

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗРАХУНОК ВІЛЬНИХ ЗАТУХАЮЧИХ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА ДУФФІНГА, СПРИЧИНЕНИХ КВАДРАТИЧНИМ ОПОРОМ

Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Бурлака В.В., к.т.н., доц.,
Сліпченко М.В., к.т.н., доц., Спольнік О.І., д.ф.-м.н., проф.
(Харківський національний технічний університет сільського
господарства імені Петра Василенка)

Метою досліджень є виведення та апробація розрахункових формул для обчислень амплітуд затухаючих вільних коливань осцилятора типу Дуффінга, при наявності опору, пропорційного квадрату швидкості руху.

Основні матеріали досліджень

Рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x}^2 \operatorname{sign}(\dot{x}) + c_1x + c_2x^3 = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2) m – маса осцилятора; k – коефіцієнт квадратичного опору; c_1 , c_2 – характеристики жорсткості системи; $x = x(t)$ – відхилення осцилятора від положення $x = 0$, як функція часу t ; a_0 – стартове відхилення; крапка над x означає похідну по t .

Методом енергетичного балансу виведено розрахункові формули для наближеного обчислення амплітуд затухаючих коливань осцилятора з кубічною нелінійністю в характеристиці пружності при наявності опору, пропорційного квадрату швидкості руху.

Реалізовано дві форми методу енергетичного балансу, який не потребує розв'язання нелінійного диференціального рівняння коливань осцилятора. В першій формі проведено складання рівняння обвідної коливального процесу та побудовано його розв'язок. Використовуючи його, обчислення послідовності амплітуд коливань зведено до кубічного рівняння (3), яке має замкнений аналітичний розв'язок (4) (у випадку жорсткої характеристики пружності).

$$a_i^3 + a_*a_i^2 + b_*a_i + c_* = 0, \quad (3)$$

Рівняння (3) має розв'язок:

$$a_i = 2\sqrt{-p_i/3} \cos \frac{\alpha_i}{3} - \frac{a_*}{3}. \quad (4)$$

У другій формі методу енергетичного балансу складено рекурентне співвідношення між амплітудами розмахів у вигляді алгебраїчного рівняння четвертого порядку:

$$\xi_i^4 + \frac{2m}{k} \xi_i^3 - \left(\frac{2m}{k} a_{i-1} - \frac{4}{3} \frac{c_1}{c_2} \right) \xi_i^2 + \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} \xi_i - \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} a_{i-1} = 0, \quad (5)$$

що виражає зв'язок між a_i та a_{i-1} , бо:

$$a_i = 2\xi_i^2 - a_{i-1}. \quad (6)$$

Запропоновано його числове розв'язання методом ітерацій Ньютона:

$$\xi_{ij+1} = \xi_{ij} - \frac{\xi_{ij}^4 + \frac{2m}{k} \xi_{ij}^3 - \left(\frac{2m}{k} a_{i-1} - \frac{4}{3} \frac{c_1}{c_2} \right) \xi_{ij}^2 + \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} \xi_{ij} - \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} a_{i-1}}{4\xi_{ij}^3 + \frac{6m}{k} \xi_{ij}^2 - 2 \left(\frac{2m}{k} a_{i-1} - \frac{4}{3} \frac{c_1}{c_2} \right) \xi_{ij} + \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2}}, \quad (7)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Початкове наближення $\xi_{i0} = a_{i-1}$.

Для перевірки вірогідності виведених наближених формул проведено порівняння числових результатів, до яких вони призводять, з результатами числового комп'ютерного інтегрування диференціального рівняння руху. Одержано задовільну узгодженість результатів обчислень амплітуд різними способами, як при жорсткій, так і при м'якій характеристиці пружності. На конкретному прикладі показано, що задіяний метод дає можливість не тільки наближено обчислювати амплітуди затухаючих коливань, а також проводити ідентифікацію коефіцієнта квадратичного опору за даними виміру цих амплітуд. Одержані теоретичні результати зручні в числовій реалізації, бо зв'язані з обчисленням значень лише елементарних функцій.

Висновки. Виведені методом енергетичного балансу наближені формули дають можливість розрахувати амплітуди вільних затухаючих коливань осцилятора типу Дуффінга при наявності квадратичного опору рухові, без розв'язування диференціального рівняння коливань. При цьому крім прямих задач є можливість розв'язувати і обернену задачу динаміки по ідентифікації значення коефіцієнта опору за результатами виміру двох сусідніх амплітуд коливань. Розрахунки підтвердили, що наближені формули дають результати, які задовільно узгоджуються з результатами числового розв'язання задачі Коші на комп'ютері.