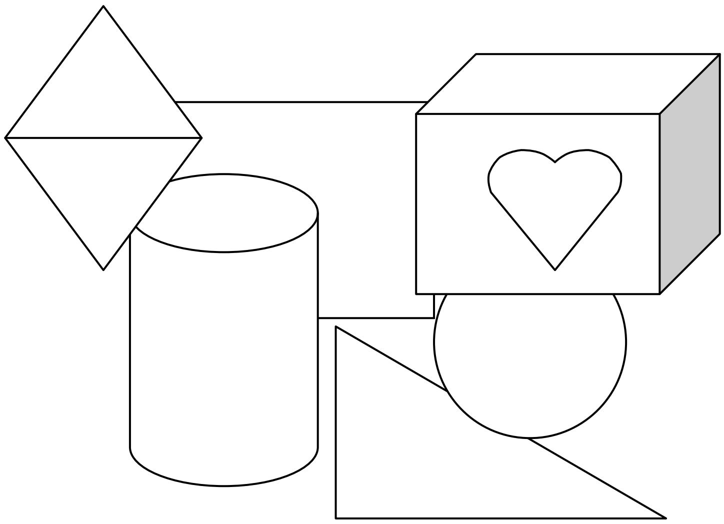
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧУВАННЯ
ТА ТОРГІВЛІ

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
для організації самостійної роботи студентів
з вищої математики .

Для студентів усіх спеціальностей
прискореного курсу навчання



Харків 2011

Рекомендовано до видання
кафедрою вищої математики,
протокол № 8 від 4 лютого 2011р.

Схвалено науково-методичною радою
економічного факультету,
протокол № 6 від 28 лютого 2011р.

Рецензент проф. М.С. Синєкоп

## З М І С Т

## Передмова

Ефективним напрямком раціональної організації занять з вищої математики є удосконалення методики самостійної роботи студентами заочної форми навчання, особливо зі скороченою формою навчання. Організація такої роботи вимагає завчасної підготовки дидактичних матеріалів, до яких належить стисло викладені теоретичні відомості та формули з основних розділів курсу.

Методичні вказівки охоплюють всі найголовніші теми навчальної програми прискореного курсу з вищої математики а також деякі формули тригонометрії .

Метою пропонованого видання є допомога студентам заочного відділення прискореного курсу навчання правильно організувати свою самостійну роботу по оволодінню теоретичним матеріалом, необхідним для виконання завдань контрольних робіт. В зразках виконання контрольних робіт наведено приклади детального розв’язання типових задач, що пояснюють суть викладених методів і підходів.

Завдання курсу вищої математики:

–підготовка студентів до вивчення загальноосвітніх та спеціальних дисциплін;

–розвиток у студентів навичок використання математичних методів в дослідженнях під час підготовки курсових та дипломних робіт;

До програми курсу включено такі розділи:

1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії;
2. Елементи векторної алгебри;
3. Диференціальне та інтегральне числення;
4. Диференціальні рівняння;
5. Ряди.
6. Елементи теорії ймовірностей

### 1. Елементи лінійної алгебри

## 1.1. Матриці, визначники, дії над ними

Матрицею розміром $m\times n$ називається довільна сукупність чисел $a_{11},\ldots,$ $a_{mn}$, яка розміщена у вигляді прямокутної таблиці, в якій $m$ рядків і $n$ стовпців, позначається великими буквами А,В, …

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Число $a_{ij}$ де $i=1..m,\ j=1...n$ $n$ називають елементом матриці, де $i$- номер рядка, а $j$- номер стовпця. Якщо $m=n$ - то така матриця називається квадратною порядку $n$.

Дві матриці $A$ і $B$ називають рівними, якщо $a_{ij}=b_{ij}, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$ Матриця у якої тільки один стовпець називається матрицею-стовпцем , записуємо так

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Аналогічно матриця -рядок, позначається

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Квадратна матриця виду

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

називається **одиничною матрицею** і для будь-якої матриці $A$ має місце рівність

$$AE = EA = A.$$

Для всіх матриць розміром $m\times n$ визначимо дві операції: додавання і множення матриці на число.

Сумою матриць $A$ і $B$ називається матриця $C = A + B$, елементами якої буде сума $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Добутком числа λ на матрицю $A$ називається матриця

$C = \lambda A = A\lambda$, елементами якої буде $c_{ij}=\lambda a_{ij}=a_{ij}\lambda.$

Матриця $C=AB$ називається добутком матриці $A$ і матриці $B$, і її елементи визначаються формулою

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{S} a_{ij} b_{ji}, \quad (i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}).$$

Добуток $AB$ можна знайти для тих матриць, у яких кількість стовпців матриці $A$ дорівнює кількості рядків матриці $B$.

1. Обернена матриця до матриці $A$ позначається символом $A^{-1}$. Обернені матриці мають такі властивості:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;
2. $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.
3. $AB = BA = E$

**Приклад.** Задані матриці $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Знайти лінійну комбінацію $3A + 2B$.

► При множенні матриці на число кожний елемент матриці множиться на це число, а при додаванні двох матриць відповідні елементи їх додаються, тобто

$$► 3A = 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & 15 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \ 2B = 2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 6 & 10 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & 15 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 6 & 10 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 0 & 25 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}. ◄$$

**Приклад**. Задані матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Знайти $AB$.

$$► AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 0\cdot 5 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 6 + (-2)\cdot 3 & 1\cdot 4 + 0\cdot 7 + (-2)\cdot(-1) \\ 3\cdot(-1) + 9\cdot 5 + (-5)\cdot 0 & 3\cdot 2 + 9\cdot 6 + (-5)\cdot 3 & 3\cdot 4 + 9\cdot 7 + (-5)\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 42 & 45 & 80 \end{pmatrix}; ◄$$

З квадратною матрицею пов’язане таке поняття, як визначник (детермінант). Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність обчислене певним способом число, яке називається визначником цієї матриці.

Визначником (детермінантом) $n$-го порядку , що відповідає квадратній матриці $A$ того ж порядку, називається число, яке записується у вигляді:

$$|A| = \det(A) = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ і обчислюється за певним правилом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

побічна діагональ   головна діагональ ,

Сформулюємо деякі властивості визначника $n$-го порядку.

1. При перестановці двох стовпців визначник змінює знак.
2. Визначник із двома однаковими стовпцями дорівнює нулю.
3. Спільний множник всіх елементів деякого стовпця (рядка) визначника можна винести за знак визначника.
4. Якщо деякий стовпець складається із елементів, що дорівнюють нулю, визначник також дорівнює нулю.

6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з його стовпців додати відповідні елементи будь-якого іншого стовпця, помножені на деяке число.

**Приклад** Обчислити визначники: *а*) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; *б*) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

► *а*) Оскільки визначник другого порядку-це число, яке дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі, або за схемою

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

побічна діагональ   головна діагональ

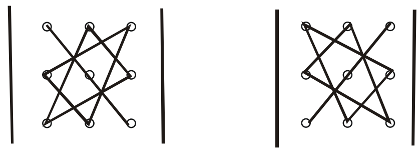
звідси $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot (-7) = 20 + 21 = 41.$◄

► *б*) Визначник третього порядку, що відповідає матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

називається число, яке можна обчислювати за правилом трикутників, схематичний запис якого такий:

+   -



В нашому завданні

$$► \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-1) + 5\cdot 0\cdot 2 + (-2)\cdot 2\cdot 7 - 7\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-5\cdot(-2)\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 1 = -3 - 28 - 42 - 10 = -83. ◄$$

Мінором $M_{ij}$ елемента $a_{ij}\,(i, j = \overline{1,n})$ визначника $n$-го порядку $\Delta_n$ називається визначник $(n-1)$-го порядку $\Delta_{n-1}$, який утворюється з даного визначника шляхом викреслення $i$-го рядка і $j$-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент $a_{ij}$.

Алгебраїчне доповнення $A_{ij}$ елемента $a_{ij}$ визначається рівністю $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

**Правила обчислення визначника *n*-го порядку**

1.Розкладання за елементами $i$-го рядка:

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

2. Розкладання за елементами $j$-го стовпця:

$$\Delta_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

**Приклад** Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

розкладанням за елементами: *а*) першого рядка.

► *а*) Застосовуючи правило обчислення визначників розкладанням за елементами першого рядка, маємо

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 5 - 7 = -8.$$

**Приклад** Знайти матрицю, обернену матриці $A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

Зробити перевірку: $A\cdot A^{-1} = E$.

► Обчислимо визначник матриці $A$: від елементів другого рядка а потім третього рядка віднімемо елементи першого рядка і отримаємо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12. ◄$$

Оскільки $\Delta = 12 \neq 0$, то існує обернена матриця $A^{-1}$, яку можна знайти за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ – алгебраїчні доповнення елементів $a_{ij}$.

Оскільки

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. ◄$$

Перевіримо правильність обчислення матриці $A^{-1}$, для цього знайдемо:

$$► AA^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

## 1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими $x_1, x_2, x_3 ..., x_n$ В загальному вигляді систему $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими запишемо так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .......................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

а в матричному вигляді $A \cdot X = B$,

де $A$ – матриця розміром $m \times n$ з коефіцієнтами при невідомих, які позначаються буквою $a_{ij}$ з двома індексами (перший індекс означає порядковий номер рівняння системи, а другий збігається з індексом невідомого); $X$ – матриця-рядок невідомих; $B$ – матриця – стовпець вільних членів.

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку, коли визначник матриці даної системи відмінний від нуля, можна знайти за допомогою правила Крамера або методом оберненої матриці.

**Приклад**. Дослідити сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь і в разі сумісності розв'язати задану систему: *а*) за правилом Крамера; *б*) матричним методом.. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 \qquad + x_3 = 2. \end{cases}$

► Перевіримо сумісність даної системи. Для цього обчислимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 + 3 - 2 = -3 \neq 0 .$$

Визначник системи відмінний від нуля.. Звідси витікає, що система сумісна, визначена і має єдиний розв'язок.

►*а*) **За правилом Крамера** знайдемо розв'язок за формулами:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta},$

де $\Delta$ – визначник системи, $\Delta \neq 0$, $\Delta_i$, $i = \overline{1,3}$, складається із визначника $\Delta$ системи шляхом заміни *і*-го стовпця стовпцем вільних членів.

Визначник системи $\Delta$ знайдено вище.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 .$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 .$$

Отже, $x_1 = \dfrac{-3}{-3} = 1, \; x_2 = \dfrac{-6}{-3} = 2, \; x_3 = \dfrac{3}{-3} = -1.$◄

►б) **Матричний метод**. Запишемо задану систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$, де

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\3&0&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Із матричного рівняння $A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$. Розв'язок матричним методом можливий, якщо $\Delta\neq 0$, тобто якщо матриця *A*- невироджена. Знайдемо обернену матрицю $A^{-1}$ за формулою.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

де $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, $i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,3}$.- алгебраїчні доповнення.

Знайдемо алгебраїчні доповнення

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}=5,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2&-1\\3&0\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&0\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3;$$

Звідси $A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-5&-2&3\\3&3&-3\end{pmatrix}$.◄

Перевіримо правильність знаходження оберненої матриці, для цього перевіримо рівність $A\cdot A^{-1}=E$:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-5&-2&3\\3&3&-3\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Тобто, обернена матриця знайдена правильно

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-5&-2&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$.◄

Слід зауважити, що розглянуті методи можна використовувати коли $m=n$.
Наступний метод придатний для будь-якого співвідношення $m$ і $n$.

## 2. Елементи векторної алгебри

### 2.1 **Вектори**. **Лінійні операції над векторами**.

Вектор - це напрямний відрізок. Вектор позначається $\overrightarrow{AB}$,якщо початок вектора в точці А, а кінець - в точці В, а довільні вектори - $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$

.Якщо відомі координати початку вектора А($x_1, y_1, z_1$) і його кінця В($x_2, y_2, z_2$), то координати вектора можна визначити, якщо відняти від координат кінця вектора координати початку $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Довжина або модуль вектора $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$ обчислюються за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, або $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .

Вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Умова колінеарності векторів – пропорціональність їх координат $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$. Рівними називаються вектори, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини і напрям їх співпадає.

Нульовий вектор –це вектор який має нульову довжину і довільний напрям.

Напрям вектора визначається за формулами $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$; $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$

Будь-який вектор у просторі можна записати у вигляді $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ (розкладання вектора за координатними осями).

**Приклад/** Задано координати точок $A$ (3,–3,2) і $B$ (2,1,0). Знайти вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, його довжину та напрямні косинуси (напрям).

► Знаходимо проекції вектора на координатні вісі (координати):

$$a_x = x_2 - x_1 = 2 - 3 = -1;\ a_y = y_2 - y_1 = 1 - (-3) = 4;\ a_z = z_2 - z_1 = 0 - 2 = -2.$$

Отже, $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1{,}4{,}-2)$, або $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Довжину вектора обчислимо за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};\ |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{21}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{4}{\sqrt{21}};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{\sqrt{21}}.$$ причому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

## 2.2. Скалярний і векторний добутки. Мішаний добуток

.**Скалярним добутком** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута $\varphi$ між ними. Тобто $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, або $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| np_{\vec{a}}\mathrm{b}$ $= |\vec{b}| np_{\vec{b}}\vec{a}$ , звідки знаходимо проекцію одного вектора на напрямок другого $np_{\vec b}\vec a = \dfrac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec b|}$.або $np_{\vec a}\vec b = \dfrac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a|}$. Необхідною та достатньою умовою ортогональності (перпендикулярності) двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку , тобто $\vec a \cdot \vec b = 0$

Основні властивості скалярного добутку:

1) $\vec a \cdot \vec b = \vec b \cdot \vec a$;
2) $\alpha(\vec a \cdot \vec b) = (\alpha\vec a)\cdot \vec b$; $\alpha$ -число,
3) $(\vec a + \vec b)\cdot \vec c = \vec a \cdot \vec c + \vec b \cdot \vec c$;
4) $\vec a \cdot \vec a = \vec a^2 = |a|^2 \Rightarrow |\vec a| = \sqrt{\vec a \cdot \vec a}$.

Якщо вектори задані координатами, $\vec a = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec b = (b_x, b_y, b_z)$, то $\vec a \cdot \vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Косинус кута між векторами $\vec a$ і $\vec b$ визначається формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

**Векторним добутком** векторів $\vec a$ і $\vec b$ називається вектор $\vec c$, який задовольняє умовам:

1) перпендикулярний векторам $\vec a$ і $\vec b$ : $\vec c \perp \vec a, \vec c \perp \vec b$;
2) має такий напрям, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот від вектора $\vec a$ до вектора $\vec b$ спостерігається проти годинникової стрілки;
3) довжина дорівнює $|\vec c| = |\vec a||\vec b|\sin\varphi$, $\varphi$ - кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$.

Позначається $\vec a \times \vec b$.

Основні властивості:

1) $\vec a \times \vec b = -(\vec b \times \vec a)$;
2) $\vec a \times (\vec b + \vec c) = \vec a \times \vec b + \vec a \times \vec c$;
3) $(\alpha\vec a)\times \vec b = \alpha(\vec a \times \vec b), \alpha$ - число.
4) $\vec a \times \vec a = 0$

Якщо $\vec a$ і $\vec b$ - колінеарні, то $\vec a \times \vec b = \vec 0$ .

Якщо вектори задані координатами $\vec a = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec b = (b_x, b_y, b_z)$, то векторний добуток обчислюється за формулою

$$\vec c = \vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, а його половина – площі трикутника, побудованих на векторах $\vec a$ і $\vec b$ як на сторонах.

**Мішаним добутком** векторів $\vec a, \vec b, \vec c$ називається число, що є результатом скалярного множення одного із них на векторний добуток двох інших. Позначається $\vec a \vec b \vec c = (\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = \vec a \cdot (\vec b \times \vec c)$. Якщо $\vec a = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec b = (b_x, b_y, b_z)$,

$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то мішаний добуток можна записати визначником

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ паралельні одній площині або лежать на одній площині, то вони компланарні, тобто $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, а об'єм трикутною піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеду, побудованих на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як на ребрах.

**Приклад** Відомо, що $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b}$, причому $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$, а кут $\varphi = \left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$. Знайти $\vec{c} \cdot \vec{d}$.

► Використовуючи означення та властивості скалярного добутку, маємо

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 - 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi - 3|\vec{b}|^2 =$$

$$= 2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 4 = -15. ◄$$

**Приклад** . Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}(2,-3,4)$ та $\vec{b}(5,1,7)$.

► Відомо, що скалярний добуток векторів заданих координатами дорівнює сумі добутків їх однойменних координат, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + c_z \cdot b_z$.

Маємо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 7 = 10 - 3 + 28 = 35.$ ◄

**Приклад** . Обчислити косинус кута, утвореного векторами $\overline{a} = (2,-4,4)$ і $\overline{b} = (-3,2,6)$, та знайти проекцію вектора $\overline{a}$ на напрям $\overline{b}$.

► За формулами $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad |\overline{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

обчислюємо скалярний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та їх модулі

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 10$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6, \quad |\overline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = 7$$

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{10}{6 \cdot 7} = \frac{5}{21}, \quad np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{10}{7}. ◄$$

**Приклад** . Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = -5\vec{i} - \vec{j}$ і $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ та обчислити площу паралелограма, побудованого на цих векторах

► $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 20\vec{j} - 22\vec{k}$ .

◄ площа паралелограма $S$, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, чисельно дорівнює модулю векторного добутку, тобто

$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. $S = \sqrt{4^2 + 20^2 + 22^2} = \sqrt{16 + 400 + 484} = \sqrt{900} = 30$ (кв. од.).◄

**Приклад** . Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = (2,3,0)$; $\vec{b} = (1,-2,2)$; $\vec{c} = (3,2,1)$.

► Відомо, що мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можна записати визначником $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$. Отже, маємо

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3.$$

## 3 .Елементи аналітичної геометрії

### .3.1 Лінії та їх рівняння. Рівняння прямої на площині

Рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, в якому $A, B, C$- числа, є рівнянням прямої лінії, яка перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A, B)$, який називається нормальним вектором.

$Ax + By + C = 0$ - загальне рівняння прямої.

Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, а $M(x, y)$ - довільна точка прямої, то із умови колінеарності векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ одержимо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, або канонічне рівняння $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}$, де напрямний вектор прямої $\vec{S} = (m, n)$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b,$ де $k = tq\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$- кутовий коефіцієнт прямої , $b$ - величина відрізка, який пряма відсікає на осі ординат, $\alpha$- кут нахилу прямої до додатного напряму осі $OX$, який відраховується проти ходу годинникової стрілки.

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом $k$ записується у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$

Якщо в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0,$ то його можна перетворити до вигляду

$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$. і одержимо рівняння прямої у „відрізках на осях” $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

де $a$ і $b$ - величини відрізків, які пряма відсікає на осях координат.

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої $\underline{l}$ дорівнює $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Кут між двома прямими обчислюється за формулою $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$.

Звідси маємо умову паралельності двох прямих: $k_2=k_1$ і умову їх перпендикулярності: $1+k_2k_1=0\Rightarrow k_2=-\frac{1}{k_1}$.

## 3.2 Пряма і площина у просторі

Нехай площина $Q$ проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}(A,B,C)$, тоді рівняння площини $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

$Ax+By+Cz+D=0$. - загальне рівняння площини де коефіцієнти $A,B,C$ відмінні від нуля, причому $A^2+B^2+C^2\neq 0$

Дослідимо загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

Якщо $A = 0$, то $\vec{n}(0,B,C)$ і площина паралельна осі абсцис.

Якщо $B = 0$, то $\vec{n}(A,0,C)$ площина паралельна осі ординат.

Якщо $C = 0$, то $\vec{n}(A,B,0)$ площина паралельна осі аплікат.

Якщо $D = 0$, то площина проходить через початок координат.

Якщо $A = B = 0$, то $\vec{n}(0,0,C)$ площина паралельна площині $XOY$.

Якщо $A=C = 0$, то $\vec{n}(0,B,0)$ площина паралельна площині $XOZ$

Якщо $B=C = 0$, то $\vec{n}(A,0,0)$ площина паралельна площині $YOZ$.

Якщо в просторі задано дві площини $Q_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $Q_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то умови паралельності і перпендикулярності цих площин визначаються умовами колінеарності і компланарності їх нормальних векторів $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Умова паралельності (колінеарності) двох площин: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

Кут між площинами обчислюється як кут між їх нормальними векторами

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох площин: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Якщо в загальному рівнянні площини $Ax+By+Cz+D=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$, то його можна перетворити до вигляду $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \left(a=-\frac{A}{D}, b=-\frac{B}{D}, c=-\frac{C}{D}\right)$, яке називається рівнянням площини **у** „відрізках на осях координат**”,** де $a,b,c$ - величина відрізків, які площина відсікає на координатних осях. Відстань $d$ від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Q: Ax + By + Cz + D = 0$ можна розглядати як модуль проекції вектора $\overrightarrow{MM_0}(M \in Q)$ на напрям вектора $\vec{n}$, тобто

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overline{MM}_0 \right| = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, можна розглядати як умову компланарності трьох векторів $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$, які лежать в одній площині, а $M(x, y, z)$, - довільна точка цієї площини Тоді це рівняння в координатній формі запишеться

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин, тобто як множину точок, які задовольняють системі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1x + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2x + C_2x + D_2 = 0, \end{cases}.$$

Якщо пряма паралельна вектору $\vec{S} = (m, n, p)$, який називається її напрямним вектором**,** і проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то з умови колінеарності векторів $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ і $\vec{S} = (m, n, p)$ ($M(x, y, z)$ - довільна точка прямої) одержимо канонічні рівняння прямої у просторі**.**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Прирівняємо ці рівності параметру $t$ і одержимо параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$$

Взаємне розміщення двох прямих у просторі визначається взаємним розміщенням їх напрямних векторів. Нехай задано дві прямі

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Тоді кут між ними знаходиться як кут між їх напрямними векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умова їх паралельності: $\vec{S}_1 \uparrow\downarrow \vec{S}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Умова їх перпендикулярності: $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ дорівнює гострому куту між прямою і її проекцією на площину і обчислюється за формулою: $\sin\varphi=\frac{(\vec{n}\cdot\vec{S})}{|\vec{n}||\vec{S}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Умова паралельності прямої і площини: $\vec{n}\perp\vec{S}\Rightarrow Am+Bn+Cp=0$.

Умова перпендикулярності прямої і площини: $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{S}\Rightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

## 4 Вступ до математичного аналізу

### 4.1 Границя функції, її властивості

**Означення**. Якщо кожному елементу $x$ із області його зміни ($x\in X$) за деяким законом $f$ ставиться у відповідність один елемент $y\in Y$, то говорять, що на множині $X$ задана функція *y=f(x)***.** При цьому $x$ називають незалежною змінною (або аргументом), $y$ – залежною змінною, $f$ - законом відповідності. Множина $X$ називається областю існування або областю визначення, а множина $Y$ - областю значень функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x=a$, крім, можливо, самої точки $a$.

Число $b$ називається границею функції *y=f(x)* при $x\to a$, якщо для будь-якого додатного числа $\varepsilon$ знайдеться таке додатне число $\delta(\varepsilon)$, що для всіх $x$, які задовольняють нерівності $0<|x-a|<\delta$ виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$. Позначають цю границю функції так: $\lim_{x\to a}f(x)=b$.

Якщо $x<a$ і $x\to a$, то умовно записують $x\to a-0$; якщо $x>a$ і $x\to a$, то умовно записують $x\to a+0$.

Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ та $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ називають, відповідно, границею функції *f(x)* зліва в точці $a$ і границею функції *f(x)* справа в точці ***a*,** або односторонніми границями функції *f(x)* в точці *a*. Для існування границі функції при $x\to a$ необхідно і достатньо, щоб $f(a-0)=f(a+0)$

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою, якщо $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$, а функція $\beta(x)$ - нескінченно великою, якщо $\lim_{x\to a}\beta(x)=\infty$ (*a* – скінчене число або $\infty$ - нескінченність).

**Властивості:** Якщо відомо, що функції $u(x)$ і $v(x)$ мають границі при $x\to a$ і вони скінченні, то: 1. $\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v$;

2. $\lim(u\cdot v)=\lim u\cdot\lim v$;

3. $\lim(cu)=c\lim u, c=const$;

4. $\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}$ при $\lim v\neq 0$

Границя сталої функції $u(x)=c$ дорівнює самій сталій $c$, тобто $\lim c=c$.

При знаходженні границь можуть виникати невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0};0\bullet\infty;\infty-\infty,1^{\infty}$ які розкриваються за допомогою алгебраїчних перетворень.
Широке застосування мають перша та друга важливі (визначні) границі.
Перша важлива границя: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ або $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$.Наслідки із першої важливої границі: $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ ; $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$.

Друга важлива границя: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ або, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ де $e\approx 2{,}71828$.

Функція $y=e^{x}$ називається експонентою. Логарифм числа $a$ за основою $e$ називається натуральним логарифмом і позначається $\log_e a=\ln a$.

Якщо $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними нескінченно малими, що позначається $\alpha(x)_{x\to a}\sim\beta(x)$. Значно спрощують знаходження границь еквівалентності таких функцій :
$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim tgx\sim arctgx\sim e^{x}-1\sim\ln(1+x)$ при $x\to 0$.

## 4.2 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Приростом функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ називається різниця $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, де $\Delta x$ - приріст аргументу. Похідною функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ називається границя відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто $y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

.Диференціалом функції $f(x)$ в точці $x=x_0$ називається головна частина приросту функції, яка лінійна відносно $\Delta x,\Delta x\to 0$. Позначається $dy=f'(x_0)\Delta x$ або $dy=f'(x_0)dx$.Тоді похідна $y'(x)=f'(x)=\frac{dy}{dx}$, де $dy$ диференціал функції, $dx$- диференціал незалежної змінної, при порівнянні $\Delta y\approx dy$. Звідки
$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції.
Похідна складної функції $z=z(y(x)):z'(x)=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ або $z'(x)=z'(y)y'(x)$.

## Таблиця похідних, диференціалів функцій і правила диференціювання

| | $y=f(x)$ | $y'=\frac{dy}{dx}$ | $dy=y'dx$ | Правила диференціювання |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $y=x$ | $y'=1$ | $dy=dx$ | $c'=0$ |
| 2. | $y=x^n$ | $y'=nx^{n-1}$ | $dy=nx^{n-1}dx$ | $(u\pm v)'=u'\pm v'$ |
| 3. | $y=\frac{1}{x}$ | $y'=-\frac{1}{x^2}$ | $dy=-\frac{dx}{x^2}$ | $(uv)'=u'v+uv'$ |
| 4. | $y=\sqrt{x}$ | $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ | $(cu)'=cu'$ |
| 5. | $y=a^x$ | $y'=a^x\ln a$ | $dy=a^x\ln a dx$ | $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$ |
| 6. | $y=e^x$ | $y'=e^x$ | $dy=e^x dx$ | $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| 7. | $y=\ln x$ | $y'=\frac{1}{x}$ | $dy=\frac{dx}{x}$ | якщо $y=f(u(x))$, |
| 8. | $y=\log_a x$ | $y'=\frac{1}{x\ln a}$ | $dy=\frac{dx}{x\ln a}$ | то $y'=y'_u\cdot u'_x$, де $c$ – стала, |
| 9. | $y=\sin x$ | $y'=\cos x$ | $dy=\cos x dx$ | $u=u(x); v=v(x)$ |
| 10. | $y=\cos x$ | $y'=-\sin x$ | $dy=-\sin x dx$ | |
| 11. | $y=tgx$ | $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ | $dy=\frac{dx}{\cos^2 x}$ | |
| 12. | $y=ctgx$ | $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $dy=-\frac{dx}{\sin^2 x}$ | |
| 13. | $y=\arcsin x$ | $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | |
| 14. | $y=\arccos x$ | $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | |
| 15. | $y=arctgx$ | $y'=\frac{1}{1+x^2}$ | $dy=\frac{dx}{1+x^2}$ | |
| 16. | $y=arcctgx$ | $y'=-\frac{1}{1+x^2}$ | $dy=-\frac{dx}{1+x^2}$ | |

## 5. Контрольна робота №1

## *Індивідуальні контрольні завдання.*

### *Завдання 1*

### *Дана система лінійних рівнянь*

Вирішити її 1) методом Крамера; 2) матричним методом (методом оберненої матриці).

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 14x_1 + 6x_2 - 11x_3 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

**4** $\begin{cases} 12x_1 - 13x_2 - 4x_3 = -10, \\ 7x_1 - 9x_2 - 11x_3 = 0, \\ 12x_1 - 17x_2 - 15x_3 = -7. \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - z = 2. \end{cases}$

**6** . $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 4x_2 + 11x_3 = 1, \\ 7x_1 - 5x_2 = -1. \end{cases}$

**7** $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

**8** $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = -4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 - x_3 - z = -3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

**10** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -21, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

**13.** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

**14** . $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

**15** . $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

**16** . $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

$$17.\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$18.\ \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

$$19.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

$$20.\ \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 14x_3 = 6, \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 11, \\ 5x_1 - 21x_2 - 27x_3 = -5. \end{cases}$$

$$21.\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$22.\ \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 22. \end{cases}$$

$$23.\ \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$24.\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + z = 0, \\ x_1 + 4_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$25.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$26.\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$27\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$28.\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$29.\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$30\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

### *Завдання 2*

В задачах варіантів 1-30 дані координати вершин піраміди *ABCD*. Потрібно: 1) записати вектори $\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}$, в системі орт і знайти довжину цих векторів; 2) знайти кут між векторами $\vec{BA}$ і $\vec{BC}$; 3) знайти проекцію вектора $\vec{BD}$ на вектор $\vec{BC}$. **1**.A (4, -4, 0); B (9, -3, 0); C (7, 1, 4); D (6, -6, 6)

**2**. A (3, -1, -2) B (8, 0, -2); C (6, 4, 2); D (5, -3, 4)

**3**. A (2, 1, 1); B (7, 2, -1); C (5, 5, 5); D (4, -1, 7)

**4**. A (-2, 2, -2); B (3, 3, -2); C (1, 7, 2); D (0, 0, 4)

**5**. A (0, -1, -6); B (5, 0, -6); C (3, 4, -2); D (2, -3, 0)

**6**. A (-4, -3, -4); B (1, -2, -4); C (-1, 2, 0); D (-2, -5, 2)

**7.** A (5, -6, -1); B (10, -5, -1); C (8, -1, 3); D (7, -8, 5)

**8**. A (3, -1, -6); B (8, 0, -6); C (6, 4, -2); D ( 5, -3, 0)

**9**. A (2, -3, -4); B (7, -2, -4); C (5, 2, 0); D (4, -5, 2)

**10**. A (0, -6, -1); B (5, -5, -1); C (3, -1, 3); D (2, -8, 5)

**11**. A (-3, -2, -3); B (2, -1, -3); C (0, 3, 1); D (-1, -4, 3)

**12.** A (1, 1, 3); B (6, 2, 3); C (4, 6, 7); D (3, -1, 9)

**13**. A (-4, 0, 5); B (1, 1, 5); C (-1, 5, 9); D (-2, -2, 11)

**14.** A (-1, 3, 3); B (4, 4, 3); C (2, 8, 7); D (1, 1, 9)
**15**. A (3, 1, 5); B (8, 2, 5); C (6, 6, 9); D (5, -1, 11)
**16**. A (0, -6, 5); B (5, -5, 5); C (3, -1, 9); D (2, -8, 11)
**17.** A (1, 1, -4); B (6, 2, -4); C (4, 6, 0); D (3, -1, 2)
**18**. A (5, -6, -3); B (10, -5, -3); C (8, -1, 1); D (7, -8, 3)
**19**. A (0, -1, 1); B (5, 0, 1); C (3, 4, 5); D (2, -3, 7)
**20**. A (-3, 3, -3); B (2, 4, -3); C (0, 8, 1); D (-1, 1, 3)
**21**. A (3, 1, 1); B (8, 2, 1); C (6, 5, 5); D (5, -1, 7)
**22**. (2, 1, -2); B (7, 2, -2); C (5, 5, 2); D ( 4, -1, 4)
**23**. A (-2, 2, -6); B (3, 3, -6); C (1, 7, -2); D ( 0, 0, 0)
**24**. A (-4, -3, 1); B (1, -2, 1); C (-1, 2, 5); D ( -2, -5, 7)
**25**. A (-3, -2, -2); B (2, -1, -2); C (0, 3, 2); D (-1, -4, 4)
**26** A (2,–1, 1), B (5, 5, 4), C (3, 2,–1), *D* (4, 1, 3).
**27** A(1, 7, 3); B (-2, 6, 0).;C (-3, 2, 3); *D* (-2, 1, 3)
**28**. A(-5. 0, -2); B(2, 3, 4); C(9, 3, 3); *D* (-1, -2, -1)
**29.** A (3, 5, 4); B(8, 7, 4); C(5, 10, 4); *D* (4, 7, 8);
**30**. A(1, -1, 3); B(6, 5, 8); C(3, 5, 8); *D* (4, 0, -5).

***Завдання 3***

В задачах варіантів 1-30 дані координати вершин трикутника ABC. Потрібно знайти: 1) довжину сторони AB; 2) рівняння сторін AB і AC та їх кутові коефіцієнти; 3) рівняння медіан, провдених з вершин A і B; 4) кут A 5) рівняння висоти CT, яка проведена з вершини C; 6) зробити креслення.
**1.** A (-4, 2); B (4, -4); C (6, 5)
**2**. A (-2, 1); B (6, -5); C ( 8, 4)
**3.** A (-3, -3); B (5, -9); C (7, 0)
**4.** A (2, 2); B (10, -4); C (12, 5)
**5**. A (4, -1); B (12, -7); C (14, 2)
**6.** A (-6, -2); B (2, -8); C (4, 1)
**7.** A (-8, -4); B (0, -10); C (2, -1)
**8**. A (-5, 5); B ( 3, -1); C (5, 8)
**9**. A (6, 2); B (14, -4); C (16, 5)
**10**. A (-4, -1); B (4, -7); C (6, 2)
**11**. A (-3, 0); B (5, -6); C (7,3)
**12**. A (0, 5); B (8, -1); C (10, 8)
**13**. A (2, 6); B (10, 0); C (12, 9)
**14**. A (5, 3); B (13, -3); C (15, 6)
**15**. A (-10, 5); B (-2, -1); C (0, 8)
**16.** A (5, 5); B (13, -1); C (15, 8)
**17**. A (4, 6); B (12,0); C (14, 9)
**18**. A (1, 6); B (9, 0); C (11, 9)
19. A (-5, -1); B (3, -7); C (5, 2)
**20**. A (0, 1); B ( 8,-5); C (10, 4)
**21**. A (3, -1); B (11, -7); C (13, 2)
**22**. A (2, 6); B (10, 0); C (12, 9)

**23**. A (6, 7);  B (14, 1);    C (16, 10)
**24**. A (3, 0);  B (11, -6);   C (13, 3)
**25**. A (4, 4);  B (12, -2);   C (14, 7)
**26**. A (6 . 5);  B(14, -1);   C (16, 8);
**27**. A (0 , 5);  B (12, 0);    C (-3,- 2);
**28**. A (-2,-6);  B(-3, 5);     C (4, 0);
**29.** A (5 , 4);  B(-2 , 7);     C (0, -2);
**30**. A (0, 1);  B(8 , -5 );     C (10, 4).

### *Завдання 4*

В задачах варіантів 1-30 дані координати точок A, B, C, M. Потрібно знайти: 1) рівняння площини Q, яка проходить через точки A, B, C; 2) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку M, перпендикулярно площині Q; 3) точки перетину одержаної прямої з площиною Q

**1**.  A ( 4, -7,  1);  B ( 3, -5,  1);  C ( 2,  0,  4);   M (-2, -4,  4)
**2**.  A (-5,  3, -7);  B ( 1,  1,  3);  C (-1, 4,  2);    M ( 3,  3,   3)
**3.**  A ( 2, -1,  3);  B (-1, 2, 0);    C (1, -4, -2);    M (1, 2, -2)
**4**.  A (-3, 4, -2);   B (1, -3, -1);  C (-1, -2, -4);  M (3, 2,-4)
**5**.  A (1, 2, 4);     B (-5, 3, 7);    C (4, -2, 6);    M(-2, -3, -1)
**6.**  A (-2, 1, -3);  B (-4, 2, -6);   C (3, -5, 1);    M(6,5, -7)
**7**.  A (-1, 4, 2);   B (3, -2, 4);    C (5,-3, 7);      M (-2, -5, 3)
**8**.  A (-3, 1, 2);   B (0, -1, 4);    C (1, -3, 7);     M ( -1, -5, 7)
**9.**  A (2, 5, 0);    B (1, -3, 2);    C( 0, 2, 1);       M (2, 3, 5)
**10**. A (1, 6, 4);   B (2, 5,5);      C (6, -3, 5);      M (3, -1, 7)
**11**. A (4, 1, 5);   B (1, 4, 2);     C (3, -2, 0);      M ( 3, 4, 0)
**12**. A (-2, 5, -1); B (2, -2, 0);   C (0, -1, -3);    M (4, 3, -3)
**13**. A (2, 3, 5);    B (-4, 4, -6);  C (5, -1, 7);      M ( -1, -2, 0)
**14**. A (-4, 3, -7); B ( 2,1,3);      C (0, 4, 2);        M (4,3,3)
**15**. A (2, 3, 5);    B (3, -1, 3);   C ( 2, -4, -2);    M (-3, -1, 3)
**16.** A (0, 2, –4);  B (2, –2, –4); C (7, –1, 7);      M (–1, 2, 6).
17. A (1, -4, 0);   B ( -1, 0, 1);   C ( 2, 5, 5);       M ( 5, 6, -5).
**18**. A (–1, 0, 2);   B (2, 2, 3);     C (–2, –3, –2);  M ( 4, –1, 1).
**19.** A (1, –2, –2); B (–1, 2, –1); C (2, 7, 3);       M (5, 8, –7).
**20**. A (4, 2, 0);     B ( 6, –2, –1);C (–3, 3, –3);   M ( 3, 3, –3).
**21**. A (–3, 3, –4); B ( 2, 10, 2);  C ( 4, 2, –1);    M (–3, 1, 7).
**22**. A ( 0, 3, –7);  B (6, 1, 3);     C (4, 4, 2);       M ( 8, 3, 3).
**23**. A ( 4, 0, 1);    B (3, 2, 1);     C (2, 7, 4);      M (–2, 3, 4).
**24**. A (1, 3, 1);     B (7, –5, 5);   C (–1, 5, –1);  M (10, –2, 2).
**25**. A ( 2, 2, –4);  B (4, –2, –4); C (9, –1, 7);    M (1, 2, 6).
**26**. A (1, 4, -3);    B (5, 0, 3);     C (-5, -5, 3);   M (5, 4, -1).
**27.** A (-5, 0, -2);   B (2, 3, 4);     C (  9, 3, 3);    M (-1, -2,-1).
**28**. A (1, -1, 4);     B (-2, 6, 0);   C (-3, 2, 3);    M (-2, 1, 3)
**29.** A (1, 7, 3);      B (-3, 2, 3);    C (-2, 6, 0);    M (-2, 1, 3).
**30**. A (-2, 8, 6);     B (4, -4, -3);   C (5, 1, 1);     M (-1,5, -2).

***Завдання** 5* В вариантах 1-30 обчислити задані границі.

**1.** *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-5}{4x^2+3x-6}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-5x-12}{5x^2-21x+1}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^{3x+3}$ ;. *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}$; .

**2.** *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+7x-15}{x^2-4x-21}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{4x^3-2x-7}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{2x-1}$ . *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 3x}{x^2}$

**3** *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^3+2x-3}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}{x-5}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ . *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 2x}{x^2}$;

**4.** *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x+10}{2x^2+x-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ . *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 2x}{x^2}$

**5** *а)* $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{3x^2-x-2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\text{tg}3x}{1-\cos 6x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$ .

**6.** *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{14+5x-6x^2}$. *б)* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$. *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-4}{x^2+2x+1}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x\sin x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[3x(\ln(x+4)-\ln x)\right]$.

**7.** *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3+64}{x^2+x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$.

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+3)-\ln x)$. *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\text{tg}3x}{1-\cos 6x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$;

**8**..*а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-7x+12}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+2x-4}{5x^3-x^2+x}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{x+3}$ *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}(1+6x)^{\frac{1}{2x+5}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 6x}{x^2}$

**9**. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{x^2+x+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+x-2}{x^2-1}$.

*г)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x}$. *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

**10**. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$. *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+10}{2x^2+x-3}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-5}\right)^{3x-2}$.

**11**. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$. *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+3}{x^3-8}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x-\sin 3x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{9x-4}$.

**12**.*а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. *б)*. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. *в)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+5}{3x^2-2x-1}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$. *д)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x+1}-2}$. *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}$

**13**. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-5}$. *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x}{1+x^2}$. *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x-\sin 3x}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{9x-4}$. *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

**14**.*а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{3x^2+x+1}$. *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{x}$ *д)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

**15**. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2+x+2}$. *в)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^2+x+2}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$ *д)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x^2}$ *е.)* $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

**16**.*а)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$. *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x}{x^3-4}$ *в)* $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$ .*д)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{\sin^2 3x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2+x-4}{x^2-16}$

**17**. *а)* $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.. *б)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. *в)* ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{7x-\sin3x}$;

*г)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x+5}{3x^2-2x-1}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-x+6}{4x^3-5x^2-2x}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{9x-4}$ .

**18**. *а)* $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.. *б)* $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg6x}{3x}$

*г)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{7x-\sin3x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+10}{4x^2+6x-3}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{9x-4}$ .

**19**. *а)* $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-7}{4x^3-3x^2}$ *в* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

*г)* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$ *д)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{x^2}$ *е)* $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1-x}{x^2}}$

**20**. *а)* $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\left(\sqrt{3x+4}-4\right)}{x-4}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x^2+x}{4x^3-3x^5}$ *в)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{2x^2}$

*г)* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x\quad-7}{2x^2+13x+20}$ *д)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

**21**.*а)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}$.. *б)* $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$. *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+x}{4x^3-3x^2}$

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+4}$ . *д)* $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$ *е)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x-5}{x^2-5x-13}$

**22**.*а)* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$ *б)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)}{x^2-1}$. *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-7x^2+x}{4x^3-x^2+7}$

*г)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg5x}{2x}$. *д)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7x^2-12x+5}{5x^2-2x-3}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{2x+1}$

**23**. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$. б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\right)$. *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+5}\right)^{3x}$

**24**. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$. *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-6x-1}{2x^3+3x-7}$

*г)* $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$. *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x-1}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-+5}$

**25**. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{5x^2-7x-6}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$. *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4}{x^2+4x}$

*г)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-6x-2}$ *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+3}\right)^{4x}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$;

**26**. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2-x-2}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-2}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-7x^2+5}{x^5+2x^3-1}$ *д)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}$

**27**. *а)* $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x-5}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2+3x-1}{x^2-x-6}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$.

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{6x}$ *д)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+4x-2}{4x+5x^2-x^3}$;

**28**. *а)* $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-15x+18}{x^2-4x-12}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$. *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{4x}$

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-15x-8}{2x^2-4x-5}$ *д)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ *е)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$

*29*.**а)** $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-x-2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+10x^2}{x^3+4x}$ *д.)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{2x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$

**30.*а)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x^2+17x+6}{3x^2+8x-3}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{tg 3x}$. ***в)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$.

*г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{2x}$ ***д)*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+7x+10}$

***Завдання 6*** В задачах 1 – 30 знайти похідні та диференціали функцій.

**1.** *а)* $y=(2x^5-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+7)^5$; *б)* $y=x\cdot ctgx$; *в)* $y=arctg\sqrt{x^2+2x}$;

**2.** *а)* $y=(3x^2+\frac{12}{x\sqrt[3]{x}}-5)^3$; *б)* $y=(3x+4)\cdot\sin x$; *в)* $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

**3.** *а)* $y=(3x^4-\frac{6}{\sqrt[6]{x}})^6$; *б)* $y=tgx\cdot(3-4x)$; *в)* $y=arctg\sqrt{4x-1}$;

**4.** *а)* $y=(7x^3+3\sqrt[3]{x^2}-2)^8$; *б)* $y=(2x-3)\cdot tgx$; *в)* $y=arcctg\sqrt{x^2+4x}$;

**5**. *а)* $y=(\frac{1}{5}x^{10}-4)^3$; *б)* $y=\ln 3x\cdot(2x-5)$; *в)* $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$; *г)* $y=e^{3\cos x}$;

**6.** *а)* $y=(4x^3-7x-3)^5$; *б)* $y=\ln^3 2x\cdot(4x+3)$; *в)* $y=arctg\sqrt{4x-1}$;

**7.** *а)* $y=(\frac{1}{6}x^{12}-12x\sqrt[3]{x+4})^4$; *б)* $y=\arccos^3 5x$; *в)* $y=x\cdot ctg2x$

**8.** *а)* $y=(5x^2+30x^2\sqrt[3]{x^2-10})^6$; *б)* $y=2^{tg3x}-\sqrt{5x-1}$; *в)* $y=(arctg\sqrt{x})$;

**9.** *а)* $y=(\frac{x}{3-4x})^3$; *б)* $y=\ln\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$; *в)* $y=\arccos 3x$;

**10.** *а)* $y=(\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{x\sqrt{x}}+5)^3$; *б)* $y=(5x-1)\cdot 3^{2x}$; *в)* $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$;

**11.** *а)* $y=(3x^4+5\sqrt[3]{x}+6)^2$; *б)* $y=\ln(x^2\cdot\sin 2x)$; *в)* $y=\arcsin\sqrt{5x-2}$;

**12.** *а)* $y=(7x^7+6\sqrt[4]{x}+7)^3$; *б)* $y=x\cdot e^{\sin 3x}+ctg2x$; *в)* $y=\frac{2x}{1-x^2}$;

**13.** *а)* $y=(7x^4+8\sqrt[5]{x}+8)^4$; *б)* $y=\ln(x^5\sin 3x)$; *в)* $y=x^2e^{-2x}$;

**14.** *а)* $y=(5x^2+4\sqrt[4]{x^5}+3)^3$; *б)* $y=\cos 4x\cdot 3^{\sin 2x}$; *в)* $y=arctg\sqrt{4x^2-1}$;

**15.** *а)* $y=(\frac{1}{4}x^6+8\sqrt[8]{x^3}-1)^3$; *б)* $y=\sin^5 2x$; *в)* $y=\sqrt{1-e^{4x}}$;

**16**. *а)* $y=(\frac{1}{5}x^5-3x\sqrt[3]{x}-4)^4$; *б)* $y=\ln^3 6x$; *в)* $y=arctg\sqrt{x-1}$;

**17.** *а)* $y=(3x^6+5x\sqrt[5]{x^2}-3)^5$; *б)* $y=\ln^3(2x-5)$; *в)* $y=arctg\,\frac{2}{x-3}$;

**18.** *а)* $y=(5x^4-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3)^2$; *б)* $y=\ln 3x\cdot\sin^2 x$; *в)* $y=\arccos\sqrt{1+x}$;

**19.** *а)* $y=(4x^3+\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2)^5$; *б)* $y=arctg^3 5x$; *в)* $y=x^{-tgx}$

**20**. *а)* $y=(7x^5-3x\sqrt[3]{x^2-6})^4$ *б)* $y=\ln\sin^2 x$ *в)* $y=(arctgx)^{\ln x}$;

**21.** *а)* $y=(3x^4-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}-3)^5$; *б)* $y=\dfrac{\sin 3x}{x}$; *в)* $y=arctg\,\dfrac{1}{x-1}$;

**22.** *а)* $y=(8x^3-\dfrac{9}{x^2\sqrt[3]{x}}+6)^5$; *б)* $y=\dfrac{4x}{\cos 3x}$; *в)* $y=arctg\,\dfrac{1+x}{1-x}$;

**23.** *а)* $y=(3x^2-4\sqrt{x}+5)^6$; *б)* $y=e^{2x}\cdot\cos 2x$; *в)* $y=\sqrt{4-x^2+arctg\,\dfrac{x}{2}}$;

**24.** *а)* $y=(5x^4-\dfrac{10}{x\sqrt[5]{x^2}}+3)^6$; *б)* $y=\dfrac{(x^3-1)\cdot e^x}{x-1}$; *в)* $y=4\arcsin\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}$;

**25.** *а)* $y=(6x^5-\dfrac{3}{x\sqrt{x^2}}+4)^6$; *б)* $y=e^{tgx}$; *в)* $y=\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin 2x$;.

**26.** *а)* $y=(3x^2-\dfrac{2}{x\sqrt[4]{x}}+5)^6$; *б)* $y=e^{2x}(3\sin 2x-\cos 2x)$; *в)* $y=\sqrt{4-x^2+arctg\,\dfrac{x}{2}}$;

**27**. *а)* $y=(7x^4+8\sqrt[5]{x}+8)^4$; *б)* $y=\ln(x^5\sin 3x)$; *в)* $y=\sqrt{1-4x^2}$;

**28**. *а)* $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$; *б)* $y=(1-x)^{10}$.; *в)* $y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$;

**29.** *а)* $y=(\dfrac{x}{3-4x})^3$; *б)* $y=\ln\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$; *в)* $y=\arccos 3x$;

**30.** *а)* $y=(\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{3}{x\sqrt{x}}+5)^3$; *б)* $y=5^{\cos 3x}$; *в)* $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$;

## 5.1 Приклади розв’язання типового варіанту

**Завдання 1**. Розв’язати систему лінійних рівнянь двома способами: за правилом Крамера та за допомогою матриці, оберненої до матриці системи

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3=5,\\ 3x_1+x_2+x_3=8,\\ 4x_1-2x_2-3x_3=3.\end{cases}$$

► 1) Формули Крамера мають вигляд: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$,

де $\Delta$ – визначник системи, $\Delta\neq 0$; $\Delta_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ одержимо із визначника системи $\Delta$ шляхом заміни *i*-го стовпця стовпцем, складеним з вільних членів системи рівнянь. Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&4\\3&1&1\\4&-2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&0&7\\3&1&1\\10&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\cdot 1\begin{vmatrix}11&7\\10&-1\end{vmatrix}=-11-70=-81\neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&-3&4\\8&1&1\\3&-2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}29&0&7\\8&1&1\\19&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\cdot 1\begin{vmatrix}29&7\\19&-1\end{vmatrix}=-29-133=-162,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&5&4\\3&8&1\\4&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-10&-27&0\\3&8&1\\13&27&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\cdot 1\begin{vmatrix}-10&-27\\13&27\end{vmatrix}=-3\cdot 27=-81,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-3&5\\3&1&8\\4&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&0&29\\3&1&8\\10&0&19\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\cdot 1\begin{vmatrix}11&29\\10&19\end{vmatrix}=209-290=-81.$$

$x_1=\dfrac{-162}{-81}=2;\ x_2=\dfrac{-81}{-81}=1;\ x_3=\dfrac{-81}{-81}=1.$ матриця $A$ є невиродженою і існує єдина обернена матриця і єдиний розв'язок системи рівнянь.

Знайдемо обернену матрицю $A^{-1}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},\text{де } A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},\ 1\le i,j\le 3.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\-2&-3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-3&4\\-2&-3\end{vmatrix}=-17;\ A_{31}=\begin{vmatrix}-3&4\\1&1\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\4&-3\end{vmatrix}=13;\ A_{22}=\begin{vmatrix}2&4\\4&-3\end{vmatrix}=-22;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&4\\3&1\end{vmatrix}=10;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&1\\4&-2\end{vmatrix}=-10;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2&-3\\4&-2\end{vmatrix}=-8;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&-3\\3&1\end{vmatrix}=11;$$

звідки $\mathrm{A}^{-1}=\dfrac{1}{-81}\begin{pmatrix}-1&-17&-7\\13&-22&10\\-10&-8&11\end{pmatrix}.$

Отже маємо $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{81}\begin{pmatrix} -1 & -17 & -7 \\ 13 & -22 & 10 \\ -10 & -8 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{81}\begin{pmatrix} -5 & -136 & -21 \\ 65 & -176 & 30 \\ -50 & -64 & 33 \end{pmatrix} = -\frac{1}{81}\begin{pmatrix} -162 \\ -81 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x_1$=2, $x_2$=1, $x_3$=1. ◄

**Ззавдання 2**. **а)** У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задані вектори $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ .

► $\vec{c} = 3(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + 2(2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}) = 7\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$ .◄

**б)**. Дано координати трьох послідовних вершин паралелограма *A* (2,–1,4), *B* (4,3,2) і *C* (7,5,5). Знайти координати четвертої вершини *D*.

► Вектори, що співпадають з протилежними сторонами паралелограма, є рівними, тобто $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ та $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Отже маємо

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) = (4-2;\ 3-(-1);\ 2-4) = (2;\ 4;\ -2)$$

або $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

Оскільки $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (2;4;-2)$.

Звідси $x_C - x_D = 7 - x_D = 2 \Rightarrow x_D = 7 - 2 = 5$;

$y_C - y_D = 5 - y_D = 4 \Rightarrow y_D = 5 - 4 = 1$;  $z_C - z_D = 5 - z_D = -2 \Rightarrow z_D = 5 + 2 = 7$.

Отже *D* (5;1;7). ◄

**Завдання 3**. Задано трикутник з координатами вершин *A*(–2; 4); *B*(6; –2); *C*(8; 7). Необхідно знайти: 1) довжину сторони *AB*; 2) рівняння сторін *AB* і *AC* та їх кутові коефіцієнти; 3) рівняння медіан, що проведені з вершин *A* і *B*,; 4) величину кута *A*; 5) рівняння висоти *CT*, проведеної з вершини *C* на сторону *AB*; 6) Побудувати трикутник *ABC* медіани, висоту в системі координат $xOy$. Зробити малюнок.

►1) Відстань між точками $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$ площини визначається за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Застосовуючи формулу знаходимо довжину сторони *AB*:

$$d = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

2) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$,має вигляд $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Щоб скласти рівняння сторони *AB*, підставляємо координати точок *A* і *B*:

$$\frac{y-4}{-2-4} = \frac{x-(-2)}{6-(-2)}; \qquad \frac{y-4}{-6} = \frac{x+2}{8};$$

$$\frac{y-4}{-3}=\frac{x+2}{4}; \quad 4y - 16 = -3x - 6;\ 3x + 4y - 10 = 0 \quad (AB).$$

Для знаходження кутового коефіцієнта прямої *AB* ($K_{AB}$), розв'яжемо отримане рівняння відносно у: $4y = -3x + 10$; $y = -\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$. Отже, $K_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Підставляючи координати точок *A* і *C*, здобуваємо рівняння прямої *AC*:

$$\frac{y-4}{7-4}=\frac{x-(-2)}{8-(-2)}; \quad \frac{y-4}{3}=\frac{x+2}{10}; \ 10y - 40 = 3x + 6; \quad 3x - 10y + 46 = 0 \quad (AC),$$

звідки кутовий коефіцієнт $K_{AC} = \frac{3}{10}$.

3).Нехай точка *D* – середина відрізку *BC*, а точка *E* – середина відрізку *AC*.

Для визначення координат точок *D* і *E* застосовуємо формули:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2};$$

$$x_D=\frac{6+8}{2}=7; \qquad y_D=\frac{-2+7}{2}=\frac{5}{2}, \qquad D\left(7;\frac{5}{2}\right),$$

$$x_E=\frac{-2+8}{2}=3; \qquad y_E=\frac{4+7}{2}=\frac{11}{2}, \qquad E\left(3;\ \frac{11}{2}\right).$$

Підставляючи координати точок *A* і *D* , маємо рівняння медіани *AD*:

$$\frac{y-4}{\frac{5}{2}-4}=\frac{x+2}{7+2}; \quad \frac{y-4}{-1{,}5}=\frac{x+2}{9}; \quad \frac{y-4}{-1}=\frac{x+2}{6};$$

$$6y - 24 = x - 2; \quad x + 6y - 22 = 0 \ (AD).$$

Аналогічно знаходимо рівняння медіани *BE*: $5x + 2y - 26 = 0$ (*BE*).

4) Гострий кут між прямими, кутові коефіцієнти яких, відповідно, дорівнюють $K_1$ та $K_2$, можна знайти за формулою $tg\varphi=\left|\frac{K_2-K_1}{1+K_1K_2}\right|$.

Шуканий кут *A* утворюється прямими *AB* і *AC*, кутові коефіцієнти яких знайдено раніше. Отже, застосовуючи формулу , маємо:

$$\mathrm{tg}A=\left|\frac{K_{AC}-K_{AB}}{1+K_{AB}K_{AC}}\right|=\left|\frac{\frac{3}{10}-(-\frac{3}{4})}{1+\frac{(-3)\cdot 3}{4\cdot 10}}\right|=\frac{42}{31}\approx 1{,}3548;$$

5).Рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку, має вигляд: $y - y_1 = K(x - x_1)$. Для знаходження кутового коефіцієнта висоти *CT* скористаємось умовою перпендикулярності прямих *CT* і *AB*: $K_{AB}\cdot K_{CT} = -1$. Оскільки $K_{AB}=-\frac{3}{4}$, то $K_{CT}=\frac{4}{3}$.

Підставляючи в формулу координати точки *C*, а також значення знайденого кутового коефіцієнта висоти *CT*, маємо:

$y-7=\dfrac{4}{3}(x-8)$; $3y-21=4x-32$; $4x-3y-11=0$ ($CT$).6) Трикутник $ABC$, медіани $AD$ і $BE$, точку $N$ їх перетину, висоту $CT$, що побудовані в системі координат $xOy$, подано на рис.1

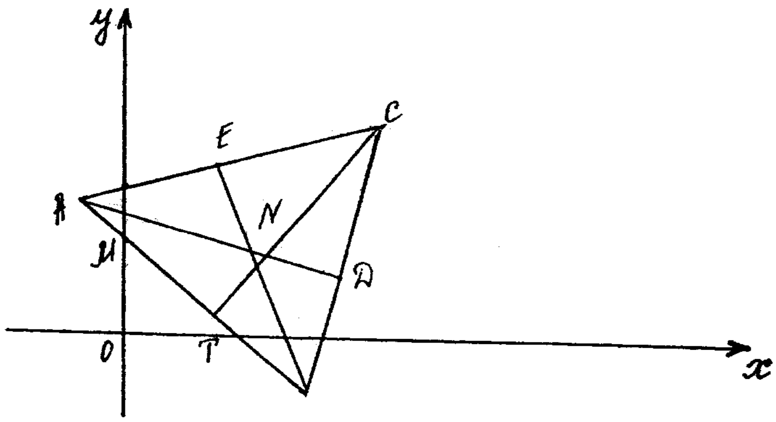



рис.1

**Завдання 4**.Дано координати точок:A (–1; 4; 2);B(0; 3; 3);C(4;–5;3), M(1;–3;5).

Потрібно: 1) скласти рівняння площини $Q$, що проходить через точки $A$, $B$, $C$; 2) скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M$ перпендикуляр-но площині $Q$;3) знайти точки перетину отриманої прямої з площиною $Q$.

1) Рівняння площини, що проходить через точки $A(x_1; y_1; z_1)$,$B(x_2; y_2; z_2)$ і $C(x_3; y_3;z_3)$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Підставляючи координати точок $A$, $B$, $C$ в формулу маємо

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z-2 \\ 0+1 & 3-4 & 3-2 \\ 4+1 & -5-4 & 3-2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

або, розкладаючи визначник за елементами першого рядка, маємо

$$(x+1)8+(y-4)4+(z-2)(-4)=0,$$

$$2(x+1)+y-4-z+2+0;$$

$2x+y-z=0$ – рівняння площини $Q$.

2) Пряма в просторі задається канонічними рівнянням:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

де *а*, *в*, *с* – координати точки, через яку проходить пряма, а $m$, $n$, $p$ – координати напрямного вектора цієї прямої. Умови перпендикулярності прямої до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ мають вигляд: $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$. тоді маємо $\frac{m}{2}=\frac{n}{1}=\frac{p}{-1}$.

Цим умовам, зокрема, задовольняють наступні координати:

$m = 2$; $n = 1$; $p = -1$.Отже рівняння шуканої прямої: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{x-5}{-1}$.

3) Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді. Нехай

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{-1}=t,$$

де $t$ – деякий параметр. Тоді $x = 2t + 1$; $y= t - 3$; $z = - t + 5$.Підставивши в рівняння площини $Q$, маємо $2(2t + 1) + (t - 3) - (-t + 5) = 0$; $6t - 6 = 0$; $t = 1$.

Покладаючи $t = 1$, знаходимо координати точки $P$ перетину прямої з площиною $Q$. Отже, $P\,(3; -2; 4)$.

**Завдання 5** Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x-10}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

► а) Під знаком границі маємо дробово-раціональну функцію, знаменник якої при x = 3 (граничне значення аргументу) відмінний від нуля. Користуючись теоремою про границю частки і замінюючи аргумент x його граничним значенням, маємо $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}=\frac{3^2-5\cdot 3+1}{2\cdot 3^2+3-6}=-\frac{1}{3}$.

б) При $x$=2 чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Отже, безпосередня підстановка граничного значення аргументу призводить до невизначеного виразу виду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити невизначеність виду $\frac{0}{0}$ (відношення двох нескінченно малих величин), необхідно попередньо дріб спростити, розклавши на множники чисельник і знаменник та скоротивши дріб на $(x - 2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}.$$

г) При $x\to\infty$ маємо невизначений вираз виду $\frac{\infty}{\infty}$. Щоб знайти границю дробово-раціональної функції $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $x\to\infty$, необхідно попередньо чисельник і знаменник даного дробу поділити на $x^n$, де $n$ – найвищий ступінь багаточленів $P(x)$ та $Q(x)$. Поділивши чисельник і знаменник даного дробу на $x^2$, застосовуючи основні теореми про границі та властивості нескінченно малих, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2.$$

д) Безпосередня підстановка граничного значення аргументу призводить до невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити цю невизначеність, помножимо чисельник та знаменник дробу на добуток $(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)$.

Потім скоротимо дріб на множник ($x$ – 2), що є відмінним від нуля при $x\to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt{3x-2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(\sqrt{3x-2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(\sqrt{3x-2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}.$$ ◄

**Завдання 6**. Знайти похідні функцій:

*а)* $y=\frac{(x-3)}{(x+2)}$; *б)* $y=\cos 4x$; *в)* $y=(4-3x)\cdot tg2x$

► *а)*Скористаємося правилом диференціювання частки двох функцій і таблицею похідних: $y'=\frac{(x-3)'\cdot(x+2)-(x-3)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x+3}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$

*б)*Використаємо правило диференціювання складної функції $y'=(\cos 4x)'\cdot(4x')=-\sin 4x\cdot 4=-4\sin 4x$

*в)* Використовуючи правило диференціювання добутку двох функцій маємо:

$$y=(4-3x)'\cdot tg2x+(4-3x)\cdot(tg2x)'=-3\cdot tg2x+(4-3x)\frac{2}{\cos^2 2x}$$ ◄

# 6. Невизначений інтеграл

## 6.1 Інтегральне числення функції однієї змінної

Функція *F(x)* називається первісною для даної функції *f(x)* на проміжку $[a,b]$, якщо для кожного $x\in[a,b]$ виконується умова $F'(x)=f(x)$.

Дві будь-які первісні для даної функції $f(x)$ відрізняються одна від одної на сталу величину.

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx = F(x) + C$ .$C$ - стала величина. Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією.

Процес знаходження невизначеного інтегралу називається інтегруванням.

Властивості невизначеного інтегралу (основні з них)

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

3) $\int[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$, $\alpha$ і $\beta$=const;

4) якщо $F(x)$ є первісна для $f(x)$ , то

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$; 5) $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

**Таблиця невизначених інтегралів**

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n-1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ...

.8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ .

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ .

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = -\frac{1}{a} arcctgx + C$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\arccos x + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Справедливість цих рівностей перевіряється диференціюванням їхніх правих частин (первісних).

При інтегруванні функцій можливість безпосередньо скористуватись основними формулами таблиці буває не часто. Як правило, підінтегральну функцію необхідно перетворити для того, щоб інтеграл звести до табличного.

### 6.2 Методи інтегрування. Метод заміни змінної

Одним із основних методів обчислення інтегралів є метод заміни змінної, який існує в двох варіантах: метод підведення під знак диференціалу і метод підстановки.

Метод підведення під знак диференціалу полягає в тому, що якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$,то $\int f(t)dt = F(t) + C$, де $t = \varphi(x)$ - неперервно диференційовна функція. Після обчислення останнього інтегралу заміною $t = \varphi(x)$ повертаються до початкової змінної $x$.

Знайти невизначений інтеграл $\int \left(3x^2 + 5x - 8\right)dx$.

► Скористаємося третьою властивістю та таблицею інтегралів

$$\int \left(3x^2 + 5x - 8\right)dx = 3\int x^2 dx + 5\int xdx - 8\int dx = 3\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 8x + C =$$

$$= x^3 + \frac{5x^2}{2} - 8x + C$$ ◄

Метод підстановки полягає в тому, що якщо функція $f(x)$ неперервна, то покладаючи $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ - неперервні, одержуємо $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. Після знаходження інтегралу в правій частині цієї рівності треба повернутися до змінної $x$.

При інтегруванні функцій виду $R(\cos x, \sin x)$ зручні такі підстановки:

а) $t = \cos x$, якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

б) $t = \sin x$. якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

в) $t = tgx$, якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Такі інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій аргументу $t$.

**Приклад**: ► $\int x(x^2 - 4)dx = \left| \begin{matrix} x^2 - 4 = t \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{4}t^2 + C = \frac{\left(x^2 - 4\right)^2}{4} + C$,

$$\int \cos^3 x \sin xdx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -dt \end{matrix} \right| = -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C \int \left(3x^2 + 5x - 8\right)dx$$

◄

### 6.3 Інтегрування частинами

Нехай функції $u = u(x), v = v(x)$ мають неперервні похідні, тоді справедлива формула інтегрування частинами $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

Як правило, метод інтегрування частинами застосовується в тих випадках, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій і при цьому інші методи не придатні. Наприклад, $\int P_n(x)\cos axdx, \int P_n(x)\sin axdx, \int P_n(x)e^{ax}dx, \int x^k \ln xdx, \int x^k arctgdx$ і т.д. Якщо

підінтегральна функція має вид $P_n(x)\cos ax, P_n(x)\sin ax, P_n(x)e^{ax}$, то за $u$ приймають $P_n(x)$. Якщо підінтегральна функція є добуток логарифмічної або оберненої тригонометричної функції і многочлена, то за $u$ приймають ці функції.
**Наприклад**, знайти інтеграл

$$J=\int x\sin xdx=\begin{vmatrix} u=x, du=dx \\ dv=\sin xdx, v=\int \sin xdx=-\cos x \end{vmatrix}=-x\cos x+\int \cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$$

.Інтеграли виду $\int \sin \alpha x\cos \beta x\,dx, \int \cos \alpha x\cos \beta x\,dx, \int \sin \alpha x\sin \beta x\,dx$ можна легко знайти, якщо застосувати формули:

$$\sin \alpha x\cdot \cos \beta x=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\right);$$

$$\cos \alpha x\cdot \cos \beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right);$$

$$\sin \alpha x\cdot \sin \beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right).$$

При знаходженні інтегралів виду $\int \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx\,(m\geq 1, n\geq 1)$
треба скористатись формулами

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

## 7. Визначений інтеграл

### 7.1 Основні поняття визначеного інтегралу.

Нехай функція $f(x)\geq 0$ визначена на відрізку $[a,b]$
Тоді на цьому відрізку вона має первісну $F(x)$: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Визначений інтеграл позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Число $a$ називається нижньою, а число $b$- верхньою межею визначеного інтегралу. Якщо інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує, то функція називається інтегрованою на ньому. Неперервна функція завжди інтегрована.

***Геометрична інтерпретація визначеного інтегралу***. Якщо $f(x)\geq 0$ на проміжку $[a,b]$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx\ (a<b)$ представляє собою площу криволінійної трапеції – фігури, що обмежена лінією $y=f(x)$, прямими $x=a$ і $x=b$, віссю $OX$
Основні властивості визначеного інтегралу:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx=0$; 2) $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$, $\alpha$ і $\beta-const$, то

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Якщо $F(x)$ - первісна для $f(x)$ на $[a,b]$, то для обчислення визначеного інтегралу маємо формулу Ньютона-Лейбниця $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Основними методами обчислення визначеного інтегралу є інтегрування частинами і метод заміни змінної.

Якщо $u=u(x)$ і $v=v(x)$ є неперервно диференційовані функції на відрізку $[a,b]$, то справедлива формула інтегрування частинами**:**

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі**:**

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, де $x=\varphi(t)$ („підстановка”)- функція, що є неперервною разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку Суттєвим є те, що замінивши змінну у визначеному інтегралі треба визначити і нові межі інтегрування.

### 7.2 Деякі застосування визначеного інтегралу.

***а). Обчислення площ плоских фігур***:

1) якщо на відрізку $[a;b]$ задана функція $f(x)\ge 0$, то площа фігури, що обмежена кривою $y=f_1(x)$ і прямими $x=a$ і $x=b$, обчислюється за формулою: $\int_a^b f(x)dx$

2) площа фігури, що обмежена кривими $y=f_1(x)$ , $y=f_2(x)$ $\left(f_1(x)\le f_2(x)\right)$ та прямими $x=a$ і $x=b$, обчислюється за формулою: $S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$;

## 8. Диференціальні рівняння

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв’язує невідому функцію, її похідні і незалежні змінні. Якщо функція, що входить в рівняння, залежить від однієї незалежної змінної, то рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням. Порядок старшої похідної, що входить в дане рівняння, називається порядком рівняння. Звичайне диференціальне рівняння $n$-го порядку має вид: $F(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))=0$. Будь-яка функція $y=\varphi(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння, тобто перетворює його в тотожність, називається розв’язком цього рівняння. Загальним розв’язком, або загальним інтегралом диференціального рівняння називають такий його розв’язок $y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ або $\Phi(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)=0$, який містить таку кількість довільних сталих $C_1,C_2,\ldots,C_n$, яка дорівнює порядку цього рівняння.

### 8.1 Диференціальні рівняння першого порядку

Загальний вид диференціального рівняння першого порядку є таким:

$F(x,y,y')=0$ (або $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$).

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно похідної, то воно набуває вигляду: $y' = f(x, y)$.

Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з *відокремлюваними* змінними, якщо воно може звестися до виду: $y' = f_1(x) f_2(y)$;

Це рівняння можна переписати $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ і в припущенні, що $f_2(y) \neq 0$ розділити обидві частини цієї рівності на $f_2(y)$. Тоді матимемо рівняння $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$, в якому змінні відокремлені.

Інтегруючи його, одержимо загальний інтеграл рівняння $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$.

***Однорідним*** диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке можна записати у вигляді

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ або $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ - однорідні функції одного і того ж порядку. Шляхом заміни $\frac{y}{x} = u(x)$, де $u = u(x)$ - невідома функція, це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Оскільки $y = ux$, то $y' = u + xu'$. Підставимо ці вирази в рівняння і розв'яжемо його.

***Лінійним*** диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду $y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x), q(x)$- задані неперервні функції. Загальний розв'язок при цьому розшукують у вигляді добутку двох невідомих функцій $u = u(x), v = v(x)$. Тобто у вигляді $y = u\,v$. Звідси $y' = u'v + v'u$. Підставляючи значення $y$ та $y'$ у задане рівняння, початкове рівняння перетвориться до виду

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x) \text{ або } u'v + u[v' + p(x)v] = q(x).$$

За функцію $v(x)$ вибирають будь-яку функцію, яка анулює вираз в квадратних дужках, тобто розв'язують два рівняння з відокремлюваними змінними.

### 8.2 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Загальний вигляд лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

Якщо *f(x)*= 0 рівняння називають однорідним, якщо ж *f(x)*≠0 – неоднорідним.

Лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$, де $p$ і $q$ - дійсні числа. Для його розв'язання складають характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ і знаходять його корені $k_1$ і $k_2$. Загальний розв'язок $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ рівняння має вид:

а) $y_{з.о.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, якщо корені дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$).

б) $y_{з.о.} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + xC_2)$, якщо корені рівні (кратні) ($k_1 = k_2 = k$).

в) $y_{з.о.} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, якщо корені комплексно-спряжені

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, (i^2 = -1,\ i = \sqrt{-1}).$$

## 9.Ряди

### 9.1. Числові ряди Основні поняття. Ознаки збіжності ряду

Нехай задано нескінченну послідовність чисел $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots,\ u_n$. Вираз $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ зветься числовим рядом, а $u_1, u_2, ., .u_n$–членами ряду.

Сума $n$ перших членів ряду $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ зветься частковою сумою ряду. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається збіжним, якщо послідовність часткових сум при $n \to \infty$ має границю: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S зветься сумою ряду. Якщо послідовність часткових сум не має (скінченої) границі, то ряд називають розбіжним.

*Необхідна ознака*

| |
|---|
| Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя його загального члена при $n \to \infty$ дорівнює 0, тобто $\underline{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$. Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається. |

*Достатні ознаки*

| Ознаки порівняння. |
|---|
| **1**. Нехай дано два ряди з додатними членами<br>$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$; (*)<br>$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, (**)<br>причому $u_n \le v_n$.<br>Тоді, якщо збігається ряд (**), то збігається і ряд (*); |

| |
|---|
| якщо розбігається ряд (*), тоді розбігається і ряд(**). |
| **2.(**гранична) Якщо існує скінчена і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k,$ то обидва ряди (*) і (**) збігаються або розбігаються одночасно. При $k=0$ , якщо збігається ряд (**) , то збігається і ряд (*). |

Для порівняння часто застосовують геометричну прогресію $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a\cdot q^n$ , яка збігається при $|q|<1$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{a}{1-q}$, або гармонійний узагальнений ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, який збігається при $p>1$, а розбіжний при $p\le 1$.

| | |
|---|---|
| ***Ознака Даламбера.*** Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то | якщо $q<1$ ряд збігається<br>якщо $q>1$ розбігається<br>якщо $q=1$ питання про збіжність ряду лишається відкритим |
| ***Ознака Коші (***радикальна). Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то | якщо $q<1$ ряд збігається, якщо $q>1$ розбігається<br>якщо $q=1$ питання про збіжність ряду лишається відкритим |

| | |
|---|---|
| ***Інтегральна ознака Коші***. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ має вигляд $u_n = f(n) > 0$, де $f(x)$ неперервна, спадна функція при $x \ge n_0$, то | ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і невласний інтеграл $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ збігається або розбігається одночасно. |
| ***Теорема Лейбниця.*** Якщо для знакопереміжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n =$ $= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, $(u_n > 0)$виконуються умови: | а) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається. |

.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ зветься абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ зветься умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд складений з абсолютних величин його членів розбігається.

## 9.2 Степеневі ряди

Степеневим рядом звється ряд вигляду

$$\mathrm{C}_o + \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_n x^n,$$

де $\mathrm{C}_o$, $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_2$, …, $\mathrm{C}_n$ – коефіцієнти.

Область збіжності степеневого ряду можна встановити за допомогою теореми Абеля: якщо степеневий ряд збігається при деякому значенні $x = x_o$, то він збігається при всіх $|x| < |x_o|$, причому абсолютно. Якщо степеневий ряд розбігається при $x = x_1$, то він розбігається при всіх значеннях $|x| > |x_1|$.

Інтервал ]–R; R[ є інтервалом збіжності. Число R називається радіусом збіжності. Для визначення інтервалу збіжності застосовується ознака Даламбера до ряду, складеного з абсолютних величин членів даного степеневого ряду.

Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку в околі точки $x = a$, то для неї можна записати розкладання в степеневий ряд

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

або $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

який називається рядом Тейлора, а така функція називається аналітичною.
Якщо $a = 0$, то одержимо частковий випадок ряду Тейлора, який називається рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Наведемо розкладення деяких елементарних функцій в ряд Маклорена.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \quad ]-\infty;\infty[,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad ]-\infty;\infty[$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad ]-\infty;\infty[,$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots, \; ]-1;1[,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad ]-1;1[.$$

**Приклад:** Обчислити значення $\sqrt{1{,}2}$

**Розв'язання:** представимо

$\sqrt{1{,}2} = \sqrt{1+0{,}2} = (1+0{,}2)^{1/2} = (1+0{,}2)^{0{,}5}$ Розглянемо функцію

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots,$$

та обчислимо при $x = 0{,}2; m = 0{,}5$

$$(1+0{,}2)^{0{,}5} = 1 + 0{,}5\cdot 0{,}2 + \frac{0{,}5(0{,}5-1)}{2!}\cdot 0{,}2^2 + \frac{0{,}5\cdot(0{,}5-1)\cdot(0{,}5-2)}{3!}\cdot 0{,}2^3 =$$

$$= 1 + 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}0005 = 1{,}096$$

# 10. Елементи теорії ймовірності та математичної статистики

## 10.1 Випадкові події та їх класифікація

Теорія ймовірностей – це розділ математики, що вивчає загальні випадкових явищ, подій. Випадкова подія – це подія, яка може настати або не настати в результаті деякого експерименту, що відбувається за одних і тих же умов, результат якого наперед не можна точно передбачити.

Введемо позначення та основні поняття. Множини об'єктів позначатимемо великими латинськими літерами: $A$, $B$, $C$, ... . Їх елементи - малими: $a$, $b$, $c$,... .

Події (явища), що спостерігаються нами можна поділити на вірогідні, неможливі та випадкові.

Вірогідною подією називають подію, яка обов'язково відбудеться, якщо буде виконана певна сукупність умов.

Неможливою називають подію, яка заздалегідь не відбудеться. Наприклад, в урні тільки чорні кулі. Вилучення з урни білої кулі – подія неможлива.

Випадковою називають подію, яка за певною сукупністю умов може відбутися або не відбутися.

Дві події *A* та *B* називаються несумісні, якщо вони не можуть з'явитися одночасно в одному й тому ж випробуванні. Несумісні події не мають загальних елементарних подій, а їх добуток – подія неможлива.

**Наприклад**: робиться постріл по цілі. Нехай подія $A$ – влучення в ціль, а $B$ – промах. Ці події несумісні.

Подія, що настає тоді і тільки тоді, коли не настає подія *A*, називається подією протилежною *A*. Подія протилежна *A*, позначається $\overline{A}$.

## Основні формули комбінаторики.

Ми будемо розглядати множини, що мають скінчену кількість елементів *n*, та виконувати розрахунок кількості можливого вибору по *k* елементів із елементів множини $(k \le n)$.

*Перестановками* називають комбінації, які складаються з одних і тих же елементів і відрізняються тільки порядком їх розміщення.

Число всіх можливих перестановок з $n$ елементів обчислюють за формулою: $P_n = n!$ де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Вважається за означенням, що 0! = 1, 1! = 1

**Наприклад**: скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 3, 4, 7, 9, якщо кожна цифра входить в число тільки один раз? $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

*Розміщеннями* називаються комбінації, складені із $n$ різних елементів по $k$ елементів $(n \ge k)$, які відрізняються або самими елементами, або їх порядком. Число розміщень $A_n^k$ визначаємо за формулою $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Наприклад:** скільки сигналів можна скласти із восьми різнокольорових прапорців, взятих по два? $A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = 56.$

*Сполуками* називаються комбінації, складені з $n$ різних елементів, по $k$ елементів $(n \ge k)$, які відрізняються хоча б одним елементом.

Число сполук $C_n^k$, рівне $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Справедлива рівність (при $k \ge \frac{1}{2}n$):

$C_n^k = C_n^{n-k}$

**Наприклад:** скількома способами можна вибрати 2 деталі із ящика, який містить 8 деталей? $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28.$

Підкреслимо , що перестановки, розміщення і сполуки зв'язані рівністю

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

## 10.2 Класичне означення ймовірності.

Подія А називається *незалежною* від події В, якщо ймовірність події А не залежить Розглянемо множину елементарних подій (елементарних наслідків). Припустимо, що ці події задовольняють умови:

1). вони попарно несумісні;

2). вони утворюють повну групу подій;

3). вони рівноможливі.

Ймовірність –це кількісна оцінка можливості появи події $A$.

**Означення.** Ймовірністю деякої випадкової події $A$ називається відношення $m$ – числа наслідків, які сприяють цій події до загального числа $n$ – рівноможливих попарно несумісних в даному випробуванню наслідків, які утворюють повну групу. Отже $P(A)=\frac{m}{n}$ де $.0 \le P(A) \le 1$.

**Приклад**. Підкидається гральна кістка. Обчислити ймовірність того, що випаде шість очок. Нехай подія $A$ –випаде шість очок. Наслідок, який сприяє події $A$ – один, усього рівноможливих наслідків – шість, тобто $m = 1$, $n = 6$ тоді

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}.$$

**Теорема додавання ймовірностей**. Якщо випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи однієї із цих подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A_1 + A_2 + ...A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

**Наслідки**: **1**. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ складають повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$.

**2**. Ймовірність неможливої події дорівнює нулеві.

**3**. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$, з якої одержимо $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

Сумою $A + B$ двох подій $A$ і $B$ називають подія, яка складається з появи події $A$ або події $B$, або обох цих подій. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

**Приклад**. В урні 30 куль: 10 червоних, 5 синіх та 15 білих. Знайти ймовірність появи кольорової кулі.

**Розв'язання:** Поява кольорової кулі означає появу або червоної, або синьої кулі Подія $A$ – поява червоної кулі, тоді $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. Подія $B$ – поява синьої кулі, тоді $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$. Події $A$ та $B$ – не сумісні, тому шукана ймовірність

$$P(A+B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Дві події називають *сумісними*, якщо поява одного з них не виключає появу другої в одній і тій же події.

Ймовірність появи хоча б однієї з двох *сумісних подій* дорівнює сумі ймовірності цих подій без ймовірності їх сумісної появи $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$. від того відбулася чи не відбулася подія В.
Подія А називається *залежною* від події В, якщо ймовірність події А залежить від того, відбулася чи не відбулася подія В

Характеристикою залежності між випадковими подіями *А* та *В* є так звана умовна ймовірність події *А,* котра позначається як $P_B(A)$ і називається ймовірністю події *В*, яка обчислена в припущенні, що подія *А* уже відбулася.

*Добутком* двох подій *А* та *В* називають подію *АВ,* яка складається у сумісній появі (суміщення) цих подій.

Якщо події *А* та *В* є *незалежними* (поява однієї з них не змінює ймовірність появи другої), то $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Нехай подія *А* – перша куля біла, подія *В* – друга куля біла, подія *С* – третя куля біла. Тоді суміщення цих подій $A\cdot B\cdot C$ – всі кулі білі.

Обчислимо ймовірність події *А* і *В*, що перші дві кулі білі. Згідно формули маємо: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}$. Тоді ймовірність події $A\cdot B\cdot C$ обчислюється так: $P(A\cdot B\cdot C)=P(A\cdot B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$.

**Приклад**. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність попадання для першого 0,7, а для другого 0,9. Знайти ймовірність події, що обидва влучать у ціль.

Розглянемо події, ймовірність яких така:
*А* – перший стрілець влучив в ціль, *В* – другий стрілець влучив. Тоді суміщення подій – обидва влучили в ціль. А так, як події *А* та *В* незалежні, то

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}63.$$

## 10.3 Випадкові величини (ВВ)

В теорії ймовірностей поряд з випадковими подіями розглядають випадкові величини. Випадкова величина *Х* –це є числова функція $f(x)$ випадкових елементарних подій. При появі випадкової події випадкова величина набуває значення $f(x_i)$.

**Означення**. Функцією, або законом розподілу, випадкової величини називають опис зв'язку (аналітичний, графічний або табличний) між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

## 10.4 Дискретні випадкові величини (ДВВ)

**Означенн***я*. *Дискретною* називають випадкову величину, яка приймає окремі, ізольовані можливі значення з визначеними ймовірностями. Всі її можливі значення можна перенумерувати.

Щоб задати закон розподілу дискретної величини, необхідно для кожного з можливих значень випадкової величини *Х* задати ймовірність набування цього значення і записати у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1.

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ,..., | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ,..., | $p_n$ |

Події $X = x_1; X = x_2$; $X = x_3,...,$ $X = x_n$ складають повну групу подій, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює 1, тобто: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

: Нехай $X$ випадкова величина. Визначимо ймовірність події, що значення цієї величини попаде в проміжок $(x_1; x_2)$. Згідно з правилом додавання ймовірностей (аксіома 3) маємо: $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 < X < x_2)$.

Отже, ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $(x_1; x_2)$ дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:
$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$

В загальному випадку, функція розподілу $F(x)$ має такі властивості:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) функція розподілу неспадна.
$F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$ або $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2)$;

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу $(a;\ b)$, дорівнює приросту інтегральної функції: $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$. Якщо $BB$ $x \in (-\infty; +\infty)$,

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ 1 & при\ \ x > b \end{cases}$, якщо $B\ B$ $x \in (a;\ b)$

## 10.5 Функція щільності

При розв'язанні багатьох задач, пов'язаних із неперервними випадковими величинами зручно розглядати диференційну функцію, що характеризує щільність ймовірності в точці.

**Означення**. Диференційною функцією розподілу (щільність ймовірностей) називають першу похідну від інтегральної функції розподілу, тобто $f(x) = F'(x)$
Ця диференційна функція застосовується тільки для неперервних ВВ.

При відомій функції щільності випадкової величини ймовірність події, що випадкова величина прийме значення з проміжку $[x_1, x_2]$, обчислюється так:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \cdot$$

**Властивості функції щільності**

1) Значення функції щільності не можуть бути від'ємними: $f(x) \ge 0$.
2) Невласний інтеграл від функції щільності по всій числовій прямій дорівнює 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ Якщо всі ймовірні значення випадкової величини $X$ належать інтервалу $(a, b)$, тоді $\int_a^b f(x)dx = 1$

3) Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

**Означення**. Випадкова величина називається рівномірно розподіленою в проміжку $(a,b)$, якщо її функції щільності ймовірності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} \quad при \quad a < x \le b \\ 0 \quad при \quad x > b \end{cases}$$

Ймовірність того, що $X$ прийме значення, яке належить інтервалу $(\alpha, \beta)$,дорівнює

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$де $\Phi(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - функція Лапласа

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини $X$ від свого математичного сподівання менше невід'ємного числа $\delta$ дорівнює $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$ Якщо $a = 0$ справедлива рівність $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$ .

## 10.6 Числові характеристики випадкових величин

*Математичним сподіванням* (або середнім значенням) випадкової величини $X$ називають число, яке визначається в залежності від типа випадкової величини $X$ формулами

$$M(X) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k \quad \text{якщо } X - \text{дискретна } BB \\ \int\limits_a^b xf(x)dx \quad \text{якщо } X - \text{неперервна } BB \quad \text{на} \quad a < x < b \end{cases}$$

*Дисперсією* $D(X)$ випадкової величини $X$ називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання $M(X)$. Краще застосувати розрахункові формули

$$D(X) = \begin{cases} M(X^2) - [M(X)]^2, \text{ якщо} \quad X - ДВВ \\ \int\limits_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2, \text{ якщо} \quad X - НВВ \end{cases}$$

Невід'ємне число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ називається середнім квадратичним відхиленням і визначається також, як для дискретної так і для неперервної величини .

| **Властивості $M(X)$:** | **Властивості $D(X)$** |
|---|---|
| 1. $M(C) = C$ | 1. $D(C) = 0$ |
| 2. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ | 2. $D(CX) = C^2 D(X)$ |
| 3. $M(CX) = CM(X)$ | 3. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ |
| 4. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$ | 4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ |

($X$ і $Y$ – незалежні ВВ)

## 10.7. Елементи математичної статистики.

Задача математичної статистики складається в створенні методів збору та обробки статистичних даних для отримання наукових та практичних висновків.

### Статистичний розподіл вибірки

*Генеральною сукупністю* називається сукупність об'єктів для дослідження кількісних параметрів. Нехай з генеральної сукупності добута вибірка, причому $x_1$ спостерігалось $n_1$ разів, $x_2 - n_2$ разів, $x_n - n_k$ разів і дорівнює – об'єму вибірки $\sum n_i = n$. Спостережливі значення $x_i$ називають варіантами, а послідовність варіант, записаних в зростаючому порядку – *варіаційним рядом*. Числа спостережень називають *частотами*, а їх відношення до об'єму вибірки $\frac{n_i}{n} = w_i$ *відносними* частотами. *Статичним розподілом вибірки* називають перелік варіант $x_i$ варіаційного ряду та відповідних їм частот $n_i$ або відносних частот $w_i$ ($\sum w_i = 1$). Під *розподілом* в математичний статистиці розуміють –відповідність між спостереженими варіантами та їх частотами, або відносними частотами.

Статистичний розподіл вибірки надається зазвичай у вигляді таблиці

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ,..., | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | ,..., | $n_m$ |

або

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ,..., | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | $w_1$ | $w_2$ | ,..., | $w_m$ |

**Приклад**. Задано розподіл частот вибірки об'єму $n$ = 20

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 6 | 12 |
| $n_i$ | 3 | 10 | 7 |

Написати розподіл відносних частот .

**Розв'язання.** Знайдемо відносні частоти, для чого розділимо частоти на об'єм вибірки

$$w_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \quad w_2 = \frac{10}{20} = 0{,}5; \quad w_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Запишемо розподіл відносних частот:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 6 | 12 |
| $w_i$ | 0,15 | 0,5 | 0,35 |

Перевірка: 0,15 + 0,5 + 0,35 = 1.

### Генеральна та вибіркова сукупності.

Кожен об'єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Розглядають лише одну ознаку, припускаючи всі інші рівноправними. Такі множини об'єктів називаються статистичними сукупностями.

Вибіркової сукупністю або просто вибіркою називають сукупність випадково відібраних об'єктів.

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів з яких проводиться вибірка.

Об'ємом сукупності (вибіркової або генеральною) називають число об'єктів цієї сукупності.

**Статистичні оцінки параметрів розподілу**.

Нехай для кількісного (дискретного або неперервного) признака $X$ із генеральної сукупності зроблена вибірка $x_2, x_2, x_3, ..., x_k$ об'ємом $n$.

Генеральною середньою $\bar{x}_г$ називається середнє арифметичне значень признака генеральної сукупності. і визначається рівністю

$$\bar{x}_г = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 .... + x_n}{n}$$

Статистичною оцінкою $\theta^*$ невідомого параметру $\theta$ теоретичного розподілу називають функцію $f(X_{1,} X_2, ..., X_n)$ від спостережених випадкових величин $X_{1,} X_2, ..., X_n$ і в цьому випадку генеральна середня визначається як математичне сподівання признаку : $\bar{x}_г = M(X)$

Вибірковою середньою $\bar{x}_в$ називають середнє арифметичне значення признака вибіркової сукупності іі обчислюється за формулою:

$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + .... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ у випадку варіаційного ряду,

або за формулою $\bar{x}_B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n}$ у випадку статистичного розподілу де

$n$ - об'єм вибірки.

Щоб зробити висновок про розсіювання значень кількісного признаку $X$ генеральної сукупності навколо свого середнього значення, вводять характеристику – дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Генеральною дисперсією $D_г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення значень признаку генеральної сукупності від їх середнього значення $x_г$ (об'єм $n$)

Дисперсія $D_г = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_г)^2$ носить назву генеральної дисперсії. Якщо значення признаку $x_i$ повторюються не один раз, то: $D_г = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x}_г)^2$

Генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma_г = \sqrt{D_г}$

Вибірковою дисперсією $\overline{D_B}$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення спостережених значень признаку від їх середнього значення $\bar{x}_в$.

Якщо всі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ признаку вибірки об'єму $n$ різні, то $\overline{D_B} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2$, у випадку варіаційного ряду,

а із врахуванням відповідних відносних частот $D_B = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2$.

(у випадку статистичного розподілу)

Вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{D_B}$ .

Математичне сподівання вибіркової дисперсії $M(D_B) = \frac{n-1}{n} \cdot D_г$

Оцінкою для генеральної дисперсії $D(X)$ є вибіркова дисперсія $D_B$ яку позначають $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_B\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_B^2\right) = D_B$

Для оцінки $D(x)$ при малих $n$ використовується також „виправлена дисперсія” $S_1{}^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2$

А вибіркове середнє квадратичне відхилення величини $X$ $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{S^2} = S$

**Приклад**. Генеральної сукупності зроблена вибірка об’єма $n = 50$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| варіанта | $x_i$ | 2 | 5 | 7 | 10 |
| частота | $n_i$ | 16 | 12 | 8 | 14 |

Знайти незсунену оцінку генеральної середньої та вибіркове середнє квадратичне відхилення.

**Розв’язання.** Незсуненою оцінкою генеральної середньої є вибіркова середня $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \frac{1}{50}\left(16\cdot 2 + 12\cdot 5 + 8\cdot 7 + 14\cdot 10\right) = 5{,}76$. вибіркове квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_B = \sqrt{D_B}$ де $D_B$ – вибіркова дисперсія

$$D_B = \frac{1}{50}\left(16(2-5{,}6)^2 + 12(5-5{,}6)^2 + 8(7-5{,}6)^2 + 14(10-5{,}6)^2\right)$$

## 10.8. Довірчий інтервал для невідомого середнього

***Точковою*** називають оцінку, яка визначається одним числом. При виборці малого об’єму точкові оцінки приводить до великих помилок. При невеличкому об’ємі виборки зручніше застосувати інтервальні оцінки.

***Інтервальною*** називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу.

Усі оцінки які ми розглядали вище, - точкові. При виборі малого об’єму точкова оцінка може призвести до грубих помилок В таких випадках краще застосовувати інтервальні оцінки. *Довірчим* називають інтервал, який по заданій довірчій ймовірності $P\left(\left|\frac{a-\bar{X}}{\delta}\sqrt{n}\right| < t\cdot\gamma\right) = 1-\alpha$ – накриває оцінюючий параметр (сподівання $a$). Точність оцінки характеризує невід’ємне число $\delta$, з заданою надійністю $\gamma = P\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$

Надійність (довірча ймовірність) оцінки $\theta$ завжди задається заздалегідь, причому беруть число наближене до одиниці. Наприклад: 0,95; 0,97; 0,99 та ін.

Для оцінки математичного сподівання $a$ випадкової величини $X$, розподіленої за нормальному законом, при відомій дисперсії $D(x)=\sigma^2$ служить довірчий інтервал $\bar{x}_B - t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ де $\bar{x}_{\text{в}}$ – середня вибіркова; $n$ –об’єм вибірки;

$\sigma$ – відоме середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності;

$t$ – величина, що визначається за таблицею значень функції Лапласа;

$\Phi(x)$, (додаток таб. 4), при якому $\Phi(x)=\frac{\gamma}{2}$; $t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\delta$ - точність оцінки.

$\bar{x}_{\text{в}}$ – вибіркова середня

$S_1$ – „виправлене” вибіркове середнє квадратичне відхилення;

$n$ – об’єм вибірки;

$t_\gamma$ – величина, що визначається за таблицею 3 розподілу Стьюдента для заданих об’єму $n$ і надійної ймовірності $\gamma$, $t_\gamma = t(\gamma, n)$.

# 11. Контрольна робота №2

## *Індивідуальні контрольні завдання*

### *Завдання 1*

Обчислити :

**1.** а) $\int\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x}\right)dx$, б) $\int e^{4x}dx.$ в) $\int \ln(x+3)dx$

**2.** а) $\int\left(3x\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx$, б) $\int \sin 8x dx$ в) $\int xe^{-x}dx$.

**3.** а) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-x^2\sqrt[3]{x}\right)dx$, б) $\int \mathrm{tg}7x dx$. в) $\int xe^{3x}dx$.

**4.** а) $\int\sqrt{5x-1}dx$, б) $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$ в) $\int x^2\cos x dx$.

**5**. а) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$, б) $\int e^{-4x}dx$. в) $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

**6**.а) $\int\left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[5]{x}\right)dx$, б) $\int\sqrt{3+2x}dx$. в) $\int x\ln xdx$.

**7.** а) $\int\frac{6x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int\frac{dx}{(4+x)^4}$. в) $\int x\sin xdx$

**8.** а) $\int\frac{8\sqrt[3]{x}-7\sqrt{x}}{x}dx$, б) $\int 3^{4x}dx$. в) $\int x\cos xdx$.

**9**. а) $\int\frac{6x^3-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}$. в) $\int xe^x dx$

**10**. а) $\int\frac{2\sqrt[4]{x}+x^2}{x^3}dx$, б) $\int \mathrm{tg}7xdx$. в) $\int\arcsin xdx$.

**11**. а) $\int\frac{2x^5-3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int\sqrt{5x-1}dx$.. в) $\int\ln(x^2+1)dx$

**12**. а) $\int\frac{\sqrt[3]{x}-x^2}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int(2-4x)^3dx$.. в) $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$

**13**. а) $\int\frac{3x+7\sqrt{x}}{x^2}dx$, б) $\int\frac{dx}{(5+x)^3}$. в ) $\int\sqrt{x}\ln xdx$.

**14**. а) $\int\frac{5x^2-7}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int e^{-5x}dx$. в) $\int \mathrm{arctg}xdxdx$

**15**. а) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x}dx$, б) $\int\sqrt[3]{4-x}dx$. в ) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

**16.** а) $\int\sqrt{4-3x}dx$, б) $\int\frac{3x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$. в $\int\ln(8+x)dx$.

**17.** а) $\int\frac{2x^2-4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int\frac{dx}{\sin^2 6x}$. в) $\int\ln(x^2+1)dx$.

**18**. а) $\int\frac{3\sqrt{x-x}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \mathrm{ctg}4xdx$. в) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

**19.** а) $\int\frac{2-5\sqrt{x}}{x^2}dx$, б) $\int e^{-8x}dx$. в) $\int\sqrt[4]{x}\ln xdx$.

**20**. а) $\int \frac{4x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int (3-2x)^5 dx$. в) $\int x^2 \sin x dx$.

**21**. а) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$. в) $\int x^2 e^x dx$.

**22**. а) $\int \frac{5\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$, б) $\int \mathrm{tg} 7x dx$ в) $\int x^4 \ln x dx$

**23**. а) $\int \frac{x\sqrt{x}-x^2}{x^3}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$. в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

**24**. а) $\int \frac{x^3-\sqrt{x}}{x^2}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}}$. в) $\int \sqrt[4]{x} \ln x dx$.

**25.** а) $\int \frac{2x\sqrt{x}+x^3}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{x^2 dx}{4x^3-5}$. в) $\int x^2 \ln x dx$.

**26**. а) $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-x^2}{x^3}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$. в) $\int x^2 e^x dx$.

**27**. а) $\int \frac{4\sqrt{x}-5x}{x^3}dx$, б) $\int \sqrt[3]{5-4x}dx$.. в) $\int xe^{-7x}dx$

**28.** а) $\int \frac{2x^2+4\sqrt[3]{x}}{x}dx$, б) $\int \sin 4x dx$ в) $\int \sqrt[5]{x} \ln x dx$.

**29**. а) $\int \frac{x^3-4x^2}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int e^{-5x}dx$. в) $\int xe^{2x}dx$.

**30**. а) $\int \frac{2x+6x^3}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int \sqrt{4+5x}dx$. в) $\int \ln(x-5)dx$.

**Завдання 2 Обчислити інтеграли*:***

:

**1.** $\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$. **2.** $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.. **3.** $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

**4.** $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$.. **5.** $\int_0^{\pi/4} \sin^4 x dx$. **6.** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x}}$.

**7**. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$.  **8** $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 dx$.  **.9**. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

**10** $\int\limits_0^{1} xe^{-x} dx$.  **11.** $\int\limits_0^{3} \ln(x+3) dx$.  **12.** $\int\limits_1^{2} x\ln(1+x) dx$.

**13**. $\int\limits_0^{1} x\sqrt{1-x^2} dx$. **. 14**. $\int\limits_0^{1} x^2 e^x dx$**..**  **15**. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x dx$. .

**16**. $\int\limits_1^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx$..  **17**. $\int\limits_0^{\pi/4} x\sin x dx$.  **18**.. $\int\limits_0^{2} \sqrt{4-x^2} dx$

**19.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 9x\cos 3x dx$. **20**. $\int\limits_0^{1} \sqrt{1-x^2} dx$**..**  **21**. $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x}$. .

**22**. $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{ctg}^3 x \frac{dx}{\sin^2 x}$..  **23.** $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.  **24**. $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{ctg}^2 x dx$..

**25**. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx$. /// **26.** $\int\limits_0^{\pi/2} x \quad \cos x dx$..  **27**. $\int\limits_1^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx$

**28**. $\int\limits_0^{1} x\sqrt{1-x^2} dx$.  **29**. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x dx$. **30**. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x dx$.

**Завдання 3**

В задачах варіантів 1-30 обчислити площу фігури, яка утворюється вказаними лініями. Накреслити ці лінії, вказати фігури, які вони утворюють.

**1.** $y=3x^2+1$; $y=3x+7$

**2**. $y= 3 - 2x - x^2$; $y= -2x - 1$

**3**. $y=1/2\cdot x^2 - 2x + 2$; $y = x/2 + 4$
**4.** $y=1/4\cdot x^2 - 2x + 4$; $y = x/2$
**5**. $y = 1/3\cdot x^2 - 2x + 3$; $y = x/3 + 1$
**6.** $y=2x - x^2$; $y = x - 3$
**7.** $y = - x^2 + 4x - 1$; $y = - x - 1$
**8**. $y = x^2 - 3x$; $y = -3x + 4$
**9**. $y = x^2 - 6x + 7$; $y = x + 1$
**10**. $y = x^2 - 6x + 10$; $y = x$
**11**. $y = - x^2 + 6x - 5$; $y = x - 5$
**12**. $y = x^2+2$; $y = x + 5$
**13**. $y = x^2 - 6x + 7$; $y = - x +7$
**14**. $y = 1/9\cdot x^2$; $y = 1/3x + 2$
**15**. $y = - x^2 + 6x - 5$; $y = - x + 1$
**16**. $y = x^2 + 2x$; $y = - x + 4$
**17**. $y=x^2 + 6x + 7$; $y = x + 7$
**18**. $y = 1/2\ x^{2;}$ $y = - x + 4$
**19**. $y = - x^2 - 6x - 5$; $y = x + 1$
**20.** $y = x^2 + 4x$; $y = x +4$
**21**. $y = x^2 + 6x + 7$; $y = -x + 1$
**22**. $y=x^{2;}$ $y = -x + 6$
**23**. $y = - x^2 - 6x - 5$; $y = -x - 5$
**24.** $y = 3x^2 + 1$; $y = 3x + 7$
**25**. $y = x^2 - 4x + 1$; $y = x + 1$
**26**. $y=x^2+2x$ $y=-x+4$
**27.** $y=3x^2$ $y=6x$
**28.** $y=2x-x^2$ $y=x-2$
**29.** $y=x^2-5x+6$ $y=x+6$
**30.** $y=x^2-4x+1$ $y=2x+1$

***Завдання 4***

В задачах варіантів 1 - 30 знайти загальні розв`язки диференціальних рівняннь.

**1**. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$; **2.** $y' - 4xy = x$;

**3**. $(x - y)dx - (x + y)dx = 0$; **4**. $y' - y\sin x = e^{\cos x}\sin 2x$;

**5**. $xdy - \sqrt{x^2 + y^2}dx = 0$; **6**. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

**7.** $(x - y)dx + (x + y)dy = b$ **8**. $y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$;

**9**. $y^2dx+(x^2+xy)dy=0$;

**10**. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;

**11**. $(x^2-xy-y^2)dx+y^2dy=0$;

**12**. $xy'-3y=x^4e^x$ ;

**13**. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$;

**14**. $xy'+2y=\frac{1}{x}$;

**15.** $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$;

**16**. $xy'+y=\frac{2x}{1+x^2}$;

**17**. $(y+\sqrt{xy})dy=xdx$;

**18**. $y'\cos x-2y\sin x=2$;

**19**. $x(y+2x)dx-(2x^2-y^2)dy=0$;

**20**. $y'\cos x+y\sin x=1$;

**21**. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ ;

**22**. $5y^2dx-(5xy-yx)dy=0$;

**23**. $y'\cos x+y\sin x=2x\cos^2 x$;

**24**. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$;

**25**. $xy'-2y=2x^4$;

**26.** $(x^2+1)y'+4xy=3$;

**27**. $xy'-2y=2x^4$

**28**. $xy'+y+xe^{-x^2}=0$

**29**. $xy'-y=x^2$

**30.** $xy'+y=\sin x$

***Завдання 5***

В задачах варіантів 1 - 30 знайти частинні розв`язки диференціальних рівнянь, які задовільняють початковим умовам

**1.** $y''+4y'=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=2$

**2.** $y''-7y=0$; $y(0)=1$; $y'(1)=4$

**3**. $y''+2y'+y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=5$

**4.** $y''-3y'+2y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**5**. $y''-10y'+25y=0$; $y(0)-1$; $y'(0)=2$

**6**. $y''-5y'+4y=0$; $y(0)=5$ $y'(0)=87$

**7**. $y''+3y'+2y=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$

**8**. $y''+2y'=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=0$

**9**. $y''+3y'=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=3$

**10**. $y''-3y'=0$; $y(0)=2$; $y'(0)=3$

**11**. $y''-7y'+12y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$

**12.** $3y''+2y'-8y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**13** $4y''-17y'-15y=0$,
$y(0)=0$; $y'(0)=0$

**14.** $y''-30y'+225y=0$; $y(0)=1$;

**16**. $y''-2y'+5y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**17**. $y''+2y'-15y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$

**18**. $y''+y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$

**19**. $y''-4y'-5y=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=5$

**20.** $10y''-3y'-y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**21.** $y''+y'-2y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**22**. $y''-10y'+16y=0$; $y(0)=2$; $y'(0)=2$

**23.** $y''-8y'+16y=0$; $y(0)=2$; $y'(0)=e^4$

**24**. $y''-2y'+5y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**25**. $y''-16y'+48y=0$; $y(0)=3$; $y'(0)=1$

**26**. $y''-3y'-4y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**27.** $2y''-13y'-7y=0$; $y(0)=1$;
$y'(0)=e^{14}$

**28**. $y''-5y'+6y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

**29**. $y''-9y'-22y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$

$y'(0)=2$

**15.** $y''-4y'+4y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$

**30.** $y''+4y'-32y=0$; $y(0)=8$; $y'(0)=-4$

### *Завдання 6*

**.** В задачах варіантів 1 - 30, дослідити на збіжність числові ряди.

**1.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n-1}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{3^n}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{3n^2}$

**4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n-4}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{4^n}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$

**7.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n-5}$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10n}$ **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n+1}$

**10.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-3)}{n^2+1}$ **11.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$

**13.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$

**16.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2n)!}$ **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{3n+1}\right)^n$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$

**19.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{2^{2n+1}}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}$ **21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-5}$

**22.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **23.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

**25** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$ **26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$ **27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+8}$

**28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ **29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{6^n}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$

### *Завдання 7*

В задачах варіантів 1 - 30 знайти радіус і інтервал збіжності заданого степеневого ряду, при цьому з’’ясувати питання про його збіжність на кінцях інтервалу.

**1.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)!}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 9^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt[3]{n}}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n(\sqrt{n}+1)}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{4^n(3n+1)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot\ln n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n(n+1)}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{6^n\sqrt{n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3n+5}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\cdot 3^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{2n}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(1+4n)^n}}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{(+4n)^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{n!}$ 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n(n-1)}$ 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{3^n(n+1)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n^3}$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^n}{2n+1}$ 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2x}}{3^n(n+1)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^n}{2n+1}$ 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+3)}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot\sqrt{2n-1}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot n!}{(n+1)}$ 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n\cdot x^n}{4^n\cdot\sqrt{n}}$

**Теорія ймовірностей та математична статистика**

***Завдання 8***

**1**. Кинуто два кубики. Знайти ймовірність наступних подій: *а*) сума очок, які випали, дорівнює вісім, а різниця – чотири;

*б*) сума очок, які випали, рівна п’яти, а добуток – дорівнює чотирьом.

**2**. В групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. По списку випадково відібрали 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів 5 відмінників.

**3**. З повної колоди карт (52 карти) навмання витягають одразу три карти. Знайдіть ймовірність того, що цими картами будуть: трійка, сімка, туз.

**4**. На шахівницю з 64 клітинок ставлять навмання дві тури – білу і чорну. З якою ймовірністю вони не будуть „бити” одна одну?

**5**. Для деякої місцевості середнє число похмурих днів в липні дорівнює шість. Знайти імовірність того, що першого і другого липня буде ясна погода.

**6**. В урні – 3 білих і 7 чорних куль. Яка імовірність того, що вийняті навмання дві кулі виявляться:

*а*) чорними;

*б*) одна біла і одна чорна.

**7**. Дитина бавиться з чотирма буквами розрізної абетки *А, А, М, М*. Яка імовірність того, що при випадковому розташуванні букв у ряд вона одержить слово „МАМА”.

**8**. Студент знає 20 з 25 питань програми. Знайти імовірність того, що студент знає запропоновані екзаменатором три питання.

**9**. Імовірність того, що при одному вимірюванні деякої фізичної величини буде допущено помилку, яка перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Проведено три незалежні вимірювання. Знайти імовірність того, що тільки в одному з них допущена помилка перевищить задану точність.

**10**. Кондитерська виробляє 7 видів тістечок. Покупець вибив чек на чотири тістечка. Якщо любий замовлений набір тістечок рівноймовірний. Обчислити ймовірність того, що покупець замовив:

*а*) тістечка одного виду; *б*) тістечка різних видів.

**11**. У вазі лежать 10 яблук та 6 груш. Навмання беруть 4 одиниці фруктів. Знайти ймовірність того, що хоча б одно із взятих фруктів – яблуко.

**12**. Достатньою умовою заліку є відповідь на один з двох питань, які задає викладач студенту. Студент не знає відповіді на 8 питань з 40 питань програми. Яка ймовірність здачі заліку?

**13**. З урни в якій лежать 15 білих та 8 чорних куль взяли навмання 6 куль. Яка ймовірність того, що серед вийняти куль буде:

*а*) 4 білих кулі; *б*) менше 3-х чорних куль?

**14**. З урни в якій – 3 білих та 7 чорних куль взяли навмання дві кулі. Яка ймовірність того, що взяті кулі:

*а*) біла і чорна; *б)*обидві чорні?

**15**. Мисливець стріляє 3 рази по цілі, яка віддаляється. Ймовірність влучення в ціль 0,8, яка зменшується після кожного пострілу на 0,1. Знайти ймовірність того що: *а*) промахнеться всі три рази;*б*) попаде хоча б один раз;

**16**. Із п’яти карток з літерами *А, Б, В, Г, Д* навмання одна за однією вибираються три і розташовуються у ряд у тому порядку, як їх вибирали. Яка ймовірність того, що утвориться слово „ДВА”?

**17**. При наборі телефонного номеру абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам’ятаючи тільки, що ці цифри непарні і різні. Знайти ймовірність того, що номер набрано правильно.

**18**. Серед 25 екзаменаційних білетів 5 „гарних”. Два студента по черзі беруть по одному білету. Знайти ймовірність того, що: *а*) перший студент взяв „гарний” білет; *б*) обоє студенти взяли „гарні” білети.

**19**. З партії, що мітить зовнішнє однакових 10 ящиків взуття білого кольору і 15 ящиків взуття чорного кольору, вибирають навмання 10 ящиків. Знайти ймовірність того, що серед відібраних ящиків буде: *а*) 5 ящиків взуття білого кольору;*б*) всі 10 ящиків мають взуття одного кольору.

**20**. В читальному залі є 6 підручників по теорії ймовірності, з яких 3 в палітурці. Студент навмання бере 2 підручники. Знайти ймовірність того, що: *а*) обидва підручники будуть в палітурці; *б*) один в палітурці.

**21**. У шухляді 10 красних та 6 синіх ґудзиків. Навмання дістали два ґудзика. Яка ймовірність того, що вийняті ґудзики будуть одного кольору?

**22**. Після бурі на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної лінії (мережі) відбувся обрив проводу. Яка ймовірність того, розрив відбувся між 50-м і 55-м кілометрами лінії (мережі)?

**23**. У ящику 10 виробів, з яких 4 браковані. Робітник навмання взяв три вироби. Знайти ймовірність того, що хоча б один із взятих виробів бракований.

**24**. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що2 взятих навмання білетів будуть виграшними.

**25**. У партії з 50 виробів – 5 бракованих. З партії вибирають навмання 6 виробів. Визначити ймовірність того, що серед цих 6 виробів 2 виявлять ся бракованими.

**26**. Із повного набору 28 костей доміно навмання взяли кість. Знайти ймовірність того, що другу навмання взяту можна приставити до першої, якщо перша кість: *а*) є дублем; *б*) не є дублем.

**27**. У ящику лежать 90 годних і 10 бракованих виробів. Зборщик послідовно без повернення дістає 10 виробів. Знайти ймовірність того, що серед взятих виробів:

*а*) немає бракованих;

*б*) хоча б один виріб бракований.

**28.** Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі для даного стрільця становить 0,4. Знайти найімовірніше число влучень в ціль при десяти пострілах та відповідну цьому числу ймовірність.

**29**. У ящику 10 виробів, з яких 3 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед 2 взятих навмання виборів, єсть хоча б одна бракована.

**30**. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілу першим стрілком дорівнює 0,8, а другим стрілком – 0,6. Знайти ймовірність того, що в ціль попаде тільки один стрілок.

### *Завдання 9*

**1**. Студент знає не всі екзаменаційні квитки. У якому випадку ймовірність витягти невідомий квиток буде для нього найменшої, коли він тягне квиток першим чи останнім?

**2**. Припустимо, що 5% усіх чоловіків і 0,25% усіх жінок дальтоніки. Навмання обрана особа страждає дальтонізмом. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що чоловіків і жінок однакова кількість).

**3**. Два стрільці незалежно один від іншого стріляють по одній мішені, роблячи кожний по одному пострілу. Імовірність влучання в мішень для першого стрільця 0,8, для другого 0,4. Після залпу в мішені виявлена одна пробоїна. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець.

**4**. На фабриці, що виготовляє болти, перша машина робить 25%, друга – 35%, третя –40% усіх виробів. У їхній продукції брак складає відповідно 5, 4 і 2%.

*а*) Яка ймовірність того, що випадково обраний болт бракований *б*) Випадково обраний із продукції болт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він був зроблений першою машиною?

**5**. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою, відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовив перший і другий елемент, якщо ймовірність відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнює 0,2; 0,4; 0,3.

**6**. Маємо два набору виробів. Ймовірність того, що виріб першого набору стандартний дорівнює 0,8, а другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб (з навмання взятого набору) – стандартний.

**7**. У першій шафі 20 радіоламп. З них 18 стандартних; у другій – 10 ламп, з них 9 стандартних. Із другої шафи навмання взяли лампу і переклали у першу. Знайти ймовірність того, що навмання взята лампа з першої шафи буде стандартною.

**8**. У двох ящиках лежать радіолампи. У першому – 12 ламп, з яких 1 нестандартна; у другому 10 ламп, з яких 2 нестандартні. З першого ящика навмання дістають лампу і перекладають у другий. Знайти ймовірність того, що навмання взята із другого ящика лампа буде нестандартною.

**9**. В двох урнах знаходяться відповідно 8 і 10 куль, з них білих куль 5 і 3. З першої урни переклали в другу урну одну кулю, колір якої невідомий. після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

**10**. До магазину надходять вироби з двох заводів, причому з першого заводу надходять у 2 разів більше виробів, ніж з другого. Перший завод випускає у середньому 0,5% бракованої продукції, другий 0,2%. Куплений у магазині виріб виявляється бракованим (подія $A$). Яка ймовірність того, що він був випущений першим заводом?

**11**. Відомо, що 6% чоловіків і 0,36% всіх жінок дальтоніки. Навмання обрана особа – дальтонік. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що чоловіків і жінок однакова кількість).

**12**. В піраміді 5 гвинтівок, три з яких мають оптичний приціл. Ймовірність того, стрілок попаде в ціль при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що ціль буде уражена, якщо стрілок зробив один постріл з навмання взятої гвинтівки.

**13**. Нехай в урну з 7 кульками білого та 2 кульками чорного кольору, однаковими в усьому іншому, вкинули таку ж кульку. Після цього навмання вийняли одну кульку. Яка ймовірність, що ця кулька білого кольору?

**14**. В одній урні є 4 білих і 6 чорних кульок, а в другій – 2 білих і 8 чорних кульок. Ймовірність тягнути кульку з урни є однаковою для обох урн. З якоїсь урни витягли кульку і вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що кульку тягнули з другої урни.

**15**. Два автомати виробляють однакові деталі, що надходять на спільний контейнер. Продуктивність першого автомата удвічі більше ніж у другого. Перший автомат виробляє 60% 1-го ґатунку, другий – 84%. Деталь, що навмання вибрана з конвеєра, виявилася 1-го ґатунку. Знайти ймовірність того, що вона вироблена 1-м автоматом.

**16**. В урні лежить кулька невідомого кольору – з рівною ймовірністю біла чи чорна. В урну опускають одну білу кульку , після ретельного перемішування навмання дістали одну кульку. Вона виявилася білою. Яка ймовірність того, що в урні залишилася біла кулька?

**17** Студентам, які їдуть на практику, виділили 15 місць в Євпаторіїї,10 – у Геніческу, 5 – в Алушті. Яка ймовірність того, що три визначених студента А, Б, С попадуть на практику в одне й теж місто.

**18**. В кожній з двох урн лежать по 6 чорних та 4 білих кульок. З першої урни переклали в другу урну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

**19**. При поміщенні в урну ретельно перемішаних 9 куль (7 чорних і 2 білих) одна куля невідомого кольору загубилася. З решти (8 куль) навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою?

**20**. Припустимо, що для однієї торпеди ймовірність потопити корабель дорівнює $1/2$. Яка ймовірність того, що 4 торпеди потоплять корабель, якщо для затоплення корабля досить одного влучення торпеди?

**21**. Маємо дві урни: в першій 3 білих кульки і 2 чорні, а в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої урни у другу переклали, не дивлячись, дві кульки. Після цього з другої урни взяли одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька буде білою.

**22**. Число вантажівок, які їдуть по шосе, де стоїть бензоколонка відносяться до числа легкових машин як 3:2. Ймовірність того, що буде заправляться вантажівка дорівнює 0,1; легкова машина – 0,2. До бензоколонки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

**23**. 9 пасажирів розсаджують в трьох вагонах. Знайти ймовірність того, що: *а*) в кожному вагоні опиниться по три пасажири; *б*) в один вагон сядуть четверо, в другий – троє, і в третій – двоє пасажирів.

**24**. З колоди карт (52 карти) навмання береться 6 карт. Знайти ймовірність того, що серед цих карт будуть представники всіх чотирьох мастей.

**25**. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі для даного стрільця становить 0,4. Знайти найімовірніше число влучень в ціль при десяти пострілах та відповідну цьому числу ймовірність.

**26**. Схожість насіння певного сорту рослин оцінюються ймовірністю 0,8. Яку кількість насіння треба посіяти, щоб найімовірніше число сходів становило 20?

**27**. У шафі знаходяться 10 пар черевиків різних сортів. З них навмання вибирають 4 черевики. Знайти імовірність того, що серед вибраних черевиків відсутні парні.

**28**. Оптова база обслуговує 8 крамниць. Щодня заявки на товари можуть поступати з ймовірністю 0,6. Знайти найімовірніше число заявок на день і відповідну ймовірність.

**29**. При перевірці ґатунку зерен пшениці було виявлено, що всі зерна можуть бути поділені на 4 групи. До зерен першої групи належать 96%, до другої – 2%, до третьої – 1% і до четвертої – 1% усіх зерен. Ймовірність того, що із зерна виростить колосок який містить не менше 50 зерен, для зерен першої групи – 0,2, для зерен другої групи – 0,2, для зерен третьої групи – 0,18 і для зерен четвертої групи – 0,02. Визначити імовірність того, що із взятого навмання зерна виросте колосок, який містить не менше 50 зерен.

**30**. Знайти ймовірність того, що подія $A$ настане 70 раз в 300 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному досліді дорівнює 0,3.

### *Завдання 10*

Серед $N$ виробів знаходяться $M$ бракованих. Навмання беруть $n$ виробів. Нехай $X$ – число появ бракованих виробів. Знайти :*а*) закон розподілу дискретної випадкової величини $X$, побудувати графік; *б*) математичне сподівання $M(X)$; *в*) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(-2X)$.

### *Завдання 11*

Випадкова величина $X$ має функцію розподілу

$$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le a \\ \dfrac{(x-c)^2}{k} & \text{при } a < x \le b \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Знайти: *а*) щільність розподілу $f(x)$ і побудувати графік; *б*) ймовірність попадання в проміжок $(\alpha;\beta)$, *в*)математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

### *Завдання 12*

Відомі математичне сподівання $a$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma$ нормально розподіленої випадкової величини X.Знайти: *а)* ймовірність того, що X набуває значення з інтервалу $\alpha,\beta)$ ;*в*) ймовірність того, що відхилення$|X-a|$ буде менше $\delta$ .

### *Завдання 13*

Щільність розподілу ймовірності випадкової величини $X$ дорівнює

$$f(X)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a < x \le b \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

*а*) знайти функцію розподілу та побудувати її графік;

*в*) обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

***Завдання 14***

Задані середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини $X$, вибіркова середня $\overline{X}$ , об'єм вибірки $n$ . Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання $a$ з заданою надійністю $\gamma = 0{,}95$.

**ТАБЛИЦІ ДАНИХ ДО ЗАДАЧ**

Таблиця до задачі № **10**

| **Вар.** | $N$ | $M$ | $n$ | **Вар.** | $N$ | $M$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **16.** | 28 | 9 | 2 |
| **1.** | 25 | 6 | 3 | **17.** | 25 | 8 | 3 |
| **2.** | 20 | 7 | 4 | **18.** | 24 | 7 | 4 |
| **3.** | 22 | 4 | 3 | **19.** | 22 | 6 | 3 |
| **4.** | 18 | 6 | 5 | **20.** | 23 | 7 | 2 |
| **5.** | 15 | 4 | 2 | **21.** | 18 | 5 | 4 |
| **6.** | 21 | 5 | 3 | **22.** | 15 | 7 | 5 |
| **7.** | 23 | 6 | 4 | **23.** | 16 | 5 | 3 |
| **8.** | 19 | 5 | 4 | **24.** | 20 | 7 | 4 |
| **9.** | 17 | 7 | 2 | **25.** | 19 | 8 | 5 |
| **10.** | 20 | 8 | 5 | **26.** | 22 | 5 | 3 |
| **11.** | 18 | 7 | 4 | **27.** | 18 | 6 | 3 |
| **12.** | 15 | 5 | 3 | **28.** | 17 | 8 | 3 |
| **13.** | 25 | 7 | 4 | **29.** | 21 | 6 | 4 |
| **14.** | 26 | 8 | 3 | **30.** | 23 | 8 | 3 |
| **15.** | 27 | 10 | 4 | | | | |

Таблиця до задачі № 1**1.**

| **Вар.** | $a$ | $b$ | $c$ | $k$ | $\alpha$ | $\beta$ | **Вар.** | $a$ | $b$ | $c$ | $k$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3.5 | **16.** | 2 | 5 | 2 | 9 | 3 | 5 |
| **2.** | –3 | 0 | –3 | 9 | –2 | 1 | **17.** | 4 | 8 | 4 | 16 | 1 | 5 |
| **3.** | 1 | 2 | 1 | 1 | 1.5 | 2 | **18.** | 6 | 8 | 6 | 4 | 5 | 7 |
| **4.** | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | **19.** | –1 | 0 | –1 | 1 | –2 | 0 |
| **5.** | 1 | 3 | 1 | 4 | 0 | 2 | **20.** | –3 | 1 | –3 | 16 | 0 | 1 |
| **6.** | 0 | 4 | 0 | 16 | 1 | 3 | **21.** | 0 | 3 | 0 | 9 | 2 | 5 |
| **7.** | –1 | 2 | –1 | 9 | 0 | 4 | **22.** | –2 | 2 | –2 | 16 | 1 | 4 |
| **8.** | –2 | 0 | –2 | 4 | –1 | 1 | **23.** | –4 | 0 | –4 | 16 | –1 | 4 |
| **9.** | 4 | 7 | 4 | 9 | 3 | 6 | **24.** | –1 | 1 | –1 | 4 | 0 | 3 |
| **10.** | –2 | 3 | –2 | 25 | 0 | 5 | **25.** | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 6 |
| **11.** | 3 | 5 | 3 | 4 | 2 | 4 | **26.** | 3 | 4 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| **12.** | –4 | –1 | –4 | 9 | –2 | 3 | **27.** | 5 | 10 | 5 | 25 | 8 | 9 |
| **13.** | 0 | 6 | 3 | 9 | –1 | 1 | **28.** | –5 | –2 | –5 | 9 | –2 | 0 |
| **14.** | 1 | 5 | 1 | 16 | 3 | 6 | **29.** | –2 | 1 | –2 | 9 | 0 | 3 |
| **15.** | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 | 6 | **30.** | –1 | 4 | –1 | 25 | 1 | 2 |

Таблиця до задачі №

**12.**

| **Вар.** | $a$ | $\sigma$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\sigma$ | **Вар.** | $a$ | $\sigma$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | 6 | 2 | 4 | 8 | 2 | **16.** | 6 | 3 | 2 | 11 | 6 |
| **2.** | 15 | 2 | 9 | 19 | 3 | **17.** | 5 | 1 | 1 | 12 | 3 |
| **3.** | 14 | 4 | 10 | 20 | 4 | **18.** | 4 | 5 | 2 | 11 | 10 |
| **4.** | 13 | 4 | 11 | 21 | 8 | **19.** | 3 | 2 | 3 | 10 | 4 |
| **5.** | 12 | 5 | 12 | 22 | 10 | **20.** | 2 | 5 | 4 | 9 | 10 |
| **6.** | 11 | 4 | 13 | 23 | 6 | **21.** | 2 | 4 | 5 | 10 | 9 |
| **7.** | 10 | 8 | 14 | 18 | 2 | **22.** | 5 | 2 | 6 | 12 | 5 |
| **8.** | 9 | 3 | 9 | 18 | 6 | **23.** | 8 | 3 | 9 | 16 | 6 |
| **9.** | 8 | 4 | 8 | 12 | 8 | **24.** | 10 | 6 | 12 | 20 | 12 |
| **10.** | 7 | 2 | 6 | 10 | 4 | **25.** | 12 | 6 | 8 | 16 | 12 |
| **11.** | 6 | 2 | 4 | 12 | 4 | **26.** | 6 | 3 | 5 | 13 | 6 |
| **12.** | 10 | 4 | 2 | 13 | 3 | **27.** | 7 | 3 | 6 | 15 | 7 |
| **13.** | 9 | 5 | 5 | 14 | 10 | **28.** | 9 | 5 | 4 | 12 | 10 |
| **14.** | 8 | 1 | 4 | 9 | 3 | **29.** | 11 | 4 | 12 | 22 | 8 |
| **15.** | 7 | 2 | 3 | 10 | 5 | **30.** | 13 | 5 | 12 | 20 | 10 |

Таблиця до задачі №
**13**.

| **Вар.** | $a$ | $b$ | **Вар.** | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | 2 | 5 | **16.** | 4 | 8 |
| **2.** | 1 | 4 | **17.** | 4 | 7 |
| **3.** | 5 | 8 | **18.** | 5 | 8 |
| **4.** | 6 | 9 | **19.** | 5 | 15 |
| **5.** | 1 | 2 | **20.** | 3 | 5 |
| **6.** | 2 | 6 | **21.** | 2 | 6 |
| **7.** | –2 | 4 | **22.** | –1 | 2 |
| **8.** | 3 | 8 | **23.** | 1 | 6 |
| **9.** | 2 | 5 | **24.** | 2 | 4 |
| **10.** | 3 | 6 | **25.** | 2 | 5 |
| **11.** | 3 | 7 | **26.** | 3 | 8 |
| **12.** | 6 | 8 | **27.** | –2 | 3 |
| **13.** | –2 | 2 | **28.** | 0 | 5 |
| **14.** | 0 | 4 | **29.** | –1 | 1 |
| **15.** | 6 | 10 | **30.** | –1 | 0 |

Таблиця до задачі №**14.**

| Вар. | $\sigma$ | $\overline{X}$ | $n$ | Вар. | $\sigma$ | $\overline{X}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | 10 | 18,21 | 225 | **16.** | 4 | 19,51 | 169 |
| **2.** | 9 | 18,31 | 49 | **17.** | 2 | 19,61 | 36 |
| **3.** | 8 | 18,41 | 36 | **18.** | 6 | 19,71 | 81 |
| **4.** | 7 | 18,51 | 100 | **19.** | 3 | 19,81 | 64 |
| **5.** | 6 | 18,61 | 81 | **20.** | 1 | 20,21 | 100 |
| **6.** | 5 | 18,71 | 25 | **21.** | 9 | 20,31 | 169 |
| **7.** | 4 | 18,81 | 256 | **22.** | 7 | 20,41 | 196 |
| **8.** | 3 | 18,91 | 49 | **23.** | 6 | 20,51 | 324 |
| **9.** | 2 | 20,01 | 36 | **24.** | 8 | 20,61 | 100 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10.** | 1 | 20,11 | 64 | **25.** | 5 | 20,71 | 64 |
| **11.** | 3 | 19,11 | 121 | **26.** | 7 | 20,81 | 100 |
| **12.** | 5 | 18,91 | 144 | **27.** | 8 | 20,91 | 81 |
| **13.** | 7 | 19,21 | 81 | **28.** | 6 | 12,2 | 36 |
| **14.** | 9 | 19,31 | 49 | **29.** | 5 | 11,0 | 100 |
| **15.** | 8 | 19,41 | 289 | **30.** | 10 | 15,91 | 100 |

## 12. Приклади розв'язання типового варіанту

Інтегральне числення.

**Приклад**: Обчислити невизначені інтеграли: *а)* $\int\left(x^3-3x^2+5x-4\right)dx$;

*б)* $\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[6]{x^5}}\right)dx$; *в)* $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$; *г)* $\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2dx$;

**Розв'язання ►** Застосовуючи властивості невизначеного інтеграла та таблицю інтегралів знаходимо

*а)* $=\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-4x+C=\frac{x^4}{4}-x^3+5\frac{x^2}{2}-4x+C$;

*б)* $\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[6]{x^5}}\right)dx=\int x^{-\frac{1}{5}}dx+\int x^{-3}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{5}{6}}dx=$

$$=\frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+\frac{x^{-2}}{-2}+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-3\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}}+C=\frac{5}{4}\sqrt[5]{x4}-\frac{1}{2x^2}+4\sqrt{x}-18\sqrt[6]{x}+C;$$

*в)* $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx\int\frac{1+2\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+2\int dx+\int\sqrt{x}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int dx+$

$$+\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+2x+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=2\sqrt{x}+2x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C;$$

*г)* $\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(1+\sin x\right)dx=$

$=\int dx+\int\sin xdx=x-\cos x+C$;

**Приклад**. Обчислити $\int\frac{x^3+x}{(x^4+2x^2+5)^3}dx$

При обчисленні інтегралу $J=\int\frac{x^3+x}{(x^4+2x^2+5)^3}dx$ помічаємо, що $d(x^4+2x^2+5)=(4x^3+4x)dx$. Тоді

$$J=\frac{1}{4}\int\frac{(4x^3+4x)dx}{(x^4+2x^2+5)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^4+2x^2+5)}{(x^4+2x^2+5)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{8}\frac{1}{t^2+C}=C-\frac{1}{8(x^4+2x^2+5)^2}$$

**Приклад** . Використовуючи відповідні заміни змінних, знайти інтеграли:

1) $\int\sqrt{2x-3}dx$; 2) $\int\cos(3x+2)dx$; 3) $\int\frac{2x+5}{x^2+5x+3}dx$;

►1) $\int\sqrt{2x-3}dx$.

Нехай $2x-3=t$, звідси $2dx=dt$, $dx=\frac{dt}{2}$. Роблячи підстановку отримаємо

$$\int\sqrt{2x-3}dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-3)^3}+C;$$

2) $$\int\cos(3x+2)dx=\left|\begin{array}{l}t=3x+2\\ dt=3dx\\ dx=\frac{dt}{3}\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\cos t dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C;$$

3) $$\int\frac{2x+5}{x^2+5x+3}dx=\left|\begin{array}{l}t=x^2+5x+3\\ dt=(2x+5)dx\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x^2+5x+3\right|+C;$$

Висновок: якщо чисельник підінтегрального дробу співпадає з точністю до постійного множника з диференціалом знаменника, то інтеграл дорівнює логарифму модуля знаменника.

**Приклад** . Інтегруванням частинами знайти інтеграли:

*а*) $\int x^3\ln x dx$; *б*) $\int\arccos x dx$; *в*) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

► Інтеграли знаходять з використанням формули інтегрування частинами

$\int u dv=uv-\int v du$, причому $v=\int dv$.

*а*) $$\int x^3\ln x dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x;\ du=\frac{dx}{x}\\ dv=x^3dx;\ v=\frac{x^4}{4}\end{array}\right|=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^4}{4x}dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C;$$

$$\text{б) } \int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x;\ du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx;\ \ v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-x^2} \\ dt = -\dfrac{2xdx}{2\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = x \arccos x - \int dt = x \arccos x - t + C = x \arccos - \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x;\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x +$$

$$+ \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C;$$

**Приклад** . Обчислити інтеграли

$$\text{а) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}; \qquad \text{б) } \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx; \qquad \text{в) } \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx; \quad \text{г) } \int_0^1 xe^{-x} dx.$$

►Розв’язання:$а) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.Застосуємо формулу Ньютона-Лейбниця

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int f(x)dx\Big|_a^b . \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = tg\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1;$$

б)$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.Застосовуємо метод заміни змінної, де $t = 1 + \ln x$; $dt = \frac{dx}{x}$, причому $x$ приймає значення на відрізку $[1, e]$, тоді $t$ змінюється на проміжку $[1,2]$.

Отже, $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \int_1^2 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$

*в*) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ x=0;\;\; t=0 \\ x=2;\;\; t=\dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$

*г*) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$. Застосовуємо формулу інтегрування частинами

$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{l} u=x;\quad du=dx \\ dv=e^{-x}dx;\; v=-e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 =$

$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \dfrac{2}{e}$;

**Приклад** . Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

*а*) $\begin{array}{l} y = 2 - x^2; \\ y = x; \end{array}$ ► *а*) Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ y = x; \end{cases} \Rightarrow x = 2 - x^2;\;\; x^2 + x - 2 = 0;\;\; x_1 = -2;\;\; x_2 = 1.$$

Отже, межі інтегрування $x_1 = -2$ та $x_2 = 1$.

Площу даної фігури обчислимо за формулою

$S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$ .Отже $S = \int\limits_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx = \left[2x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \dfrac{9}{2}$;

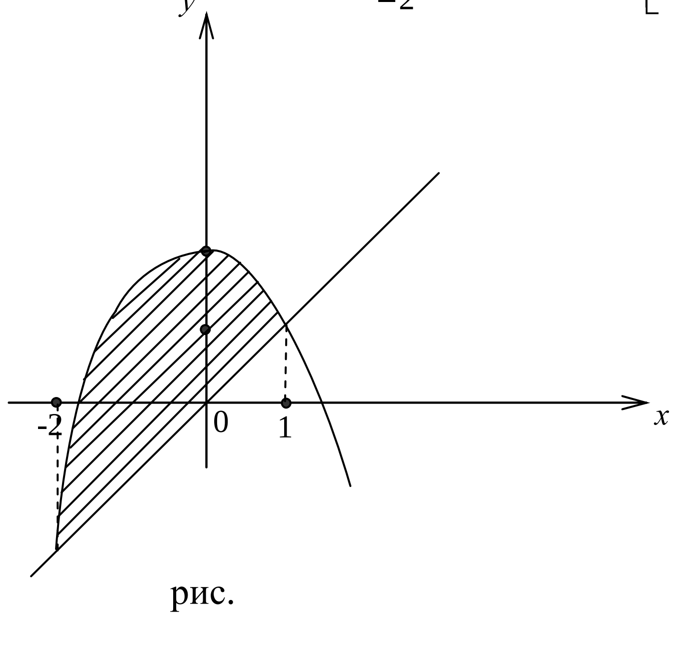



рис.

## Диференціальні рівняння

**Приклади** Зінтегрувати диференціальні рівняння. У випадках, де задано початкові умови, знайти частинні інтеграли .

*а*) $y\left(1+x^2\right)dy = x(1-y)^2\,dx$; *б*) $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0$.;

*в*) $y' - ytgx = \cos x$.

► *а*) $y\left(1+x^2\right)dy = x(1-y)^2\,dx$.

Задане рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Обидві частини його поділимо на $\left(1+x^2\right)\left(1-y^2\right) \neq 0$ та достанемо рівняння з відокремленими змінними: $\frac{ydy}{1-y^2} = \frac{xdx}{1+x^2}$. Інтегруючи обидві частини рівняння, отримаємо

$$\int\frac{ydy}{1-y^2} = \int\frac{xdx}{1+x^2},-\frac{1}{2}\int\frac{-2ydy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2};-\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| + \frac{1}{2}\ln|C| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

Відмітимо, що сталу *C* краще записати як $\frac{1}{2}\ln|C|$. Потенціюючи, дістанемо загальний інтервал заданого рівняння: $\left(1+x^2\right)\left(1-y^2\right) = C$;

*б*) Задане рівняння є однорідним. Покладемо: $y = tx; t = \frac{y}{x}$, $y' = t'x + t$.

Поділивши обидві частини рівняння на $x$ та роблячи підстановку, маємо

$$y' + \cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x} + 1 = 0;\ t'x + t + \cos t - t + 1 = 0;\ t'x = -(1+\cos t);\ x\frac{dt}{dx} = -(1+\cos t).$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо:

$$\frac{dt}{1+\cos t} = -\frac{dx}{x};\ \frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}} = -\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, маємо

$$\int\frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}} = -\int\frac{dx}{x};\ \ tg\frac{t}{2} = -\ln|x| + \ln|C|.$$

Повертаючись до старої змінної *y*, отримаємо

$$tg\frac{y}{2x} = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,\text{ або } e^{tg\frac{y}{2x}} = \frac{C}{x}.$$

*в*) $y' - ytgx = \cos x$.

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку вигляду $y' + p(x)y = q(x)$,

де $p(x) = -tgx$; $q(x) = \cos x$ .Загальний розв’язок рівняння шукаємо у вигляді

$y = uv$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$, тоді $y' = u'v + uv$. Підставляючи у задане рівняння отримаємо $u'v + uv' - uvtgx = \cos x$, $u'v + u(v' - vtgx) = \cos x$.

Знаходимо частинний розв'язок рівняння $v' - vtgx = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = vtgx$;

$\dfrac{dv}{v} = tgxdx$.

Інтегруючи, маємо

$\int \dfrac{dv}{v} = \int tgxdx$; $\ln|v| = -\ln|\cos x|$, звідки $v = \dfrac{1}{\cos x}$. Тоді маємо $\dfrac{1}{\cos x}u' = \cos x$,

або $\dfrac{du}{dx} = \cos^2 x$, $du = \cos^2 xdx$, $\int du = \int \dfrac{1 + \cos 2x}{2}dx$, $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = \frac{2x + \sin 2x + 4C}{4\cos x}.$$

**Ряди**

**Приклад.** Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$$

► Загальний член ряду має вигляд $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності ряду

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0,$$

тобто загальний член ряду $u_n$ до нуля не прямує і заданий ряд є розбіжним. ◄

**Приклад** . Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи ознаки порівняння.

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + n + 3}$; $\quad$ $б)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n5^n}$; $\quad$ $в)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n - 1}$.

► $a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + n + 3}$.

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, який є узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ при $p = 2 > 1$ і є збіжним. Враховуємо, що $\dfrac{1}{n^2 + n + 3} < \dfrac{1}{n^2}$.

Тоді згідно з першою ознакою порівняння маємо, що заданий ряд збігається.

► $б)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n5^n}$.

Порівняємо цей ряд з рядом, складеним з членів нескінченно спадної геометричної прогресії $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, який є збіжним, бо $q = \frac{1}{5} < 1$ .

Враховуючи, що $\frac{1}{n5^n} \le \frac{1}{5^n}$, робимо висновок, що згідно з першою ознакою порівняння заданий ряд збігається. ◄

►*в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним.

Врахуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$,

тобто існує скінчена і відмінна від нуля границя частки. Отже, згідно з другою ознакою порівняння заданий ряд є розбіжним. ◄

**Приклад** . Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи ознаку Даламбера

*а*) $\sum \frac{n^2}{2^n}$;  *б*) $\sum \frac{n^n}{n!}$.

► *а*) $\sum \frac{n^2}{2^n}$. Маємо $u_n = \frac{n^2}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, $l = \frac{1}{2} < 1$, то за ознакою Даламбера ряд збігається. ◄

►*б*) $\sum \frac{n^n}{n!}$. Маємо $u_n = \frac{n^n}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n (n+1)} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$, тобто $l = e > 1$, ряд є розбіжним. ◄

**Приклад** . Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи радикальну ознаку Коши.

*а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\sin^n\frac{1}{2^n}$.

► *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$,

тобто $p=0<1$, ряд збігається. ◄

►*б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\sin^n\frac{1}{2^n}$. Маємо $u_n=n^n\sin^n\frac{1}{2n}$; $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{n^n\sin^n\frac{1}{2n}}=n\sin\frac{1}{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}<1 \text{ тобто } p=\frac{1}{2}<1,$$

ряд збігається. ◄

**Приклад** . Дослідити на збіжність задані знакопереміжні ряди.

*а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{2n+1}{3n+1}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

► *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{2n+1}{3n+1}$; Заданий ряд є знакопереміжний. Цей ряд є розбіжним, бо не виконується одна з умов ознаки Лейбниця, тобто

1) $\frac{3}{4}>\frac{4}{5}>\frac{5}{6}>\ldots$–виконується; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}\neq 0$ – не виконується.

►*б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.Заданий ряд є знакопереміжний і збігається, бо задовольняє умовам ознаки Лейбниця: 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$.

Ряд, складений з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ є розбіжним, бо є узагальненим гармонічним рядом при $p=\frac{1}{3}<1$.Отже, заданий ряд умовно збіжний. ◄

## Степеневі ряді.

**Приклад** . Визначити область збіжності степеневого ряду

*а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n x^n$;

► *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$. Згідно з ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n^3}{x^n\cdot(n+1)^3}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3=|x|.$$

При $|x|<1$ ряд збігається абсолютно, а при $|x|>1$ розбігається, тобто інтервал збіжності ряду (–1; 1). Дослідимо на збіжність даний ряд на кінцях інтервалу.

При $x=1$ отримуємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Цей ряд збіжний, бо є узагальненим гармонічним при $p=3>1$.

При $x=-1$ отримуємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$. Цей ряд абсолютно збіжний, бо ряд, складений з абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, збіжний.

Отже, область збіжності заданого ряду така: [-1; 1] . ◄

*б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n x^n$ .

►Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot x^{n+1}}{3^n\cdot x^n}\right|=3|x|<1.$$

Отже, ряд збігається при $|x|<\frac{1}{3}$, а при $|x|>\frac{1}{3}$ є розбіжним

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x=\frac{1}{3}$ маємо числовий ряд $1+1+1+...+1+...$. Цей ряд є розбіжним, бо не виконується необхідна ознака збіжності.

При $x=-\frac{1}{3}$ маємо знакопереміжний ряд $-1+1-1+...+,\ (-1)^n+...$ який також є розбіжним, бо не виконуються умови ознаки Лейбниця.

Отже, $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – область збіжності заданого ряду. ◄

**Приклад** . Розкласти в ряд Маклорена функцію:

*а*) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$;

► Ряд Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}+....$$

*а*) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

Скористаємося формулою

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)\frac{x^{n+1}}{n+1}+...$$

Замінивши в цій формулі *x* на ( *–x)*, маємо

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ... - \frac{x^n}{n} - ...$$

Обидва ряди збігаються при $-1 < x \le 1$.

Оскільки $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, отримуємо

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...\right)$$

Отже $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + ...\right)$.

Цей ряд збігається при $-1 < x < 1$.◄

## Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

Розглянемо приклади обчислення ймовірностей на основі класичного означення. Апарат, що при цьому використовується, – основні властивості ймовірностей, основні правила і теореми, формули комбінаторики.

**Задача** .Учасник лотереї „Спортлото” з 49 назв видів спорту (позначених числами від 1 до 49) повинен назвати 6. Повний виграш одержує той, хто вірно вкаже всі шість назв. Виграші одержують і ті, хто вгадав не менш трьох назв. Обчислити ймовірність: *а*) повного виграшу в спортлото; *б*) одержати виграш (відгадати не менше трьох назв ).

**Розв'язання**. Позначимо подію - повного виграшу літерою *А*. Згідно з класичним означенням, ймовірність випадкової події *А* обчислюється за формулою $P(A) = \frac{m}{n}$ де $n$ – загальне число усіх можливих наслідків у даному випробуванні з випадковими наслідками, $m$ – кількість можливих наслідків, що сприяють появі події.

Кожна елементарна подія (набір шість назв) в цьому експерименті визначається комбінацією з 49 елементів по 6. Отже число всіх елементарних подій дорівнює $n = C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983876$.

Знайдемо число $m$ для повного виграшу. Маємо шість назв виграшних видів спорту і треба вірно вказати всі шість назв, тобто $m = C_6^6 = 1$

Шукана ймовірність дорівнює $P(A) = \frac{1}{13983876} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-6}$.

*б*) Позначимо подію „одержати виграш” літерою *В*. Очевидно, що подія *В* наступить, якщо здійсниться одна з несумісних подій.

$B_1$ – вгадано „3” назви;

$B_2$ – вгадано „4” назви;

$B_3$ – вгадано „5” назв виду спорту.

Обчислимо ймовірність виграшу при умові вгадати не менше трьох назв $P(B_1)$. Назвати три види спорту із шести, визначених в тиражі, можна $C_6^3$ способами.

Для назви решти (43 = 49 – 6) є $C_{43}^{3}$ змоги. Тоді згідно з „правилом добутку" кількість способів вгадати три назви $m_1$ : обчислюється так: $m_1 = C_6^3 \cdot C_{43}^3$.

Ймовірність $P(B_1)$ вгадати три назви із шести дорівнює

$$P(B_1) = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6} = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$$

Міркуючи в такий же спосіб, маємо кількість способів вгадати чотири назви видів спорту $m_2 = C_6^4 \cdot C_{43}^2$,

звідси $P(B_2) = \dfrac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6} = \dfrac{6! \cdot 43! \cdot 6! \cdot 43!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 41! \cdot 49!} = 9{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Міркуючи в такий же спосіб, маємо $m_3 = C_6^5 \cdot C_{43}^1$ звідси $P(B_3) = \dfrac{C_6^5 \cdot C_{43}^1}{C_{49}^6} = 1{,}9 \cdot 10^{-5}$.

Згідно з умовою, виграш одержують, назвавши вірно або 3, або 4, або 5 назв. Тепер можна використати теорему додавання ймовірностей, звідси маємо

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0{,}018 + 0{,}00097 + 0{,}000019 = 0{,}018989.$$

**Задача** . На конвеєр надходять деталі з трьох цехів. Перший цех дає в середньому 0,2% браку, другий – 0,3%, третій – 0,5%. Знайти ймовірність попадання на конвеєр бракованої деталі, якщо з першого цеху надійшло 3000, з другого – 6000, з третього – 1000 деталей.

**Розв'язання**. Нехай подія $A$ полягає в тому, що навмання відібрана деталь із тих, що надійшли на конвеєр, є бракованою. Розглянемо події (гіпотези) $H_i(i = 1,2,3)$ про те, з якого цеху надійшла деталь. Очевидно події $H_1, H_2, H_3$ попарно несумісні, а їх ймовірності обчислюються, відповідно, так:

$$P(H_1) = \frac{3000}{10000} = 0{,}3; \quad P(H_2) = \frac{6000}{10000} = 0{,}6, \quad P(H_3) = \frac{1000}{10000} = 0{,}1 \cdot$$

Якщо деталь надійшла з першого цеху, то ймовірність бути бракованою для неї $P_{H_1}(A) = 0{,}2\% = 0{,}002$; аналогічно $P_{H_2}(A) = 0{,}003$; $P_{H_3}(A) = 0{,}005$. Тому, за формулою повної ймовірності, ймовірність попадання на конвеєр бракованої деталі $P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}002 +$

$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}003 + 0{,}1 \cdot 0{,}005 = 0{,}0029$$

.**Задача** .Стріляють по цілі 5 разів. Влучення при окремих пострілах – незалежні події і ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,6. Нехай $X$ – число влучень при 5 пострілах. Знайти:

*а*) найбільш імовірне число влучень;

*б*) закон розподілу випадкової величини $X$;

*в*) математичне сподівання, дисперсію числа влучень та середнє квадратичне відхилення $\sigma(-2x)$.

**Розв'язання.** *а*) У цьому прикладі маємо справу з незалежними випробуваннями, коли ймовірність появи події постійна, тому треба використати схему Бернуллі при $n = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0,6 = 0{,}4$.

Отже, обчислимо, використовуючи співвідношення $np - q \le m_0 < np + p$, де $m_0$ – найбільш імовірне число влучень.

$$5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \le m_0 < 0{,}6 \cdot 5 + 0{,}6\,, 3 - 0{,}4 \le m_0 < 3 + 0{,}6\ 2{,}6 \le m_0 < 3{,}6$$

$np - q$ – неціле, тому $m_0 = 3$ (одне значення).

*б*) Очевидно що *ВВ X* приймає 6 значень: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4;\quad x_6 = 5$ з ймовірностями $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, якщо характер випробування відповідає схемі Бернуллі

$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^5 = 0{,}01024$,

$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^4 = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}0256 = 0{,}0768$,

$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^3 = 10 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}064 = 0{,}2304$,

$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}6)^3 \cdot (0{,}4)^2 = 0{,}3456$,

$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^1 = 0{,}2592$,

$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}6)^5 = 0{,}07776$

Таким чином закон розподілу *ВВ X* має вигляд: (Таблиця 3.)

| $X_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | 0,01024 | 0,0768 | 0,2304 | 0,3456 | 0,2592 | 0,07776 |

Перевіримо правильність обчислень

$\sum\limits_{k=1}^{6} P_k = 0{,}01024 + 0{,}0768 + 0{,}2304 + 0{,}3456 + 0{,}2592 + 0{,}7776 = 1$.

*в*) Математичне сподівання $M(X) = \sum\limits_{k=1}^{6} x_k\, p_k$ .

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}01024 + 1 \cdot 0{,}0768 + 2 \cdot 0{,}2304 + 3 \cdot 0{,}3456 + 4 \cdot 0{,}2592 + 5 \cdot 0{,}07776 =$$
$$= 0 + 0{,}0768 + 1{,}0368 + 1{,}0368 + 0{,}3888 = 3$$

Для знаходження дисперсії зручно використати формулу

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2.\ \text{де}\quad M\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 \cdot p_k$$

$$M\left(X^2\right) = 0{,}0768 + 4 \cdot 0{,}2304 + 9 \cdot 0{,}3456 + 16 \cdot 0{,}2593 + 25 \cdot 0{,}07776 =$$
$$= 0{,}0768 + 0{,}9216 + 3{,}1104 + 4{,}1417 + 1{,}944 = 10{,}2$$

$$D(X) = 10{,}2 - 3^2 = 10{,}2 - 9 = 1{,}2$$

Середнє квадратичне обчислюємо згідно з формулою $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$; $\sigma(X) = \sqrt{1{,}2} \approx 1{,}1$.

Тоді маємо остаточно, застосовуючи властивість $D(CX) = C^2 D(X)$

$\sigma(-2X) = \sqrt{D(-2X)} = \sqrt{(-2)^2 D(X)} = |-2|\sigma(X) = 2 \cdot 1{,}1 = 2{,}2$.

**Задача** . Випадкова величина *X* має функцію розподілу

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти:

*а*) щільність розподілу $f(x)$;

*б*) ймовірність попадання в проміжок (0; $\frac{3}{2}$);

*в*) математичне сподівання *M(X)*, дисперсію $D(X)$ та побудувати графік.

**Розв'язання.** *а*) Щільність розподілу дорівнює похідній від функції розподілу $f(x)=F'(X)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1, \\ x-\frac{1}{2} & \text{при} \quad 1<x\le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

*б*) Для неперервної випадкової величини при будь-яких $x_1, x_2$ має місце рівність

$$P(x_1<x<x_2)=\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx,$$

Звідси $P\left(0<x<\frac{3}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx$ .Отже $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx=\int_0^1 0\cdot dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}$.

*в*) Згідно з формулою $M(X)=\int_a^в xf(x)dx$, маємо

$$M(X)=\int_1^2 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_4^2=\frac{19}{12}.$$

Дисперсію обчислюємо згідно формули $D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2$, де $M\left(X^2\right)=\int_a^b x^2 f(x)dx;\quad M\left(X^2\right)=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{31}{12},$ тоді

$$D(X)=\frac{31}{12}-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{372-361}{144}=\frac{11}{144}.$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

де $\alpha$= 12; $\beta$= 14; *а* = 10; $\sigma$= 2, тоді $D(X)=\frac{31}{12}-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{372-361}{144}=\frac{11}{144}$.

**Задача** . Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини *X* відповідно дорівнюють $a=10,\ \sigma=2$.

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування *ВВ X* потрапить в інтервал (12, 14).

**Розв'язання**. Застосуємо формулу $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$

де $\alpha$= 12; $\beta$= 14; *а* = 10; $\sigma$= 2,

тоді $P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)$; $P(12<X<14)=\Phi(2)-\Phi(1)$

по таблиці 4 (додаток) знайдемо $\Phi(2)$ = 0,4772 $\Phi(1)$ = 0,3413.

Тоді шукана ймовірність:

$$P(12 < X < 14) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

**Задача** .Дано щільність розподілу *ВВ Х*

$$f(x) = \begin{cases} & \text{при} \quad x \le 0, \\ a \cdot \sin x & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу, невідомий параметр $a$ і ймовірність того, що в серії з 5 незалежних випробувань *ВВ Х* потрапить на інтервал $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ двічі.

**Розв'язання.**Невідомий параметр $a$ обчислимо скориставшись умовою

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

У даному випадку $\int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot \sin x dx = a\int_{0}^{\pi} \sin x dx = -a\cos x\Big|_0^\pi = 2a = 1$, звідки $a = \frac{1}{2}$

Користуючись формулою $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ отримаємо значення

при $x \le 0$. одержимо $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx$ ;

при $0 < x \le \pi$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$;

при $x > \pi$ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{x} 0dx = 1$.

Отже, $F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$

Знаходимо ймовірність того, що *ВВ* потрапить на інтервал $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = \frac{1}{4}.$$

Тепер, користуючись формулою Бернуллі, остаточно одержимо

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}79$$

**Задача** Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0{,}99$ невідомого математичного сподівання $a$, нормально розподіленого признаку $X$ генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичного відхилення $\sigma = 4$, вибіркове середнє $\bar{x}_B = 10{,}2$ та об'єм вибірки $n = 16$.

**Розв'язання**. Довірчий інтервал $\bar{x}_B - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Усі величини відомі окрім $t$. Знайдемо $t$ з співвідношення $2\Phi(t) = \gamma$ або $2\Phi(t) = 0{,}99$; $\Phi(t) = \dfrac{0{,}99}{2}$; $\Phi(t) = 0{,}495$ (з додатків) по таблиці 4 знайдемо $t$ = 2,57.

Тоді $10{,}2 - 2{,}57 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{16}} < a < 10{,}2 + 2{,}57 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{16}}$; $10{,}2 - 2{,}57 < a < 10{,}2 + 2{,}57$

$7{,}63 < a < 12{,}77$ – шуканий інтервал.

## Л І Т Е Р А Т У Р А


***1.*** Вища математика у 2 кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи / *Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.*; За ред. Г.Л. Кулініча. – 400с.

**2.** Вища математика у 2 кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи / *Г.Л. Кулініч, Є.Ю. Таран, В.М. Бурим та ін.*; За ред. Г.Л. Кулініча. – 368с.

**3.** Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие: В 3 ч./ *А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть*; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэй шк., 2000.– Ч.2, 3.–357 с.

**4.** Вища математика. Посібник для самостійного вивчення курсу. *В.Г. Гула, М.С.Синєкоп, Н.Я.Голубєва, Т.В.Демченко, Н.О.Жилюк, С.В.Любар, В.І. Симоненко* За ред. М.С.Синєкопа-302с.-Харків, ХДУХТ-2007

**5** *Сеньо П. С.* Теорія ймовірностей та математична статистика. К. Львівський національний університет. 2004.

**6**. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. -М. : Высшая школа. 2003.

**7**. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М. : Высшая школа 2003.

**8**. *Симоненко В.І., Демченко Т.В.* Методичні вказівки та контрольні роботи. Розділ:"Теорія ймовірностей та математична статистика". ХДУХТ 2010 .


**ДОДАТКИ**

**Таблиця значення функції** $p(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

**(розподіл Пуассона)** Таблиця 1

| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670329 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1. | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 |
| 2. | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075846 | 0,098786 |
| 3. | 0,000151 | 0,001091 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 |
| 4. | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 |
| 5. | | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 |
| 6. | | | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000035 |
| 7. | | | | | 0,000001 | 0,000003 |
| $\gamma/k$ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
| 0. | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1. | 0,347610 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 |
| 2. | 0,121663 | 0,143785 | 0,164661 | 0,013940 | 0,270671 | 0,224042 |
| 3. | 0,029388 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 |
| 4. | 0,000968 | 0,007669 | 0,11115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 |
| 5. | 0,000695 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 |
| 6. | 0,000081 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 |
| 7. | 0,000008 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 |
| $\gamma/k$ | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| 0. | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1. | 0,073263 | 0,033690 | 0,014873 | 0,006383 | 0,002684 | 0,001111 |
| 2. | 0,146525 | 0,084224 | 0,044618 | 0,022341 | 0,010735 | 0,004998 |
| 3. | 0,195367 | 0,140374 | 0,089235 | 0,052129 | 0,028626 | 0,014998 |
| 4. | 0,195367 | 0,175467 | 0,133853 | 0,091266 | 0,057252 | 0,033737 |
| 5. | 0,156293 | 0,175467 | 0,160623 | 0,127717 | 0,091604 | 0,060727 |
| 6. | 0,104194 | 0,146223 | 0,160623 | 0,149003 | 0,122138 | 0,091090 |
| 7. | 0,059540 | 0,104445 | 0,137677 | 0,149003 | 0,139587 | 0,117116 |
| 8. | 0,029770 | 0,065278 | 0,103258 | 0,130377 | 0,139587 | 0,131756 |
| 9. | 0,013231 | 0,036266 | 0,068838 | 0,101405 | 0,124077 | 0,131756 |
| 10. | 0,005292 | 0,018133 | 0,041303 | 0,070988 | 0,099262 | 0,118580 |
| 11. | 0,001925 | 0,008242 | 0,022529 | 0,045171 | 0,072190 | 0,097020 |
| 12. | 0,000642 | 0,003434 | 0,011262 | 0,026350 | 0,048127 | 0,072765 |
| 13. | 0,000197 | 0,001321 | 0,005199 | 0,014188 | 0,029616 | 0,050376 |
| 14. | 0,000056 | 0,000472 | 0,002228 | 0,007094 | 0,016924 | 0,032384 |
| 15. | 0,000015 | 0,000157 | 0,000819 | 0,003311 | 0,009026 | 0,019431 |
| 16. | 0,000004 | 0,000049 | 0,000334 | 0,001448 | 0,004513 | 0,010930 |
| 17. | 0,000001 | 0,000014 | 0,000118 | 0,000596 | 0,002124 | 0,005786 |

**Таблиця значень функції** $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Таблиця 2

| $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0,3989 | 1.0 | 0,2420 | 2.0 | 0,0540 | 3.0 | 0,0044 |
| 0.1 | 0,3970 | 1.1 | 0,2179 | 2.1 | 0,0440 | 3.1 | 0,0033 |
| 0.2 | 0,3910 | 1.2 | 0,1942 | 2.2 | 0,0355 | 3.2 | 0,0024 |
| 0.3 | 0,3814 | 1.3 | 0,1714 | 2.3 | 0,0283 | 3.3 | 0,0017 |
| 0.4 | 0,3683 | 1.4 | 0,1497 | 2.4 | 0,0224 | 3.4 | 0,0012 |
| 0.5 | 0,3521 | 1.5 | 0,1295 | 2.5 | 0,0175 | 3.5 | 0,0009 |
| 0.6 | 0,3332 | 1.6 | 0,,1109 | 2.6 | 0,0136 | 3.6 | 0,0006 |
| 0.7 | 0,3123 | 1.7 | 0,0940 | 2.7 | 0,0104 | 3.7 | 0,0004 |
| 0.8 | 0,2897 | 1.8 | 0,0700 | 2.8 | 0,0079 | 3.8 | 0,0003 |
| 0.9 | 0,2661 | 1.9 | 0,0656 | 2.9 | 0,0060 | 3.9 | 0,0002 |

**Таблиця значень інтегральної функції Лапласа** $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Таблиця 4

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0,00000 | 1.1 | 0,36433 | 2.1 | 0,48214 | 3.1 | 0,49903 |
| 0.1 | 0,03983 | 1.2 | 0,38493 | 2.2 | 0,48610 | 3.2 | 0,49931 |
| 0.2 | 0,07926 | 1.3 | 0,40320 | 2.3 | 0,48928 | 3.3 | 0,49952 |
| 0.3 | 0,11791 | 1.4 | 0,41924 | 2.4 | 0,49180 | 3.4 | 0,049966 |
| 0.4 | 0,15542 | 1.5 | 0,43319 | 2.5 | 0,49379 | 3.5 | 0,49977 |
| 0.5 | 0,19146 | 1.6 | 0,44520 | 2.6 | 0,49534 | 3.6 | 0,49984 |
| 0.6 | 0,22575 | 1.7 | 0,45543 | 2.7 | 0,49653 | 3.7 | 0,49989 |
| 0.7 | 0,25804 | 1.8 | 0,46407 | 2.8 | 0,49744 | 3.8 | 0,49993 |
| 0.8 | 0,28814 | 1.9 | 0,47128 | 2.9 | 0,49814 | 3.9 | 0,49995 |
| 0.9 | 0,31594 | 2.0 | 0,47725 | 3.0 | 0,49865 | 4.0 | 0,49968 |
| 1.0 | 0,34134 | | | | | 4.5 | 0,499997 |
| | | | | | | 5.0 | 0,49999997 |

## Формули тригонометрії

$2\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$Cosmx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$

$Sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\cos^2(mx) = \frac{1+\cos 2mx}{2}$ $\sin^2(mx) = \frac{1-\cos 2mx}{2}$ $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ $\operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}$

$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ $u = \operatorname{tg} x$

Навчальне видання

Укладачі : **СИМОНЕНКО** Валентина Іванівна
**ДЕМЧЕНКО** Тетяна Вікторівна

# Вища математика

## Методичні вказівки
## для організації самостійної роботи студентів
## з вищої математики .

Для студентів усіх спеціальностей
прискореного курсу навчання

Підп. до друку 25.05.11. Папір газ. Друк. офс. Умов. друк. арк.
обл.-вид. арк. Тир. прим. Зам № .

Харківський державний університет харчування та торгівлі.
61051, Харків-51, вул. Клочківська, 333.

ДОД ХДУХТ Харків-51, вул. Клочківська, 333.