МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Харківський державний університет харчування та торгівлі

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для організації самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з курсу ***„Вища та прикладна математика”***
Теми: "Елементи лінійної алгебри", "Елементи векторної алгебри", "Елементи аналітичної геометрії", "Вступ до математичного аналізу", "Диференціальне числення функцій однієї змінної"

Напрям підготовки: ***6.050301 „Товарознавство та комерційна діяльність”,***
6.050302 „Товарознавство та експертиза в митній справі”,
6.050303 „Експертиза товарів та послуг”

Харків 2011

Рекомендовано до видання
кафедрою вищої математики,
протокол № 8 від 04.02.2011р.

Схвалено науково-методичною комісією
товарознавчого факультету
протокол № 25 від 28.02.2011р.

З М І С Т

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Метою пропонованого видання є допомога студентам денного та заочного відділення товарознавчого факультету правильно організувати свою самостійну роботу по оволодінню теоретичним матеріалом, необхідним для розв'язання задач з відповідних тем вищої математики, що вивчаються впродовж першого семестру.

Методичні вказівки складаються з теоретичного матеріалу, індивідуальних завдань, прикладів їх розв'язання та списку літератури. Теоретичний матеріал містить основні означення, теореми та формули по тим розділам математики, що відповідають програмі курсу „Вища та прикладна математика" за перший семестр.

Індивідуальні завдання виконуються за варіантом, номер якого співпадає з номером студента за списком студентського журналу. Завдання потрібно виконувати в окремому зошиті, який здається на перевірку викладачеві, який веде практичні заняття. Перед розв'язанням задач слід підставити числові значення параметрів a,b,c,m,n,k з таблиці варіантів параметрів, які відповідають варіанту студента, до умов задач.

Таблиця варіантів параметрів

№ п/п	*a*	*b*	*c*	*m*	*n*	*k*	№ п/п	*a*	*b*	*c*	*m*	*n*	*k*
1.	-2	3	1	-4	-1	-3	**16.**	-3	2	-1	-2	4	-1
2.	3	-1	-2	-3	2	1	**17.**	2	-4	3	1	-1	2
3.	2	5	-2	1	-4	3	**18.**	-2	1	5	-4	1	-3
4.	-3	2	4	-3	2	-1	**19.**	-2	-3	1	-2	3	4
5.	4	-3	3	2	1	-2	**20.**	5	-2	-1	3	-2	-4
6.	2	-4	-1	-2	3	1	**21.**	3	5	-2	-1	3	2
7.	-5	2	1	-1	4	2	**22.**	-3	1	4	-1	2	-3
8.	-2	1	3	4	-2	-1	**23.**	2	4	-2	3	-5	2
9.	2	-1	-5	3	1	-2	**24.**	-2	-3	4	2	-1	-2
10.	-4	2	1	-1	2	3	**25.**	-3	4	1	-2	1	5
11.	3	-3	-4	2	-1	2	**26.**	2	-4	3	1	-1	-2
12.	2	-2	3	5	4	-3	**27.**	-3	2	-1	3	-2	1
13.	-5	1	-2	1	-3	4	**28.**	3	-3	2	-2	-1	4
14.	-2	4	5	-3	-2	1	**29.**	-4	-2	1	3	5	-1
15.	2	3	-4	4	5	3	**30.**	-2	4	3	-1	2	1

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ, ПРАВИЛА ТА ФОРМУЛИ

1.1 Елементи лінійної алгебри

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ виду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця називається **квадратною** порядку n, якщо $m=n$.

Одиничною матрицею називається квадратна матриця виду

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумою матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $C=(c_{ij})_{m\times n}=A+B$ така, що $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число α називається матриця $C=(c_{ij})_{m\times n}=\alpha A$ така, що $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицю $B=(b_{ij})_{n\times l}$ називається матриця $C=(c_{ij})_{m\times l}=AB$ така, що $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj};\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,l}$, тобто добуток AB існує тільки тоді, коли перший множник A має число стовпців, що дорівнює числу рядків другого множника B. Слід зазначити, що, взагалі, для добутку двох матриць не виконується переставний закон, тобто $AB \neq BA$.

Визначником (детермінантом) ***n*-го порядку** квадратної матриці A, називається наступне число:

$$|A|=\det(A)=\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

яке обчислюється за певним правилом.

Визначник другого порядку , що відповідає матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

обчислюється наступним чином

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

побічна діагональ головна діагональ

тобто дорівнює різниці добутків елементів, що стоять на головній та побічній діагоналях.

Визначник третього порядку , що відповідає матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

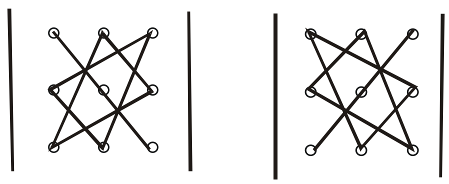
обчислюється як

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{matrix},$$

побічна діагональ головна діагональ

Обчислення визначника третього порядку можна описати за правилом трикутників, схематичний запис якого такий:

\+ -



Мінором M_{ij} елемента $a_{ij}(i, j = \overline{1,n})$ визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}, який утворюється з даного визначника шляхом викреслення i-го рядка і j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається рівністю

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Правила обчислення визначника *n*-го порядку

Обчислення визначників будь-якого порядку визначається методом розкладання матриці:

1.Розкладання за елементами i-го рядка:

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}.$$

2. Розкладання за елементами j-го стовпця:

$$\Delta_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}.$$

Визначники мають такі **властивості**:

1. Рівноправність рядків та стовпців: величина визначника не змінюється при транспонуванні.

2. Якщо поміняти місцями два рядка (стовпця) величина визначника змінить тільки знак.

3. Визначники з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнюють нулю.

4. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають загальний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то величина визначника також дорівнює нулю.

6. Визначник, який має два пропорційних рядка (стовпця) дорівнює нулю.

7. Якщо один з рядків (стовпців) визначника є лінійною комбінацією його інших рядків (стовпців), то визначник дорівнює нулю.

8. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

Практичні методи обчислення визначників.

Методи обчислення визначників базуються на їх властивостях.

1.Метод ефективного зниження порядку.

За допомогою 8 властивості визначник, який не дорівнює 0, завжди можна звести до визначника (n-1)-го порядку, якщо одержати в деякому рядку (стовпці) всі елементи, крім одного, рівними нулю.

2.Зведення визначника до трикутного виду.

Визначник, у якого всі елементи, які знаходяться вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається визначником трикутного виду. В такому випадку визначник дорівнює добутку елементів його головної діагоналі. Зведення будь-якого визначника Δ_n до трикутного виду завжди можливе.

Квадратна матриця A називається **виродженою**, якщо $\det A = 0$, і **невиродженою**, якщо $\det A \neq 0$.

Оберненою до невиродженої матриці A називається матриця A^{-1} така, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обернену матрицю можна знайти за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента матриці a_{ij} в її визначнику.

Мінором M_k матриці A називається визначник k-го порядку, що утворений із її елементів, які стоять на перетині будь-яких k рядків і k стовпців матриці.

Рангом матриці A (позначається $r(A)$ або $rang\ A$) називається найвищий порядок мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці не змінюється при її **елементарних перетвореннях**, до яких відносяться:
а) заміна рядків стовпцями і навпаки;
б) перестановки рядків (стовпців) ;
в) відкидання рядку (стовпця), всі елементи якого дорівнюють нулю;
г) множення елементів рядка (стовпця) на одне і те ж число відмінне від нуля;
д) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) помножених на одне и те ж число.

Матриці, які утворюються в результаті елементарних перетворень, називаються **еквівалентними**, їх еквівалентність позначається значком ~.

Базисним мінором матриці A називається будь-який мінор, порядок якого дорівнює рангу цієї матриці.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того щоб система m лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

була сумісна (мала розв’язок) необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і ранг розширеної матриці

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

цієї ж системи співпадали, тобто $rangA = rang\overline{A}$. Якщо $rangA = rang\overline{A} = r$ і $r = n$, то ця система має єдиний розв’язок; якщо $r < n$,то система має нескінчену множину розв’язків, які залежать від $n - r$ довільних сталих; якщо $rangA \neq rang\overline{A}$, то система несумісна, тобто не має жодного розв’язку.

Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник якої відмінний від нуля, має розв’язок, і притому тільки один, який можна записати **формулами Крамера**:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

де $\Delta = \det A; \Delta_i$ одержується із визначника Δ шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів $(i = \overline{1, n})$.

Матричний спосіб розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Нехай для системи n лінійних рівнянь з n невідомими основна матриця A є невиродженою ($\det A \neq 0$). Тоді для неї існує обернена матриця A^{-1}. Введемо матриці-стовпці для невідомих x_i і вільних членів $b_i, (i = \overline{1,n})$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати у матричній формі $AX = B$.

Помножимо це матричне рівняння зліва на A^{-1}, одержимо $A^{-1}AX = A^{-1}B$, звідки $EX = X = A^{-1}B$. Тобто, $X = A^{-1}B$.

Метод послідовних виключень Гауса. Якщо основна матриця системи A має $rangA = r \leq n$, то розширена матриця $\overline{A}$ цієї системи за допомогою елементарних перетворень завжди приводиться до виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a'_{12} & \ldots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{rr+1} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & b'_m \end{array}\right)$$

Ця матриця є розширеною матрицею системи:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + a'_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + a'_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots \\ \qquad x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ \qquad 0 = b'_{r+1} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad 0 = b'_m \end{cases}$$

яка еквівалентна початковій системі (має той же розв'язок, що і початкова система). Якщо хоча б одне із чисел $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ відмінне від нуля, то система несумісна (при цьому $rangA \neq rang\overline{A}$). Якщо ж $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$, то система сумісна (при цьому $rangA = rang\overline{A} = r$), а із останньої системи можна послідовно виразити в явному вигляді базисні невідомі $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$ через вільні невідомі $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Якщо $r = n$, то розв'язок системи єдиний.

1.2 Елементи векторної алгебри

Вектором називається напрямлений відрізок (або упорядкована пара точок). Якщо початок вектора знаходиться в точці A, а кінець – в точці B, то вектор позначається $\overrightarrow{AB}$, а довільні вектори позначаються $\vec{a}, \vec{b}$,...

Довжиною або модулем вектора називається відстань між його початком і кінцем. Позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються **колінеарними**. Вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах називаються **компланарними**.

Два вектори називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають рівні довжини.

Добутком вектора $\vec{a}$ і числа α називається вектор $\alpha\vec{a}$ (або $\vec{a}\alpha$), довжина якого дорівнює $|\alpha||\vec{a}|$, і напрямлений однаково з $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежно йому, якщо $\alpha < 0$.

Сумою *n* векторів, які розміщені послідовно, називається вектор, який сполучає початок першого доданка з кінцем останнього доданка (рис. 1). Це правило додавання називається правилом замкнутої ламаної.

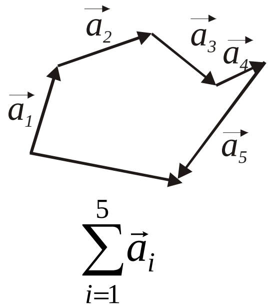


Рис.1

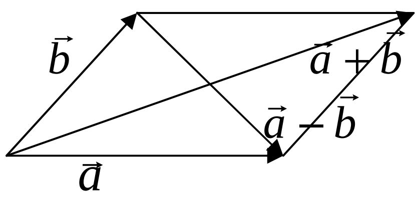


Рис.2

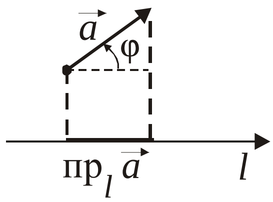


Рис.3

У випадку суми двох векторів, початки яких суміщені, воно рівносильне **правилу паралелограма** (рис. 2).

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь *l* визначається формулою $a_l = np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, де φ - кут між вектором $\vec{a}$ і віссю *l* (рис.3).

Нехай в просторі задана прямокутна декартова система координат *Oxyz*. Тоді положення точки в просторі визначається її координатами x, y, z. Позначимо одиничні вектори (**орти**), напрями яких співпадають з напрямами осей координат через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді будь-який вектор в просторі можна подати у вигляді $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (**розкладання вектора за координатними осями**) або $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, де a_x, a_y, a_z є **проекції вектора** $\vec{a}$ **на осі** *Ox,Oy,Oz* відповідно. Ці проекції називаються **координатами вектора**. Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$ - початок вектора, $B(x_2, y_2, z_2)$ - його кінець, то координати вектора $\overline{AB}$ визначаються як $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Довжина вектора, якщо відомі його координати (проекції на координатні осі), обчислюються за формулою $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Косинуси кутів, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами відповідних осей координат називаються **напрямними косинусами** і обчислюються за формулами:

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|};\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|};\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|};$ причому $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Орт вектора визначається як $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

Якщо вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ колінеарні, то $\vec{a}=\alpha\vec{b}$. Ця рівність еквівалентна трьом числовим $a_x=\alpha b_x, a_y=\alpha b_y, a_z=\alpha b_z$,

звідки маємо $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

Таким чином, вектори **колінеарні, якщо їх координати пропорціональні**.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів і косинуса кута φ між ними. Позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Тобто $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Якщо вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ задані у координатному виді, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Основні властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$; α - число,

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

4) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (умова перпендикулярності двох векторів);

5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ дорівнює $пр_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, який задовольняє умовам:

1) перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) має такий напрям, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ спостерігається проти годинникової стрілки;
3) довжина дорівнює $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

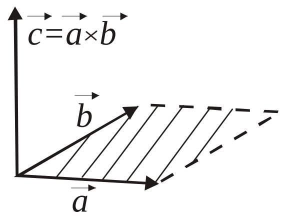


Рис.4

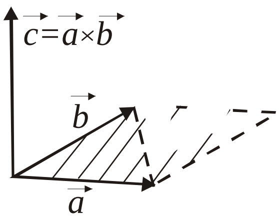


Рис.5

Якщо $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, а його половина – площі трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах (рис.4 і 5).

Основні властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

3) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b}),\alpha$ - число.

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - колінеарні, то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ - нульовий вектор, у якого початок і кінець співпадають, а довжина дорівнює нулю.

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, що є результатом скалярного множення одного із них на векторний добуток двох інших. Позначається $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Якщо $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ і навпаки.

Модуль мішаного добутку дорівнює об’єму паралелепіпеда, а $\frac{1}{6}$ його - об’єму трикутної піраміди, побудованих на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, як на ребрах.

1.3 Елементи аналітичної геометрії

Пряма лінія на площині

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$, який називається її нормальним вектором (рис.6). Нехай $M(x, y)$ - довільна точка прямої.

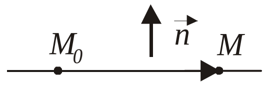


Рис.6

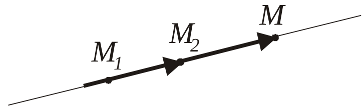


Рис.7

Тоді вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярний вектору $\vec{n}$, тобто $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$ або в координатах $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Позначимо $C = -Ax_0 - By_0$ і одержимо $Ax + By + C = 0$ - **загальне рівняння прямої**.

Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, а $M(x, y)$ - довільна точка прямої (рис.7), то із умови колінеарності векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ одержимо **рівняння прямої, що проходить через дві задані точки**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

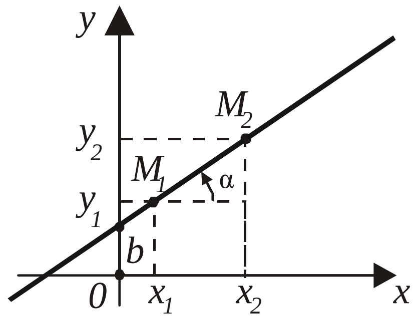


Рис.8

Звідки маємо $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$ або **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** $y = kx + b$, де $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ - кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через дві точки на площині, b - величина відрізка, який пряма відсікає на осі ординат.

При цьому $tg\alpha = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, де α - кут нахилу прямої до додатного напряму осі OX, який відраховується проти ходу годинникової стрілки.

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k записується у вигляді: $y_0 - y = k(x_0 - x)$

Якщо в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0,$ то його можна перетворити до вигляду $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$. Позначимо $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$ і

одержимо **рівняння прямої у „відрізках на осях”** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$

де a і b - величини відрізків, які пряма відсікає на осях координат (рис.9)

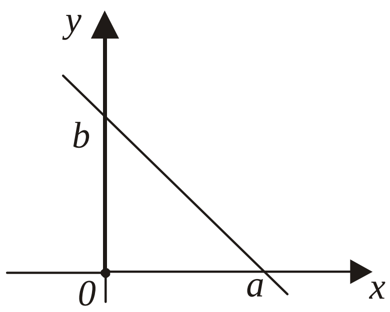


Рис.9

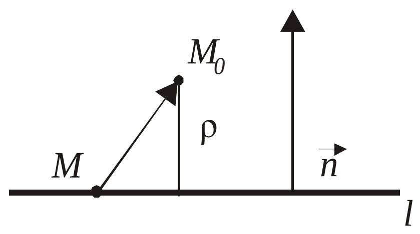


Рис.10

Відстань ρ від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $l - Ax + By + C = 0$ визначається формулою

$\rho = \left| np_{\vec{n}}\, \overline{MM}_0 \right|$, де $M(x, y) \in l$ (рис.10). Якщо розпишемо цю формулу, то одержимо, що на площині **відстань від точки** $M_0(x_0, y_0)$ **до прямої** <u>*l*</u> дорівнює

$$\rho = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Нехай дві прямі задаються рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді кут φ між ними дорівнює куту між їх нормальними векторами, тому

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}.}$$

Умови паралельності і перпендикулярності цих прямих визначаються колінеарністю і ортогональністю нормалей $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$.

Тоді **умова паралельності** : $\vec{n}_1 \uparrow\downarrow \vec{n}_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$,

а **умова перпендикулярності**: $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Нехай прямі задані рівняннями $l_1 : y = k_1x + b_1; l_2 : y = k_2x + b_2$ (рис.11)

З рисунка видно, що кут між прямими φ дорівнює $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Тоді $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}$.

Звідси маємо у**мову паралельності**:

$$k_2 = k_1$$

і **умову перпендикулярності**:

$$1 + k_2k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

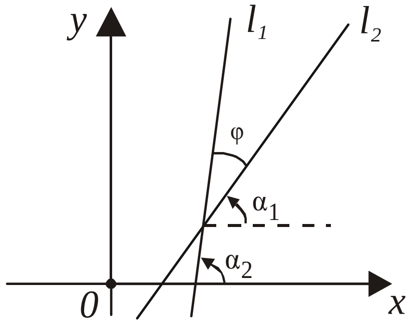


Рис.11

Пряма і площина в просторі

Нехай площина Q проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A,B,C)$ (рис.12). Цими умовами визначається єдина площина в просторі, а вектор $\vec{n}$ називається нормальним вектором площини Q.

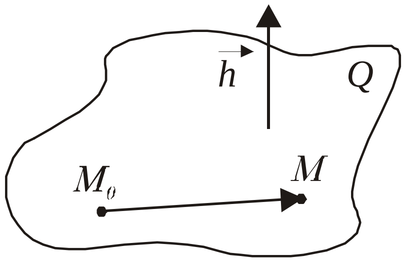


Рис.12

Візьмемо на площині Q довільну точку $M(x,y,z)$, тоді $(\overline{M_0M},\vec{n})=0$, або в координатній формі $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Позначимо $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ і одержимо **загальне рівняння площини**

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Якщо в просторі задано дві площини $Q_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $Q_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то умови паралельності і перпендикулярності цих площин визначаються умовами колінеарності і перпендикулярності їх нормальних векторів $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

Умова паралельності двох площин: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

Кут між площинами обчислюється як кут між їх нормальними векторами

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох площин: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Якщо в загальному рівнянні площини $Ax+By+Cz+D=0, A\neq0, B\neq0, C\neq0, D\neq0$, то його можна перетворити до вигляду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,\left(a=-\frac{A}{D}, b=-\frac{B}{D}, c=-\frac{C}{D}\right),$$

яке називається **рівнянням площини у „відрізках на осях координат”,** де a,b,c - величина відрізків, які площина відсікає на координатних осях.

Відстань ρ від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини
$Q: Ax+By+Cz+D=0$ (рис.13) можна розглядати як модуль проекції вектора $\overrightarrow{MM_0}(M\in Q)$ на напрям вектора $\vec{n}$, тобто

$$\rho=\left|np_{\vec{n}}\overline{MM}_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$, можна розглядати як умову компланарності трьох векторів $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$, які лежать в одній площині, а $M(x, y, z)$, - довільна точка цієї площини (рис.14).

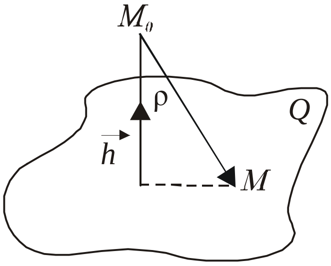


Рис.13

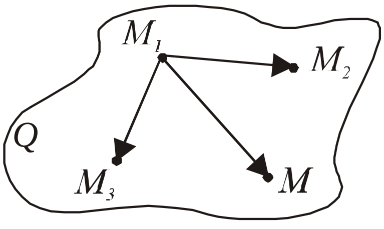


Рис.14

Тоді це рівняння в координатній формі запишеться

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин, тобто як множину точок, які задовольняють системі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1x + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2x + C_2x + D_2 = 0, \end{cases}.$$

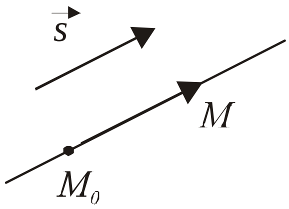


Рис.15

Якщо пряма паралельна вектору $\vec{S} = (m, n, p)$, який **називається її напрямним вектором,** і проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис.15), то з умови колінеарності векторів $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ і $\vec{S} = (m, n, p)$ ($M(x, y, z)$ - довільна точка прямої) одержимо **канонічні рівняння прямої у просторі.**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Прирівняємо ці рівності параметру t і одержимо

параметричні рівняння прямої $\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$

Канонічне рівняння і **параметричні рівняння прямої на площині** записуються у вигляді $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ і $\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn \end{cases}$,

відповідно, де $\vec{S} = (m, n)$ - напрямний вектор прямої на площині.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі визначається взаємним розміщенням їх напрямних векторів. Нехай задано дві прямі

$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ і $l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$.

Тоді кут між ними знаходиться як кут між їх напрямними векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1||\vec{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умова їх паралельності: $\vec{S}_1 \uparrow\downarrow \vec{S}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Умова їх перпендикулярності: $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ дорівнює гострому куту між прямою і її проекцією на площину (рис.16) і обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{n},\vec{S})}{|\vec{n}||\vec{S}|} = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

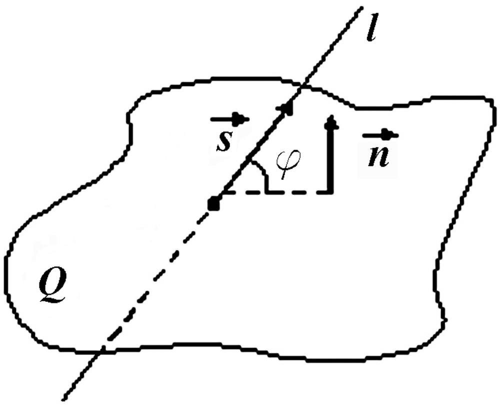


Рис.16

Умова паралельності прямої і площини: $\vec{n} \perp \vec{S} \Rightarrow Am+Bn+Cp=0$.

Умова перпендикулярності прямої і площини: $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{S} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Відстань ρ **від точки** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **до прямої** $l : \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ можна знайти як висоту паралелограма (рис.17)

$$\rho = \frac{|\overline{AM}_0 \times \vec{S}|}{|\vec{S}|}$$

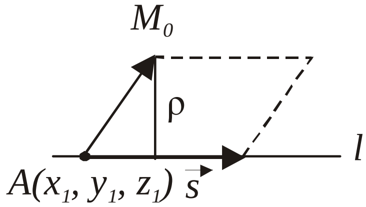


Рис.17

Криві другого порядку

Еліпсом називається сукупність точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величина стала і дорівнює $2a$ та більша за відстань між фокусами $2c$ (рис.18).

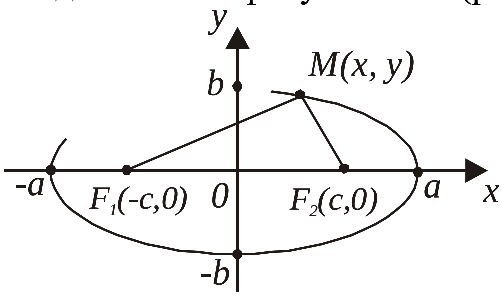


Рис.18

Якщо ввести декартову систему координат так, щоб вісь OX проходила через фокуси F_1F_2, а вісь OY ділила відрізок F_1F_2 навпіл, то рівняння еліпса одержимо у вигляді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, яке називається **канонічним рівнянням еліпса**. Числа a і b є величинами більшої і меншої напівосей еліпса, причому $c^2=a^2-b^2$. Точки $(a,0),(0,b),(-a,0),(0,-b)$ - це вершини еліпса. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса і характеризує його форму.

Якщо $a=b$ (при цьому $\varepsilon=0$), то маємо рівняння **кола** $x^2+y^2=a^2$ з центром на початку координат, радіус якого дорівнює a.

Гіперболою називається сукупність точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох даних точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величина стала і дорівнює $2a$ та менша за відстань між фокусами $2c$ (рис.19).

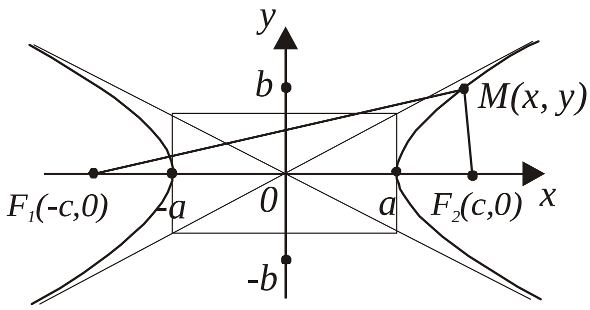


Рис.19

Якщо декартову систему розмістити так само, як і у випадку еліпса, то одержимо **канонічне рівняння гіперболи**:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Числа a і b є величинами, відповідно, дійсної і уявної напівосей гіперболи, причому $c^2=a^2+b^2$.

Точки $(a,0)$ і $(-a,0)$ - це вершини гіперболи. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ є асимптотами гіперболи. Якщо $a=b$ то гіпербола називається рівнобічною.

Параболою називається сукупність точок площини, що рівновіддалені від даної точки, яка називається фокусом, і даної прямої, яка називається директрисою (рис.20).

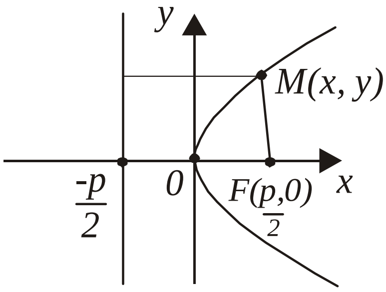


Рис.20

Нехай p - параметр параболи, що чисельно дорівнює відстані від фокуса до директриси. Введемо декартову систему координат так, щоб вісь OX проходила через фокус F перпендикулярно директрисі, а вісь OY ділила відрізок між директрисою і фокусом навпіл, тоді рівняння параболи одержимо у вигляді $y^2=2px$, яке називається **канонічним рівнянням параболи**.

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Якщо $B=0$, то групування доданків і виділення повних квадратів для змінних x і y дозволять звести рівняння до одного із наступних видів:

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ - рівняння еліпса з центром (x_0,y_0),

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ або $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ - рівняння гіпербол з центром (x_0,y_0),

$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ або $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ - рівняння парабол з вершиною (x_0,y_0),

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$ - рівняння кола з центром (x_0,y_0).

У всіх цих випадках паралельним переносом осей координат: $X=x-x_0, Y=y-y_0$ одержані рівняння зводяться до канонічного виду. Це рівняння може також представляти собою або пару прямих, які можуть співпадати, або пусту множину.

1.4 Вступ до математичного аналізу

Під **множиною** розуміють сукупність деяких об'єктів. Об'єкти, що утворюють множину, називаються **елементами** або **точками** цієї множини. Множини позначаються великими буквами, а їх елементи малими $A=(a,b,c,...); A=\{x_n\}, n=1,2,...; A=\{x:...\}$ - елемент множини x має властивості, які вказано після двокрапки. Множина, елементами якої є усі дійсні числа, позначається як R. Множина, що не містить жодного елемента, називається **пустою** і позначається $\varnothing$. Якщо a є елемент множини A, то пишуть $a\in A$. Якщо b не є елементом множини A, то пишуть $b\notin A$. Якщо множина B є частиною множини A, то множина B називається підмножиною множини A і це позначається $B\subset A$.

Відрізняють такі числові множини:

$[a,b]=\{x: a\le x\le b\}$ - відрізок;

$(a,b)=\{x: a<x<b\}$ - інтервал, відкритий відрізок;

$(-\infty,\infty)=\{x: -\infty<x<\infty\}$ - нескінченний інтервал;

$\bigcup(c,\varepsilon)=\{x: |x-c|<\varepsilon\}=(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ - ε - окіл точки c;

$\bigcup(\infty,\varepsilon)=\{x: |x|>\varepsilon\}$ - ε - окіл нескінченної точки;

$\bigcup(+\infty,\varepsilon)=\{x: x>\varepsilon\}$ - ε - окіл точки $+\infty$;

$\bigcup(-\infty,\varepsilon)=\{x: x<-\varepsilon\}$ - ε - окіл точки $-\infty$;

$A\bigcup B=\{x: x\in A$ або $x\in B\}$ – об'єднання множин;

$A\bigcap B=\{x: x\in A$ і $x\in B\}$ - перетин множин A і B.

Означення. Якщо кожному $x\in X$ за деяким законом f ставиться у відповідність один елемент $y\in Y$, то говорять, що на множині X задана **функція *y=f(x)*.** При цьому x називають **незалежною змінною** (або аргументом), y – **залежною змінною**, f - законом відповідності. Множина X називається **областю існування** або областю визначення, а множина Y - **областю значень** функції. Існує декілька способів задання функції:

Аналітичний спосіб, коли функція задається формулою виду $y=f(x)$. Наприклад: $y=x^2$. Або

$$y=\begin{cases} x^2, \text{якщо } x<1, \\ x+1, \text{якщо } x\ge 1. \end{cases}$$

Табличний спосіб, наприклад, таблиця логарифмів.

Графічний спосіб полягає в зображенні графіка функції – множини точок (x,y) площини.

Функція $y=f(x)$ називається **парною (непарною)**, якщо для будь-якого $x\in X$ $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$). Наприклад, функція $y=x^2$ є парною, тому що $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, а функція $y=x^3$ - непарною, тому що $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. Якщо функція $f(x)$ є ні парною ні непарною, то вона називається **функцією загального виду**.

Функція $f(x)$ називається **зростаючою (спадною)** на проміжку X, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає **більше (менше)** значення функції. Функції зростаючі (неспадні) і спадні (незростаючі) називаються монотонними.

Функція $f(x)$ називається **обмеженою** на проміжку X, якщо існує таке число $M>0$, що $|f(x)|\le M$ для будь-якого $x\in X$.

Функція $f(x)$ називається **періодичною** з періодом $T\ne 0$, якщо для довільних x з області означення функції $f(x+T)=f(x)$. **Наприклад**, $f(x)=\cos 2x=\cos(2x+2\pi)=\cos 2(x+\pi)=f(x+\pi)$, значить для функції $\cos 2x$ періодом є число π.

Функція називається **явною**, якщо вона задана формулою, в якій права частина не містить залежної змінної. **Наприклад**, $y=2x^2-3x+1$.

Функція y аргументу x називається **неявною**, якщо вона задана рівнянням $F(x,y)=0$. **Наприклад**, $x^3+y^3-xy=0$.

Нехай $Y=\{y: y=f(x), x\in X\}$. Функція $x=f^{-1}(y)$ називається **оберненою** до функції $y=f(x)$, якщо $X=\{x: x=f^{-1}(y), y\in Y\}$. Обернену функцію позначають $y=f^{-1}(x)$.

Функція $z=F(f(x))$ від змінної x називається **складною** або **суперпозицією функцій** F і f. При цьому $Y=\{y: y=f(x), x\in X\}$, а $Z=\{z: z=F(y), y\in Y\}$.

До **основних елементарних функцій** відносяться: степенева ($y=x^{\alpha}, \alpha\in R$), показникова ($y=a^x, a\ne 0, a\ne 1$), тригонометричні ($y=\sin x, y=\cos x, y=tgx, y=ctgx$) і обернені до них функції ($y=\ln x, y=\arcsin x, y=\arccos x, y=arctgx, y=arcctgx$).

Функції, які створені із основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і суперпозицій, називаються **елементарними**.

Наприклад, функція $y=\dfrac{\cos^3 x\sqrt{x}}{3^{2x^2}}+\sqrt{\lg^2 x+\arccos x}$ є елементарною.

Елементарні функції діляться на **алгебраїчні**, до яких відносяться:

- ціла раціональна функція (многочлен або поліном):

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n;$$

- дробово-раціональна функція – відношення двох многочленів

$$y=\frac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^k+...+b_{k-1}x+b_k};$$

- ірраціональна функція – серед операцій над многочленами є добування коренів

і **неалгебраїчні (трансцендентні),** наприклад, тригонометричні.

Стала величина *a* називається границею змінної величини *x*, якщо при її змінюванні абсолютна величина різниці $x-a$ після деякого моменту стає менше, ніж будь-яке додатнє число δ, яким би малим воно не було. Це записують $x \to a$ (x прямує до a) або $\lim x = a$, якщо $|x-a| < \delta, \delta > 0$.

Якщо при змінюванні величини x абсолютна величина її після деякого моменту стає більше, ніж будь-яке додатнє число N, яким би великим воно не було, то записують $x \to \infty$ (x прямує до нескінченності) або $\lim x = \infty$, якщо $|x| > N, N > 0$. При цьому можливі випадки $\lim x = +\infty$, якщо $x > N$ та $\lim x = -\infty$, якщо $x < -N, N > 0$.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, крім, можливо, самої точки a. **Число *A* називається границею функції *y=f(x)* при** $x \to a$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число $\delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x-a| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають цю границю функції так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Якщо $x < a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a-0$; якщо $x > a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a+0$. Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ та $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ називають, відповідно, **границею функції *f(x)* зліва в точці *a*** і **границею функції *f(x)* справа в точці *a*,** або односторонніми границями функції *f(x)* в точці *a*. Для існування границі функції при $x \to a$ необхідно і достатньо, щоб $f(a-0) = f(a+0)$.

Поруч з вивченням поведінки функції в скінченних точках вивчається поведінка функції на нескінченності, тобто при $x \to +\infty$ або при $x \to -\infty$ ($x \to \infty$). **Число *A* називається границею функції *y=f(x)* при** $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатнє число $N(\varepsilon)$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Якщо відомо, що функції $u(x)$ і $v(x)$ мають границі при $x \to a$ і вони скінченні, то

1. $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$;
2. $\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$;
3. $\lim(cu) = c \lim u, c = const$;
4. $\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim u}{\lim v}$ при $\lim v \neq 0$

Границя сталої функції $u(x) = c$ дорівнює самій сталій c, тобто $\lim c = c$.

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою**, якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, а функція $\beta(x)$ - нескінченно великою, якщо $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = \infty$ (*a* – скінчене число або нескінченність).

Для нескінченно малих функцій з властивостей границь витікають такі твердження:

- алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція;
- добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція;
- добуток нескінченно малої функції на обмежену є нескінченно мала функція;
- якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$;
- якщо $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\beta(x)}=0$;
- якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Звідси при $c>0$ $(c=const)$ має місце символіка:

$$\frac{c}{+0}=+\infty,\ \frac{c}{-0}=-\infty, \frac{c}{0}=\infty, \frac{c}{+\infty}=+0, \frac{c}{+\infty}=-0, \frac{c}{-\infty}=+0, \frac{c}{\infty}=0.$$

При знаходженні границь часто використовують першу та другу важливі границі.

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ або, } \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ де } e\approx 2{,}71828.$$

Функція $y=e^x$ називається експонентою. Логарифм числа a за основою e називається натуральним логарифмом і позначається $\log_e a=\ln a$.

Наслідки із другої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\ln a;\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Нехай $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$. Тоді

- якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k(\neq 0$ і $\neq\infty)$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку**;
- якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими**, що позначається $\alpha(x)_{x\to a}\sim\beta(x)$;
- якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою вищого порядку**, ніж $\beta(x)$.

Аналогічно можна провести порівняння і нескінченно великих функцій.
Значно спрощують знаходження границь такі властивості:
- якщо $u(x) \sim u'(x)$, $v(x) \sim v'(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ (має місце як для нескінченно малих, так і для нескінченно великих функцій);
- якщо в сумі $u(x)+v(x)$ відкинути нескінченно малу вищого порядку, при умові, що $u(x)$ і $v(x)$ – нескінченно малі, або нескінченно велику нижчого порядку, при умові, що $u(x)$ і $v(x)$ – нескінченно великі, то частина, яка залишиться, буде еквівалентна всій сумі і називається її головною частиною.

При $x \to 0$ еквівалентними є наступні функції:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x).$$

Замість x можна розглядати будь-яку нескінченно малу $\alpha(x)$ при $x \to a$.

При обчисленні границь необхідно, перш за все, аргумент функції замінити його граничним значенням і вияснити, чи має місце **невизначеність**. До **невизначених виразів** відносяться: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty\cdot 0, \infty-\infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$. Якщо в результаті підстановки граничного значення аргументу одержуємо невизначений вираз, то треба виконати тотожні перетворення, в результаті яких усувається невизначеність, а потім обчислити границю.

Функція $f(x)$ називається **неперервною при** $x = a$, якщо вона визначена в точці $x = a$ та в деякому її околі, а також $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, то вона називається **неперервною на цьому проміжку**.

Основні елементарні функції, а також суми, добутки, частки цих функцій неперервні при всіх x*, при яких вони існують!*

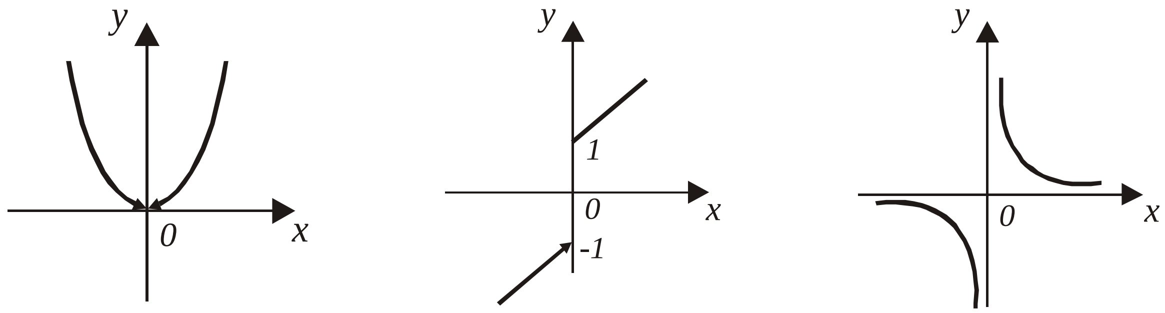
Точки, в яких порушується неперервність, називаються **точками розриву функції**. Вони класифікуються таким чином:

а) $\lim_{x\to a} f(x) = A$, але в точці $x = a$ функція не визначена, $x = a$ - **точка усувного розриву** (рис. 21 а). **Наприклад**, функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x = 0$ невизначена, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, отже, $x = 0$ - усувна точка розриву (рис. 21a);

б) $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0), \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, але $f(a-0) \neq f(a+0)$; $x = 0$ - **точка розриву першого роду**. **Наприклад**,

$$y = \begin{cases} x-1, x<0; \\ x+1, x\geq 0; \end{cases} \qquad \lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0}(x-1) = -1, \ \lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0}(x+1) = 1.$$

Односторонні границі існують, але не рівні між собою, отже, $x = 0$ - точка розриву першого роду (рис. 21 б);



а) б) в)

Рис.21

в) якщо хоча б одна з односторонніх границь $\lim_{x\to a-0} f(x), \lim_{x\to a+0} f(x)$, не існує або нескінченна, то $x=a$ - **точка розриву другого роду**. **Наприклад**, функція $y=\dfrac{1}{x}$ не існує в точці $x=0$ і $\lim_{x\to -0}\dfrac{1}{x}=-\infty, \lim_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, отже, $x=0$ - точка розриву другого роду (рис. 21 в).

Асимптотою функції $y=f(x)$ називається пряма, відстань від якої до графіка цієї функції прямує до 0, при віддаленні точки графіка на нескінченність (рис. 22).

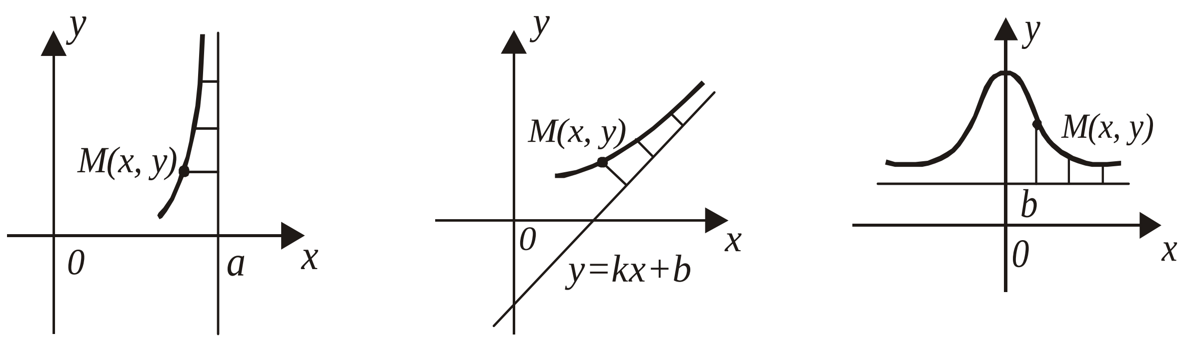
Пряма $x=a$ є **вертикальною асимптотою** функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty .$$

Неперервні функції не мають вертикальних асимптот в області їх існування.

Пряма $y=kx+b$ є **похилою асимптотою** функції $f(x)$, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k, \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$.

Пряма $y=b$ є **горизонтальною асимптотою** функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$. Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти $y=kx+b$.



а) б) в)

Рис.22

1.5 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Приростом функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ називається різниця

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

де $\Delta x = x - x_0$ - приріст аргументу (різниця між новим і попереднім його значеннями).

Похідною функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ називається границя відношення приросту у цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ або } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо зазначена границя існує, то функція $f(x)$ називається **диференційовною** в точці $x = x_0$, а операцію знаходження похідної - **диференціюванням**.

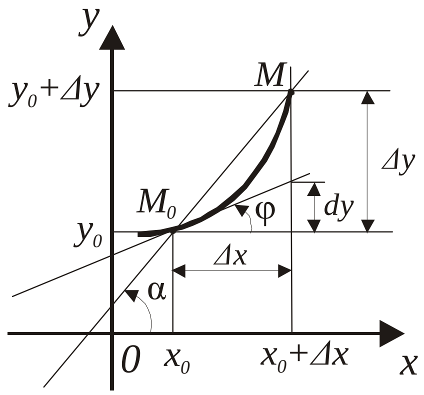


Рис.23

Геометрична інтерпретація показана на рис.23. M_0M - січна, що проходить через дві точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ кривої $y = f(x)$, $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ $M \to M_0$, а січні переходять в дотичну l, що проходить через точку M_0 до кривої, при цьому $tg\alpha \to tg\varphi$, де φ - кут між додатним напрямом осі OX і дотичною, який відраховується проти ходу годинникової стрілки. Використовуючи рівняння прямої виду $y - y_0 = k(x - x_0)$, запишемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, що проходить через точку $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); f'(x_0) = tg\varphi.$$

Так як $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$,

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \Delta x \to 0.$

Тут $f'(x)\Delta x$ - головна частина Δy при $\Delta x \to 0$, так як $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$.

Диференціалом функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ називається головна частина приросту функції, яка лінійна відносно $\Delta x, \Delta x \to 0$. Позначається $dy = f'(x_0)\Delta x$ або $dy = f'(x_0)dx$. Тоді $y'(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx}$, де dy - диференціал функції, dx- диференціал незалежної змінної. Порівняння Δy з dy показує, що $\Delta y \approx dy$.
Звідки $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ та $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.
Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малих приростах Δx аргументу x.

Похідна оберненої функції: $x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'(x)}$.

Похідна складеної функції $z = z(y(x))$:

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ або } z'(x) = z'(y)y'(x).$$

Диференціал складеної функції $z = z(y(x))$:

$$dz = z'(x)dx = z'(y)y'(x)dx = z'(y)dy.$$

Таким чином, форма першого диференціала зберігається незалежно від того є аргумент функції залежною чи незалежною змінною.

Похідна неявної функції. При неявному заданні функції у виді $F(x, y) = 0$ диференціюється рівняння зліва і справа по змінній x, вважаючи $y = y(x)$. Отримане рівняння $\Phi(x, y, y')$ треба розв'язати відносно y'. Наприклад, $x^2 + xy + \ln y = 2$. Після диференціювання одержуємо $2x + y + xy' + \frac{y'}{y} = 0$, звідки знаходимо y': $y'\left(x + \frac{1}{y}\right) = -(2x + y), y' = -\frac{y(2x + y)}{xy + 1}$.

Похідна від параметрично заданої функції. Нехай $y = y(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, тоді $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Наприклад, $y(x)$ задана параметрично $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2. \end{cases}$

Оскільки $y'(t) = 2t, x'(t) = \frac{1}{t}$, то $y'(x) = \frac{2t}{\frac{1}{t}} = 2t^2$.

Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від логарифму цієї функції, тобто $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$. У деяких випадках попереднє логарифмування спрощує знаходження похідної.

Наприклад, треба знайти похідну степенево-показникової функції $y=x^{\sin^2 x}$. Спочатку прологарифмуємо її. $\ln y=\sin^2 x\ln x$. Далі диференціюємо рівність зліва і справа по x:

$\dfrac{y'}{y}=2\sin x\cos x\ln x+\dfrac{\sin^2 x}{x}$. Звідки $y'=x^{\sin^2 x}(\sin 2x\ln x+\dfrac{\sin^2 x}{x})$.

Похідні вищих порядків. Визначимо другу похідну $y''=(y')'$, n-у похідну $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Наприклад, для функції $y=x^3$: $y'=3x^2; y''=6x$, $y'''=6$.

Аналогічно, $d^2y=d(dy)$, а $d^{(n)}y=d(d^{(n-1)}y)$. Нехай $y=y(x)$, $dy=y'(x)dx, d^2y=(y'(x)dx)'dx=(y')'dxdx=y'dx^2$. Одержимо позначення похідної другого порядку через диференціали: $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Відповідно для похідної n-го порядку позначення: $y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Таблиця похідних та диференціалів основних елементарних функцій

	$y=f(x)$	$y'=\dfrac{dy}{dx}$	$dy=y'dx$
1.	$y=x$	$y'=1$	$dy=nx^{n-1}dx$
2.	$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=nx^{n-1}$	$dy=nx^{n-1}dx$
3.	$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$	$dy=-\dfrac{dx}{x^2}$
4.	$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$dy=-\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
5.	$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	$dy=a^x\ln a dx$
6.	$y=e^x$	$y'=e^x$	$dy=e^x dx$
7.	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$dy=\dfrac{dx}{x}$
8.	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$dy=\dfrac{dx}{x\ln a}$
9.	$y=ctgx$	$y'=\cos x$	$dy=\cos xdx$
10.	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$dy=-\sin xdx$
11.	$y=tgx$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$dy=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$
12.	$y=ctgx$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$dy=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

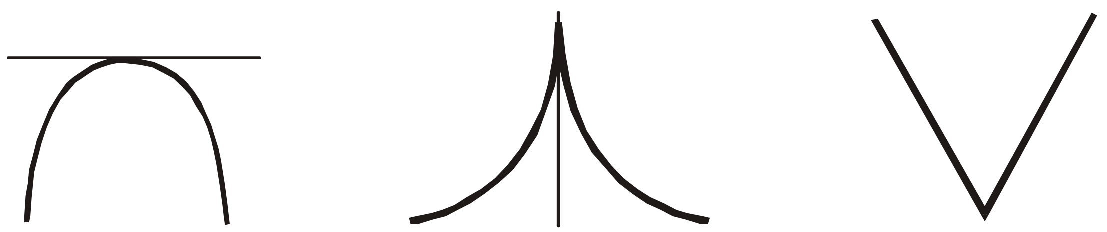
13.	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$y=arctgx$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$dy=\frac{dx}{1+x^2}$
16.	$y=arcctg\,x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$	$dy=-\frac{dx}{1+x^2}$

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, якщо остання границя існує (a - скінченне число або нескінченність).

Невизначеності типу $0\cdot\infty, \infty\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^0$ зводяться до невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$ шляхом алгебраїчних перетворень.

Ознаки зростання і спадання функції:
якщо $f'(x)>0$ на (a,b), то функція $f(x)$ **зростає** на цьому інтервалі;
якщо $f'(x)<0$ на (a,b), то $f(x)$ **спадає** на цьому інтервалі.
Інтервали зростання та спадання функції називаються **інтервалами монотонності**.

Функція $y=f(x)$ досягає в точці $x=x_0$ **локального максимуму** (max) (**локального мінімуму** (min)), якщо існує такий $\varepsilon-$окіл точки x_0 $U(x_0,\varepsilon)$, що для будь-якого $x_0\in U(x_0,\varepsilon)$ виконується нерівність $f(x)\le f(x_0)(f(x)\ge f(x_0))$. Точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$ називаються точками **локального екстремуму**.



а) б) в)

Рис.24

Необхідна умова екстремуму. В точках екстремуму перша похідна дорівнює 0 або ∞, або не існує. Значення x, для яких $f'(x)=0, f'(x)=\infty, f'(x)$ не існує, називаються **критичними точками першого роду**; корені рівняння

$f'(x)=0$ називаються також **стаціонарними точками**. В критичних точках дотична до кривої $y=f(x)$ або горизонтальна, або вертикальна, або двостороння (рис.24). В критичній точці не обов'язково існує екстремум (рис.25).

Перша достатня умова екстремуму. Якщо при переході через точку $x=x_0$ похідна диференційовної функції $y=f(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точка ***max*** функції, а якщо з мінуса на плюс, то – точка ***min*** (рис.24). Якщо похідна не змінює знак, то екстремуму немає (рис.25).

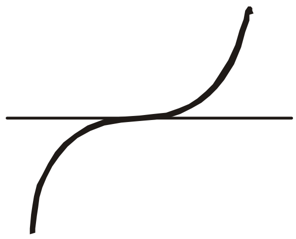


Рис.25

Друга достатня умова екстремуму. Якщо $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)>0$, то $x=x_0$ є точка ***min***, а якщо $f''(x_0)<0$, то $x=x_0$ - точка ***max***.

Найбільше і найменше значення неперервної функції на відрізку. Для знаходження цих значень слід користуватися такою схемою:

- знайти похідну $f'(x)$;
- знайти всі критичні точки функції $f(x)$;
- обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізку і вибрати найбільше $f_{найб}$ і найменше $f_{найм}$ значення.

Опуклість і угнутість кривої. Точки перегину. Нехай $f(x)$ диференційовна функція на деякому інтервалі. Графік функції називається **опуклим** (**угнутим**) на цьому інтервалі, якщо він розташований нижче дотичних (вище дотичних), проведених в будь-яких його точках (рис.26).

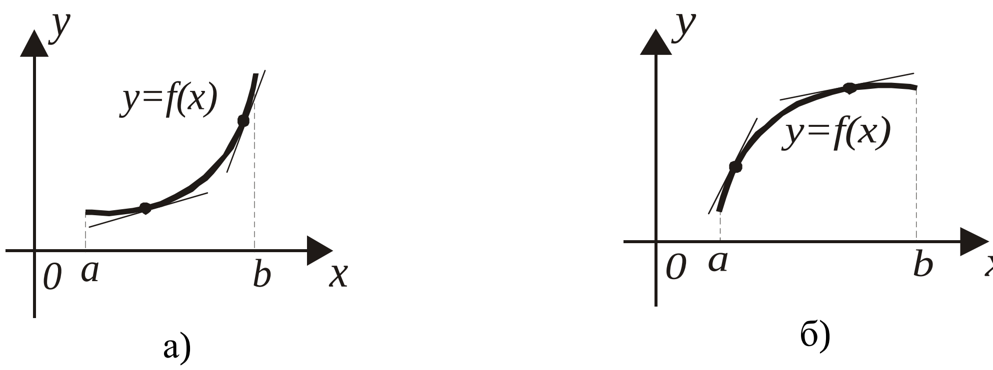
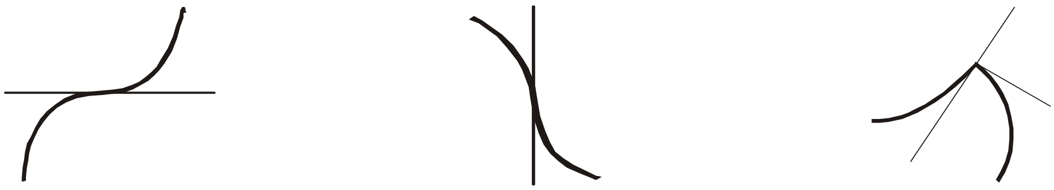


Рис.26

Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка функції, в якій графік змінює свою опуклість на угнутість і навпаки, називається **точкою перегину**.

Достатні умови опуклості (угнутості) графіка функції. Якщо друга похідна $f''(x)$ двічі диференційовної функції на деякому інтервалі від'ємна $f''(x)<0$ (додатна $f''(x)>0$), то графік функції опуклий (угнутий) на цьому інтервалі.

Необхідні умови існування точки перегину. В точці перегину графіка функції друга похідна дорівнює або 0, або ∞, або не існує. Значення x, для яких $f'(x)=0, f'(x)=\infty, f'(x)$ не існує, називаються критичними точками другого роду (рис.27).



а) б) в)

Рис.27

Достатня умова існування точки перегину. Якщо при переході через критичну точку другого роду друга похідна функції $f''(x)$ змінює знак, то ця точка є точкою перегину кривої (графіка функції $f(x)$).

Схема повного дослідження функції і побудови її графіка.

– визначити область існування функції;
– дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
– знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
– дослідити точки розриву функції, якщо вони існують, знайти вертикальні асимптоти;
– знайти похилі асимптоти, а у випадку їх відсутності дослідити поведінку функції при $x\to\pm\infty$;
– визначити інтервали зростання та спадання функції та її екстремуми;
– визначити інтервали опуклості та угнутості графіка функції і його точки перегину.

Індивідуальне завдання

1.1 Елементи лінійної алгебри

Задача 1. Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & -c & -a \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} c & a \\ b & c \\ a & b \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} m & c & -n \\ n & -b & -m \\ k & a & c \end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix} a & -b & c & m \\ n & k & -a & b \\ -c & n & b & k \\ b & -m & n & a \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) $A+nC$; б) B^T ; в) $B^T B$; г) A^2; д) $|F|$.

Задача 2. Дано систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Довести її сумісність і розв'язати трьома способами – методом Гауса, за правилом Крамера, засобами матричного числення:

$$\begin{cases} mx+ay+cz=cn; \\ kx+ny+mz=ak; \\ nx-by-az=bm. \end{cases}$$

Задача 3. Дослідити сумісність та знайти загальний і один частинний розв'язок систем:

а) $\begin{cases} ax+by+cz=m, \\ (c-a)x+(n-b)y+(k-c)z=b, \\ cx+ny+kz=m-b; \end{cases}$

б) $\begin{cases} bx-cy-cnz=bm, \\ nx+cy-bcz=mn, \\ (n-b)x+2cy+c(n-b)z=m(n-b). \end{cases}$

1.2 Елементи векторної алгебри

Задача 1. Дано вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ такі, що $|\vec{x}|=|\vec{y}|=|c|$, $(\vec{x},\vec{y})=60^\circ$.

Знайти:

а) $(n\vec{x}+k\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})$;

б) $|(b\vec{x}+\vec{y})\times(a\vec{x}+m\vec{y})|$;

в) косинус кута між векторами $a\vec{x}+\vec{y}$ і $\vec{x}+a\vec{y}$.

Задача 2. Дано чотири точки: $A(m;c;-k-n)$; $B(m;k^2+k+c;0)$; $C(m+k+n;k+c;-k-n)$; $D(2m;c;m-k-n)$ $(k\neq -n)$.

Знайти:

а) $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}|$; б) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}$; в) $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|$;

г) площу трикутника ABC;

д) об’єм піраміди $DABC$;
е) відстань від точки D до площини ABC.

1.3 Елементи аналітичної геометрії

Задача 1. Дано три точки: $M_1(c;b;c); M_2(n+c;b;n+c); M_3(c;m+b;a+c)$.

Написати:

а) рівняння площини, що проходить через ці три точки;

б) рівняння площини, що проходить через точки M_2 і M_3 паралельно вектору $\vec{q}=(n;-m;n)$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно площинам $nx-my+(n-a)z+b=0$ і $nx+nz+k=0$.

Задача 2. Знайти відстань від точки $M(ac;ac;-c)$ до площини $ax+(a+1)y+(a^2+a)z+c(a+1)=0$.

Задача 3. Дано трикутник ABC з вершинами $A(b;-m); B(-m;-b)$ і $C(0;b)$. Написати:

а) рівняння медіани AM;

б) рівняння висоти AD і знайти її довжину.

Задача 4. Знайти координати проекції точки $M(a-b^2;-b)$ на пряму $by-ax+a^3=0$.

Задача 5. Знайти кут між прямою, що проходить через точки $A(a-m;b;n)$ і $B(a;b+c;n+m)$ та площиною $mx+cy+mz+k=0$.

Задача 6. Написати рівняння кола, що проходить через точку $(n;-m)$ з центром у точці $(m;n)$.

1.4 Вступ до математичного аналізу

Задача 1. Знайти зазначені границі:

а) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2-(a-1)x-a}$;

б) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(kx+b)^2}{cx^2+n}$;

в) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+bx}-\sqrt{1-bx}}{kx}$;

г) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{cx-1}{cx+1}\right)^{kx}$;

д) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\ln(1+nx)}$.

Задача 2. Дослідити задані функції на неперервність:

а) $y=e^{\frac{k}{x-m}}$ в точках $x_1=m, x_2=b, x_3=-n$;

б) $y=\begin{cases} x+b & при\, x\le k, \\ a & при\; k<x<k+2, \\ c^2-x^2 & при\; x\ge k+2. \end{cases}$.

1.5 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1. Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ для функцій:

а) $y=\dfrac{\sqrt{a^2x^2-ax+1}}{x}$;

б) $\begin{cases} x=a\cos bt, \\ y=b\sin at. \end{cases}$;

в) $(x+a)^4+(y+b)^4=(x+a)^2(y+b)^2$;

г) $y=(arctg\, c^2x)^{kx}$.

Задача 2. Обчислити похідну y' функцій:

а) $y=\left(ax-\dfrac{a}{k}\right)\cdot e^{kx-mk}$ у точці $x=m$;

б) $y=\ln(x^3-3c^2x)-\dfrac{nc}{x}$ у точці $x=c$.

Задача 3. Знайти похідну $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=e^{a(x+b)^2}$.

Задача 4. Обчислити задані границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx-kx}{nx-\sin nx}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(kx+c)}{cx^{m^2}+ax}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-\cos bx}{e^{nx}-\cos nx}$.

Задача 5. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y=(x-k+1)^3(x+a)$ у точці $x=k$.

Задача 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=e^{-m^2x^2}$ на проміжку $[-a^2, n^2]$.

Задача 7. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

а) $y=mx^3+kx^2$; б) $y=\dfrac{a}{x^2-(k+c)x+kc}$.

Зразок виконання індивідуального завдання

Нехай $a=2; b=-3; c=1; m=-1; n=4; k=-5.$

1. Елементи лінійної алгебри

Задача 1. При заданих значеннях параметрів маємо:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) $A+4C$; б) B^T ; в) $B^T B$; г) A^2; д) $|F|$.

Розв'язання

а) При додаванні двох матриць додаються їх відповідні елементи, а при множенні на число всі елементи матриці помножаються на це число. Тому

$$A+4C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 4 & -16 \\ 16 & 12 & 4 \\ 20 & 8 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2+(-4) & -3+4 & 1+(-16) \\ 1+16 & 2+12 & -3+4 \\ -3+20 & -1+8 & -2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -15 \\ 17 & 14 & 1 \\ 17 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) B^T є матриця транспонована до матриці B, тому її рядки є стовпцями матриці B зі збереженням порядку розміщення:

$$B^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

в) Матриці B^T і B узгоджені, тому їх можна перемножити

$$B^T B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-3)\cdot(-3)+2\cdot 2 & 1\cdot 2+(-3)\cdot 1+2\cdot(-3) \\ 2\cdot 1+1\cdot(-3)+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+(-3)\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}.$$

г) $$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-3)\cdot 1+1\cdot(-3) \\ 1\cdot 2+2\cdot 1+(-3)\cdot(-3) \\ (-3)\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \left.\begin{matrix} 2\cdot(-3)+(-3)\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+(-3)\cdot(-3)+1\cdot(-2) \\ 1\cdot(-3)+2\cdot 2+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot(-3)+(-3)\cdot(-2) \\ (-3)\cdot(-3)+(-1)\cdot 2+(-2)\cdot(-1) & (-3)\cdot 1+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-2) \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -13 & 9 \\ 13 & 4 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

д) Спосіб I. Розкладемо визначник за елементами першого стовпця

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + A_{31}\cdot A_{31} + A_{41}\cdot A_{41}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента першого стовпця

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-3)\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot(-3) + (-2)\cdot(-5)\cdot 1 - (-3)\cdot(-3)\cdot 1 - 4\cdot(-5)\cdot(-5) -$$

$$-4\cdot(-2)\cdot 2 = -101;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -[3\cdot(-3)\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot(-5) - 1\cdot(-3)\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 2 - 4\cdot(-5)\cdot 3] = -10;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot 2 + (-5)\cdot 4\cdot(-1) + 1\cdot(-3)\cdot 1 - (-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 4\cdot(-3)\cdot 3 -$$

$$-(-5)\cdot 1\cdot 2 = 49;$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = [3\cdot(-2)\cdot(-5) + 1\cdot(-3)\cdot 4 + (-5)\cdot(-3)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot(-5)\cdot(-5) -$$

$$-3\cdot(-3)\cdot 3] = 57.$$

Отже маємо $|F| = 2\cdot(-101) + 4\cdot(-10) + (-1)\cdot 49 + (-3)\cdot 57 = -462$.

Спосіб II. Використаємо метод зниження порядку, який базується на застосуванні правила обчислення визначників розкладанням за елементами деякого рядка(стовпця). Але при цьому заздалегідь, використовуючи властивість визначників про лінійну комбінацію елементів рядків(стовпців), перетворюємо в нулі усі, крім одного, елементи деякого рядка(стовпця). Нам зручно зробити це з першим рядком, залишивши тільки третій її елемент. Третій стовпець послідовно помножимо на (-2), (-3), 1 і додамо відповідно, до першого, другого та четвертого стовпців

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & -2 & -5 \\ 5 & 13 & -3 & -8 \\ -11 & -11 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 \\ 5 & 13 & -8 \\ -11 & -11 & 6 \end{vmatrix}.$$

Далі знову перетворюємо на нулі усі, окрім другого, елементи першого рядка

$$|F|=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 \\ 5 & 13 & -8 \\ -11 & -11 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -99 & 13 & 57 \\ 77 & -11 & -49 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -99 & 57 \\ 77 & -49 \end{vmatrix}=$$

$$-[(-99)\cdot(-49)-77\cdot 57]=-462.$$

Задача 2. Дано систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Довести її сумісність і розв'язати трьома способами – методом Гаусса, за правилом Крамера, засобами матричного числення:

$$\begin{cases} -x+2y+z=4, \\ -5x+4y-z=-10, \\ 4x+3y-2z=3. \end{cases}$$

Розв'язання

Спосіб I. Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до східчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків, які вказано справа, де S_i позначено і-й рядок матриці.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 4 & -1 & -10 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_2-5S_1 \\ S_3+4S_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & -30 \\ 0 & 11 & 2 & 19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_2:(-6) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 2 & 19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_3-11S_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -36 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ S_1\cdot(-1) \\ S_3:(-9) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Оскільки кількість ненульових рядків матриці системи і розширеної матриці співпадають, то ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці. За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має єдиний розв'язок. Таким чином, за методом Гаусса одержуємо перетворену систему у вигляді:

$$\begin{cases} x-2y-z=-4, \\ \quad y+z=5, \\ \qquad z=4. \end{cases}$$

Звідки $z=4, y=5-z=5-4=1, x=-4+2y+z=-4+2+4=2$.

Відповідь: $(2;1;4)$.

Спосіб II. При розв'язуванні системи за правилом Крамера необхідно, щоб визначник системи Δ не дорівнював нулю. Знайдемо визначники $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$. Якщо $\Delta \neq 0$, то розв'язок системи визначимо за формулами:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ -5 & 4 & -1\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ -6 & 6 & 0\\ 2 & 7 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6 & 6\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-42-12=-54,$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ -10 & 4 & -1\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ -6 & 6 & 0\\ 11 & 7 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6 & 6\\ 11 & 7\end{vmatrix}=-42-66=-108,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\ -5 & -10 & -1\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\ -6 & 6 & 0\\ 2 & 11 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6 & 6\\ 2 & 11\end{vmatrix}=-66+12=-54,$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ -5 & 4 & -10\\ 4 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 6 & -30\\ 0 & 11 & 29\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-6 & 30\\ 11 & 29\end{vmatrix}=-(114+330)=-216.$$

$$x=\frac{-108}{-54}=2,\quad y=\frac{-54}{-54}=1,\quad z=\frac{-216}{-54}=4.$$

Відповідь: $(2;1;4)$.

Спосіб ІІІ. Запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -5 & 4 & -1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4\\ -10\\ 3\end{pmatrix}.$$

$$AX=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow EX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

Розв'язання матричним способом можливо, лише коли матриця системи A не вироджена. В нашому випадку вона є такою, бо її визначник $|A|=\Delta=-54\neq 0$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Для цього відшукаємо алгебраїчні доповнення $A_{ij}\ (1\le i\le 3,\cdots 1\le j\le 3)$.

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-8+3=-5, A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-4-3)=7, A_{31}=+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-2-4=-6,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-5 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-(10+4)=-14,\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=2-4=-2,$$
$$A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & -1\end{vmatrix}=-(1+5)=-6,\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}-5 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-15-16=-31,$$
$$A_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-(-3-8)=11,\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -5 & 4\end{vmatrix}=-4+10=6,$$
$$A^{-1}=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-5 & 7 & -6\\ -14 & -2 & -6\\ -31 & 11 & 6\end{pmatrix}$$

Обчислимо добуток $A^{-1}A$, щоб впевнитись, що матриця A^{-1} знайдена правильно.

$$A^{-1}A=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-5 & 7 & -6\\ -14 & -2 & -6\\ -31 & 11 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -5 & 4 & -1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-54 & 0 & 0\\ 0 & -54 & 0\\ 0 & 0 & -54\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

Тоді

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-5 & 7 & -6\\ -14 & -2 & -6\\ -31 & 11 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -10\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-108\\ -54\\ -216\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$$

Відповідь: $(2;1;4)$.

Задача 3. Дослідити сумісність та знайти загальний і один частинний розв’язок системи рівнянь:

а) $\begin{cases}2x-3y+z=-1,\\ -x+7y-6z=-3,\\ x+4y-5z=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-3x-y-4z=3,\\ 4x+y+3z=-4,\\ 7x+2y+7z=-7.\end{cases}$

Розв’язання

а) Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & -1\\ -1 & 7 & -6 & -3\\ 1 & 4 & -5 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -5 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -1\\ -1 & 7 & -6 & -3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ S_2-2S_1\sim\\ S_3+S_1\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & | & 2 \\ 0 & -11 & 11 & | & -5 \\ 0 & 11 & -11 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ S_3+S_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & | & 2 \\ 0 & -11 & 11 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Одержали, що ранг матриці системи не дорівнює рангу розширеної матриці. За теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна.

Відповідь: система розв'язку не має.

б) Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого виду:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 & | & 3 \\ 4 & 1 & 3 & | & -4 \\ 7 & 2 & 7 & | & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ S_1+S_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 4 & 1 & 3 & | & -4 \\ 7 & 2 & 7 & | & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ S_2-4S_1 \\ S_3-7S_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 0 \\ 0 & 2 & 14 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ S_3-2S_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Одержали, що ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриц. За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна. Оскільки система містить 3 невідомих, а її ранг дорівнює 2, то маємо одну вільну невідому (3-2=1). Нехай вільною невідомою буде $z=t$, де $t \in R$. Тоді перетворена система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x-t=-1, \\ y+7t=0. \end{cases}.$$

Звідки маємо $x=-1+t, y=-7t$, тобто загальний розв'язок системи $(-1+t;-7t;t)$. Для знаходження частинного розв'язку покладемо $t=2$. Тоді $x=-1+2=1, y=-7\cdot 2=-14, z=2$.

Відповідь: система сумісна; загальний розв'язок $(-1+t;-7t;t), t\in R$. Частинний розв'язок - $(1;-14;2)$.

1.2 Елементи векторної алгебри

Задача 1. Дано вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ такі, що $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$, $(\vec{x},\vec{y})=60^\circ$. Знайти:

а) скалярний добуток $(4\vec{x}-5\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})$;

б) модуль векторного добутку $(-3\vec{x}+\vec{y})\times(2\vec{x}-\vec{y})$;

в) косинус кута між векторами $2\vec{x}+\vec{y}$ і $\vec{x}+2\vec{y}$.

Розв'язання.

а) На підставі означення і властивостей скалярного добутку векторів, які задані як направлені відрізки, матимемо:

$$(4\vec{x}-5\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})=4(\vec{x}\cdot\vec{y})-4(\vec{x}\cdot\vec{x})-5(\vec{y}\cdot\vec{y})+5(\vec{y}\cdot\vec{x})=4|\vec{x}||\vec{y}|\cos 60^\circ-$$

$$-4|\vec{x}|^2-5|\vec{y}|^2+5|\vec{y}||\vec{x}|\cos 60^\circ=4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-4\cdot 1-5\cdot 1+5\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}-9=-\frac{9}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{9}{2}$.

б) На підставі означення і властивостей векторного добутку двох векторів, які задані як направлені відрізки, матимемо:

$$\left|(-3\vec{x}+\vec{y})\times(2\vec{x}-\vec{y})\right|=\left|-6(\vec{x}\times\vec{x})+3(\vec{x}\times\vec{y})+2(\vec{y}\times\vec{x})-\vec{y}\times\vec{y}\right|=$$

$$=\left|-6\cdot\vec{0}+3(\vec{x}\times\vec{y})-2(\vec{x}\times\vec{y})-\vec{0}\right|=\left|\vec{x}\times\vec{y}\right|=|\vec{x}||\vec{y}|\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

в) Для обчислення косинуса кута φ між заданими векторами скористаємося формулами

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ і } |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\ .$$

Тоді

$$\cos\varphi=\frac{(2\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+2\vec{y})}{|2\vec{x}+\vec{y}||\vec{x}+2\vec{y}|}=\frac{2(\vec{x}\cdot\vec{x})+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{y}\cdot\vec{x})+2(\vec{y}\cdot\vec{y})}{\sqrt{(2\vec{x}+\vec{y})^2}\sqrt{(\vec{x}+2\vec{y})^2}}=$$

$$=\frac{2|\vec{x}|^2+5|\vec{x}||\vec{y}|\cos 60^\circ+2|\vec{y}|^2}{\sqrt{4\vec{x}^2+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+\vec{y}^2}\sqrt{\vec{x}^2+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+4\vec{y}^2}}=$$

$$\frac{2+5\cdot\frac{1}{2}+2}{\sqrt{4|\vec{x}|^2+4|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos 60^\circ+|\vec{y}|^2}\sqrt{|\vec{x}|^2+4|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos 60^\circ+4|\vec{y}|^2}}=$$

$$=\frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{4+4\cdot\frac{1}{2}+1}\sqrt{1+4\cdot\frac{1}{2}+4}}=\frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{13}{14}\,.$$

Відповідь: $\dfrac{13}{14}$.

Задача 2. Дано чотири точки: $A(-1;1;1); B(-1;21;0); C(-2;-4;1);\quad D(-2;1;0)$.

Знайти: а) довжину $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$;

б) скалярний добуток $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}$;

в) модуль векторного добутку $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$

г) площу трикутника ABC;

д) об’єм піраміди $DABC$;

е) відстань від точки D до площини ABC.

Розв’язання

Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}$, які задані координатами початку і кінця. Тоді

$\overrightarrow{AC}=(-2-(-1);-4-1;1-1)=(-1;-5;0)$,

$\overrightarrow{AB}=(-1-(-1);21-1;0-1)=(0;20;-1)$,

$\overrightarrow{AD}=(-2-(-1);1-1;0-1)=(-1;0;-1)$,

$\overrightarrow{CD}=(-2-(-2);1-(-4);0-1)=(0;5;-1)$.

Виходячи із дій над векторами, що задані координатами в ортонормованому базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

а) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=(-1+0;-5+5;0-1)=(-1;0;-1)$,

$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Відповідь: $\sqrt{2}$.

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=(-1+0;0+20;-1+(-1))=(-1;20;-2)$,

$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\cdot(-1)+20\cdot(-5)+(-2)\cdot 0=1-100=-99$.

Відповідь: -99.

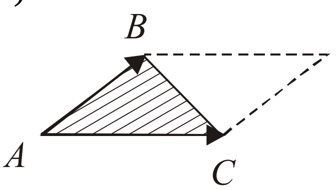
в)

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -5 & 0\\ 0 & 20 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 20 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 0 & 20\end{vmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}-20\vec{k}=(5;-1;-20);$$

$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-20)^2}=\sqrt{426}$.

Відповідь: $\sqrt{426}$.

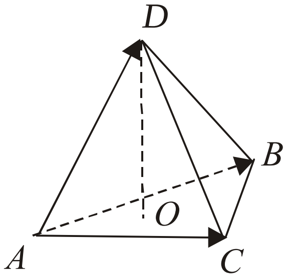
г)



Для знаходження площі трикутника скористуємось властивостями векторного добутка. Площа ΔABC дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$, який уже обчислено: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{426}$ (кв.од).

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{426}$ кв.од.

д)



Об'єм піраміди обчислюємо через модуль мішаного добутку:

$V_{nip}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|$,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}0 & 20 & -1\\ -1 & -5 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}_{S_3-S_2}=\begin{vmatrix}0 & 20 & -1\\ -1 & -5 & 0\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix}20 & -1\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-20+5=-15,$$

$V_{піp}=\frac{1}{6}\left|-15\right|=\frac{5}{2}$ (куб.од.)

Відповідь: $\frac{5}{2}$ куб.од.

е)Відстань від точки D до площини ABC дорівнює висоті піраміди OD. Об'єм піраміди можна обчислити через її висоту за формулою:

$V_{піp}=\frac{1}{3}S_{осн}H\Rightarrow H=OD=\frac{3V_{піp}}{S_{осн}}$. Вище знайдено $V_{піp}=\frac{5}{2}$ куб.од.,

$S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{426}$ кв.од. Звідси $OD=\frac{3\cdot\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{426}}=\frac{15}{\sqrt{426}}$ (лін.од.)

Відповідь: $\frac{15}{\sqrt{426}}$ лін.од.

1.3 Елементи аналітичної геометрії

Задача 1. Дано три точки: $M_1(1;-3;1); M_2(5;-3;5); M_3(1;-4;3)$

Написати:

а) рівняння площини, що проходить через ці три точки;

б) рівняння площини, що проходить через точки M_2 і M_3 паралельно вектору $\vec{q}=(4;1;4)$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно площинам $4x+y+2z-3=0$ і $4x+4z-5=0$.

Розв'язання

а) Запишемо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1); M_2(x_2;y_2;z_2); M_3(x_3;y_3;z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

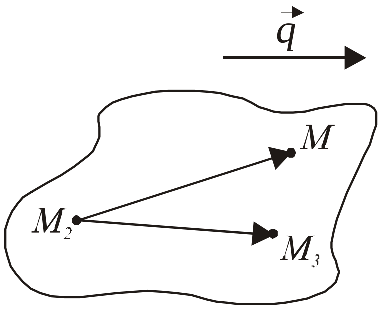
Підставимо в це рівняння відповідні значення $x_i, y_i, z_i\ (i=1,2,3)$ При цьому одержимо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 5-1 & -3+3 & 5-1 \\ 1-1 & -4+3 & 3-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1)-8(y+3)-4(z-1)=0\Rightarrow x-2y-z-6=0.$$

Відповідь: $x-2y-z-6=0$.

б) Шукана площина проходить через точки $M_2(5;-3;5)\,і\,M_3(1;-4;3)$ і тоді в ній лежить вектор $\overrightarrow{M_2M_3}=(1-5;-4+3;3-5)=(-4;-1;-2)$. Якщо $M(x,y,z)$ - довільна точка цієї площини, то вектор $\overrightarrow{M_2M}=(x-5;y+3;z-5)$ також належатиме цій площині. За умовою вектор $\vec{q}=(4;1;4)$ паралельний шуканій площині. Тобто



вектори $\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2M_3}$ і $\vec{q}$ компланарні, значить, їх мішаний добуток дорівнює нулю. Ця умова і визначає рівняння шуканої площини

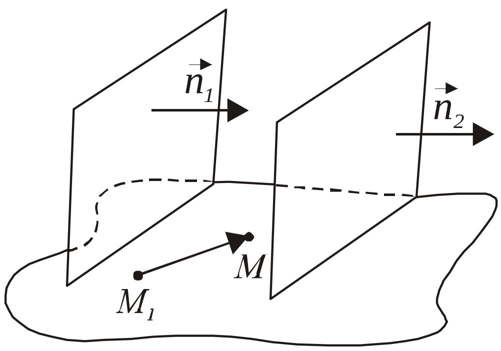
$$\overrightarrow{M_2M}\cdot\overrightarrow{M_2M_3}\cdot\vec{q}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-5\\ -4 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-5)\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}+(z-5)\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow-2(x-5)+8(y+3)=0\Rightarrow x-4y-17=0$.

Відповідь: $x-4y-17=0$.

в)



Шукана площина проходить через точку $M_1(1;-3;1)$ і якщо $M(x,y,z)$ - довільна її точка, то вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-1,y+3,z-1)$ лежатиме в цій площині. За умовою шукана площина перпендикулярна двом площинам, а це означає, що нормальні вектори цих площин $\vec{n}_1=(4,1,2)$ і $\vec{n}_2=(4,0,4)$ будуть паралельні шуканій площині. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M},\vec{n}_1,\vec{n}_2$ - компланарні і їх мішаний добуток дорівнює нулю. Із цієї умови одержуємо рівняння шуканої площини.

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1\\ 4 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow4(x-1)-8(y+3)-4(z-1)=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow x-2y-z-6=0$.

Відповідь: $x-2y-z-6=0$.

Задача 2. Знайти відстань від точки $M(2;2;-1)$ до площини $2x+3y+6z+3=0$.

Розв'язання.

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини, заданої рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, обчислюється за формулою

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

У нашому випадку

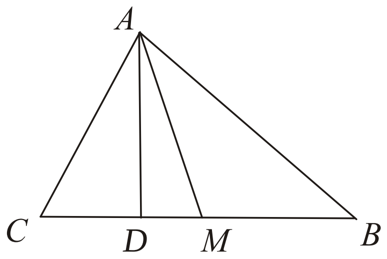
$$\rho=\frac{|2\cdot2+3\cdot2+6\cdot(-1)+3|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{7}{\sqrt{49}}=1 \text{ (лін. од.)}$$

Відповідь: 1 лін. од.

Задача 3. Дано трикутник ABC з вершинами $A(-3;1); B(1;3)$ і $C(0;-3)$. Написати:

а) рівняння медіани AM;

б) рівняння висоти AD і знайти її довжину.



Розв'язання.

а) Медіана AM проходить через дві точки $A(-3;1)$ і $M(x_M, y_M)$ і ділить сторону CB пополам. Тоді точка M є серединою відрізка CB і її координати знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2}, y_M = \frac{y_C + y_B}{2}.$$

Отже, $x_M = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, y_M = \frac{-3+3}{2} = 0, M(\frac{1}{2}, 0)$. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

У відповідності з цим рівняння медіани AM буде:

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \frac{x+3}{\frac{1}{2}+3} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \frac{2}{7}(x+3) = -(y-1) \Rightarrow 2x + 7y - 1 = 0.$$

Відповідь: $2x + 7y - 1 = 0$.

б) Висота трикутника AD, що проведена із вершини $A(-3,1)$, перпендикулярна стороні CB. Тоді її рівняння будемо розшукувати у вигляді:

$$y - y_A = k_{AD}(x - x_A).$$

Оскільки прямі AD і CB перпендикулярні, то $k_{AD} = -\frac{1}{k_{CB}}$ (умова перпендикулярності). Рівняння прямої CB записуємо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $C(0,-3)$ і $B(1,3)$:

$$\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C} \Rightarrow \frac{x-0}{1-0} = \frac{y+3}{3+3} \Rightarrow 6x - y - 3 = 0 \Rightarrow k_{CB} = 6 \Rightarrow k_{AD} = -\frac{1}{6}.$$

Рівняння висоти AD набуває вигляду:

$$y - 1 = -\frac{1}{6}(x+3) \text{ або } x + 6y - 3 = 0.$$

Для знаходження довжини висоти AD скористуємося тим, що вона дорівнює відстані від точки A до прямої CD, яка обчислюється за формулою:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

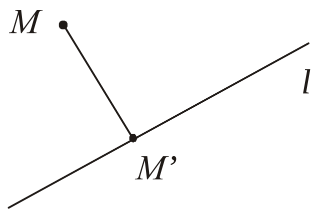
де $M_0(x_0, y_0)$ - точка, відстань від якої до прямої, заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$. Тоді довжина висоти AD буде дорівнювати:

$$AD=\frac{|6\cdot(-3)-1\cdot1-3|}{\sqrt{6^2+1}}=\frac{22}{\sqrt{37}}$$ (лін. од).

Відповідь: $x+6y-3=0$; $\frac{22}{\sqrt{37}}$ лін. од.

Задача 4. Знайти координати проекції точки $M(-7;3)$ на пряму $2x+3y-8=0$.

Розв’язання.



Проекцією M' точки M на пряму l є основа перпендикуляра MM', який опущено з точки M на цю пряму. Координати точки M' можна знайти як координати точки перетину прямої MM' і заданої прямої l. Запишемо рівняння прямої MM' у вигляді $y-y_M=k_{MM'}(x-x_M)$.

$k_{MM'}=-\frac{1}{k_l}$ - (умова перпендикулярності прямих).

Перепишемо рівняння прямої l у виді:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}.$$

Тоді $k_l=-\frac{2}{3}$, а $k_{MM'}=\frac{3}{2}$.

Рівняння прямої MM' буде

$$y-3=\frac{3}{2}(x+7)\Rightarrow 2y-3x-27=0.$$

Знайдемо точку перетину прямих MM' і l. Для цього розв’яжемо за правилом Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases}2y-3x=27,\\ 3y+2x=8.\end{cases}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4+9=13, \Delta y=\begin{vmatrix}27 & -3\\ 8 & 2\end{vmatrix}=54+24=78, \Delta x=\begin{vmatrix}2 & 27\\ 3 & 8\end{vmatrix}=16-81=-65.$$

Тоді $y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{78}{13}=6, x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-65}{13}=-5$.

Відповідь: (-5;6).

Задача 5. Знайти кут між прямою, що проходить через точки $A(3;-3;4)$ і $B(2;-2;3)$ та площиною $-x+y-z-5=0$.

Розв’язання.

Якщо $\vec{n}=(A,B,C)$ - нормальний вектор площини, а $\vec{S}=(m,n,p)$ - напрямний вектор прямої, то величина кута φ між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{S}|}{|\vec{n}||\vec{S}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Для заданої площини нормальний вектор $\vec{n}=(-1;1;-1)$.

А за напрямний вектор заданої прямої можна взяти вектор $\overrightarrow{AB}$:

$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(2-3;-2-(-3);3-4)=(-1;1;-1)$.

Тоді $\sin\varphi=\dfrac{|(-1)(-1)+1\cdot1+(-1)(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=1$.

Звідси $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 6. Написати рівняння кола, що проходить через точку $(4;1)$ з центром у точці $(-1;4)$.

Розв’язання.

Запишемо рівняння кола у вигляді:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, де

$(x_0;y_0)$ - координати центру кола, а R - його радіус. Оскільки центр шуканого кола задано, то рівняння набуває вигляду:

$(x+1)^2+(y-4)^2=R^2$

і містить одне невідоме значення R. Підставимо в останнє рівняння координати точки, через яку проходить коло. Тоді $5^2+3^2=R^2 \Rightarrow R^2=34$.

Одержуємо $(x+1)^2+(y-4)^2=34$.

Відповідь: $(x+1)^2+(y-4)^2=34$.

1.4 Вступ до математичного аналізу

Задача 1. Знайти зазначені границі:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-5x-3)^2}{x^2+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(-x)}{\ln(1+4x)}$.

Розв’язання.

а) Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладаємо чисельник і знаменник на найпростіші множники і одержимо

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

б) В цьому прикладі маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$.

Спосіб 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x-3)^2}{x^2+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{25x^2+30x+9}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(25+30\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2})}{x^2(1+4\cdot\frac{1}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{25+30\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}}{1+4\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{25+30\cdot0+9\cdot0}{1+4\cdot0}=\frac{25}{1}=25$$

Скористались тим, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Спосіб 2. При розв'язанні цього прикладу можна скористатися еквівалентністю нескінченно великих величин, а саме:

$25x^2+30x+9\sim25x^2$ при $x\to\infty$,

$x^2+4\sim x^2$ при $x\to\infty$

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-5x-3)^2}{x^2+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^2+30x+9}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^2}{x^2}=25.$

Відповідь: 25.

в) У виразі $\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}$ помножимо чисельник і знаменник на спряжений чисельнику вираз $\sqrt{1-3x}+\sqrt{1-3x}$. Тоді одержимо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}{-5x}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x})(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{1-3x-(1+3x)}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{-6x}{x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}=$$

$$\frac{6}{5}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}=\left(1^{-\infty}\right).$

Перетворимо вираз $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}$ так, щоб скористатися другою важливою границею $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$.

$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2}{x+1}\cdot(-5x)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+1}}=$$

$$=e^{10\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}=e^{10\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}}=e^{10\cdot\frac{1}{1+0}}=e^{10}.$$

д) При обчисленні цієї границі скористуємось еквівалентністю нескінченно малих величин

$\sin(-x)_{x\to 0}\sim -x$, $\ln(1+4x)_{x\to 0}\sim 4x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

Задача 2. Дослідити задані функції на неперервність:

а) $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ в точках $x_1=-1, x_2=-3, x_3=-4$;

б) $y=\begin{cases} x-3 \quad \text{при}\, x\le -5, \\ 2 \quad \text{при}\, -5<x<-3. \\ 1-x^2 \quad \text{при}\, x\ge -3 \end{cases}$

Розв'язання

а) В точці $x_1=-1$ функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ має розрив, оскільки при $x=-1$ знаменник виразу $-\frac{5}{x+1}$ дорівнює нулю.

Знайдемо границі зліва і справа від точки $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to -1+0} y=\lim\limits_{x\to -1+0} e^{-\frac{5}{x+1}}=0$, тому що $\lim\limits_{x\to -1+0}\left(-\frac{5}{x+1}\right)=\left(-\frac{5}{+0}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -1-0} y=\lim\limits_{x\to -1-0} e^{-\frac{5}{x+1}}=+\infty$, тому що $\lim\limits_{x\to -1-0}\left(-\frac{5}{x+1}\right)=\left(-\frac{5}{-0}\right)=+\infty$.

Таким чином, границя функції справа від точки $x=-1$ існує і дорівнює 0, границя зліва від точки $x=-1$ нескінченна і дорівнює $+\infty$. Отже, в точці $x=-1$ функція $y=e^{-\frac{5}{x+1}}$ має розрив другого роду (нескінченний).

При $x_2=-3$ і $x_3=-4$ функція неперервна, тому що

$\lim\limits_{x\to -3} e^{-\frac{5}{x+1}}=e^{-\frac{5}{-3+1}}=e^{-\frac{5}{2}}=y(-3)$;

$$\lim_{x\to -4} e^{-\frac{5}{x+1}} = e^{-\frac{5}{-4+1}} = e^{-\frac{5}{3}} = y(-4);.$$

Відповідь: функція $y = e^{-\frac{5}{x+1}}$ розривна в точці $x = -1$ і неперервна при $x_2 = -3$ і $x_3 = -4$.

б) Точки $x_1 = -5$ і $x_2 = -3$ є підозрілими на розрив. Обчислимо в цих точках однобічні границі і значення функції.

$$\lim_{x\to -5-0} f(x) = \lim_{x\to -5-0}(x-3) = -8;\ \lim_{x\to -5+0} f(x) = \lim_{x\to -5+0} 2 = 2;\ f(-5) = -5-3 = -8.$$

Оскільки обидві однобічні границі існують, але $\lim\limits_{x\to -5-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -5+0} f(x)$, то в точці $x = -5$ маємо розрив І-го роду.

$$\lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} 2 = 2;\ \lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0}(1-x^2) = 1-9 = -8;\ f(-3) = 1-9 = -8.$$

Одержали, що $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3+0} f(x)$, тобто в точці $x = -3$ функція також має розрив першого роду.

Відповідь: $x = -5$ і $x = -3$ є точками розриву І-го роду.

1.5 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1. Знайти похідну $y' = \dfrac{dy}{dx}$ для функцій:

а) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}{x}$; б) $\begin{cases} x = 2\cos(-3t), \\ y = -3\sin 2t. \end{cases}$;

в) $(x+2)^4 + (y-3)^4 = (x+2)^2 (y-3)^2$; г) $y = (arctg\, x)^{-5x}$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої функції, суми і частки, одержуємо:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{4x^2-2x+1}\right)' x - x'\sqrt{4x^2-2x+1}}{x^2} = \frac{\dfrac{8x-2}{2\sqrt{4x^2-2x+1}} x - \sqrt{4x^2-2x+1}}{x^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - x - (4x^2-2x+1)}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}} = \frac{x-1}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}}$$

Відповідь: $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

б) Формула для знаходження першої похідної функції, що задана параметрично, має вид:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Послідовно знаходимо

$y'_t = -3\cos 2t \cdot 2 = -6\cos 2t$,

$x'_t = 2(-\sin(-3t))\cdot(-3) = -6\sin 3t$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{-6\cos 2t}{-6\sin 3t} = \frac{\cos 2t}{\sin 3t}$.

Відповідь: $\frac{\cos 2t}{\sin 3t}$.

в) Для диференціювання функції, яка задана неявно, візьмемо похідні по x від обох частин рівності

$4(x+2)^3 + 4(y-3)^3 y' = 2(x+2)(y-3)^2 + 2(y-3)y'(x+2)^2$.

Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$2(y-3)^3 y' - (y-3)y'(x+2)^2 = (x+2)(y-3)^2 - 2(x+2)^3$.

Звідки $y' = \frac{(x+2)\left[(y-3)^2 - 2(x+2)^2\right]}{(y-3)\left[2(y-3)^2 - (x+2)^2\right]}$.

Відповідь: $\frac{(x+2)\left[(y-3)^2 - 2(x+2)^2\right]}{(y-3)\left[2(y-3)^2 - (x+2)^2\right]}$.

г) Для диференціювання степенево-показникових функцій можна скористатись логарифмічним диференціюванням. Прологарифмуємо обидві частини початкового виразу:

$\ln y = -5x \ln arctgx$. Візьмемо від обох частин рівності похідну по x:

$\frac{1}{y}y' = -5\left(\ln arctgx + \frac{x}{arctgx(1+x^2)}\right)$. Звідси $y' = -5y\left(\ln arctgx + \frac{x}{arctgx(1+x^2)}\right)$.

Відповідь: $-5(arctgx)^{-5x}\left(\ln arctgx + \frac{x}{(1+x^2)arctgx}\right)$.

Задача 2. Обчислити похідну y' функцій:

а) $y = \left(2x + \frac{2}{5}\right)\cdot e^{-5x-5}$ у точці $x = -1$;

б) $y = \ln(x^3 - 3x) - \frac{4}{x}$ у точці $x = 1$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, показникової функції і добутку, одержуємо:

$y' = 2e^{-5x-5} + \left(2x + \frac{2}{5}\right)e^{-5x-5}\cdot(-5) = e^{-5x-5}(2 - 10x - 2) = -10xe^{-5x-5}$. Обчислюємо значення y' в точці $x = -1$: $y'(-1) = -10\cdot(-1)e^{-5(-1)-5} = 10e^{5-5} = 10e^0 = 10$.

Відповідь: 10.

б) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої та логарифмічної функцій та суми, одержуємо:

$y' = \frac{1}{x^3 - 3x}\cdot(3x^2 - 3) + \frac{4}{x^2}$.

Обчислюємо значення похідної в точці $x=1$.

$$y'(1)=\frac{1}{1^3-3\cdot 1}\cdot(3\cdot 1-3)+\frac{4}{1}=-\frac{1}{2}\cdot 0+4=4.$$

Відповідь: 4.

Задача 3. Знайти похідну $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=e^{2(x-3)^2}$.

Розв'язання.

Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої і показникової функцій, одержуємо:

$$y'=e^{2(x-3)^2}\cdot 4(x-3),$$

$$y''=(y')'=4\left[e^{2(x-3)^2}\cdot 4(x-3)^2+e^{2(x-3)^2}\right]=4e^{2(x-3)^2}\left[4(x-3)^2+1\right].$$

Відповідь: $4e^{2(x-3)^2}\left[4(x-3)^2+1\right]$.

Задача 4. Обчислити задані границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(-5x)+5x}{4x-\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(-5x+1)}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-\cos 3x}{e^{4x}-\cos 4x}$.

Розв'язання.

а) Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Застосовуємо правило Лопіталя тричі і одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(-5x)+5x}{4x-\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{[tg(-5x)+5x]'}{(4x-\sin 4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2(-5x)}(-5)+5}{4-4\cos 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5+5\cos^2 5x}{\cos^2 5x(4-4\cos 4x)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-1}{1-\cos 4x}=\frac{5}{4}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-1}{1-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 5x-1)'}{(1-\cos 4x)'}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 5x(-\sin 5x)5}{4\sin 4x}=\frac{5}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)\lim_{x\to 0}\cos 5x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=-\frac{25}{8}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sin 4x)'}=-\frac{25}{8}\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{4\cos 4x}=-\frac{125}{32}.$$

Відповідь: $-\frac{125}{32}$.

б) Маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Застосовуємо правило Лопіталя і одержуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(-5x+1)}{3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(-5x+1))'}{(3x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-5}{1-5x}}{3}=\frac{-5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-5x}=\frac{5}{3}\cdot 0=0.$$

Відповідь: 0.

в) Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Застосовуємо правило Лопіталя і одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-\cos 3x}{e^{4x}-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-3x}-\cos 3x)'}{(e^{4x}-\cos 4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-3e^{-3x}+3\sin 3x}{4e^{4x}+4\sin 4x}=$$

$$=\frac{-3\cdot 1+3\cdot 0}{4\cdot 1+4\cdot 0}=-\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{3}{4}$.

Задача 5. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y=(x+6)^3(x+2)$ у точці $x=-5$.

Розв’язання.

Рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ записується формулою $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, де $y_0=f(x_0)$.

Знайдемо y': $y'=3(x+6)^2(x+2)+(x+6)^3$. Обчислимо значення y і y' в точці $x=-5$:

$y(-5)=(-5+6)^3(-5+2)=-3,$

$y'(-5)=3(-5+6)^2(-5+2)+(-5+6)^3=-9+1=-8$.

Підставимо одержані значення у формулу $y+3=-8(x+5)$.

Отже, дотична має рівняння $8x+y+43=0$.

Задача 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=e^{-x^2}$ на проміжку $[-4,16]$.

Розв’язання.

Знайдемо критичні точки заданої функції. $y'=e^{-x^2}(-2x)\Rightarrow x=0$ - критична точка, яка належить проміжку [-4;16]. Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях проміжку [-4;16].

$y(0)=e^0=1;\ y(-4)=e^{-16};\ y(16)=e^{-256}$.

Тоді $y_{\text{найб}}=1$, $y_{\text{найм}}=e^{-256}$.

Відповідь: 1; e^{-256}.

Задача 7. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

а) $y=-x^3-5x^2$; б) $y=\frac{2}{x^2+4x-5}$.

Розв’язання.

а) Дана функція є многочленом, тому вона визначена та неперервна на всій числовій осі OX, тобто $x\in R$. Функція не є ні парною, ні непарною, оскільки

$$y(-x)=-(-x)^3-5(-x)^2=x^3-5x^2\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}.$$

Для знаходження точок перетину графіка функції з осями координат покладемо

$x=0 \Rightarrow y=0; y=0 \Rightarrow x=0\, i\; x=-5$.

Функція неперіодична.

Знайдемо інтервали монотонності функції та екстремуми.

$y'=-3x^2-10x=-x(3x+10)$;

$y'=0$ при $x_1=-\dfrac{10}{3}$ і $x_2=0$.

Стаціонарні точки функції ділять числову вісь на три інтервали монотонності: $(-\infty;-\frac{10}{3}),(-\frac{10}{3};0),(0;\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному із цих інтервалів та екстремуми

x	$(-\infty;-\frac{10}{3})$	$-\frac{10}{3}$	$(-\frac{10}{3};0)$	0	$(0;\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	спадає	*min*	зростає	*max*	спадає

Отже, при $x=-\frac{10}{3}$ функція має мінімум, а при x=0 – максимум, причому

$$y_{\min}=y(-\frac{10}{3})=-\left(-\frac{10}{3}\right)^3-5\left(-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{1000}{27}-\frac{500}{9}=-\frac{500}{27}\approx-18{,}5;\; y_{\max}=y(0)=0.$$

Знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину.

$y''=-6x-10, y''=0$ при $x=-\dfrac{5}{3}$.

Точка $x=-\frac{5}{3}$ ділить числову вісь на два інтервали: $(-\infty;-\frac{5}{3}),(-\frac{5}{3};\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак другої похідної на кожному із цих інтервалів і точку перегину

x	$(-\infty;-\frac{5}{3})$	$-\frac{5}{3}$	$(-\frac{5}{3};\infty)$
y''	+	0	-
y	угнута	перегин	опукла

Отже, при $x=-\frac{5}{3}$ маємо точку перегину, причому

$$y(-\frac{5}{3})=-\left(-\frac{5}{3}\right)^3-5\left(-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{125}{27}-\frac{125}{9}=-\frac{250}{27}\approx-9.$$

Графік функції вертикальних асимптот не має, оскільки функція визначена для всіх $x\in R$. Для визначення рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$ скористуємося формулами

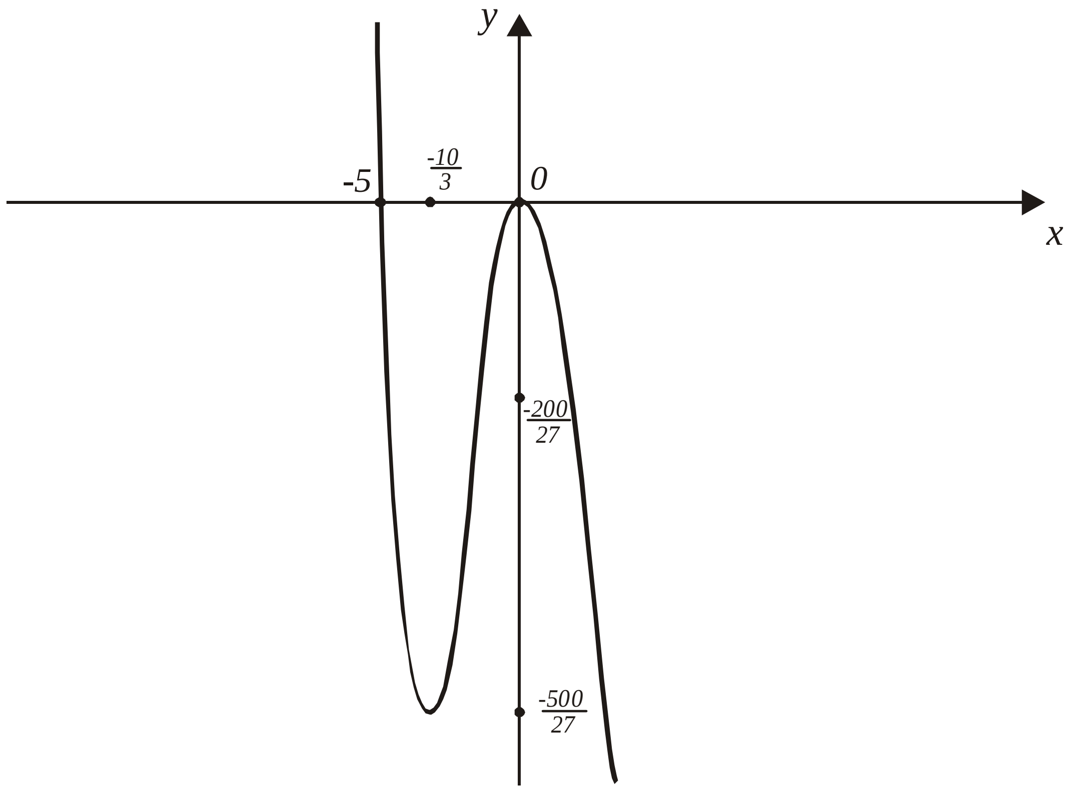
$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ і $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$.

Маємо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^3-5x^2}{x}=\mp\infty$.

А це означає, що похилих асимптот немає.

Встановимо поведінку функції на нескінченності:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^3-5x^2)=\mp\infty$. На основі отриманих даних будуємо графік функції



б) Дана функція визначена при всіх значеннях аргументу, крім тих, при яких знаменник x^2+4x-5 дорівнює нулю, тобто при $x=-5$ і $x=1$. Значить, область визначення складається із трьох інтервалів: $(-\infty;-5)\cup(-5;1)\cup(1;\infty)$.

Функція не є ні парною або непарною.

З віссю OX графік функції не перетинається. Якщо $x=0$, то $y=-\dfrac{2}{5}$.

Функція неперіодична.

Функція має нескінченні розриви при $x=-5$ і $x=1$, причому

$$\lim_{x\to-5-0} f(x)=\lim_{x\to-5-0}\frac{2}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to-5-0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{(-0)(-6)}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-5+0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{(+0)(-6)}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{6(-0)}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{2}{(x+5)(x-1)}=\left(\frac{2}{6(+0)}\right)=+\infty.$$

При всіх інших значеннях аргументу функція неперервна.
Оскільки в точках $x=-5$ і $x=1$ функція має нескінченний розрив, то прямі $x=-5$ і $x=1$ є вертикальні асимптоти для графіка функції. Для визначення рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$ скористуємося формулами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ і } b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx].$$

Маємо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{2}{x^2+4x-5}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x(x^2+4x-5)}=\left(\dfrac{2}{\infty}\right)=0.$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2+4x-5}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0.$$

Отже, графік функції похилої асимптоти не має, а пряма $y=0$ є його горизонтальною асимптотою.
Знайдемо інтервали монотонності функції та точки екстремуму.

$$y'=-\frac{2(2x+4)}{(x^2+4x-5)^2}.$$

$y'=0$ при $x=-2$,
$y'=\infty$ при $x=-5$ і $x=1$, які не належать області визначення, отже, ці точки не підлягають дослідженню.

Розіб'ємо числову вісь на чотири інтервали: $(-\infty;5),(-5;-2),(-2;1),(1;\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному із цих інтервалів та точки екстремуму.

x	$(-\infty;-5)$	-5	(-5; 2)	-2	(-2; 1)	1	$(1;\infty)$
y'	+	не існує	+	0	-	не існує	-
y	зростає	не існує	зростає	*max*	спадає	не існує	спадає

Отже, при $x=-2$ функція має максимум $y_{\max}=y(-2)=\dfrac{2}{(-2)^2+4(-2)-5}=-\dfrac{2}{9}$.

Знайдемо інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

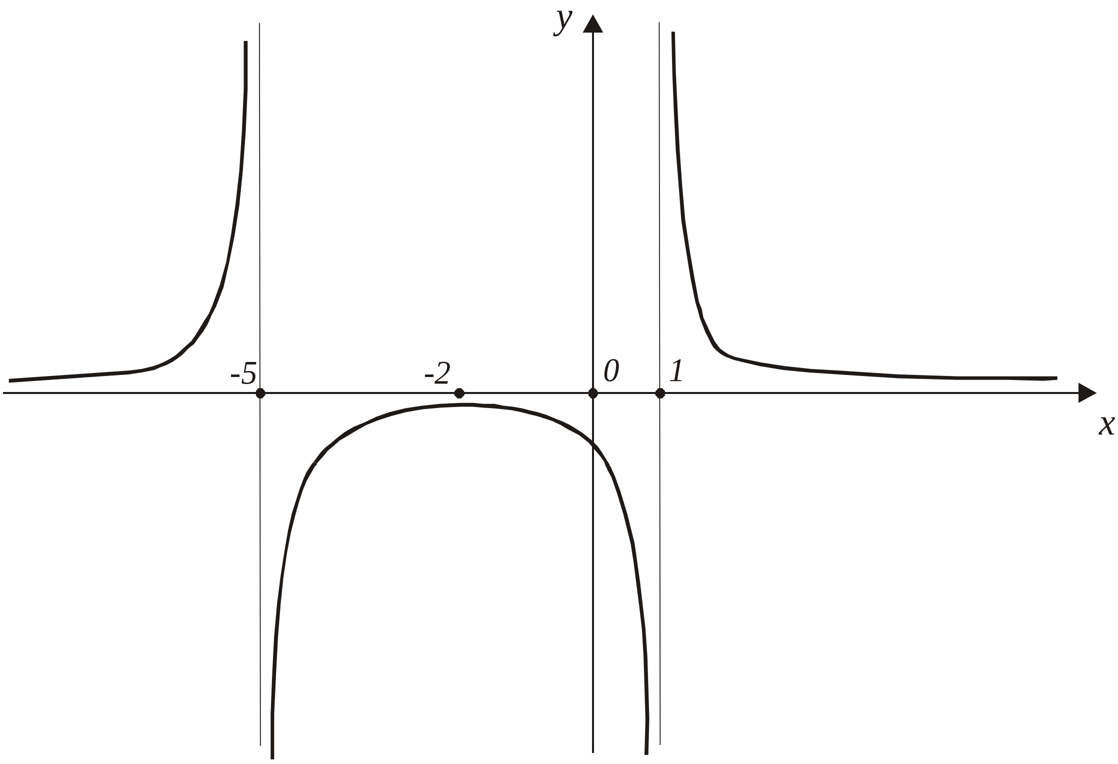
$$y''=-2\frac{2(x^2+4x-5)^2-2(x^2+4x-5)(2x+4)^2}{(x^2+4x-5)^4}=-4\cdot\frac{x^2+4x-5-4x^2-16x-16}{(x^2+4x-5)^3}=$$

$$=-4\frac{-3x^2-12x-21}{(x^2+4x-5)^3}=12\frac{x^2+4x+7}{(x^2+4x-5)^3},$$

$y''\neq 0$ ні при яких x.
Отже, точок перегину графік функції не має.
Складемо таблицю для визначення інтервалів опуклості і угнутості

x	$(-\infty;-5)$	(-5; 1)	$(1;+\infty)$
y''	+	-	-
y	угнута	опукла	угнута

На основі отриманих даних будуємо графік функції.



УЧБОВО-МЕТОДИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

1. Основна література

1. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. Ч.1/ За ред. проф. Г.Л.Кулініча, - К.: Либідь, 2006.
2. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. Ч.2/ За ред. проф. І.П.Васильченка, - К.: Либідь, 2006.
3. Корж А.П. Елементи аналітичної геометрії і лінійної алгебри. Студцентр. Харків, 2001.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: АСТ, Астрель, 2005.
5. Полевич В.В., Пархоменко Л.О. Вища математика: вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. Навч. посібник. ХДУХТ, Харків, 2010.

2. Додаткова література

6. Гула В.Г., Синєкоп М.С. та інш., Вища математика: Навч. посібник для самостійного вивчання курсів. ХДУХТ, Харків, 2007.
7. Данко Е.П., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах - М.: Оникс 21 век, 2008.
8. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Обший курс: Учеб.пособие / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина и др. - Мн.: Высш.шк, 2001.

3. Перелік методичних вказівок

9. Методичні вказівки для організації самостійної роботи студентів з курсу “Вища математика” за темою “Геометричні й фізичні додатки визначеного інтегралу” для студентів інженерних спеціальностей. Укладачі: Н.Я. Голубєва, В.В. Полевич, Д.О. Торяник., ХДАТОХ, 2003.
10. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу "Математика для економістів". Розділ: "Криві другого порядку". Укладачі: Півненко А.О., Синєкоп М.С., ХДАТОХ, 2002.
11. Методичні вказівки для організації самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з курсу "Вища математика". Тема : „Наближені методи розв’язання диференціальних рівнянь в частинних похідних” для спеціальності „Обладнання харчових виробництв” Укладачі: Кравченко Л.К., Півненко А.О., Синкоп М.С., ХДУХТ, 2004.

12. Методичні вказівки з самостійної роботи студентів. Модуль №1: "Лінійна алгебра", "Векторна алгебра", "Аналітична Геометрія". Тематичні тести. Укладачі: Кравченко Л.К., Голубєва Н.Я., Торяник Д.О., ХДУХТ, 2008.
13. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу "Вища математика". Модуль №2: "Вступ до математичного аналізу", "Диференціальне числення функцій однієї змінної та його застосування". Тестові завдання. Укладачі: Кравченко Л.К., Голубєва Н.Я., Торяник Д.О., ХДУХТ, 2009.
14. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу "Вища математика". Модуль №3: "Диференціальне числення функцій двох змінних". "Інтегрування функції однієї змінної". Тематичні тести. Укладачі: Кравченко Л.К., Голубєва Н.Я., Торяник Д.О., ХДУХТ, 2009.
15. Методичні вказівки: тематичні індивідуальні завдання та приклади розв’язання типових завдань з курсу "Вища математика". Укладачі: Радченко О.І., Гула В.Г., ХДУХТ, 2009.

Навчальне видання

Укладачі:
ТОРЯНИК Дмитро Олександрович
БОЙКО Наталія Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для організації самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з курсу
„Вища та прикладна математика”
Теми: "Елементи лінійної алгебри", "Елементи векторної алгебри", "Елементи аналітичної геометрії", "Вступ до математичного аналізу", "Диференціальне числення функцій однієї змінної"

Напрям підготовки: ***6.050301 „Товарознавство та комерційна діяльність”,***
6.050302 „Товарознавство та експертиза в митній справі”,
6.050303 „Експертиза товарів та послуг”

Підп. до друку р. Формат 60 x 84 Папір офсет. Др офс.
Обл.-вид.арк. Ум.фабр.-відб. Тираж прим. Зам

Харківський державний університет харчування та торгівлі
61051, Харків-51, вул. Клочківська, 333.

ДОД ХДУХТ. 61051, Харків-51, вул. Клочківська, 333.