y' - 3x^2 y - x^{2e^{x^3}}$, $y(0) = 0$.

19.19. $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$.

19.20. $x^2 y' - xy = x$, $y(0) = 1$.

19.21. $y' - \frac{2y}{x} + x = 0$, $y(0) = 1$.

19.22. $y' + 2y = 4x$, $y(0) = 1$.

19.23. $xy' + y - e^x = 0$, $y(0) = 0$.

19.24. $y' - 4y = \cos x$, $y(0) = 1$.

19.25. $y' + y\text{tg}x = \cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

19.26. $y' - 2xy = 1 - 2x^2$, $y(0) = 2$.

19.27. $xy' - xy = e^x$, $y(1) = 0$.

19.28. $y' - \frac{y}{x} = x$, $y(0) = 1$.

19.29. $xy' - y = x^2$, $y(1) = 0$.

19.30. $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$.

Завдання 20

Знайти загальний розв'язок і структуру частинного розв'язку рівняння.

20.1. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

20.2. $y'' + 9y' = 0$.

20.3. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

20.4. $y'' + 3y' = 0$.

20.5. $y'' + y' - 2y = 0$.

20.6. $y'' + 2y' + 17y = 0$.

20.7. $y'' + 9y' = 0$.

20.8. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

20.9. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

20.10. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

20.11. $y'' - 3y' = 0$.

20.12. $y'' - 4y' - 21y = 0$.

20.13. $y'' - 3y' - 10y = 0$.

20.14. $y'' + 4y' + 8y = 0$.

20.15. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

20.16. $y'' + 10y' + 29y = 0$.

20.17. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

20.18. $y'' - 7y' - 8y = 0$.

20.19. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

20.20. $y'' - 10y' + 16y = 0$.

20.21. $y'' - 6y' = 0$.

20.22. $y'' - 2y' - 15y = 0$.

20.23. $y'' + 6y' + 25y = 0$.

20.24. $y'' - 6y' + 8y = 0$.

20.25. $9y'' - 6y' + y = 0$.

20.26. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

20.27. $4y'' + 8y' - 5y = 0$.

20.28. $y'' + 9y' = 0$.

20.29. $y'' + 16y' = 0$.

20.30. $y'' + 12y' + 37y = 0$.

Завдання 21

Дослідити на збіжність ряди.

21.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.

21.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$.

21.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$.

21.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$.

21.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

21.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$.

21.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

21.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$.

21.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$.

21.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$.

21.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$.

21.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$.

21.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$.

21.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-n+1}$.

21.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

21.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}$.

21.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}$.

21.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\mathrm{n}+3)}$.

21.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2\pi}}$.

21.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

21.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$.

21.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n-1}$.

21.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$.

21.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4n}$.

21.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

21.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+5}$.

21.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$.

21.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+4}$.

21.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+3}$.

21.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+6)}$.

Завдання 22

Дослідити на збіжність знакопереміжні ряди.

22.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

22.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{6n+1}$.

22.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$.

22.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{n(n+1)}$.

22.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

22.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

22.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$

22.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+5)}{3^n}.$

22.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3n+1}.$

22.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$

22.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{n}.$

22.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n^2+1}.$

22.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 5^n}.$

22.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$

22.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}.$

22.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+5)}{3^n}.$

22.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n^2+1)}{n^3}.$

22.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$

22.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^3}{n^2+1}.$

22.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{9n-1}.$

22.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n+1)^2}.$

22.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-5}.$

22.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3-n}.$

22.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+5)}{n}.$

22.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2-6}}.$

22.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$

22.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}.$

22.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+5}.$

22.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}}$.

22.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n^2-5}$.

Завдання 23

Дослідити на збіжність степеневий ряд.

23.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$.

23.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

23.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

23.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$.

23.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$.

23.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$.

23.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$.

23.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

23.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n n}$.

23.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

23.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}$.

23.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{n^3+5}$.

23.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

23.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

23.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n^3}$.

23.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^4}$.

23.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$.

23.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{2n}}$.

23.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{5^n}$.

23.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n}$.

23.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^5}$.

23.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{2^n}$.

23.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n}$.

23.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{4^n}$.

23.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^3}$.

23.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{5^n}$.

23.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n^3-2}$.

23.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n^2-1}$.

23.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 3^n}$.

23.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n} x^n}{\sqrt{n}}$.

Правила виконання та оформлення контрольних робіт

При виконанні контрольних робіт необхідно строго дотримуватися вказаних нижче правил. Роботи, що виконані без дотримання цих правил, не зараховуються та повертаються студенту для переробки.

1. Контрольну роботу необхідно виконувати у зошиті та залишати поля для зауважень викладача.

2. На обкладинці зошита повинно бути розбірливо написане прізвище студента, його ініціали, навчальний номер (шифр), номер контрольної роботи, назва дисципліни. В кінці роботи необхідно проставити дату її виконання та розписатися.

3. У роботу повинні бути включені всі задачі, що вказані у завданні, строго свого варіанта. Контрольні роботи, що містять не всі задачі завдання, а також задачі, що містять задачі не свого варіанта, не зараховуються.

4. Розв’язок задач потрібно розташовувати в порядку номерів, що вказані у завданнях, та зберігати номери задач.

5. Перед розв’язком кожної задачі необхідно виписати повністю її умову.

6. Розв’язки задач необхідно викладати докладно і акуратно, пояснюючи та мотивуючи усі дії по ходу розв’язання, при потребі робити креслення.

7. Після одержання перевіреної роботи студент повинен виправити всі помилки та віддати на повторну перевірку. Вносити виправлення в сам текст роботи після перевірки забороняється. Всі виправлення потрібно робити в зошиті після основної роботи.

Список рекомендованої літератури

1. Синєкоп М. С. Вища математика: навчальний посібник/ М. С. Синєкоп, Н. О. Жилюк, А. В. Янчев – Х.: ХДУХТ, 2012.
2. Корж А. П. Елементи аналітичної геометрії і лінійної алгебри / А.П. Корж – Х.: Студцентр, 2007.
3. Вища математика. Розв’язання задач та варіанти типових розрахунків: навчальний посібник / Гула В. Г., Синєкоп М. С. та ін.; под ред. проф. О. П. Корж – Х. : ХДУХТ, 2010.
4. Кулинич Г. Л. Вища математика. Спеціальні розділи / Г.Л. Кулинич – К. : Либідь, 2003.

ЗМІСТ

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Вища математика

Методичні вказівки та індивідуальні контрольні завдання для самостійної роботи студентів заочної форми навчання спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування»

Укладач
СОФРОНОВА Марина Сергіївна

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних
та інженерно-технічних дисциплін д.т.н., проф. М.І. Погожих

Техн. редактор О.В. Щегельська

План 2016 р., поз. 36

Підп. до друку 28.12.2016. Один електронний оптичний диск (CD-ROM);
супровідна документація. Об'єм даних 2,3 Мб. Тираж 100 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.12 р.