



Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені ПЕТРА ВАСИЛЕНКА**

**Навчально-науковий інститут
переробних і харчових виробництв**

Кафедра фізики і теоретичної механіки

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

СТАТИКА.

ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

**Методичні вказівки
до виконання практичних робіт**

**для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої
освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей
133 Галузеве машинобудування
208 Агроінженерія
274 Автомобільний транспорт**

**Харків
2021**

Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені ПЕТРА ВАСИЛЕНКА

Навчально-науковий інститут переробних і харчових
виробництв

Кафедра фізики і теоретичної механіки

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
СТАТИКА.
ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної та заочної форм навчання зі спеціальностей
133 Галузеве машинобудування
208 Агроінженерія
274 Автомобільний транспорт

Затверджено рішенням
Науково-методичної ради
ННІ ПХВ ХНТУСГ
Протокол №
від . . . 2021 р.

Харків
2021

УДК 531/534 (075.8)

Схвалено на засіданні кафедри фізики і теоретичної механіки
протокол № _____ від _____ 2021 р.

Теоретична механіка. Статика. Довільна просторова система сил: методичні вказівки до виконання практичних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 133 Галузеве машинобудування, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт; Харків. нац. техн. у-т сіл. госп-ва ім. П. Василенка ; уклад.: В. В. Бурлака, В. П. Ольшанський, М. В. Сліпченко. – Харків : [б. в.], 2021.–28с.

Методичні вказівки призначені для отримання навичок при виконанні практичної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична механіка».

В методичних вказівках наведено умови рівноваги довільної просторової системи сил. Запропановано порядок розв'язку задач з даної теми. Наведені приклади розв'язку. Для вдосконалення та закріплення набутих навичок запропоновано задачі для самостійного розв'язку.

Методичні вказівки призначені для студентів вищих навчальних закладів технічних спеціальностей.

Рецензенти:

О. І. Завгородній, д-р техн. наук, проф., зав. кафедри вищої математики Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка

М. Л. Шуляк, д-р техн. наук, доц., зав. кафедри тракторів і автомобілей Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка

Відповідальний за випуск: М. В. Сліпченко, к.т.н., доцент

© Бурлака В. В., Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., 2021
© ХНТУСГ, 2021

ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

Зміст

1. Момент сили відносно осі.
2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил.
3. Контрольні запитання.
4. Порядок розв'язування задач.
5. Приклади розв'язування задач.
6. Задачі для самостійного розв'язку

1. Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі визначається як алгебраїчна величина, абсолютне значення якої дорівнює добутку модуля проекції сили на площину, що перпендикулярна до осі, на відстань від точки, в якій вісь перетинає цю площину, до лінії дії проекції сили на площині.

Для того, щоб знайти момент сили відносно осі, треба зробити наступне (рис.1):

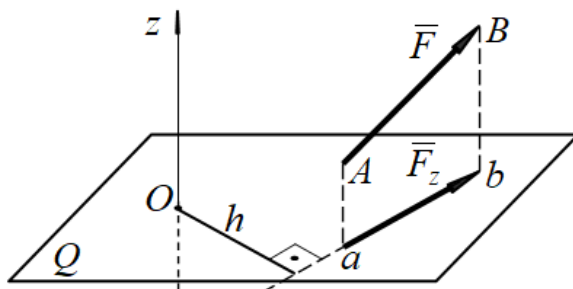


Рис. 1

1. Провести площину (Q), що перпендикулярна до осі.
2. Спроектувати силу \vec{F} на цю площину.

3. З точки O перетину осі з площиною (Q) опустити перпендикуляр h на лінію дії проекції сили \bar{F}_z .
4. Помножити модуль проекції сили \bar{F}_z на довжину h перпендикуляра і взяти цей добуток з знаком плюс, якщо з додатного напрямку осі Oz обертання проекції \bar{F}_z навколо точки O видно проти ходу годинникової стрілки і з знаком мінус, якщо обертання відбувається за ходом годинникової стрілки.

Таким чином, момент сили \bar{F} навколо осі Oz (рис.1) дорівнює:

$$m_z(\bar{F}) = m_o(\bar{F}_z) = F_z h$$

Момент сили буде додат-ним, оскільки напрям обертання проекції \bar{F}_z навколо осі Oz з додатного боку осі видно проти ходу годинникової стрілки.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках:

1. Якщо сила напрямлена паралельно до осі (рис.2). В цьому випадку проекція \bar{F}_z сили на площину перпендикулярну до осі буде дорівнювати нулю.

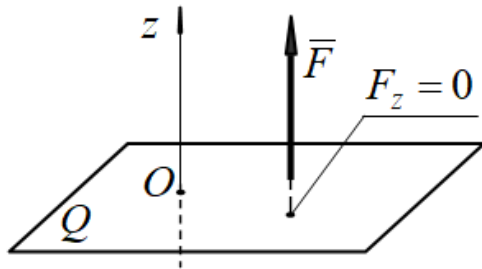


Рис. 2

2. Коли сила перетинає вісь (рис.7.3). В цьому випадку плече проекції \bar{F}_z відносно точки O буде дорівнювати нулю.

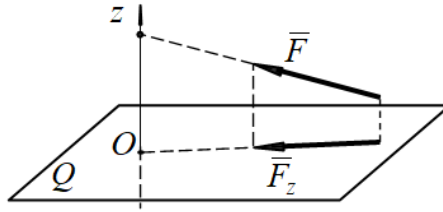


Рис. 3.

2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил виражаються наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & \sum F_{ky} &= 0; & \sum F_{kz} &= 0; \\ \sum M_x(\bar{F}_k) &= 0; & \sum M_y(\bar{F}_k) &= 0; & \sum M_z(\bar{F}_k) &= 0, \end{aligned}$$

і формулюються так: для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно кожної з цих осей дорівнювали нулю.

3. Контрольні запитання

1. Як визначається величина і знак моменту сили відносно осі?
2. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
3. У якій площині повинна лежати сила і який вона повинна мати напрям, щоб її момент відносно певної осі був максимальним?
4. Які умови рівноваги довільної просторової системи сил і чим вони відрізняються від умов рівноваги для довільної плоскої системи сил?
5. Яким чином пов'язані умови рівноваги просторової та довільної сичтеми сил?

4. Порядок розв'язування задач

При розв'язанні задач на рівновагу довільної просторової системи сил рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Виділити тверде тіло, рівновагу якого треба розглянути для визначення невідомих величин.
2. Показати активні сили, що діють на об'єкт рівноваги.
3. З'ясувати характер в'язей і показати на розрахунковій схемі можливі напрями їх реакцій.
4. Перевірити, чи є задача, що розглядається, статично визначеною, тобто число невідомих величин не повинно бути більшим шести.
5. Скласти необхідну кількість рівнянь рівноваги.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь і визначити невідомі величини.

5. Приклади розв'язування задач

Задача №1

На горизонтальний вал AB (рис.4) насаджено зубчасте колесо C і шестерня D . До колеса C за дотичною прикладена горизонтальна сила \bar{P} , а до шестерні D , за дотичною, прикладена вертикальна сила \bar{Q} .

Визначити величину сили \bar{Q} та реакції підшипників A і B в положенні рівноваги вала, якщо: $P = 10 \text{ кН}$; $r_C = 0,25 \text{ м}$; $r_D = AD = CB = 0,1 \text{ м}$; $DC = 0,2 \text{ м}$.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу вала AB , до якого прикладені активні сили \bar{P} , \bar{Q} та реакції в'язей опор A і B (рис.4).

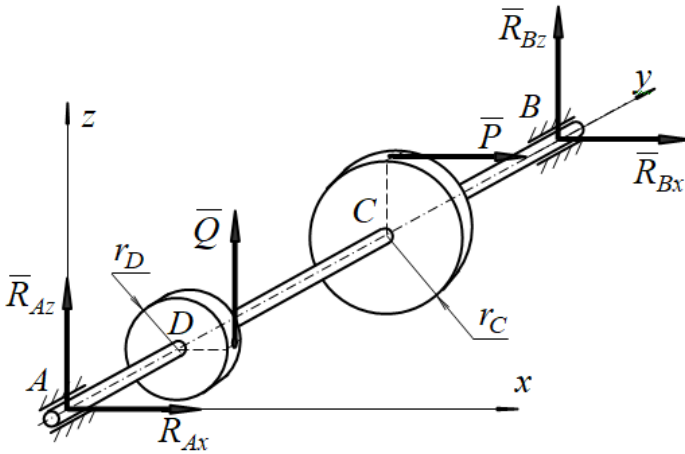


Рис. 4

Оскільки підшипники A і B допускають переміщення в осьовому напрямі Ay , то реакції, що виникнуть в підшипниках, розкладемо на складові за осями Ax і Az : \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Az} , \bar{R}_{Bx} , R_{Bz} .

Як видно, на вал AB діє довільна просторова система сил і у випадку її рівноваги, вона повинна задовольняти наступним умовам:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & \sum F_{ky} &= 0; & \sum F_{kz} &= 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0; & \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0; & \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Складемо рівняння рівноваги в проекціях на осі:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{kx} &= R_{Ax} + P + R_{Bx} = 0; \\ 2. \sum F_{ky} &= 0; \\ 3. \sum F_{kz} &= R_{Az} + Q + R_{Bz} = 0. \end{aligned}$$

При складанні рівнянь моментів сил, треба пам'ятати, що коли сила паралельна до осі або перетинає її, то момент сили відносно цієї осі дорівнює нулю.

Так при складанні рівняння суми моментів відносно осі Ax , сили $\bar{R}_{Ax}, \bar{P}, \bar{R}_{Bx}$ паралельні до осі Ax , а сила \bar{R}_{Az} - перетинає вісь. Момент кожної з цих сил відносно осі Ax дорівнює нулю.

При визначенні момента сили \bar{Q} відносно осі Ax , силу \bar{Q} попередньо треба спроекувати на площину Ayz (вона проектується в натуральну величину), а потім з точки перетину осі Ax з площиною Ayz (точка A) опустити перпендикуляр AD на лінію дії проекції, який і буде її плечем. Таким чином:

$$4. \sum m_x(\bar{F}_k) = Q \cdot (AD) + R_{Bz} \cdot (AB) = 0.$$

В рівнянні моментів відносно осі Ay , моменти від сил $\bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Bz}, \bar{R}_{Bx}$ дорівнюють нулю, оскільки вони перетинають вісь Ay .

Для визначення моментів сил \bar{P} і \bar{Q} відносно осі Ay , треба їх спроекувати на площину Axz перпендикулярну до цієї осі (рис.5) і знайти плече цих сил. Сили \bar{Q} і \bar{P} проектується на цю площину в натуральну величину.

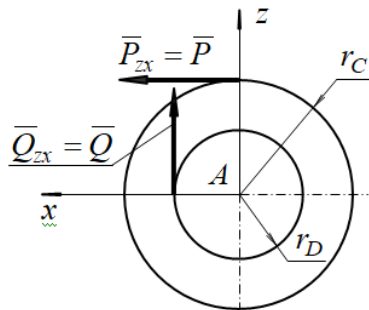


Рис. 5

Плечем сили \bar{Q} буде радіус r_D , а сили \bar{P} - радіус r_C
 Рівняння суми моментів відносно цієї осі буде мати вигляд:

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot r_C - Q \cdot r_D = 0.$$

Оскільки моменти сил $\bar{R}_{Az}, \bar{Q}, \bar{R}_{Ax}$, що паралельні до осі Az , та сили \bar{R}_{Ax} , що перетинає цю вісь, дорівнюють нулю, а плечем проекції сили \bar{P} на площину Axy , перпендикулярну до осі Az , буде AC , то

$$6. \sum m_z(\bar{F}_k) = -P \cdot (AC) - R_{Bx} \cdot (AB) = 0.$$

З урахуванням числових даних рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + 10 + R_{Bx} = 0;$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az} + Q + R_{Bz} = 0;$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = Q \cdot 0,1 + R_{Bz} \cdot 0,4 = 0;$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 10 \cdot 0,25 - Q \cdot 0,1 = 0;$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = -10 \cdot 0,3 - R_{Bx} \cdot 0,4 = 0.$$

Розв'язавши цю систему, починаючи з останнього рівняння, дістанемо:

$$R_{Bx} = -\frac{10 \cdot 0,3}{0,4} = -7,5 \text{ кН}; \quad Q = \frac{10 \cdot 0,25}{0,1} = 25 \text{ кН};$$

$$R_{Bz} = -\frac{Q \cdot 0,1}{0,4} = -\frac{25 \cdot 0,1}{0,4} = -6,25 \text{ кН};$$

$$R_{Az} = -Q - R_{Bz} = -25 - (-6,25) = -18,75 \text{ кН};$$

$$R_{Ax} = -10 - R_{Bx} = -10 - (-7,5) = -2,5 \text{ кН}.$$

Відповідь: $R_{Ax} = -2,5 \text{ кН}; R_{Az} = -18,75 \text{ кН}; Q = 25 \text{ кН};$

$$R_{Bx} = -7,5 \text{ кН}; R_{Bz} = -6,25 \text{ кН}.$$

Задача № 2

За допомогою невагомго колovorота, що схематично зображений на рис. 6., рівномірно піднімають груз $Q = 100 \text{ Н}$. Мотузка, що піднімає груз, набігає на барабан колovorота за дотичною, яка нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 60^\circ$.

Розміри колovorота: $R = 5 \text{ см}; AC = KD = 40 \text{ см}; AD = 30 \text{ см}; CB = 60 \text{ см}.$

Визначити реакції опор A і B та силу тиску \bar{P} на рукоятку при такому положенні ворота, коли рукоятка KD займе горизонтальне положення.

Розв'язування. До колovorота прикладені зовнішні сили: тиск \bar{P} на рукоятку ворота в точці K ; натяг мотузки \bar{Q}' . Вага груза передається через мотузку і діє на барабан за дотичною, яка нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 60^\circ$ (рис.6), за модулем $Q' = Q = 100 \text{ Н}$.

Оскільки опорні підшипники A і B допускають переміщення вала за напрямом осі Ay , то реакції опор будуть мати складові, що напрямлені за осями Ax і Az : $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Bx}, \bar{R}_{Bz}$.

Складемо рівняння рівноваги для довільної просторової системи сил, що діє на колovorот. В проєкціях на осі дістанемо:

1. $\sum F_{kx} = R_{Ax} + Q' \cos \alpha + R_{Bx} = 0;$
2. $\sum F_{ky} = 0;$
3. $\sum F_{kz} = -P + R_{Bz} + Q' \sin \alpha + R_{Bz} = 0.$

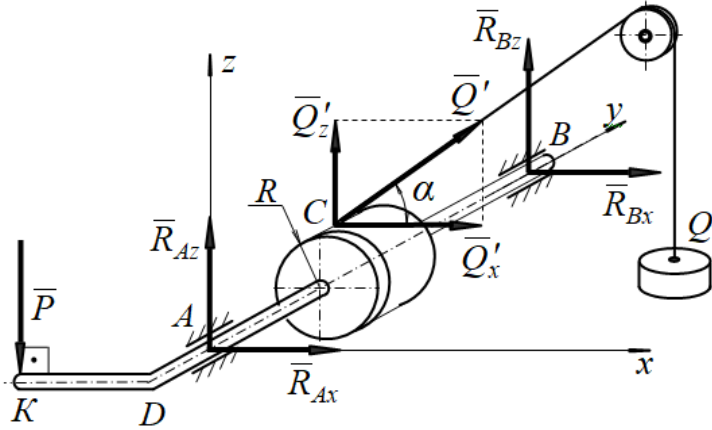


Рис. 6

Для зручності визначення моментів сил \bar{P} , \bar{Q}' і \bar{R}_{Bx} відносно осі Ax , спроектуємо ці сили на площину Ayz перпендикулярну до цієї осі (рис.7).

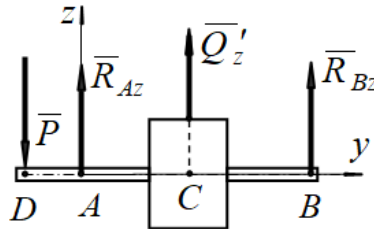


Рис. 7

$$4. \sum m_x(\bar{F}_k) = P \cdot (DA) + Q'_z \cdot (AC) + R_{Bx} \cdot (AB) = 0,$$

де $Q_z = Q' \sin \alpha = 100 \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ Н}$ – величина проекції сили \bar{Q}' на площину Ayz ;

DA, AC і AB - плечі сил \bar{P}, \bar{Q}' і \bar{R}_{Bz} відносно точки A , в якій вісь Ax перетинає площину Ayz .

Для запису рівняння суми моментів відносно осі Ay спроекуємо всі сили на площину Axz (рис.8). Оскільки, сили $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Bx}$ та \bar{R}_{Bz} перетинають вісь Ay і їх моменти відносно цієї осі будуть дорівнювати нулю, то на рис.8 їх проекції не показані.

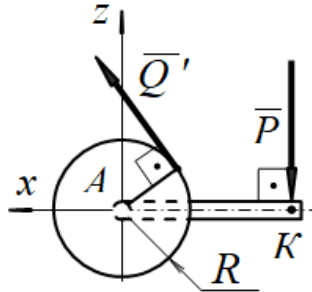


Рис. 8

Сили \bar{Q}' і \bar{P} , які паралельні до площини Axz , будуть проектуватися в натуральну величину. Тоді:

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = Q' \cdot R - P \cdot (KD) = 0.$$

І нарешті, для суми моментів відносно осі Az спроекуємо усі сили на площину Axy (рис.9). Оскільки сили \bar{P}, \bar{R}_{Ax} і \bar{R}_{Bx} перпендикулярні до площини Axy , то їх проекції на цю площину дорівнюють нулю.

Рівняння моментів відносно осі Az , з урахуванням того, що сила \bar{R}_{Ax} перетинає цю вісь і її момент дорівнює нулю, буде мати вигляд

$$6. \sum m_z(\bar{F}_k) = -Q'_x \cdot (AC) - R_{Bx} \cdot (AB) = 0,$$

де $Q_x = Q' \cos \alpha = 100 \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ Н}$ - величина проекції сили \bar{Q}' на площину Axy ;

AC і CB – плечі сил \bar{Q}'_x і \bar{R}_{Bx} відносно точки A , в якій вісь Az перетинає площину Axy .

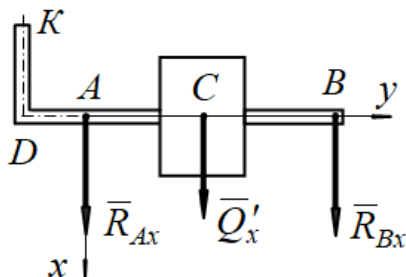


Рис. 9

З урахуванням числових даних система (1) – (6) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_{Ax} + 100 \cos 60^\circ + R_{Bx} = 0; \\ \sum F_{kz} &= -P + R_{Az} + 100 \sin 60^\circ + R_{Bz} = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) &= P \cdot 30 + 86,6 \cdot 40 + R_{Bx} \cdot 100 = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= -P \cdot 40 + 100 \cdot 5 = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= -50 \cdot 40 - R_{Bx} \cdot 100 = 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши систему, починаючи з останнього рівняння, дістанемо:

$$\begin{aligned} R_{Bx} &= -\frac{50 \cdot 40}{100} = -20 \text{ Н}; & P &= \frac{100 \cdot 5}{40} = 12,5 \text{ Н}; \\ R_{Bz} &= \frac{-P \cdot 30 + 86,6 \cdot 40}{100} = \frac{-12,5 \cdot 30 - 3464}{100} = -38,4 \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$R_{Az} = P - 100 \sin 60^\circ - R_{Bz} = 12,5 - 100 \cdot 0,866 + 38,4 = -35,7 \text{ Н.}$$

$$R_{Ax} = -100 \cdot 0,5 - R_{Bx} = -50 - (-20) = -30 \text{ Н.}$$

Відповідь: $P = 12,5 \text{ Н}; R_{Ax} = -30 \text{ Н}; R_{Az} = -35,7 \text{ Н};$
 $R_{Bx} = -20 \text{ Н}; R_{Bz} = -38,4 \text{ Н.}$

Задача № 3

Прямокутні двері (рис.10), які відкриті на $\angle CAD = 60^\circ$, утримуються в цьому положенні двома мотузками CD і EF . Мотузка CD перекинута через блок D і натягується грузом $P = 20 \text{ Н}$. Мотузка EF прикріплена до підлоги в точці F . Вага дверей $Q = 140 \text{ Н}$, ширина $AD = AC = 1 \text{ м}$, висота $AB = 2 \text{ м}$.

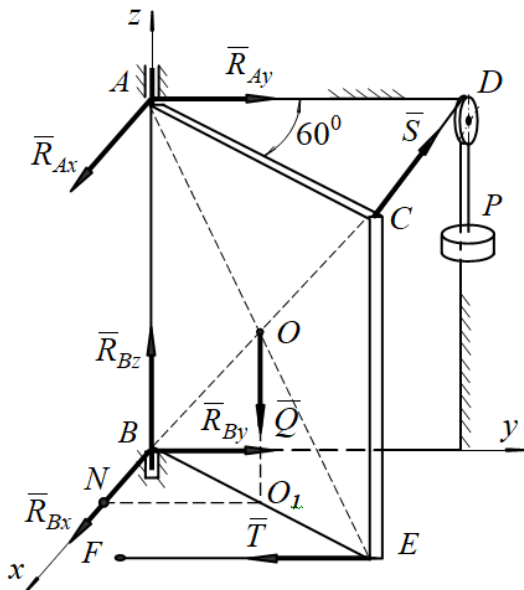


Рис. 10

Визначити натяг \bar{T} мотузки EF , реакції циліндричного шарніра в точці A і під'ятника в точці B . Силами тертя в блоці D знехтувати.

Розв'язок. Розглянемо рівновагу дверей $BACE$.

Прийmemo за початок системи координат точку B і напрямимо координатні осі як показано на рис.10.

На двері діють: сила тяжіння \bar{Q} , що прикладена в точці O на перетині діагоналей прямокутника $ABEC$; натяг \bar{S} мотузки CD , причому $S=P=20$ Н; реакції в'язей в точках A , B і E .

Реакцію циліндричного шарніра A , оскільки він допускає переміщення в напрямі осі Bz , представимо у вигляді двох складових: \bar{R}_{Ax} і \bar{R}_{Ay} . Реакцію під'ятника B представимо у вигляді трьох складових: \bar{R}_{Bx} , \bar{R}_{By} , \bar{R}_{Bz} . Реакцію \bar{T} мотузки EF , що за величиною дорівнює її натягу, напрямимо вздовж мотузки до точки F .

Перед складанням рівнянь рівноваги розкладемо натяг \bar{S} мотузки CD на дві складові \bar{S}_x і \bar{S}_y , які паралельні відповідно до осей Bx і By (рис.11).

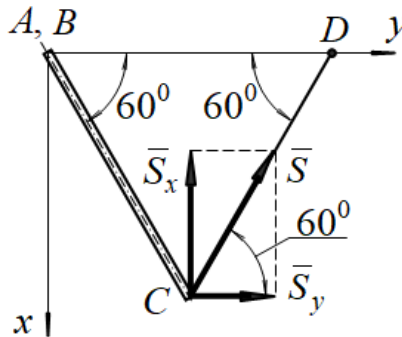


Рис. 11

Оскільки $AC=AD$ і $\angle CAD=60^\circ$, то трикутник ADC буде рівностороннім, у якого всі внутрішні кути дорівнюють 60° .

З рис. 11. дістанемо:

$$S_x = S \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ Н};$$

$$S_y = S \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ Н}.$$

Складемо рівняння рівноваги для довільної просторової системи сил, що діє на двері:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{kx} &= R_{Ax} + R_{Bx} - S_x = 0; \\ 2. \sum F_{ky} &= R_{Ay} + R_{By} + S_y - T = 0; \\ 3. \sum F_{kz} &= R_{Bz} - Q = 0. \end{aligned}$$

Для складання рівнянь моментів усіх сил відносно осей Bx , By і Bz скористаємося проекціями дверей, разом з прикладеними до неї силами, на площини Byz , Bxz і Bxy (рис. 12).

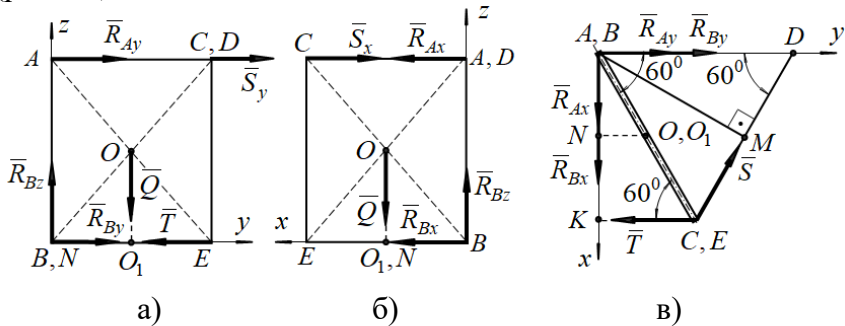


Рис. 12

$$4. \sum m_x(\bar{F}_k) = -Q \cdot (O_1N) - R_{Ay} \cdot (AB) - S_y \cdot (AB) = 0;$$

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = Q \cdot (BN) + R_{Ax} \cdot (AB) - S_x \cdot (AB) = 0;$$

$$6. \sum m_z(\bar{F}_k) = S \cdot (AM) - T \cdot (BK) = 0.$$

В рівнянні (4) моменти від сил $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Bx}, \bar{S}_x$ і, що паралельні до осі Bx , та By, Bz і \bar{T} , що перетинають Bx , дорівнюють нулю.

В рівнянні суми моментів відносно осі B_y (5) моменти від сил \bar{T} , \bar{R}_{Ay} , \bar{R}_{By} і \bar{S}_y , що паралельні осі B_y , та \bar{R}_{Bz} і \bar{R}_{Bx} , що перетинають вісь B_y , дорівнюють нулю.

В рівнянні суми моментів відносно осі B_z (6) моменти від сил \bar{R}_{Bz} і \bar{Q} , що паралельні до осі B_z , та \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} , \bar{R}_{Bx} , \bar{R}_{By} , що перетинають вісь B_z , дорівнюють нулю.

Визначимо плечі O_1N , BN , AM і BK , що входять в рівняння (4), (5) і (6).

З прямокутного трикутника BO_1N (рис.11, рис. 12,в):

$$O_1N = \frac{BE}{2} \cos 60^\circ = \frac{AC}{2} \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м};$$

$$BN = \frac{BE}{2} \sin 60^\circ = \frac{AC}{2} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,866 = 0,433 \text{ м}.$$

З прямокутного трикутника AMC (рис.12, в):

$$AM = AC \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ м}.$$

З прямокутного трикутника KBE (рис.12, в):

$$BK = AC \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ м}.$$

Підставивши знайдені і задані числові дані в складену систему (1) – (6), отримуємо:

$$1'. R_{Ax} + R_{Bx} - 17,32 = 0;$$

$$2'. R_{Ay} + R_{By} + 10 - T = 0;$$

$$3'. R_{Bz} - 140 = 0;$$

$$4'. -140 \cdot 0,25 - R_{Ay} \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 0;$$

$$5'. 140 \cdot 0,433 - R_{Ax} \cdot 2 - 17,32 \cdot 2 = 0;$$

$$6'. 20 \cdot 0,866 - T \cdot 0,866 = 0.$$

Розв'язавши систему (1') – (6') в зворотньому порядку дістанемо:

$$T = 20 \text{ Н};$$

$$R_{Ax} = \frac{140 \cdot 0,433 - 17,32 \cdot 2}{2} = 13 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = -140 \cdot 0,25 - 10 \cdot 2 = -55 \text{ Н};$$

$$R_{Bz} = 140 \text{ Н};$$

$$R_{By} = -R_{Ay} - 10 + T = -(-55) - 10 + 20 = 65 \text{ Н};$$

$$R_{Bx} = -R_{Ax} + 17,32 = -13 + 17,32 = 4,32 \text{ Н}.$$

Відповідь: $T = 20 \text{ Н};$ $R_{Ax} = 13 \text{ Н};$ $R_{Ay} = 4,32 \text{ Н};$
 $R_{Bx} = 13 \text{ Н};$ $R_{By} = -55 \text{ Н};$ $R_{Bz} = 140 \text{ Н}.$

Задача № 4

Горизонтальна прямокутна однорідна плита $ABCD$ вагою $P=10\text{кН}$ утримується в рівновазі сферичним шарніром в точці A , циліндричним шарніром в точці B і тросом CE , що нахилений до площини $ABCD$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ (рис.13).

Визначити реакції опор A і B , та натяг троса CE , якщо: $AB=4 \text{ м}; AD=3 \text{ м}.$

Розв'язок. Розглянемо рівновагу плити $ABCD$ (рис. 13).

Оберемо за початок системи координат точку A та напрямимо осі Ax і Ay уздовж ребер плити, а вісь Az – вертикально.

На об'єкт рівноваги діють: вага плити \vec{P} , що прикладена в точці O перетину діагоналей прямокутника $ABCD$; реакції в'язей в точках A , B і C .

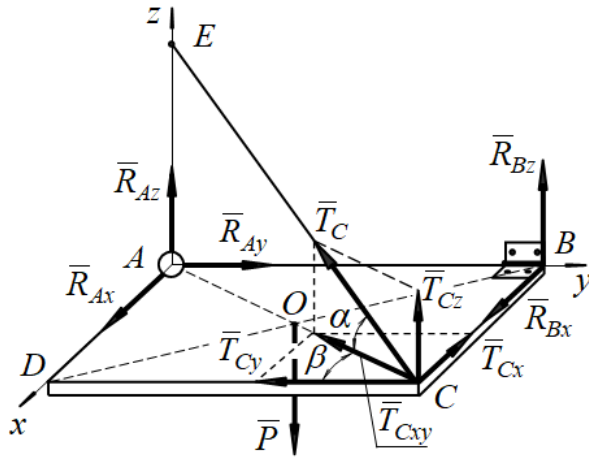


Рис. 13

Реакцію сферичного шарніра A розкладемо на три складові \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} і \bar{R}_{Az} , напрямивши їх за осями обраної системи координат $Axyz$. Реакцію циліндричного шарніра B , оскільки він допускає переміщення в напрямі осі Ay , розкладемо на дві складові \bar{R}_{Bx} і \bar{R}_{Bz} . Реакцію \bar{T}_C троса CE напрямимо вздовж тро-са до точки підвісу E .

Таким чином, на об'єкт рівноваги, плиту $ABCD$, діє довільна просторова система сил.

Перш ніж складати рівняння рівноваги, розкладемо реакцію \bar{T}_C , яка напрямлена під кутом α до площини $ABCD$, на складові за осями обраної системи координат (рис.13):

$$T_{Cz} = T_C \sin \alpha;$$

$$T_{Cx} = T_{Cxy} \sin \beta = T_C \cos \alpha \sin \beta;$$

$$T_{Cy} = T_{Cxy} \cos \beta = T_C \cos \alpha \cos \beta,$$

де T_{Cxy} - модуль проекції вектора \bar{T}_C на площину Axy ;

$$\sin \beta = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + DC^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\cos \beta = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{\sqrt{AD^2 + DC^2}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

При складанні рівнянь рівноваги в даній задачі будемо дотримуватися трохи іншого порядку. Спочатку спроекуємо систему сил, що діє на об'єкт рівноваги на одну з координатних площин, а потім складемо відповідні рівняння.

Спроекуємо всі сили, що діють на плиту $ABCD$, на координатну площину Axy (рис.14). При цьому треба пам'ятати, що при проектуванні завжди треба дивитися на площину з додатного кінця осі перпендикулярної до неї, в даному випадку Az . (На рис.14 проекції сил $\bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Bz}, \bar{T}_{Cz}$ і \bar{P} , що перпендикулярні до площини Axy , дорівнюють нулю).

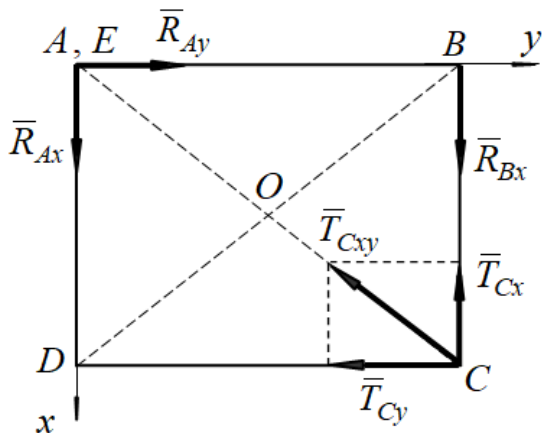


Рис. 14.

За даною проекцією системи сил можна скласти три рівняння рівноваги: суму проекцій усіх сил на вісь Ax ; суму проекцій усіх сил на вісь Ay ; суму моментів усіх сил відносно

осі Az , що перпендикулярна до площини Axy і перетинає її в точці A :

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{kx} &= R_{Ax} + R_{Bx} - T_{Cx} = 0; \\ 2. \sum F_{ky} &= R_{Ay} - T_{Cy} = 0; \\ 3. \sum m_z(\bar{F}_K) &= -R_{Bx}(AB) = 0. \end{aligned}$$

В рівнянні (3) моменти сил $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Ay}$ і \bar{T}_{Cxy} , лінії дії яких проходять через точку A (перетинають вісь Az), дорівнюють нулю.

Спроекуємо усі сили, що діють на плиту $ABCD$, на площину Axz (рис.15). (На рис.15 проекції сил \bar{R}_{Ay} і \bar{T}_{Cy} , що перпендикулярні до площини Axz , дорівнюють нулю).

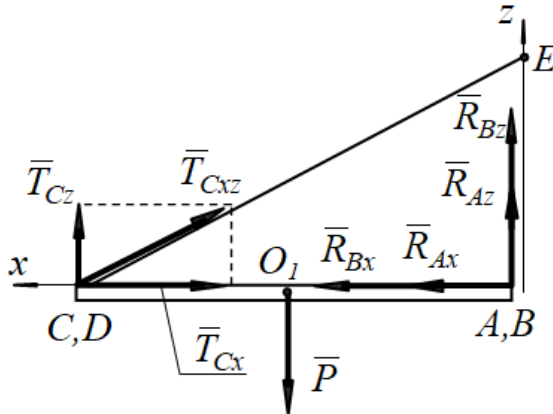


Рис. 15

За даною проекцією системи сил можна скласти наступні рівняння рівноваги: суму проекцій усіх сил на вісь Ax (це рівняння вже складене); суму проекцій усіх сил на вісь Az ; суму моментів усіх сил відносно осі Ay , яка перпендикулярна до площини Axz і перетинає її в точці A :

$$4. \sum F_{kz} = R_{Az} + T_{Cz} + R_B = 0;$$

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot (AO_1) - T_{Cz} \cdot (AD) = 0.$$

В рівнянні (5) моменти сил $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Bx}, \bar{R}_{Bz}, \bar{T}_{Cx}$, лінії дії яких проходять через точку A (перетинають вісь Ay), дорівнюють нулю.

Спроекуємо всі сили, що діють на плиту $ABCD$, на площину Ayz (рис.16). (На рис. 16 проєкції сил $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Bx}$ і \bar{T}_{Cx} , що перпендикулярні до площини Ayz , дорівнюють нулю).

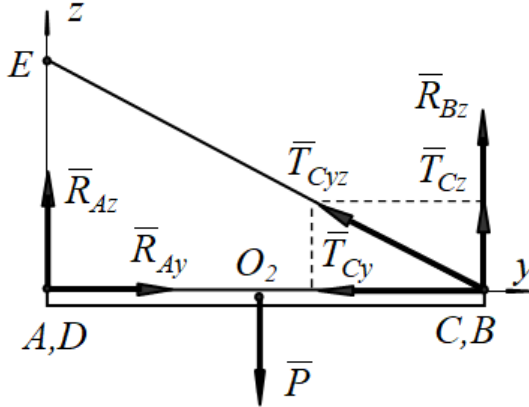


Рис. 16

За даною проєкцією системи сил можна скласти наступні рівняння рівноваги: суму проєкцій усіх сил на вісь Ay (це рівняння вже складене); суму проєкцій усіх сил на вісь Az (це рівняння вже складене); суму проєкцій усіх сил на вісь Ax (це рівняння вже складене); суму моментів усіх сил відносно осі Ax , яка перпендикулярна до площини Ayz і перетинає її в точці A :

$$6. \sum m_x(\bar{F}_k) = -P \cdot (AO_2) + T_{Cz} \cdot (AB) + R_{Bz} \cdot (AB) = 0.$$

В рівнянні (6) моменти сил $\bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Ay}$ і \bar{T}_{Cy} , лінії дії яких проходять через точку A (перетинають вісь Ax), дорівнюють нулю.

З рівняння (3) знаходимо, що $R_{Bx} = 0$.

Оскільки плита $ABCD$ прямокутна, то проекції відрізка AO на координатні площини Axz і Ayz відповідно дорівнюють:

$$AO_1 = \frac{AD}{2}; \quad AO_2 = \frac{AB}{2}.$$

Перепишемо складену систему рівнянь з урахуванням виразів для складових реакції \bar{T}_C :

$$1'. \sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} - T_C \cos \alpha \sin \beta = 0;$$

$$2'. \sum F_{ky} = R_{Ay} - T_C \cos \alpha \cos \beta = 0;$$

$$3'. \sum F_{kz} = R_{Az} + T_C \sin \alpha + R_{Bz} = 0;$$

$$4'. \sum m_x(\bar{F}_k) = -P \cdot \frac{AB}{2} + T_C \sin \alpha \cdot (AB) + R_{Bz} \cdot (AB) = 0;$$

$$5'. \sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot \frac{AD}{2} - T_C \sin \alpha \cdot (AD) = 0.$$

Розв'язавши систему в зворотньому порядку дістанемо:

$$T_C = \frac{0,5P \cdot (AD)}{\sin \alpha \cdot (AD)} = \frac{0,5P}{\sin 45^\circ} = \frac{0,5 \cdot 10}{0,707} = 7,07 \text{ кН};$$

$$R_{Bz} = \frac{0,5P \cdot (AB) - T_C \sin \alpha \cdot (AB)}{(AB)} =$$

$$= 0,5P - T_C \sin 45^0 = 0,5 \cdot 10 - 7,07 \cdot 0,707 = 0$$

$$R_{Az} = -T_C \sin \alpha - R_{Bz} = -T_C \sin 45^0 =$$

$$= -7,07 \cdot 0,707 = -5 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = T_C \cos \alpha \cos \beta = T_C \cos 45^0 \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= 7,07 \cdot 0,707 \cdot \frac{4}{5} = 4 \text{ кН};$$

$$R_{Ax} = T_C \cos \alpha \sin \beta - R_{Bx} = T_C \cos 45^0 \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= 7,07 \cdot 0,707 \cdot \frac{3}{5} = 3 \text{ кН}.$$

Відповідь: $R_{Ax} = 3 \text{ кН}; R_{Ay} = 4 \text{ кН}; R_{Az} = -5 \text{ кН};$

$$R_{Bx} = 0; R_{Bz} = 0; T_C = 7,07 \text{ кН}.$$

6. Задачі для самостійного розв'язку

Задача № 1

Визначити реакції опор, зображених на рис. 17, за умови, що: плита $ABCD$ утримуються в рівновазі ідеальним стиржнем ED , прикріпленим до плити в точці D , петлею в точці B та сферичним шарніром A , в точці C до плити прикріплена нитка, що перекинута через блок, на кінці нитки знаходиться вантаж G . Вага квадратної плити $P = 1 \text{ кН}$, довжина її сторони 1 м ; вага вантажа $G = 0,5 \text{ кН}$, кут $\alpha = 30^\circ$;

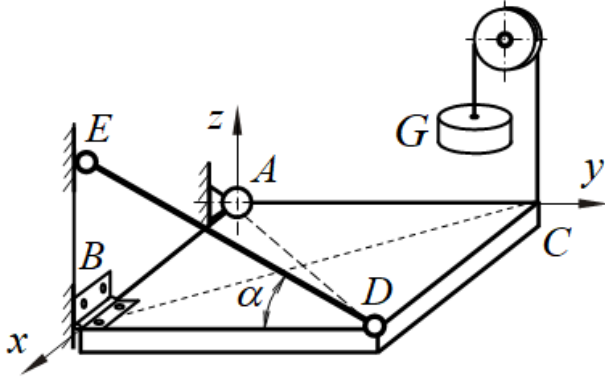


Рис.17

Задача № 2

Прямокутна плита $FCDE$ (рис. 18) знаходиться у стані рівноваги. Визначити реакції в радіальному підшипнику B та підп'ятнику A . Вага плити $P = 2$ кН, вага вантажу $G = 0,5$ кН, $CD = FE = 4$ м, $FC = ED = 3$ м.

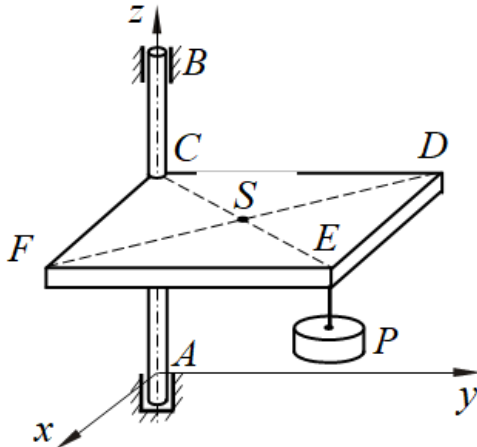


Рис. 18

Задача № 3

Для схеми, зображеної на рис. 19 визначити величину вантажу P_1 , прикріпленого до барабану D канатом, а також реакції в підшипниках A та B , за умови, що вданий момент часу система знаходиться в рівновазі. Канат, яким прикріплені вантажі вважати нерозтяжним і невагомим, вагою елементів конструкції крім вантажів знехтувати, вага вантажу $P_2 = 2$ кН, $AD=4$ м, $BD=2$ м, $AK=1$ м, $KE=1$ м, $CE=1$ м, діаметр блоку C дорівнює $0,5$ м, діаметр барабану D дорівнює $0,8$ м.

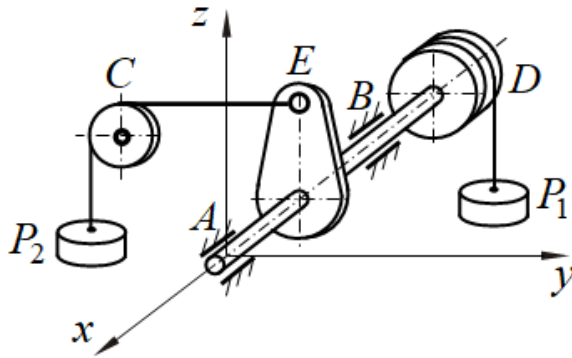


Рис. 19

Література:

1. Бурлака В.В., Ольшанський В.П., Сліпченко М.В.. Теоретична механіка. Статика. В'язі: методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів денної та заочної форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, спеціальностей 133 Галузеве машинобудування, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт. Харків: ХНТУСГ, 2020. 20 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике, М.: Наука, 1973.
3. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Курс лекцій. Харків, 2013. 544с.
4. Бурлака В.В., Сліпченко М.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка: Збірник задач для курсових робіт. Навчальний посібник. Харків: Міськдрук, 2016. 309 с.
5. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Навчальний посібник / за ред. С.І. Кучеренка. Харків, 2012. 568с

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
СТАТИКА.
РІВНОВАГА СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

Укладачі

БУРЛАКА Володимир Васильович,
ОЛЬШАНСЬКИЙ Василь Павлович,
СЛПЧЕНКО Максим Володимирович

Формат 60x84\16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 1,75
Наклад 30 пр.

Харківський національний технічний університет
сільського господарства імені Петра Василенка
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44