МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧУВАННЯ ТА ТОРГІВЛІ

Методи оптимізації

Опорний конспект лекцій з дисципліни
«Оптимізація технологічних процесів»
для студентів напрямку підготовки: 6.051701

Харків 2011

Рекомендовано до видання
кафедрою вищої математики,
протокол № 12 від 23 .03. 2011р

Обговорено і схвалено на засіданні
науково-методичної комісії НН ІХТБ,
протокол № 4 від 13. 04. 2011р.

Рецензент: В.В. Полевич, д-р техн. наук, проф.

Зміст

Вступ

Аналіз напрямків розвитку харчової індустрії показує, що існує широкий спектр проблемних питань в області підвищення якості і розширення асортименту продукції, ефективності технологічних процесів виробництва, освоєнні нетрадиційних джерел сировини, функціональних і біологічно активних добавок, підвищенні соціально-економічної ефективності виробництва. Найбільш важливими напрямками розвитку є стратегія удосконалювання виробництва за рахунок інженерно-технологічних рішень (найкращого використання сировини, устаткування, енергії, інтенсифікації технологічних процесів, підвищенні рівня механізації, зниження собівартості продукції, зменшення операційної ємності й інших) і стратегія удосконалювання товару (поліпшення споживчих властивостей, розробка цільових продуктів, розрахованих на певні групи споживачів чи умови реалізації).

Сьогодні виробництво продуктів харчування виходить на якісно новий рівень, спрямований на забезпечення високої якості продукції й одержання прибутку, що характеризується переходом до моделювання і проектування рецептур, технологічних процесів.

Однак у традиційних технологіях продукції ресторанного господарства використовується переважно емпіричний підхід до добору інгредієнтів, часом необґрунтований з погляду фізико-хімічних процесів, їх оптимальності, економічної доцільності, без обліку широких можливостей технологічних систем, що знижує конкурентоспроможність продукції.

В теперішній час відомі підходи до обробки та систематизації результатів з розробки та впровадження у виробництво тих чи інших харчових продуктів носять, як правило, інтуїтивний емпіричний характер. Науково обґрунтований підхід до проектування технологічних систем виробництва харчових продуктів потребує активного використання математичного апарату для складання моделей технологічного процесу, знаходження оптимального розв’язку з метою раціоналізації технологічного циклу виробництва харчових продуктів.

Одновимірна задача

В загальному вигляді задача оптимізації ставиться так:

Задана неперервна функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Потрібно знайти точки екстремуму функції, тобто точки мінімуму і максимуму.

$$f(x) \to min(max)\ x \in [a, b].$$

Зауважимо, що $f(x) \to min$, еквівалентно $-f(x) \to max$.

Ця задача ефективно розв’язується, коли $f(x)$ є унімодальною на $[a, b]$. Функція $f(x)$ називається **унімодальною** (рис.1) на $[a, b]$, якщо вона неперервна на цьому відрізку і існують такі числа α і β ($a \leq \alpha \leq \beta \leq b$), що

1) якщо $a < \alpha$, то на відрізку $[a, \alpha]$ $f(x)$ монотонно спадає;

2) якщо $\beta < b$, то на відрізку $[\beta, b]$ $f(x)$ монотонно зростає;

3) при $x \in [\alpha, \beta]$ $f(x) = f^* = \min_{[a,b]} f(x)$

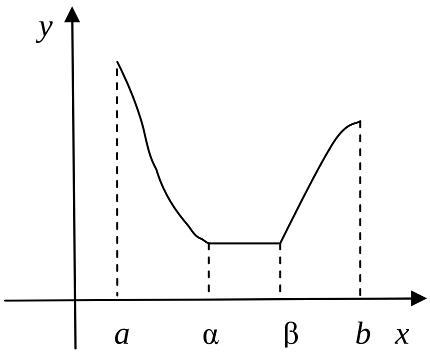


***Рис.1** – Загальний вигляд графіка унімодальної функції*

Можливі випадки відсутності одного або двох відрізків $[a, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, b]$. Такі варіанти проілюстровано графіками (рис. 2)

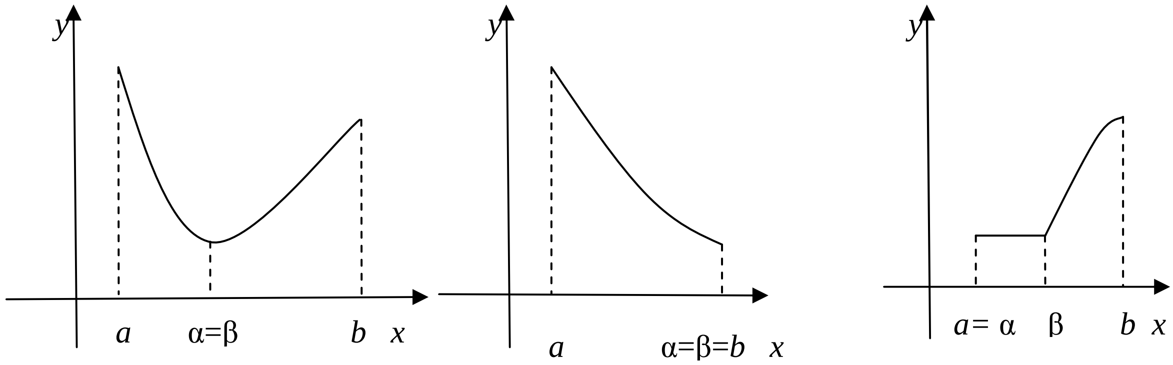


Рис.2

Множину унімодальних функцій позначають $Q[a,b]$.

Перевірку унімодальності функції на практиці здійснюють за критеріями:

1) якщо на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ диференційована і $f'(x)$ не спадає на відрізку, то $f(x) \in Q[a,b]$.
2) якщо на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ двічі диференційована і $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$, то $f(x) \in Q[a,b]$.

Приклад. Показати, що функція $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$ унімодальна на відрізку $[3,5]$. Знаходимо:

$$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 72x + 5,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 60x + 72 = 12(x^2 - 5x + 6).$$

Знаходимо корені рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Тобто при $x \geq 3$, $f''(x) \geq 0$ (рис.3), а отже, $f(x) \in Q[3,5]$.

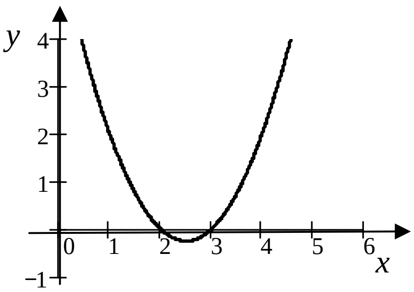


***Рис.3.** – Графік функції $f''(x)$*

Існують наближені методи мінімізації унімодальних функцій. Їх можна поділити на дві групи. Перша група – це методи, які використовують тільки значення функцій в деяких точках: метод прямого перебору, метод ділення відрізку навпіл (дихотомія), метод золотого перерізу.

За першим методом відрізок $[a,b]$ розбивається на n рівних частин, точками $x_i = a + i(b-a)/n$, $i = 0,1,2 \dots, n$, де $n \geq (b-a)/\varepsilon$, а ε – похибка обчислень. Маючи значення $f(x)$ в цих точках, знайдемо точку x_m, для якої $f(x_m) = \min_{0 \leq i \leq n} f(x_i)$. Максимальна похибка обчислення точки x_m є

$\varepsilon_n = (b-a)/n$. Це найпростіший метод, але він потребує великого обсягу обчислень. Більш послідовним є **метод ділення відрізку навпіл**.

Нехай $\varepsilon > 0$ – точність визначення мінімуму функції x^* і $\delta \in (0,2\varepsilon)$. Ділимо відрізок $[a,b]$ навпіл: $x_0 = (a+b)/2$. Задамо дві точки $x_1 = x_0 - \delta/2$, $x_2 = x_0 + \delta/2$. В цих точках обчислимо значення функції $f(x)$: $y_1 = f(x_1)$ та $y_2 = f(x_2)$. Порівняємо значення y_1 та y_2. Якщо $f(x_1) \le f(x_2)$ (рис.4) вибирають відрізок $[a,x_2]$, якщо $f(x_1) > f(x_2)$ (рис.5) вибирають відрізок $[x_1,b]$. З отриманим відрізком вчиняють так саме до тих пір, поки довжина відрізка не буде меншою за ε. Абсолютна похибка на n-му кроці становить $\varepsilon_n = \frac{b-a-\delta}{2^{n+1}} + \delta/2$.

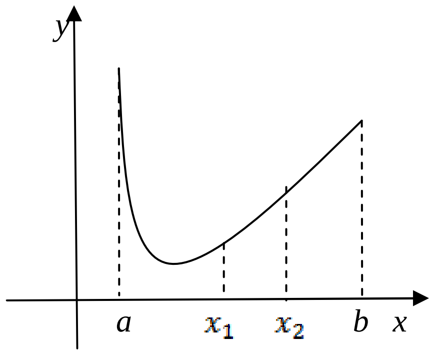


***Рис. 4** – новий відрізок* $[a,x_2]$

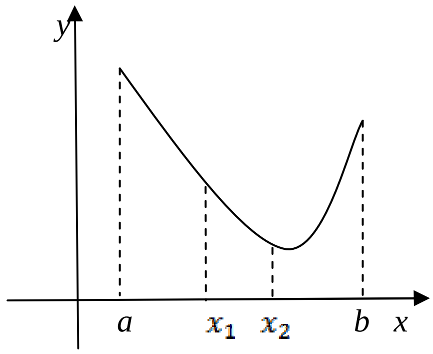
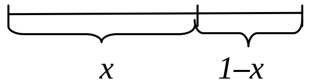


***Рис. 5** – новий відрізок* $[x_1,b]$

Метод золотого перерізу полягає в розбивці відрізку $[a,b]$ точкою x на дві частини так, що відношення довжини всього відрізка до його більшої частини дорівнює відношенню більшої частини до меншої. Для одиничного відрізка $[0,1]$ цей розподіл знаходиться так:

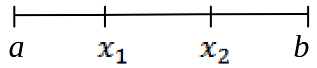


$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Звідки $x^2 = 1-x$, $x^2 + x - 1 = 0$, $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62$, $x_2 \approx -1{,}62$ (стор.), тобто $x = 0{,}62$.

Візьмемо на відрізку $[a, b]$ дві точки x_1 та x_2, що симетрично відносно границь поділяють відрізок у відношенні золотого перерізу:

$$x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a), \qquad x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a).$$



Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$ вибирають відрізок $[a, x_2]$, якщо $f(x_1) > f(x_2)$ вибирають відрізок $[x_1, b]$.

Число ітерацій буде $n > \ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) / \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx -2{,}1 \ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$, де ε – задана точність обчислень.

Інтерполяція

Ми розглядали функцію $f(x)$, яка має певні властивості. Звідки беруться ці функції, як технологу їх одержати? Безумовно кожна функція описує деякий технологічний процес. Найпростішій приклад – це зміна температури напівфабрикату на сковороді в часі (рис.6).

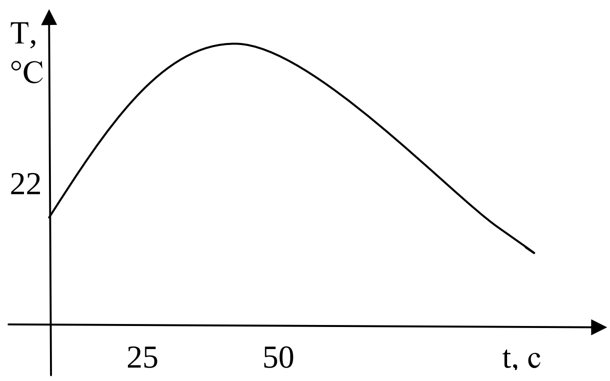


***Рис.6** – Зміна температури напівфабрикату*

Цю криву можна зобразити, якщо відомі заміряні величини T_i, t_i.

Наприклад

t	0	10	20	30	40	50
T	22	30	40	55	75	100

Яким чином перейти від табличних значень до аналітичного виразу $y = f(x)$. Це можна здійснити за допомогою інтерполяції – побудови такої наближеної функції, яка точно збігається з табличною в заданих точках. Задача інтерполяції розв'язується за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа: потрібно побудувати поліном ступеня n, який в $n+1$ точках $x_0, x_1, ..., x_n$ приймав би задані значення $y_0, y_1, ..., y_n$. Цей поліном має вид

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} y_m \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots(x-x_n)}{(x_m-x_0)\ldots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_n)} \qquad (1)$$

Приклад. Побудувати поліном другого степеня за даними

i	0	1	2
x	4	5	6
y	3	4	7

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 3\frac{(x-5)(x-6)}{(4-5)(4-6)} + 4\frac{(x-4)(x-6)}{(5-4)(5-6)} + 7\frac{(x-4)(x-5)}{(6-4)(6-5)} =$$

$$= 3\frac{x^2-11x+30}{(-1)(-2)} + 4\frac{x^2-10x+24}{1(-1)} + 7\frac{x^2-9x+20}{2\cdot 1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(x^2-11x+30\right) - 4\left(x^2-10x+24\right) + \frac{7}{2}\left(x^2-9x+20\right) =$$

$$= x^2-8x+19 = (x-4)^2+3.$$

Як бачимо, це звичайна парабола, яку зміщено догори на 3 одиниці та вправо на 4 одиниці. Зобразимо на графіку (рис.7) частину цієї параболи на відрізку [4, 6].

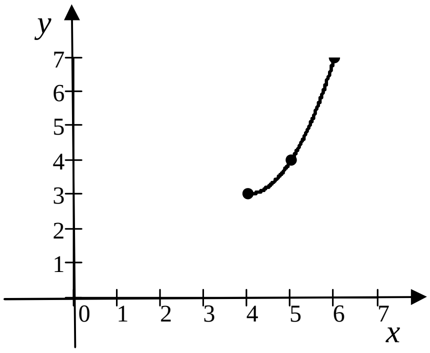


Рис.7 *– Інтерполяційний поліном*

Цей метод ефективний для таких точок, як у нашому прикладі. Якщо ж таблиця містить, наприклад, точки 5, 10, 20, то в цьому випадку інтерполяційний поліном не буде відображати реальний процес в проміжках між сусідніми точками. Треба також враховувати, що задані величини містять похибки вимірювань, що означає, що результати вимірювань є випадковими величинами. В такому разі для побудови залежності $y = f(x)$ треба використовувати методи математичної статистики.

Нехай на координатну площину xOy (рис. 8) нанесені точки (x_i, y_i) (кореляційне поле)

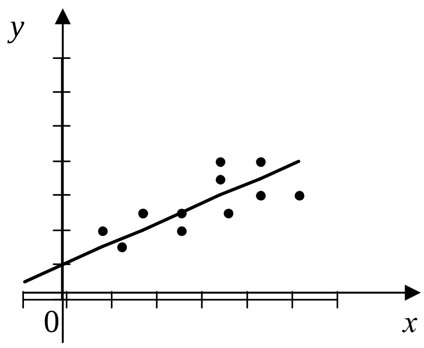


Рис.8 *– Кореляційне поле*

Форма кореляційного поля підказує, що ми маємо лінійний кореляційний зв'язок між ознаками x та y. Рівняння лінійної регресії запишемо у вигляді

$$y = a_0 + a_1 x \text{ або } y = \rho_{yx} x + b. \quad (2)$$

Коефіцієнт ρ_{yx} – називається коефіцієнтом регресії.

Значення ρ_{yx} та b знаходять за допомогою методу найменших квадратів.

Виберемо коефіцієнти ρ_{yx} та b лінії регресії у такий спосіб, щоб сума квадратів різниць емпіричних та теоретичних значень була найменшою

$$S(\rho_{yx}, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \rho_{yx} x_i - b)^2 \to min\,. \quad (3)$$

Необхідна умова – частинні похідні дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \rho_{yx}} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \rho_{yx} x_i - b) \cdot x_i = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - \rho_{yx} x_i - b) = 0. \end{cases}$$

Скоротимо на 2, та запишемо окремо доданки, що містять y_i, ρ_{yx}, b.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} \rho_{yx} \cdot x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b \cdot x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \rho_{yx} \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0. \end{cases}$$

Спільні множники винесемо за знак підсумовування та зауважимо,що $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i - \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i - b \cdot n = 0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на n, а друге $\sum_{i=1}^{n} x_i$:

$$\begin{cases} n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i - n \cdot \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot b \sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - b \cdot n \sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге:

$$n \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \rho_{yx} \left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) = 0.$$

Звідки

$$\rho_{yx} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

Якщо перейти до середніх величин: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, то формули запишуться так:

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \qquad (4)$$

$$b = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \quad \text{або} \quad b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}. \qquad (5)$$

Оцінка сили лінійної кореляції визначається за допомогою коефіцієнта кореляції:

$$r = \rho_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

де $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$, $\quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}$.

Коефіцієнт кореляції приймає значення $-1 \le r \le 1$. При $r = \pm 1$ між x та y існує лінійний функціональний зв'язок. При $r = 0$ лінійний кореляційний зв'язок між ознаками x та y відсутній (інший може бути). В цьому випадку треба уважно переглянути форму кореляційного поля. Наприклад конфігурація кореляційного поля (рис. 9) підказує, що форма зв'язку між ознаками x та y не буде лінійною. В такому випадку краще розглянути квадратичну функцію:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

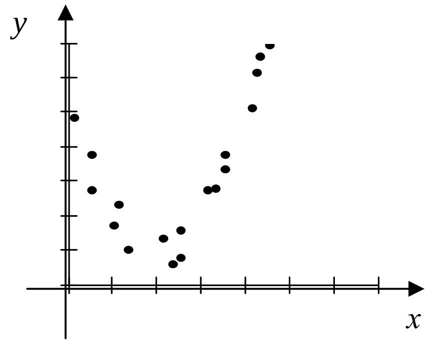


Рис.9 *– Нелінійне кореляційне поле*

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 також знаходяться методом найменших квадратів при розв'язанні задачі $S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2 \to min$

Часто за допомогою заміни можна звести задачу нелінійної регресії до лінійної. Наприклад, нехай між x та y існує така залежність $y = a_0 e^{a_1 x}$. Прологарифмуємо цей вираз:

$$ln y = ln a_0 e^{a_1 x};$$

$$ln y = ln a_0 + a_1 x.$$

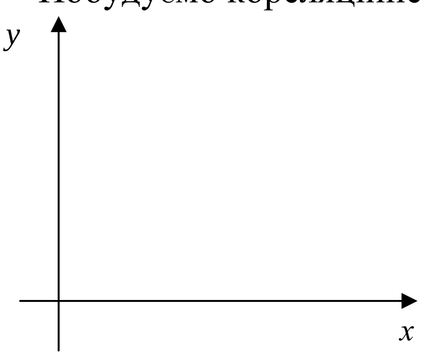
Зробивши заміни $v = ln y,\ u = x, b_0 = ln a_0, b_1 = a_1$, отримаємо лінійну залежність виду (2) $v = b_0 + b_1 u$, коефіцієнти якої можна знайти за формулами (4), (5). Ще деякі види залежності та відповідні заміни наведені у таблиці нижче.

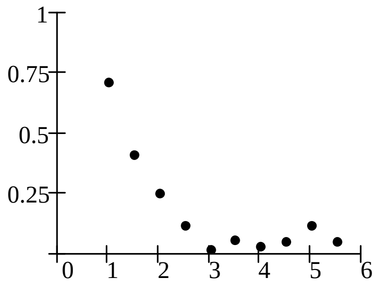
Вид залежності	Заміна змінних		Обмеження	Обернена заміна змінних	
Гіперболична $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$v = y$	$u = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$
Гіперболична $y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$	$v = \frac{1}{y}$	$u = x$	$y \neq 0$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$
Логарифмічна $y = a_0 + a_1 \ln x$	$v = y$	$u = \ln x$	$x > 0$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$
Показникова $y = a_0 e^{a_1 x}$	$v = \ln y$	$u = x$	$y > 0$ $a_0 > 0$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$
Степенева $y = a_0 x^{a_1}$	$v = \ln y$	$u = \ln x$	$x > 0$ $y > 0$ $a_0 > 0$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$

Приклад. Зробити припущення про вид зв'язку та знайти відповідне кореляційне рівняння.

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
y_i	0,81	0,47	0,24	0,17	0,06	0,02	0,13	0,01	0,01	0,03

Побудуємо кореляційне поле (x,y)





За графіком можна зробити припущення про гіперболічну ($y = \frac{1}{a_0+a_1x}$) або показникову ($y = a_0e^{a_1x}$) залежність.

Перевіримо гіпотезу про гіперболічну залежність. Допоміжні дані запишемо у таблицю

$x_i=u_i$	y_i	$v_i=1/y_i$	u_i^2	v_i^2	$u_i\ v_i$	$y(x_i)$
1,00	0,81	1,23	1,00	1,52	1,23	-0,12
1,50	0,47	2,13	2,25	4,53	3,19	2,16
2,00	0,24	4,17	4,00	17,36	8,33	0,11
2,50	0,17	5,88	6,25	34,60	14,71	0,05
3,00	0,06	16,67	9,00	277,78	50,00	0,04
3,50	0,02	50,00	12,25	2500,00	175,00	0,03
4,00	0,13	7,69	16,00	59,17	30,77	0,02
4,50	0,01	100,00	20,25	10000,00	450,00	0,02
5,00	0,01	100,00	25,00	10000,00	500,00	0,02
5,50	0,03	33,33	30,25	1111,11	183,33	0,01
$\sum$ 32,50		321,10	126,25	24006,07	1416,57	

$\bar{u} = \frac{\sum_i u_i}{n} = \frac{32,5}{10} = 3,25$; $\bar{v} = \frac{\sum_i v_i}{n} = \frac{321,1}{10} = 32,11$;

$\overline{uv} = \frac{\sum_i u_i v_i}{n} = \frac{1416,57}{10} = 141,657$;

$D(u) = \frac{\sum_i {u_i}^2}{n} - \bar{u}^2 = \frac{126,25}{10} - (3,25)^2 = 2,063$;

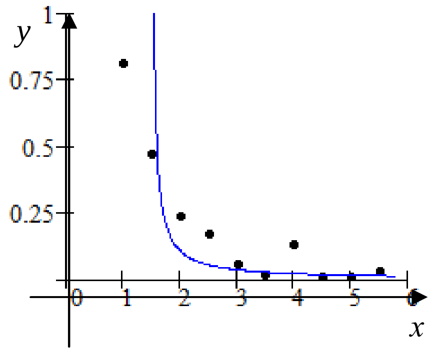
$D(v) = \frac{\sum_i {v_i}^2}{n} - \bar{v}^2 = \frac{24006,07}{10} - (32,11)^2 = 1369,541$;

$r = \frac{\overline{u \cdot v} - \bar{u} \cdot \bar{v}}{\sqrt{D(u)D(v)}} = \frac{141,657-3,25\cdot 32,11}{\sqrt{2,063\cdot 1369,541}} = 0,7$;

$b_1 = \frac{\overline{u \cdot v} - \bar{u} \cdot \bar{v}}{D(u)} = \frac{141,657-3,25\cdot 32,11}{2,063} = 18,08$; $b_0 = \bar{v} - b_1\bar{u} = 32,11 - 3,25 \cdot 18,08 = -26,66$.

Оскільки $a_1 = b_1$; $a_0 = b_0$, то рівняння регресії запишеться у вигляді $y = \frac{1}{-26,66+18,08x}$. Значення функції, розраховані за допомогою знайденої функції регресії, записані у останньому стовпці таблиці.

Побудуємо графік, враховуючи, що перша точка відноситься до іншої гілки гіперболи (в точці x=1,475 гіпербола має розрив).



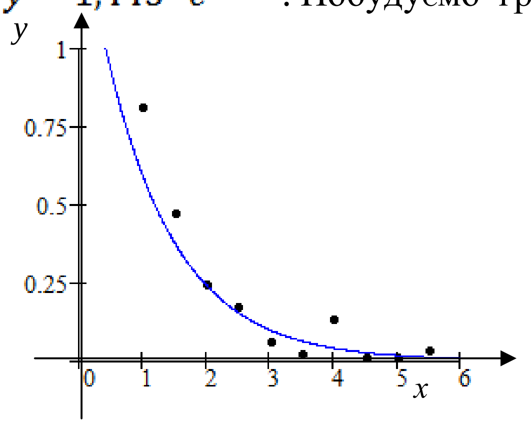
Перевіримо гіпотезу про показникову залежність. Допоміжні дані оформимо у таблицю

$x_i=u_i$	y_i	$v_i=ln(y_i)$	u_i^2	v_i^2	$u_i\ v_i$	$y(x_i)$
1,00	0,81	-0,21	1,00	0,04	-0,21	0,59
1,50	0,47	-0,76	2,25	0,57	-1,13	0,37
2,00	0,24	-1,43	4,00	2,04	-2,85	0,24
2,50	0,17	-1,77	6,25	3,14	-4,43	0,15
3,00	0,06	-2,81	9,00	7,92	-8,44	0,1
3,50	0,02	-3,91	12,25	15,30	-13,69	0,06
4,00	0,13	-2,04	16,00	4,16	-8,16	0,04
4,50	0,01	-4,61	20,25	21,21	-20,72	0,03
5,00	0,01	-4,61	25,00	21,21	-23,03	0,02
5,50	0,03	-3,51	30,25	12,30	-19,29	0,01
$\sum$ 32,50	1,95	-25,65	126,25	87,88	-101,96	

$r=\frac{\overline{u\cdot v}-\overline{u}\cdot\overline{v}}{\sqrt{D(u)D(v)}}=-0{,}871$. Оскільки в цьому випадку коефіцієнт регресії більший, то показникове рівняння краще описує залежність між x та y.

$b_1=\frac{\overline{u\cdot v}-\overline{u}\cdot\overline{v}}{D(u)}=-0{,}9$, $b_0=\overline{v}-b_1\overline{u}=0{,}37$.

Оскільки $a_1=b_1$; $a_0=e^{b_0}=1{,}443$, то рівняння регресії запишеться у вигляді $y=1{,}443\cdot e^{-0{,}9x}$. Побудуємо графік.



Інтерполяція за допомогою сплайнів

Нехай відрізок $[a,b]$ розбито на N рівних частин точками $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1} = b$. Розбиття можна здійснити так: $x_k = a + (k-1)h,\ h = \frac{b-a}{N},\ k = 1,\ 2, \ldots, N+1$.

Неперервна диференційована $n-1$ раз функція $S_n(x)$ $(S_n(x_i) = y_i)$ називається сплайном, якщо між сусідніми точками x_i та x_{i+1} вона є поліномом n-го ступеня. Тобто сплайн – це крива, яка складається з кусків кривих одного й того ж ступеня n, а в точках переходу від одного куска кривої до іншого існують неперервні похідні $n-1$ порядку. Наприклад, якщо $n = 3$ (кубічна парабола), то перша і друга похідна $S_3(x)$ в будь-якій точці x_k повинні бути неперервними:

$$\lim_{x \to x_k - 0} S_3'(x) = \lim_{x \to x_k + 0} S_3'(x)$$

$$\lim_{x \to x_k - 0} S_3''(x) = \lim_{x \to x_k + 0} S_3''(x)$$

Один із можливих підходів до побудови сплайнів розглянемо на прикладі сплайна $B_3(x)$ (сплайн Шонберга $x_i = i$). Нехай

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	4	1	0

Позначимо $x_+^3 = \begin{cases} x^3 \text{ при } x \geq 0, \\ 0 \quad \text{при } x < 0. \end{cases}$ (рис. 10)

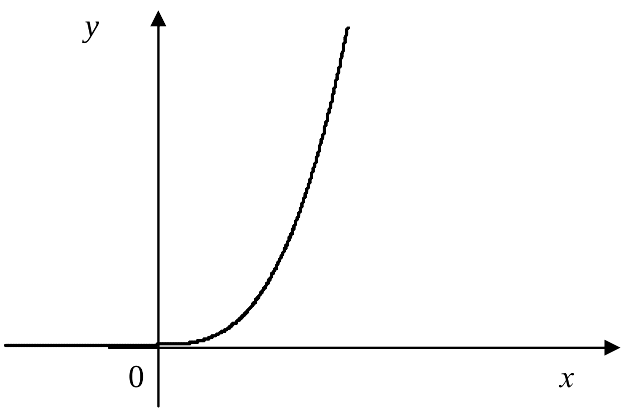
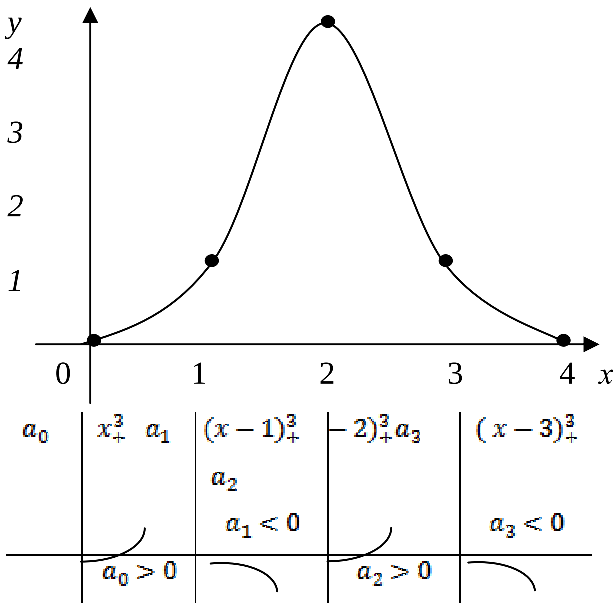


Рис. 10 *– Функція* x_+^3

Шуканий сплайн знаходиться за формулою:

$$B_3(x) = a_0\, x_+^3 + a_1\,(x-1)_+^3 + a_2\,(x-2)_+^3 + a_3\,(x-3)_+^3$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2, a_3 знаходимо за схемою



Складемо таблицю: перший стовпець – це доданки функції $B_3(x)$, останній рядок - значення функції y_i.

$a_0\, x_+^3$				
$a_1\,(x-1)_+^3$				
$a_2\,(x-2)_+^3$				
$a_3\,(x-3)_+^3$				
$y_i = \sum$	1	4	1	0

Візьмемо першу точку x=1. У другий стовпець запишемо значення доданків $B_3(x)$ при x=1. За означенням $a_1\,(1-1)_+^3 = a_2\,(1-2)_+^3 = a_3\,(1-3)_+^3 = 0$. Тобто $B_3(1) = a_0\, 1_+^3 = 1 = y_1$.

$a_0\, x_+^3$	1			
$a_1\,(x-1)_+^3$	0			
$a_2\,(x-2)_+^3$	0			
$a_3\,(x-3)_+^3$	0			
$y_i = \sum$	1	4	1	0

З останньої рівності знайдемо $a_0 = 1$. Візьмемо точку x=2. Заповнимо третій стовпець. За означенням $a_2\,(2-2)_+^3 = a_3\,(2-3)_+^3 = 0$; $a_0\,2_+^3 = 1 \cdot 2_+^3 = 8$. Тоді $B_3(2) = 8 + a_1\,(2-1)_+^3 = 4 = y_2$. Звідки a_1=-4.

$a_0\,x_+^3$	1	8		
$a_1\,(x-1)_+^3$	0	-4		
$a_2\,(x-2)_+^3$	0	0		
$a_3\,(x-3)_+^3$	0	0		
$y_i = \sum$	1	4	1	0

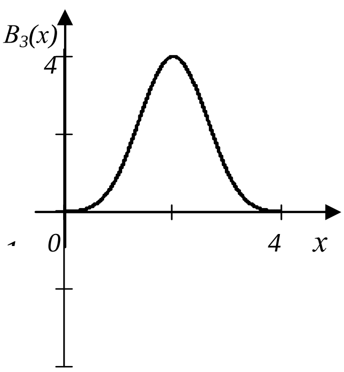
Аналогічно заповнимо інші стовпці.

$a_0\,x_+^3$	1	8	27	64
$a_1\,(x-1)_+^3$	0	-4	-32	-108
$a_2\,(x-2)_+^3$	0	0	6	48
$a_3\,(x-3)_+^3$	0	0	0	-4
$y_i = \sum$	1	4	1	0

Зауважимо, що на виділеній діагоналі стоять коефіцієнти a_i

$$B_3(x) = 1\,x_+^3 - 4\,(x-1)_+^3 + 6\,(x-2)_+^3 - 4\,(x-3)_+^3$$

Для цієї системи точок – це оптимальний кубічний сплайн. В точках x_2, x_3, x_4 забезпечено неперервність як перших, так і других похідних від $B_3(x)$



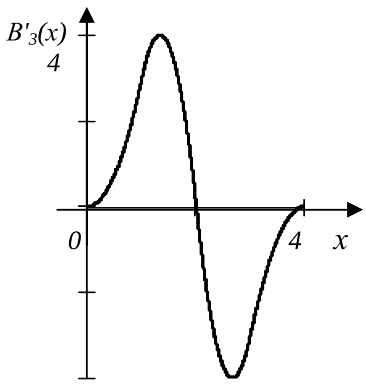


***Рис. 11** – Графік $B_3(x)$* ***Рис. 12** – Графік ${B_3}'(x)$*

Перша похідна від $B_3(x)$ записується так

$${B_3}'(x) = 3(\,x_+^2 - 4\,(x-1)_+^2 + 6\,(x-2)_+^2 - 4\,(x-3)_+^2)$$

Аналогічним чином будується сплайн для довільного полінома ступеня n.

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, C_{n+1}^i\,(x-i)_+^n,$$

де $C_{n+1}^i = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}$ число сполук.

У відповідності до цієї формули розглянутий кубічний сплайн запишеться так:

$$B_3(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, C_4^i\,(x-i)_+^3,$$

$$C_4^0 = \frac{4!}{0!4!} = 1, \quad C_4^1 = C_4^3 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!3!} = 4, \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Для довільних емпіричних даних

x_i	$a = x_1$	x_2	…	x_N	$x_{N+1} = b$
y_i	y_1	y_2	…	y_N	y_{N+1}

інтерполяційний кубічний сплайн записується так

$$S_3(x) = \sum_{k=0}^{N+1} a_k\,[x - a - (k-1)h]_+^3,$$

$$h = \frac{b-a}{N},\ S_3(a-h) = 0.$$

Для знаходження сталих a_k одержимо систему

$$h^3 a_0 = y_1$$

$$(2h)^3 a_0 + h^3 a_1 = y_2$$

…

$$(kh)^3 a_0 + [(k-1)h]^3 a_1 + [(k-2)h]^3 a_2 + \cdots + h^3 a_{k-1} = y_k$$

З першого рівняння знаходимо a_0 як вираз від y_1, з другого знаходимо a_1 через a_0, y_1 та y_2, і т.д.

Двовимірна оптимізація

Нехай y – параметр оптимізаційного процесу, що досліджується, а x_1, x_2– дві ознаки, незалежні фактори. Залежність $y = f(x_1, x_2)$ можна будувати як з використанням інтерполяційних формул, так і методами регресійного і кореляційного аналізу. Для знаходження області, в якій лежить оптимальне значення користуються графіком ліній рівня. Такий підхід не претендує на велику точність, але в той же час дозволяє досліднику встановити якісну картину процесу та його чутливість до зміни факторів x_1, x_2. Графік ліній рівня становить систему ліній на площині $x_1 0\, x_2$, які отримуємо перетином поверхні відгуку

$y = f(x_1, x_2)$ площинами, перпендикулярними вісі y, проведеними на визначених висотах. Таким чином кожна лініяна площині $x_1 0\, x_2$ відповідає конкретному значенню характеристичного критерію.

Розглянемо <u>приклад</u> побудови ліній рівня функції $y = x_1^2 - x_2^2$. Лінії рівня – рівнобічні гіперболи $x_1^2 - x_2^2 = C$. При $C = 0$ маємо $x_1^2 - x_2^2 = 0$, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Асимптоти гіперболи $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ (рис. 13).

Максимум функції досягається на вісі x_1, при віддаленні від початку координат, а мінімум на вісі x_2 при віддаленні від початку координат.

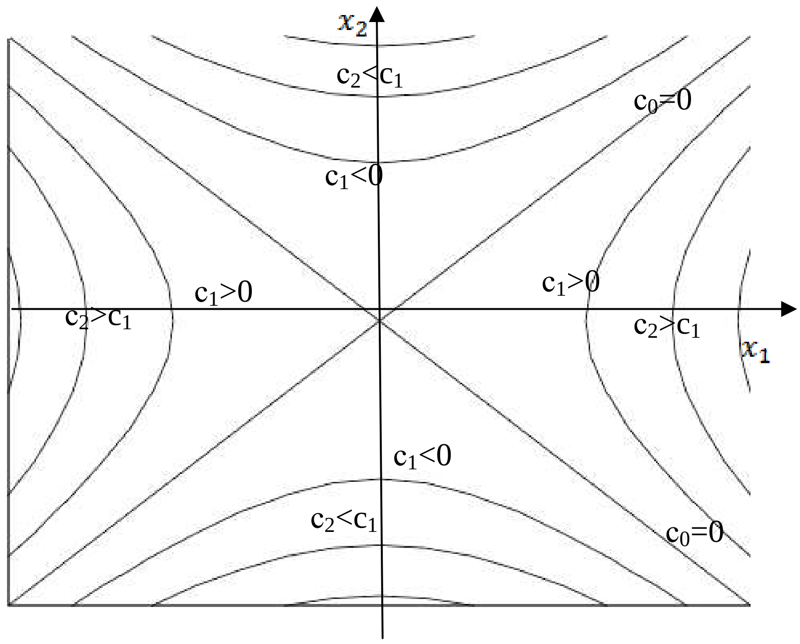


Рис.13 *– Лінії рівня функції* $y = x_1^2 - x_2^2$

Другий приклад $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Поверхня, що задається цією функцією, має вид шапочки (параболоїд), а її лінії рівня $C = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ – система концентричних кіл $1 - C^2 = x_1^2 + x_2^2$ (рис. 14).

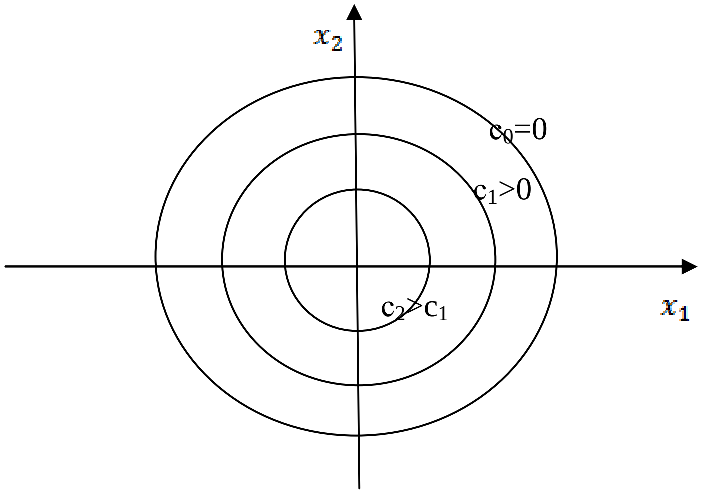


Рис.14 *– Лінії рівня функції* $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

Як бачимо максимальне значення $y_{max} = C_k = 1$ досягається при $x_1 = x_2 = 0$.

Планування екстремального експерименту

Нехай маємо n факторів $x_1, x_2, \dots, x_n$, які впливають на технологічний процес. Це може бути температура, час, концентрація стабілізатора, концентрація емульгатора і т.ін. Кожний фактор може набувати одного із кількох значень, які називаються рівнями фактора. Фіксований набір цих рівнів визначає повний етап технологічного процесу. Велика кількість рівнів зумовлює велику кількість комбінацій, що призводить до значного зростання числа експериментів. Це змушує нас під час планування експерименту обмежуватися мінімальною кількістю дослідів та оптимальних умов їх проведення. За оптимальний вибирають один параметр, а всі інші мають характер обмежень. Не виключається варіант вибору узагальненого параметру оптимізації.

Як правило технологічний процес подається залежністю параметра оптимізації y від факторів $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тому залежність записується формулою $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Повний набір факторів визначає деяке значення y , а в $n+1$ вимірному факторному просторі ця формула зображає деяку поверхню (поверхню відгуку), через що саму формулу називають рівнянням відгуку. Рівняння відгуку будемо шукати у вигляді рівняння регресії

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{i,j} x_i x_j,$$

де β_0, β_i, $\beta_{i,j}$ – коефіцієнти регресії.

Процес планування та проведення екстремального експерименту включає ряд етапів:

1. Висловлюється гіпотеза про можливість опису технологічного процесу рівнянням регресії.
2. Відповідно до цієї гіпотези планується і проводиться експеримент.
3. Перевіряється відтворюваність результатів експерименту.
4. За результатами експерименту розраховуються коефіцієнти регресії.
5. Проводиться статистично оцінка значущості коефіцієнтів регресії.
6. Здійснюється перевірка адекватності одержаного рівняння реальному процесу.
7. За рівнянням проводяться розрахунки, які дозволяють визначити оптимальні умови перебігу процесу.

Повний факторний експеримент

Вибираємо локальну область факторного простору для проведення першої серії експериментів. Для фактору C_i, який приймає значення на двох рівнях верхньому C_i^+ та нижньому C_i^-, визначаємо основний рівень $C_{i0} = \frac{C_i^+ + C_i^-}{2}$, та визначаємо інтервал варіювання:

$$\lambda_i = C_i^+ - C_{i0} = C_{i0} - C_i^-.$$

Кожний фактор C_i записуємо в безрозмірних величинах x_i, які визначаються за формулою

$$x_i = \frac{2C_i - (C_i^+ + C_i^-)}{C_i^+ - C_i^-}.$$

Згідно з цією формулою при $C_i = C_i^-$ маємо $x_i = -1$, а при $C_i = C_i^+$ маємо $x_i = 1$. Таким чином маємо відображення відрізка $[C_i^-, C_i^+]$ на відрізок $[-1,1]$.

Експеримент, в якому реалізуються усі можливі комбінації факторів на вибраних рівнях, зветься повним факторним експериментом (ПФЕ). Кількість дослідів N через кількість факторів n у ПФЕ визначається так $N = 2^n$. Наприклад, при $n = 2$ $N = 2^2 = 4$.

У безрозмірних змінних план ПФЕ подається таблицею:

i – номер досліду	Фактори		y_i – функція відгуку
	x_1	x_2	
1	–1	–1	y_1
2	+1	–1	y_2
3	–1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Зображену таблицю називають матрицею планування.

Властивості матриці планування:

1) Алгебраїчна сума елементів стовпців для кожного фактора дорівнює нулю:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

де i – номер фактора, j – номер досліду (властивість симетричності відносно до центру експерименту).

2) Сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює числу дослідів (умова нормування):

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 = N.$$

3) сума почленних добутків будь-яких двох стовпців матриці планування дорівнює нулю:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}x_{kj} = 0, \quad i \neq k.$$

Остання властивість – властивість ортогональності. Відповідна матриця планування називається ортогональною. Коефіцієнти регресії, які знаходяться за допомогою ортогональної матриці планування, будуть взаємно незалежними.

Величини y_1 ,y_2 ,y_3 , y_4 , які ми вимірюємо, є випадковими величинами. Тому для достовірності дослідів треба проводити m паралельних дослідів і результати спостережень $y_{1m}, y_{2m}, y_{3m}, y_{4m}$ усереднювати:

$$\bar{y_i} = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} y_{il}$$

Запланований експеримент ділять на m серій, у кожній із яких повністю реалізується матриця планування. Результати досліджень оформлюються у вигляді таблиці (у даному випадку $n = 2, m = 3$)

i – номер досліду	Фактори		Результат серії			$\bar{y_i}$
	x_1	x_2	1	2	3	
1	–	–	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	$y_{1,3}$	$\overline{y_1}$
2	+	–	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$	$y_{2,3}$	$\overline{y_2}$
3	–	+	$y_{3,1}$	$y_{3,2}$	$y_{3,3}$	$\overline{y_3}$
4	+	+	$y_{4,1}$	$y_{4,2}$	$y_{4,3}$	$\overline{y_4}$

Відтворюваність результатів дослідів

Побудові математичної моделі передує перевірка відтворюваності результатів дослідів, тобто перевірка на вплив деяких неврахованих факторів. В регресійному аналізі пропонується перевірка однорідності виправлених вибіркових дисперсій $S_{y_i}^2$, тобто перевірка гіпотези про рівність дисперсій

$S_{y_1}^2 = S_{y_2}^2 = S_{y_3}^2 = S_{y_4}^2$ у всіх дослідах. Дисперсії знаходимо за формулою $S_{y_i}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{l=1}^{m}(y_{il} - \bar{y}_i)^2$. В нашому випадку $m = 3$.

Для перевірки гіпотези про однорідність дисперсій використовується критерій Кочрена, який ґрунтується на законі розподілу максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій:

$$K = \frac{S_{y_{max}}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_{y_i}^2}.$$

Якщо обчислене значення критерію K менше за критичну точку розподілу Кочрена $K_{kr}(\alpha, f_1, f_2)$ (дод.3), де α – прийнятий рівень значущості, $f_1 = m - 1$, $f_2 = N$, то гіпотеза про однорідність гіпотез приймається.

Тоді обчислюється дисперсія відтворюваності процесу

$$S_{\text{відтв}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_{y_i}^2}{N},$$

якій відповідає $f = N(m-1)$ ступенів волі.

При негативному результаті ($K > K_{kr}(\alpha, f_1, f_2)$) можна стверджувати про наявність неврахованих некерованих і неконтрольованих змінних. Щоб цьому запобігти, можна спробувати збільшити кількість паралельних дослідів m.

Перевірка значущості коефіцієнтів регресії

Нехай поверхня відгуку може мати наближено форму площини. Тоді відповідне рівняння регресії має вигляд

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2.$$

Останнім доданком враховується ефект взаємодії факторів. Коефіцієнти регресії за методом найменших квадратів знаходяться за формулами

$$b_0 = (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4)/4,$$

$$b_1 = (-\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4)/4,$$

$$b_2 = (-\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4)/4,$$

$$b_3 = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4)/4.$$

Знаки у виразах визначаються таблицею

1	x_1	x_2	$x_1\ x_2$
+	–	–	+

+	+	–	–
+	–	+	–
+	+	+	+

Перший стовпець складається з одиниць, стовпці x_1 та x_2 є стовпцями матриці планування, а елементи стовпця x_1 x_2 дорівнюють добутку відповідних елементів стовпців x_1 та x_2 . За допомогою цієї таблиці можна записати коефіцієнти рівняння регресії у загальному вигляді:

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i \cdot z_{ij} \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

де z_{ij} – елемент матриці, що відповідає вище наведеній таблиці (i – номер рядка, j – номер стовпця)

$$z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі перевіряється гіпотеза про значущість коефіцієнтів регресії b_0, b_1, b_2, b_3. З наперед заданою ймовірністю p встановлюємо, чи чинить розглядуваний фактор помітний вплив на технологічний процес. Якщо одержана абсолютна величина коефіцієнта регресії b_i, більша за помилку визначеності, то коефіцієнт b_i значущо відрізняється від нуля і відповідний фактор чинить вплив на процес. Якщо ж цього впливу немає, то значення b_i буде незначущо відрізнятися від нуля, тобто зміна чинника процесу y за зміни рівня відповідного фактора буде сумірною з помилкою під час його визначення.

Перевірка значущості коефіцієнтів регресії проводиться за допомогою t-критерію Стьюдента. Середньоквадратична помилка визначення коефіцієнтів регресії дорівнює

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{S^2_{\text{відтв}}}{N}}.$$

Коефіцієнти регресії вважаються відмінними від нуля (тобто значущими), якщо виконується нерівність

$$|b_i| > t_{kr}(\alpha, f)S_{b_i},$$

де t_{kr} – критична точка розподілу Стьюдента (дод.1), α – рівень значущості, $f = N \cdot (m-1)$ – число ступенів волі. У випадку, коли нерівність не виконується, коефіцієнт b_i вважається статистично незначущим. Його статистична незначущість може бути зумовлена такими причинами:

1) даний фактор не має впливу на процес, що вивчається;
2) вибрано надто малий інтервал варіювання цього фактора;
3) нульове значення фактора x_i відповідає його оптимальному значенню;
4) велика помилка експерименту через наявність флуктуацій некерованих та неконтрольованих змінних.

Оскільки ортогональне планування дає змогу знайти незалежні вирази для коефіцієнтів регресії, то, якщо якийсь з коефіцієнтів буде незначущим, він може бути відкинутим без перерахування інших. Після цього математична модель процесу складається у вигляді рівняння зв'язку вихідного параметра y і безрозмірних змінних x_i, яке включає тільки значущі коефіцієнти.

Перевірка адекватності рівняння регресії процесу, що вивчається

Після одержання рівняння регресії необхідно переконатися, що воно з достатнім ступенем вірогідності описує процес, що вивчається. Перевірка адекватності моделі полягає в доведенні факту, що точність результатів, отриманих за моделлю, буде не гірша за точність розрахунків, зроблених на підставі експериментальних даних.

Для перевірки адекватності необхідно оцінити відхилення передбаченого рівнянням регресії вихідного параметра $\widetilde{y_i}$ від результатів експерименту y_i в точках факторного простору. Розкид результатів експерименту відносно до поверхні регресії тут порівнюється з розкидом точок між собою. Перший характеризується дисперсією адекватності $S^2_{\text{адекв}}$, оцінку якої знаходять за формулою

$$S^2_{\text{адекв}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{y_i} - \overline{y_i})^2}{N - N'},$$

де N' – число значущих коефіцієнтів рівняння регресії. Різниця $N - N' \equiv f_1$ є числом ступенів волі, оскільки з рівнянь можуть бути визначені лише N' коефіцієнтів. Розкид експериментальних точок між собою характеризується дисперсією відтворюваності $S^2_{\text{відтв}}$ з числом ступенів волі $f_2 = N(m-1)$. Для перевірки адекватності знаходять розрахункове значення критерію Фішера

$$F_p = \frac{S^2_{\text{адекв}}}{S^2_{\text{відтв}}}$$

і порівнюють його з критичною точкою розподілу Фішера $F_{kr}(\alpha, f_1, f_2)$ (дод.2), яка визначається рівнем значущості α і числами ступенів свободи f_1, f_2. Якщо $F_p < F_{kr}$ то рівняння регресії адекватно описує процес, що вивчається; у протилежному випадку гіпотеза про адекватність відкидається і опис визнається неадекватним. Якщо гіпотезу адекватності відкинуто, то переходять до складнішої форми рівняння, або, якщо це можливо, проводять експеримент з меншими інтервалами варіювання λ_i.

Критерій Фішера завжди більше одиниці. Тому, якщо $S^2_{\text{відтв}} > S^2_{\text{адекв}}$, то в чисельнику попередньої формули повинна стояти дисперсія відтворюваності $S^2_{\text{відтв}}$. Тоді $f_1 = N(m-1)$. і $f_2 = N - N'$. Якщо $F_p > F_{kr}$, то рівняння і в цьому випадку буде неадекватним процесу, але його неадекватність буде зумовлена невиправдано точним описом експериментальних даних рівнянням регресії.

Відмітимо, що, якщо в рівнянні регресії всі коефіцієнти є значущими, то дисперсія адекватності дорівнює нулю і рівняння регресії адекватно описує процес, що вивчається.

Рівняння регресії, що адекватно описує досліджуваний процес, може бути використане далі для проведення інтерполяційних розрахунків, тобто для знаходження значень вихідного параметра для значень змінних x_i між нижнім і верхнім рівнями факторів варіювання.

Реалізація задач оптимізації в MathCAD

Одновимірні задачі оптимізації

Одновимірні задачі, як правило, виникають при дослідженні складних об'єктів, коли потрібно визначити вплив на параметр, що досліджується, конкретного фактора, тобто одновимірна задача – це складова частина багатовимірної. Також одновимірна задача може бути задачею окремого дослідження, якщо параметр залежить лише від одного фактора.

Програма MathCAD має можливості для проведення як інтерполяційних, так і регресійних розрахунків.

Для проведення сплайнової інтерполяції використовуються три функції $lspline(X,Y)$, $pspline(X,Y)$, $cspline(X,Y)$, які відрізняються лише граничними умовами:

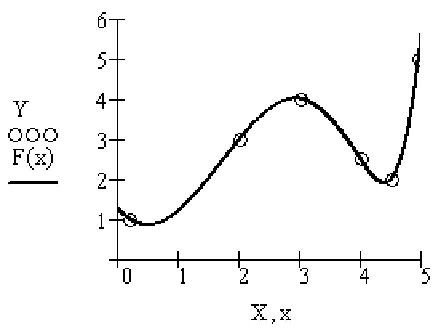
- функція $lspline$ генерує криву сплайна, що наближається до прямої лінії в граничних точках.
- функція $pspline$ генерує криву сплайна, що наближається до параболи в граничних точках.
- функция $cspline$ генерує криву сплайна, , що наближається до кубічного поліному в граничних точках.

Ці функції повертають вектор V значень другої похідної сплайну, який використовує функція $interp(V,X,Y,x)$, що інтерполює дані векторів X і Y. Ці вектори повинні бути однакового розміру, а елементи вектора X розташовані у порядку зростання.

Приклад. Використання кубічної сплайнової інтерполяції для графічного

$$X := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4.5 \\ 4.95 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2.5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$V := cspline(X, Y) \qquad F(x) := interp(V, X, Y, x)$$



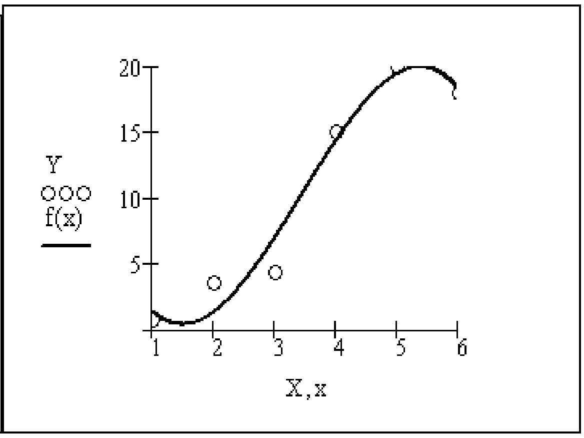
зображення даних.

Поліноміальна регресія в MathCAD виконується за допомогою двох функцій. Перша *regress(X ,Y ,k)* повертає вектор *V* коефіцієнтів, який використовується другою функцією *interp(V ,X ,Y ,x)*, що виводить функцію поліноміальної регресії. В цих формулах *k* – це степінь полінома.

Приклад. Поліноміальна регресія.

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 3.5 \\ 4.4 \\ 15 \\ 20 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$v := \mathrm{regress}(X, Y, 3) \qquad f(x) := \mathrm{interp}(v, X, Y, x)$$

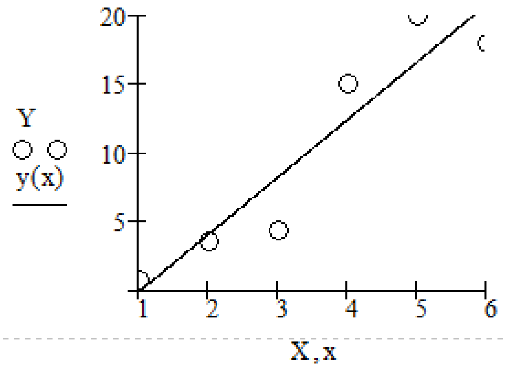


Параметри лінійної регресії можна знайти також використовуючи функції slope(X,Y) та intercept(X,Y), а коефіцієнт кореляції обчислюється за допомогою функції corr(X,Y).

$$k0 := \mathrm{slope}(X, Y) \qquad k0 = 4.174$$

$$b0 := \mathrm{intercept}(X, Y) \qquad b0 = -4.327$$

$$\mathrm{corr}(X, Y) = 0.938 \qquad y(x) := b0 + k0 \cdot x$$



Розв'язання двовимірних задач графічним методом

Для знаходження області, в якій лежить оптимальне значення характеристичного критерію, що залежить від двох незалежних змінних, зручно користуватись графіком ліній рівня. Розв’язання задачі двовимірної оптимізації складається з двох частин – відновлення функції за експериментальними даними (можна застосовувати методи інтерполяції та регресійного аналізу) та побудови графіка ліній рівня з подальшим знаходженням оптимальної області.

Для двовимірної інтерполяції та регресії в програмі MathCAD застосовуються ті ж самі функції, що і для одновимірної.

Приклад. В ході експерименту з вивчення стабільності емульсії в залежності від концентрації емульгатора та стабілізатора при концентрації олії 70% отримані такі дані.

Концентрація емульгатора X, %	Концентрація стабілізатора Y, %	Стабільність емульсії Z, %
0,1	0,2	61,5
	0,3	75,0
	0,4	97,7
	0,5	94,6
0,15	0,2	64,7
	0,3	84,5
	0,4	99,1
	0,5	100
0,2	0,2	92,0
	0,3	97,6
	0,4	97
	0,5	100
0,25	0,2	94,7
	0,3	96,4
	0,4	97,0
	0,5	98,0

Потрібно визначити такі концентрації емульгатора та стабілізатора, за яких емульсія буде мати стабільність 98-100%. Причому концентрація емульгатора повинна бути найменшою.

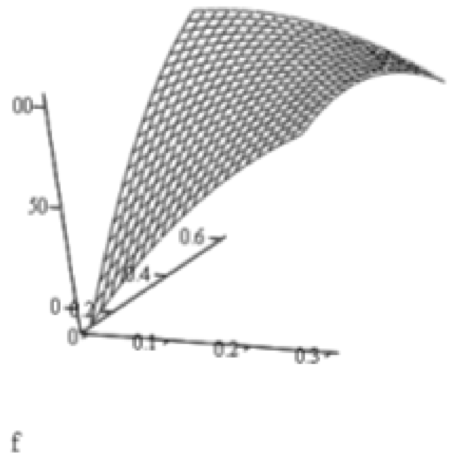
Розв’яжемо цю задачу графічним методом. Для цього встановимо форму зв’язку між параметрами задачі у вигляді рівняння поліноміальної регресії. Потім побудуємо графік ліній рівня та визначимо оптимальну область.

$$XY := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}^T$$

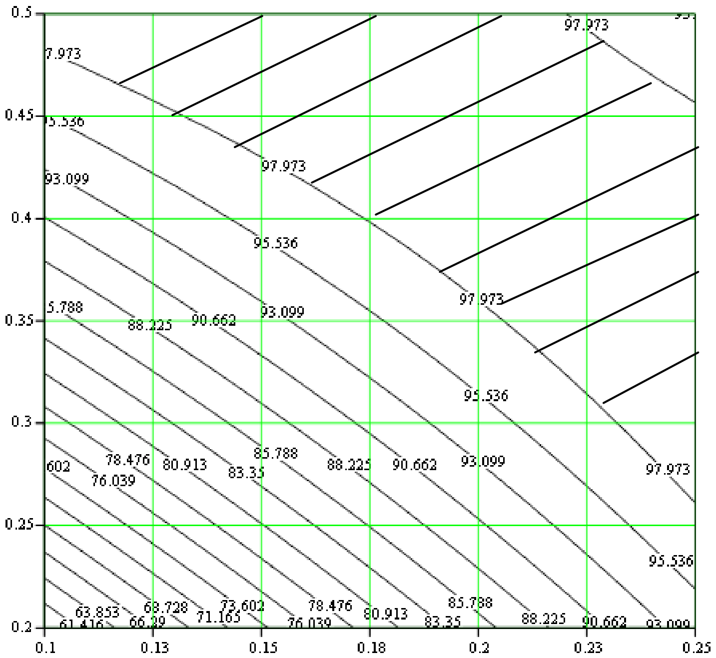
$$Z := \begin{pmatrix} 61.5 & 75 & 97.7 & 94.6 & 64.7 & 84.5 & 99.1 & 100 & 92 & 97.6 & 97 & 100 & 94.7 & 96.4 & 97 & 98 \end{pmatrix}^T$$

$$V := \mathrm{regress}(XY, Z, 2) \qquad f(x,y) := \mathrm{interp}\left[V, XY, Z, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

Графік поверхні матиме вигляд



Графік ліній рівня



f

З графіку ліній рівня видно, що стабільність емульсії 98-100% знаходиться між лініями, які позначені цифрами 97,973 (заштрихована область). Таким чином, якщо нам потрібно, щоб кількість емульгатора була найменшою, потрібно зробити емульсію, яка складається з 70% олії, 0,1% емульгатора та 0,48% стабілізатора.

Повний факторний експеримент

Якщо незалежних факторів, які впливають на процес, що вивчається, більше ніж два, виникають труднощі, пов'язані з необхідністю проведення великої кількості експериментів для побудови адекватної математичної моделі та її подальшого аналізу. Тому за потреби визначити оптимальні умови деякого процесу можна застосувати метод планування оптимального експерименту, який дозволяє отримати результат на основі досить невеликої кількості експериментальних даних. Спочатку проводиться повний факторний експеримент, який дозволяє отримати рівняння регресії, яке для повного трифакторного експерименту при фіксуванні факторів на двох рівнях, має вигляд

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3+a_{123}x_1x_2x_3,$$

де y – параметр, що досліджується, x_1, x_2, x_3 - незалежні фактори. Реалізація цього методу в програмі MathCAD наведена у наступному прикладі.

Приклад. Визначити умови проведення оптимального експерименту при дослідженні видалення фтору з підземних вод. Дані, отримані за повним факторним експериментом, наведені в таблиці. Рівень значущості взяти 5%.

№ досліду	Доза коагулянту у перерахунку на катіон алюмінію, мг/дм^3		Швидкість фільтрування, м^3/м^2·год		pH		Залишкова концентрація фторид-іону, мг/дм^3		
	Натуральне значення (X_1)	Кодоване значення (x_1)	Натуральне значення (X_2)	Кодоване значення (x_2)	Натуральне значення (X_3)	Кодоване значення (x_3)	y_1	y_2	y_3
1	300	+	2	–	8,2	+	1,65	1,67	1,72
2	300	+	2	–	4,5	–	0,74	0,75	0,76
3	300	+	5	+	8,2	+	1,86	1,89	1,95
4	300	+	5	+	4,5	–	0,8	0,8	0,83
5	60	–	2	–	8,2	+	2,62	2,66	2,73
6	60	–	2	–	4,5	–	0,94	0,95	0,96
7	60	–	5	+	8,2	+	2,76	2,81	2,83
8	60	–	5	+	4,5	–	0,93	0,94	0,98

Задамо експериментальні дані (залишкова концентрація фторид-іону, мг/дм^3)

$$M := \begin{pmatrix} 1.65 & 1.67 & 1.72 \\ 0.74 & 0.75 & 0.76 \\ 1.86 & 1.89 & 1.95 \\ 0.8 & 0.8 & 0.83 \\ 2.62 & 2.66 & 2.73 \\ 0.94 & 0.95 & 0.96 \\ 2.76 & 2.81 & 2.83 \\ 0.93 & 0.94 & 0.98 \end{pmatrix}$$

Задамо N – кількість експериментів, m – кількість дослідів на кожному рівні, α – рівень значущості

$N := \mathrm{rows}(M) \qquad m := \mathrm{cols}(M) \qquad k := 0..N-1 \qquad \alpha := 0.05$

Середні значення і виправлена дисперсія залишкової концентрації фторид-іону

$$Y_k := \mathrm{mean}\left[\left(M^T\right)^{\langle k\rangle}\right] \quad Y^T = (1.68 \;\; 0.75 \;\; 1.9 \;\; 0.81 \;\; 2.67 \;\; 0.95 \;\; 2.8 \;\; 0.95)$$

$$D_k := \mathrm{Var}\left[\left(M^T\right)^{\langle k\rangle}\right] \quad D^T = \left(1.3\times10^{-3} \;\; 1\times10^{-4} \;\; 2.1\times10^{-3} \;\; 3\times10^{-4} \;\; 3.1\times10^{-3} \;\; 1\times10^{-4} \;\; 1.3\times10^{-3} \;\; 7\times10^{-4}\right)$$

Перевіримо гіпотезу про однорідність дисперсій за критерієм Кочрена.

$K_{kr}(0.05,2,8) = 0.5157.$

$$K := \frac{\max(D)}{\sum D} \qquad K = 0.344$$

Оскільки $K<K_{kr}$, то гіпотеза про однорідність гіпотез приймається (результати відтворювані).

Обчислимо дисперсію відтворюваності процесу Dv і відповідне число ступенів волі fv

$Dv := \mathrm{mean}(D) \qquad Dv = 1.125\times10^{-3} \qquad fv := N\cdot(m-1)$

Задамо матрицю z, за допомогою якої знайдемо коефіцієнти рівняння регресії b_k.

$$z := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_k := \frac{Y \cdot z^{\langle k \rangle}}{N} \qquad b = \begin{pmatrix} 1.564 \\ -0.279 \\ 0.051 \\ 0.699 \\ 0.019 \\ -0.194 \\ 0.036 \\ 3.75 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Перевіримо значущість коефіцієнтів

$$\sigma := \sqrt{\frac{Dv}{N}} \qquad \Delta := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, fv\right) \cdot \sigma \qquad \Delta = 0.025$$

Коефіцієнти b_4 , b_7 не значущі. Тобто число значущих коефіцієнтів N1=6.
Запишемо рівняння регресії:

$$y(x1, x2, x3) := b_0 + b_1 \cdot x1 + b_2 \cdot x2 + b_3 \cdot x3 + b_5 \cdot x1 \cdot x3 + b_6 \cdot x2 \cdot x3$$

$$N1 := 6$$

Перевіримо адекватність рівняння регресії

$$X1 := z^{\langle 1 \rangle} \qquad X2 := z^{\langle 2 \rangle} \qquad X3 := z^{\langle 3 \rangle}$$

Значення в експериментальних точках, обчислені за допомогою рівняння регресії:

$$Y1 := \overrightarrow{y(X1, X2, X3)} \qquad Y1^T = (1.703 \;\; 0.765 \;\; 1.877 \;\; 0.795 \;\; 2.647 \;\; 0.935 \;\; 2.822 \;\; 0.965)$$

Обчислимо дисперсію адекватності процесу Da і відповідне число ступенів волі fa

$$fa := N - N1 \qquad Da := \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (Y1_i - Y_i)^2}{fa} \qquad Da = 1.463 \times 10^{-3}$$

Перевіримо гіпотезу про адекватність рівняння процесу за критерієм Фішера:

$$F := \frac{Da}{Dv} \qquad F = 1.3 \qquad Fkr := qF(1 - \alpha, fa, fv) \qquad Fkr = 3.634$$

Оскільки $F<F_{kr}$, то рівняння регресії адекватно описує процес. Значення отримані за допомогою рівняння регресії не суттєво відрізняються від даних, отриманих під час експерименту.

Завдання 1. Побудувати інтерполяційний поліном за даними

вар					*вар*				
1	x_i	1	2	3	16	x_i	1	2	3
	y_i	0	3	10		y_i	0	3	10
2	x_i	1	2	3	17	x_i	1	4	6
	y_i	0	7	16		y_i	2	5	17
3	x_i	1	2	4	18	x_i	0	2	5
	y_i	-4	4	26		y_i	5	-1	5
4	x_i	1	3	5	19	x_i	1	3	6
	y_i	4	22	56		y_i	14	10	-26
5	x_i	0	2	3	20	x_i	1	2	4
	y_i	-2	12	25		y_i	2	5	23
6	x_i	0	2	4	21	x_i	0	2	3
	y_i	-6	6	26		y_i	-6	6	15
7	x_i	1	3	5	22	x_i	2	3	4
	y_i	-4	18	48		y_i	-2	10	24
8	x_i	1	2	4	23	x_i	1	2	4
	y_i	7	12	28		y_i	3	4	12
9	x_i	3	4	5	24	x_i	3	5	6
	y_i	-2	8	20		y_i	10	20	28
10	x_i	1	2	4	25	x_i	1	2	4
	y_i	-9	1	27		y_i	0	1	9
11	x_i	1	2	5	26	x_i	1	2	3
	y_i	-5	-2	31		y_i	-5	-2	5
12	x_i	1	3	4	27	x_i	1	2	3
	y_i	-1	-1	2		y_i	-2	3	10
13	x_i	0	2	4	28	x_i	1	2	3
	y_i	7	5	-5		y_i	3	1	-3
14	x_i	1	3	5	29	x_i	1	2	4
	y_i	7	5	-5		y_i	9	9	3
15	x_i	0	1	2	30	x_i	1	2	3

	y_i	1	2	1		y_i	7	2	-5

Завдання 2.Зобразити на графіку емпіричні дані. Висунути гіпотезу при тип залежності (лінійна $y = a_0 + a_1 x$ або гіперболічна $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$). Знайти коефіцієнти рівняння регресії.

1	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	3,96	2,93	2,65	2,60	2,42	2,38	2,36	2,25	2,25	2,22
2	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	1,00	-1,01	-3,00	-4,99	-7,00	-8,99	-10,99	-13,00	-15,00	-17,00
3	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	4,92	4,37	4,31	4,45	4,24	4,27	4,29	4,12	4,17	4,13
4	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	1,98	-0,03	-2,01	-3,95	-5,99	-7,97	-9,96	-12,00	-13,99	-15,99
5	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	8,88	14,80	20,96	27,31	33,05	39,15	45,22	51,00	57,08	63,05
6	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	6,96	4,93	4,32	4,10	3,82	3,72	3,65	3,50	3,47	3,42
7	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	4,00	6,99	10,00	13,01	16,00	19,01	22,01	25,00	28,00	31,00
8	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	10,88	9,80	8,96	8,31	7,05	6,15	5,22	4,00	3,08	2,05
9	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	-1,04	1,43	2,32	2,85	3,02	3,22	3,36	3,37	3,47	3,52
10	X	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
	Y	2,88	-0,20	-3,04	-5,69	-8,95	-11,85	-14,78	-18,00	-20,92	-23,95
11	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	9,96	4,60	3,59	3,24	2,91	2,78	2,69	2,53	2,50	2,44
12	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	2,50	1,49	0,50	-0,49	-1,50	-2,49	-3,49	-4,50	-5,50	-6,50
13	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	4,92	3,53	3,37	3,49	3,26	3,28	3,30	3,13	3,17	3,14
14	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	3,98	1,97	-0,01	-1,95	-3,99	-5,97	-7,96	-10,00	-11,99	-13,99
15	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	5,38	10,30	15,46	20,81	25,55	30,65	35,72	40,50	45,58	50,55
16	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	4,96	3,60	3,39	3,39	3,24	3,23	3,23	3,13	3,15	3,12
17	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	2,00	3,99	6,00	8,01	10,00	12,01	14,01	16,00	18,00	20,00
18	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	5,88	3,80	1,96	0,31	-1,95	-3,85	-5,78	-8,00	-9,92	-11,95
19	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	-2,04	-4,07	-6,01	-7,90	-9,98	-11,95	-13,93	-16,00	-17,97	-19,98
20	X	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50	9,50
	Y	2,88	4,80	6,96	9,31	11,05	13,15	15,22	17,00	19,08	21,05
21	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50

	Y	3,96	0,73	0,43	0,41	0,25	0,24	0,23	0,14	0,15	0,12
22	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	1,50	-0,51	-2,50	-4,49	-6,50	-8,49	-10,49	-12,50	-14,50	-16,50
23	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	12,92	4,87	4,08	3,97	3,62	3,58	3,55	3,34	3,36	3,30
24	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	-0,02	-4,03	-8,01	-11,95	-15,99	-19,97	-23,96	-28,00	-31,99	-35,99
25	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	6,38	20,30	34,46	48,81	62,55	76,65	90,72	104,50	118,58	132,55
26	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	0,96	2,53	2,76	2,95	2,90	2,96	2,99	2,93	2,97	2,96
27	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	4,50	18,49	32,50	46,51	60,50	74,51	88,51	102,50	116,50	130,50
28	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	3,88	-4,20	-12,04	-19,69	-27,95	-35,85	-43,78	-52,00	-59,92	-67,95
29	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	-3,54	-1,57	0,49	2,60	4,52	6,55	8,57	10,50	12,53	14,52
30	X	0,50	2,50	4,50	6,50	8,50	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50
	Y	11,38	17,30	23,46	29,81	35,55	41,65	47,72	53,50	59,58	65,55

Завдання 3. В усіх завданнях рівень значущості 5%.

1. Основний рівень фактору C_1 =30, C_2=5, інтервали варіювання λ_1=10, λ_2=1. Спланувати повний факторний експеримент. Перейти до кодованих змінних. Записати вид рівняння регресії і знайти допоміжну матрицю z.

2. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	y_i – значення функції відгуку			
1	3,2	3	2,9	3,3
2	2,5	2,7	2,6	2,8
3	2,1	2	1,9	1,8
4	3	3,4	3,3	3,5

Перевірити дані на відтворюваність за критерієм Кочрена.

3. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	Фактори		$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку
	x_1	x_2	
1	–1	–1	3,1
2	+1	–1	2,65
3	–1	+1	1,95
4	+1	+1	3,3

Рівняння регресії шукають у вигляді $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. Знайти коефіцієнти рівняння.

4. Провели ПФЕ. Кожний дослід повторили 4 рази.

i – номер досліду	$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку	D_i - дисперсія
1	3,25	0,043
2	2,65	0,017
3	2,025	0,029
4	3,425	0,176

Рівняння регресії отримали у вигляді $y = 2.838 + 0.113x_1 - 0.2x_2 + 0.5x_1x_2$.
Чи всі коефіцієнти рівняння значущі?

5. Задана матриця ПФЕ

i – номер досліду	Фактори	
	X_1	X_2
1	30	20
2	35	20
3	35	10
4	30	10

Знайти нульовий рівень кожного фактору і інтервали варіювання. Перейти до кодованих змінних. Записати вид рівняння регресії і знайти допоміжну матрицю z.

6. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	y_i – значення функції відгуку			
1	3,2	3	3,5	3,3
2	4,2	4,0	4,1	3,9
3	2,1	2,3	1,9	1,8
4	4,6	4,8	4,7	4,4

Знайти дисперсію відтворюваності.

7. Провели ПФЕ, за яким знайдено рівняння регресії вигляді $y = b_0 + b_1x_1 + {}$ $+b_3x_1x_2$.

i – номер досліду	$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку	$y1_i$ – значення функції відгуку, що знайдене за рівнянням регресії
1	2	2,5
2	1,3	1,5
3	1	1,2
4	1,2	1,5

Знайти дисперсію адекватності.

8. Основний рівень фактору C_1 =30, C_2=10, інтервали варіювання λ_1=5, λ_2=1.

За ПФЕ знайдено рівняння регресії у кодованих змінних $y = 2.1 + x_2 -$ $-0.1x_1x_2$. Знайти значення досліджуваної величини при $x_1=32$, $x_2=8$, та при $x_1=27$, $x_2=10{,}5$.

9. Проведено ПФЕ для двох факторів. Кожний дослід провели 4 рази.

i – номер досліду	D_i - дисперсія
1	0,4
2	0,2
3	0,3
4	0,2

За результатами експерименту знайдено рівняння процесу, в якому 2 коефіцієнти є значущими. Дисперсія адекватності дорівнює 0,6. За критерієм Фішера перевірити гіпотезу про адекватність отриманого рівняння процесу, що вивчається.

10. Основний рівень фактору C_1 =8, C_2=25, інтервали варіювання λ_1=2, λ_2=5. Спланувати повний факторний експеримент. Перейти до кодованих змінних. Записати вид рівняння регресії і знайти допоміжну матрицю z.

11. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	y_i – значення функції відгуку				
1	5,2	5,4	5,6	5,5	5,4
2	2,3	2,35	2,4	2,45	2,3
3	4,2	4,1	4,1	4,4	4,0
4	4,8	4,9	4,8	4,7	4,8

Перевірити гіпотезу про однорідність за критерієм Кочрена.

12. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	Фактори		$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку
	x_1	x_2	
1	+1	+1	3,1
2	+1	–1	2,65
3	–1	+1	1,95
4	–1	–1	3,3

Рівняння регресії шукають у вигляді $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2$. Знайти коефіцієнти рівняння.

13. Провели ПФЕ. Кожний дослід повторили 5 разів.

i – номер досліду	$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку	D_i - дисперсія
1	4	0,2
2	3	0,1

3	5	0,2
4	5,3	0,3

Рівняння регресії має вид $y = 4{,}325 - 0{,}325x_1 + 0.175x_2 + 0.325x_1x_2$. Чи всі коефіцієнти рівняння значущі?

14. Задана матриця ПФЕ

i – номер досліду	Фактори	
	X_1	X_2
1	11	8
2	11	9
3	12	8
4	12	9

Знайти нульовий рівень кожного фактору і інтервали варіювання. Перейти до кодованих змінних. Записати вид рівняння регресії і знайти допоміжну матрицю z.

15. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	y_i – значення функції відгуку				
1	3,2	3	3,5	3,3	3,2
2	4,2	4,0	4,1	3,9	4,3
3	2,1	2,3	1,9	1,8	2,0
4	4,6	4,8	4,7	4,4	4,7

Знайти дисперсію відтворюваності.

16. Провели ПФЕ, за яким знайдено рівняння регресії вигляді $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$.

i – номер досліду	$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку	$y1_i$ – значення функції відгуку, що знайдене за рівнянням регресії
1	5,2	4,9
2	5,0	5,1
3	4,8	5,0
4	3,2	3,3

Знайти дисперсію адекватності.

17. Основний рівень фактору C_1 =100, C_2=20, інтервали варіювання λ_1=10, λ_2=4. За ПФЕ знайдено рівняння регресії у кодованих змінних $y = 4{,}85 + 2{,}6x_1 - 1{,}3x_2$. Знайти значення досліджуваної величини при $x_1=105$, $x_2=18$, та при $x_1=98$, $x_2=22$.

18. Проведено ПФЕ для двох факторів. Кожний дослід провели 5 разів.

i – номер досліду	D_i - дисперсія
1	1,5
2	1,2
3	1,3

4	2

За результатами експерименту знайдено рівняння процесу, в якому 3 коефіцієнти є значущими. Дисперсія адекватності дорівнює 2,1. За критерієм Фішера перевірити гіпотезу про адекватність отриманого рівняння процесу, що вивчається.

19. Основний рівень фактору C_1 =45, C_2=20, C_3=5, інтервали варіювання λ_1=8, λ_2=2, λ_3=0,5. Спланувати повний факторний експеримент. Перейти до кодованих змінних. Записати вид рівняння регресії і знайти допоміжну матрицю z.

20. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	y_i – значення функції відгуку		
1	120	140	130
2	152	155	150
3	163	167	166
4	100	105	97

Перевірити дані на відтворюваність за критерієм Кочрена.

21. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	Фактори		$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку
	x_1	x_2	
1	–1	–1	25
2	+1	–1	36
3	–1	+1	14
4	+1	+1	27

Рівняння регресії шукають у вигляді $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2$. Знайти коефіцієнти рівняння.

22. Провели ПФЕ. Кожний дослід повторили 3 рази.

i – номер досліду	$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку	D_i - дисперсія
1	12	1,5
2	15	2,1
3	22	1,3
4	20	2

Рівняння регресії отримали у вигляді $y = 17{,}25 + 0.25x_1 + 3{,}75x_2 - 1{,}25x_1x_2$. Чи всі коефіцієнти рівняння значущі?

23 Задана матриця ПФЕ

i – номер досліду	Фактори	
	X_1	X_2
1	100	30

2	120	30
3	120	10
4	100	10

Знайти нульовий рівень кожного фактору і інтервали варіювання. Перейти до кодованих змінних. Записати вид рівняння регресії і знайти допоміжну матрицю z.

24. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	y_i – значення функції відгуку		
1	105	108	107
2	132	135	140
3	150	152	156
4	95	93	100

Знайти дисперсію відтворюваності.

25. Провели ПФЕ, за яким знайдено рівняння регресії вигляді $y = b_0 + b_1x_1 + +b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3$.

i – номер досліду	$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку	$y1_i$ – значення функції відгуку, що знайдене за рівнянням регресії
1	12,5	15,1
2	22,4	20
3	15,6	16,3
4	24,3	25
5	22,6	22
6	17,9	19,3
7	30,2	35
8	31,4	38

Знайти дисперсію адекватності.

26. Основний рівень фактору C_1 =25, C_2=8,C_3=12 інтервали варіювання λ_1=5, λ_2=1, λ_3=1.

За ПФЕ знайдено рівняння регресії у кодованих змінних $y = 12{,}5 + 1{,}5x_1 + +2x_2 - 4x_3$. Знайти значення досліджуваної величини при $x_1=26$, $x_2=8$,$x_3=13$ та при $x_1=27$, $x_2=10$, $x_3=10$.

27. Проведено ПФЕ для двох факторів. Кожний дослід провели 3 рази.

i – номер досліду	D_i - дисперсія
1	2,3
2	2,5
3	3
4	2,2

За результатами експерименту знайдено рівняння процесу, в якому 3 коефіцієнти є значущими. Дисперсія адекватності дорівнює 3,1. За критерієм Фішера перевірити гіпотезу про адекватність отриманого рівняння процесу, що вивчається.

28. Основний рівень фактору C_1 =300, C_2=50, , C_3=10 інтервали варіювання λ_1=20, λ_2=5, λ_3=1. Спланувати повний факторний експеримент. Перейти до кодованих змінних. Записати вид рівняння регресії і знайти допоміжну матрицю z.

29. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	y_i – значення функції відгуку	
1	95	97
2	63	61
3	72	68
4	65	65
5	43	41
6	58	62
7	78	74
8	77	83

Перевірити дані на відтворюваність за критерієм Кочрена.

30. В результаті ПФЕ отримані такі дані

i – номер досліду	Фактори			$\bar{y}_i$ –середнє значення функції відгуку
	x_1	x_2	x_3	
1	–1	–1	–1	12,2
2	+1	–1	–1	15,6
3	–1	+1	–1	20,3
4	+1	+1	–1	32,4
5	–1	–1	+1	15,3
6	+1	–1	+1	21,1
7	–1	+1	+1	26,8
8	+1	+1	+1	15,5

Рівняння регресії шукають у вигляді $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$. Знайти коефіцієнти рівняння.

Додаток 1 Критичні точки розподілу Стьюдента

Число степенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,00	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,70
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,28	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,07	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
Число степенів свободи k	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Додаток 2 *Критичні точки розподілу Фишера-Снедекора (K_1 - число ступенів свободи більшої дисперсії, K_2 - число ступенів свободи меншої дисперсії)*

	Рівень значущості α = 0,05											
	K_1											
K_2	*1*	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Додаток 3 Значення критерію Кочрена ($P_{ДОВ}$ = 0,95)

f_1 = m-1 / f_2= N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	0,9985	9750	9392	9057	8772	8534	8332	8159	8010	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530	6333	6167	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365	5175	5017	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4564	4387	4241	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980	3817	3682	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535	3384	3259	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3185	3043	2926	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901	2768	2659	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666	2541	2439	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2299	2187	2098	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911	1815	1736	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501	1422	1357	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1286	1216	1160	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061	1002	0958	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827	0780	0745	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0583	0552	0520	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312	0292	0279	0266	0218	0165	0083

Література

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. - [9-е изд]. / В.Е. Гмурман– М.: Высшая школа, 2003.— 479 с

Иберла К. Факторный анализ: пер с нем. В.М. Ивановой / К. Иберла. – М.: Статистика, 1980. –397с.

Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации: Учебное пособие. - [2-е изд]. / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.

Фёрстер Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа: Руководство для економистов / Э.Фёрстер, Б.Рёнц – М.: Финансы и статистика, 1983. –302с.

«Математичне моделювання деяких технологічних процесів за допомогою пакета MathCAD» Ісаєв О.О. ХДУХТ, 2000.

«Оптимізація технологічних процесів» Колеснікова М.Б., Торяник Д.О., Пивоваров Є.П., ХДУХТ, 2008.

Навчальне видання

Укладачі: **Синєкоп** Микола Сергійович
Манжос Наталія Володимирівна
Торяник Дмитро Олександрович

Оптимізація технологічних процесів

Для студентів спеціальностей: 6.051701

Підп. до друку , формат . Папір газ. Друк. офс. Умов. друк. арк.
обл.-вид. арк. Умовн. фарб.-відб. Тир. прим. Зам № .

Харківський державний університет харчування та торгівлі.
61051, Харків-51, вул. Клочківська, 333.

ДОД ХДУХТ Харків-51, вул. Клочківська, 333.