

ДО ПИТАННЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗРАХУНКУ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНО НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА З СУХИМ ТЕРТЯМ

Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Бурлака В.В., к.т.н., доц.,
Сліпченко М.В., к.т.н., доц., Спольнік О.І., д.ф.-м.н., проф.
(Харківський національний технічний університет сільського
господарства імені Петра Василенка)

Мета досліджень. Часто з метою спрощення розрахунку кутових переміщень фізичного маятника обмежуються лише розглядом малих його коливань, тобто використовують точне рішення лінійної задачі в тригонометричних функціях. Однак такий спосіб спрощення неприйнятний в разі коливань маятника з великою амплітудою, коли точне рішення нелінійного диференціального рівняння руху виражається через періодичні еліптичні функції, які доводиться обчислювати за допомогою спеціальних таблиць або на комп'ютері. Для досягнення поставленої мети використано метод зведення другого інтегралу рівняння руху до неповного еліптичного інтегралу першого роду, з подальшою апроксимацією інтегральної амплітуди комбінацією елементарних функцій, що дозволило спростити обчислення значень еліптичного синуса Якобі.

Основні матеріали досліджень

Вільні плоскі коливання фізичного маятника описуємо відомим диференціальним рівнянням [1, 2]:

$$J\ddot{\Theta} + Pl \sin \Theta = 0. \quad (1)$$

За початкових умов:

$$\text{а) } \Theta(0) = \Theta_0; \dot{\Theta}(0) = 0 \text{ чи б) } \Theta(0) = 0; \dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}_0. \quad (2)$$

Тут J – момент інерції маятника вагою P відносно нерухомої точки підвісу; l – відстань від точки підвісу до центру мас маятника; $\Theta = \Theta(t)$ – кут відхилення маятника від вертикалі; точка позначає похідну за часом t .

З точністю до довільної сталої C :

$$\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2Pl}{J} \sqrt{\cos \Theta + C}}.$$

Для початкових умов а) маємо, тому маємо:

$$\Theta(t) = \arccos \left[1 - 2 \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} \operatorname{sn}^2 \left(t_*, \sin \frac{\Theta_0}{2} \right) \right], \quad (3)$$

де $\operatorname{sn}\left(t_*, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right)$ – еліптичний синус Якобі.

Для початкових умов б) $C = -1 + \frac{J\dot{\Theta}_0^2}{2Pl}$. для обчислення кутових переміщень маятника отримуємо формулу:

$$\Theta(t) = \arccos \left[1 - \frac{J\dot{\Theta}_0^2}{2Pl} \operatorname{sn}^2(\tau, K_*) \right]. \quad (4)$$

В рамках лінійної постановки задачі, замість (11), має місце більш проста формула:

$$\Theta(t) = \arccos \left(1 - \frac{J\dot{\Theta}_0^2}{2Pl} \right) \cdot \sin \tau, \quad (5)$$

Оскільки для обох варіантів початкових умов розрахунок руху маятника пов'язаний з обчисленням значень еліптичного синуса, спростимо цю операцію. З цією метою вводимо наближення:

$$\operatorname{sn}\left(t_*, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) \approx \sin \left[\operatorname{am}\left(t_*, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) \right], \quad (6)$$

в якому:

$$\operatorname{am}\left(t_*, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) = \frac{\pi t_*}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin \frac{\pi t_*}{K} + \frac{q^2}{1+q^4} \sin \frac{2\pi t_*}{K},$$

$$q = \exp\left(-\frac{\pi K_*}{K}\right), \quad K = K\left(\sin \frac{\Theta_0}{2}\right), \quad K_* = K \sin \left[\left(90^\circ - \frac{\Theta_0}{2}\right) \right]$$

Значення K і K_* можна наближено визначити за таблицями, або використовувати асимптотичну формулу:

$$K(\sin \alpha) \approx 1,38629 - \ln \cos \beta. \quad (7)$$

Висновки. Викладений спрощений спосіб зручний для розрахунку коливань фізичного маятника з великими амплітудами. При амплітудах менших 150° його похибка менше одного відсотка. Він дає можливість наближено обчислити переміщення маятника, викликані початковими збуреннями, без застосування спеціальних таблиць періодичних еліптичних функцій.