МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧУВАННЯ
ТА ТОРГІВЛІ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
Для організації самостійної роботи та підготовки
до модульного контролю з дисципліни
«***Вища математика***»
Модуль № 2: «***Диференціальне числення функцій двох змінних***», « ***Інтегрування функції однієї змінної***», « ***Числові та функціональні ряди***», «***Диференціальні рівняння***»

Для студентів економічних спеціальностей

Харків 2011

Рекомендовано до видання
кафедрою вищої математики,
протокол № 8 від 4.02.2011

Схвалено науково-методичною
радою економічного
факультету, протокол № 7
від 15.02.2011

Рецензент: В.В. Полевич, д-р техн. наук, проф.

ПЕРЕДМОВА

Підготовка фахівців з усіх спеціальностей потребує знання вищої математики, яка є основою успішного засвоєння переважної більшості спеціальних дисциплін. Самостійно, без спеціальної системи підготовки студенту важко підготуватись до тестування з вищої математики. Велику допомогу в цьому надають навчально-методичні розробки кафедри. Враховуючи вище сказане, стає зрозумілим, яке велике значення мають методичні розробки з математики.

Тестування, яке проводитиметься на підставі однакових вимог і за однаковими процедурами, дає змогу отримувати об'єктивну оцінку знань студентів. Екзамен, проведений у формі тестування, повинен мати однакові вимоги до усіх студентів, тобто бути таким, який надасть достовірну інформацію про рівень їх підготовки. Програмні вимоги тестування відповідають робочим програмам дисципліни.

У запропонованій методичній розробці викладено вимоги, форму, структуру і зміст тестування. Вона містить розв'язання типових прикладів, тести та відповіді на них. Зміст кожного варіанту тесту складають двадцять п'ять завдань з різних розділів математики, які вивчалися у даному модулю. Кількість правильно розв'язаних завдань буде визначати рубіжну оцінку, наприклад, вісім - тринадцять – оцінка „3", чотирнадцять – дев'ятнадцять – оцінка „4", двадцять – двадцять шість – оцінка „5". Час на розв'язання завдань тесту рубіжного контролю знань обмежений.

Найважливіше завдання методичної розробки – допомогти студентам підготуватися до тестування з математики, а саме: перевірити відповідність знань, умінь та навичок програмним вимогам; виявити рівень навчальних досягнень; оцінити ступінь підготовки з курсу.

Запропоновані завдання, після їх ретельного опрацювання, дозволять оволодіти системою математичних знань, навичок і умінь, потрібних для вивчення спеціальних дисциплін; систематизувати уявлення про методи математики, її роль у пізнанні дійсності, у формуванні наукового світогляду; розвинути логічне мислення і просторові уявлення, підвищити алгоритмічну, інформаційну і графічну культуру, пам'ять, увагу, інтуїцію.

Двадцять шість завдань по двадцять шість варіантів тестів складені за темами в послідовності відповідно до програми з вищої математики, що є ефективним засобом для систематичного повторення і міцного засвоєння.

Методичка містить необхідний теоретичний матеріал (Довідник), до якого можна звертатись як на початку роботи з тестами, так і в процесі розв'язування завдань. Цей же теоретичний матеріал дозволить систематизувати знання з дисципліни при рубіжному контролі знань.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Нехай $z = arctg\frac{y}{x}$,

тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

далі

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot 2x = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 1 - y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 1 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot 2y = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Отже бачимо, що для функції $z = arctg\frac{y}{x}$ виконується рівність

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$

Знайдемо частинні похідні функції $f'_x=3x^2-3y;\ f'_y=3y^2-3x.$

Розв'яжемо систему рівнянь.

$$\begin{cases}3\left(x^2-y\right)=0,\\ 3\left(y^2-x\right)=0,\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x^2-y=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}$$

Визначаючи y з першого рівняння $y = x^2$ і підставляючи цей вираз у друге, матимемо: $x^4-x=0;\quad x\left(x^3-1\right)=0,\ x(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0,$ звідки $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Відповідні значення $y:\ y_1=0;\ y_2=1.$

Отже точки $M_1(0;0)$ і $M_2(1;1)$ – точки можливого екстремуму.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$f''_{xx}=6x;\quad f''_{xy}=-3;\quad f''_{yy}=6y.$ Для точки $M_1(0;0)$ обчислимо Δ_1:

$A_1 = f''_{xx}(0;0)=0;\ B_1 = f''_{xy}(0;0)=-3;\ C_1 = f''_{yy}(0;0)=0.$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & -3\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-9<0 \text{ – екстремуму немає.}$$

Для точки $M_2(1;1)$: $A_2 = f''_{xx}(1;1)=6;\ B_2=-3;\ C_2 = f''_{yy}(1;1)=6.$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{vmatrix}=36-9=27>0,\ A=6>0, \text{ тому в точці } M_2(1;1)$$

маємо мінімум, причому $f(1;1)=-1.$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\left(3x^2-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^4}+5\right)dx.$$

$$\int\left(3x^2-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^4}+5\right)dx=3\int x^2dx-2\int x^{\frac{2}{3}}dx+$$

$$+\int\frac{dx}{x}-3\int x^{-4}dx+5\int dx=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\ln|x|-3\cdot\frac{x^{-3}}{-3}+5x+C=$$

$$=x^3-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}+\ln|x|+\frac{1}{x^3}+5x+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int x\sqrt{x-5}dx.$

Нехай $\sqrt{x-5}=t,$ звідси $x=t^2+5,$ отже $dx=2tdt.$ Роблячи підстановку, маємо

$$\int x\sqrt{x-5}dx=\int\left(t^2+5\right)t\cdot 2tdt=\int\left(2t^4+10t^2\right)dt=$$

$$=2\int t^4dt+10\int t^2dt=2\frac{t^5}{5}+10\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5}+\frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3}+C.$$

Приклад 5. Знайти: *а*) $\int x\cos xdx;$ *б*) $\int \ln xdx.$

а) Покладемо $u=x, dv=\cos xdx.$ Тоді $du=dx;$ $v=\int\cos xdx=\sin x.$

Отже маємо:

$$\int x\cos xdx=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C.$$

б) Покладемо $u=\ln x,$ $dv=dx.$ тоді $du=\frac{dx}{x};$ $v=x.$

Маємо:

$$\int\ln xdx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$$

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $I=\int\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx.$

Дріб $\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}$ є неправильним.

Виділяємо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+x+2 & x^2-7x+12 \\ \cline{2-2} -\;\; x^3-7x^2+12x & x+7+\dfrac{38x-82}{x^2-7x+12} \\ \cline{1-1} 7x^2-11x+2 & \\ -\;\; 7x^2-49x+84 & \\ \cline{1-1} 38x-82 & \end{array}$$

$$I=\int\left(x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+7x+\int\frac{38x-82}{x^2-7x+12}dx.$$

Отже, інтеграл $\int \frac{38x-82}{x^2-7x+12}dx$ береться від правильного раціонального дробу $\frac{38x-82}{x^2-7x+12}$. Розкладемо його знаменник на лінійні множники:

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4).$$

Тоді заданий дріб набуває вигляду

$$\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-3)}{(x-3)(x-4)}.$$

Зводимо дроби правої частини до спільного знаменника і відкидаючи його, маємо $38x-82=A(x-4)+B(x-3)$.

Із рівності многочленів чисельників випливає рівність їхніх значень при однакових значеннях x:

$$x=3 \Rightarrow 114-82=A(-1);\ \ A=-32;$$
$$x=4 \Rightarrow 152-82=B;\ \ B=70.$$

Отже, $I=\frac{1}{2}x^2+7x-32\int\frac{dx}{x-3}+70\int\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{2}x^2+7x-$
$-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C.$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int \sin^4 x\cos^3 x dx.$

Запишемо, що $\cos^3 x=\cos^2 x\cdot\cos x=\left(1-\sin^2 x\right)\cos x.$
Застосовуючи підстановку $t=\sin x$, враховуючи, що $dx=\cos x dx.$ Маємо

$$\int \sin^4 x\cos^3 x dx=\int t^4\left(1-t^2\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$

Приклад 8. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}.$

Зробимо заміну $\frac{1-x}{1+x}=t^2$, звідки $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx=-\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)^2}$. Отже,

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=-4\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)\left(1-t^2\right)}=-2\int\frac{\left(t^2-1\right)+\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}dt=$$

$$2\int\frac{dt}{t^2+1}+2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\operatorname{arctg}t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

Приклад 9. Обчислити $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

Застосовуємо заміну змінної $x = \sin t.$ Маємо $dx = \cos t dt;$ коли x приймає значення на відрізку $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right],$ t змінюється на проміжку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right].$

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt}{\sin^2 t} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \cos t dt}{\sin^2 t} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt - \operatorname{ctg} t\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - t\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 10. Дослідити $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ на збіжність.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_{0}^{b}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right) =$$

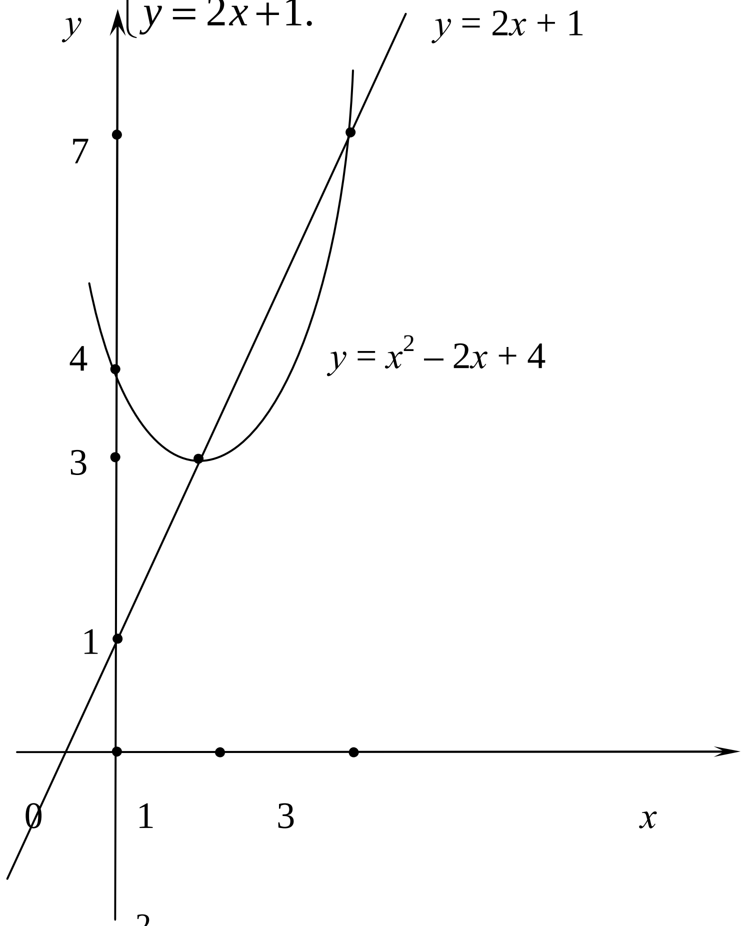
$$\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^b}\right) = 1.$$

Невласний інтеграл збіжний.

Приклад 11. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x + 4$ і прямою $y = 2x + 1.$

Знайдемо межі інтегрування, розв’язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$



$$x^2 - 2x + 4 = 2x + 1; \quad x^2 - 4x + 3 = 0; \;\; x_1 = 1; \;\; x_2 = 3.$$

Тоді

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx = \int_1^3 \left[2x + 1 - \left(x^2 - 2x + 4 \right) \right] dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3 \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4}{2} x^2 - 3x \right) \Bigg|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Приклад 12. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln(x+1)$ від точки $x = 0$ до точки $x = 1$.

Функція $y = \ln(x+1)$ неперервна і диференційована на відрізку [0, 1]. Отже

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}dx=\int_0^1\frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}{(x+1)^2}dx.$$

Нехай $x^2+2x+2=t^2$, тоді $2(x+1)dx=2tdt$, або $(x+1)dx=tdt$. Якщо $x=0$, тоді $t=\sqrt{2}$, якщо $x=1$, тоді $t=\sqrt{5}$.

Отже, дістанемо

$$l=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\left[t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

Приклад 13. Розв’язати рівняння $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}$.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Покладемо $y=uv$, маємо

$$u'v+uv'+\frac{1}{x}uv=\frac{1}{x^2} \quad \text{або} \quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^2}.$$

Знаходимо будь-який частинний розв’язок рівняння

$$v'+\frac{v}{x}=0.$$

Інтегруючи, маємо

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x};\quad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x};\quad \ln v=-\ln x;\quad \ln v=\ln\frac{1}{x},$$

звідки $v=\frac{1}{x}$.

Тоді маємо

$$\frac{1}{x}u'=\frac{1}{x^2},\quad u'=\frac{1}{x},$$

звідси $du=\frac{dx}{x}$, $\int du=\int\frac{dx}{x}$, $u=\ln|x|+C$. Отже, загальний розв’язок має вигляд

$$y = \frac{\ln|x| + C}{x}.$$

Приклад 14. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = \cos x$.

Відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

має характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$, корені якого дійсні і рівні, тобто $k_1 = k_2 = 2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$u = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_1 = A\cos x + B\sin x.$$

Підставляючи в дане рівняння значення y, y', y'', маємо:

$$-A\cos x - B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x + 4A\cos x + 4B\sin x = \cos x.$$

Звідки, прирівнюючи коефіцієнти правої і лівої частин при $\cos x$ та $\sin x$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3A - 4B = 1, \\ 4A + 3B = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці рівняння сумісно, знаходимо:

$$A = \frac{3}{25}; \quad B = -\frac{4}{25}.$$

Отже, $y_1 = \dfrac{3}{25}\cos x - \dfrac{4}{25}\sin x$.

Звідси загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x.$$

Приклад 15. Дослідити збіжність ряду

$$2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

Скористаємося ознакою Даламбера

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

Маємо $l < 1$, отже досліджуваний ряд – збіжний.

Приклад 16. Знайти область збіжності ряду

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\ldots$$

Згідно з ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|.$$

При $|x|<1$ ряд збіжний абсолютно, а при $|x|>1$ розбіжний. Отже, інтервал $-1<x<1$ або інтервал (–1, 1) є інтервалом збіжності. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу: при x = 1 одержимо гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, який, як відомо, є розбіжним; при x = –1 маємо ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$, який збіжний умовно, оскільки задовольняє умовам ознаки Лейбніца. Отже, область збіжності даного степеневого ряду визначається подвійною нерівністю $-1\le x<1$.

Приклад 17. Розкласти до степеневого ряду функцію $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при x = 0:

$f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$; $\qquad f(0)=\left(\frac{5}{2}\right)^0=1$;

$f'(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x\ln\frac{5}{2}$; $\qquad f'(0)=\ln\frac{5}{2}$;

$f''(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x\ln^2\frac{5}{2}$; $\qquad f''(0)=\ln^2\frac{5}{2}$;

.... $\qquad$ ....

$f^{(n)}(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x\ln^n\frac{5}{2}$; $\qquad f^{(n)}(0)=\ln^n\frac{5}{2}$.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x=1+x\cdot\ln\frac{5}{2}+\frac{x^2\cdot\ln^2\frac{5}{2}}{2!}+\frac{x^3\cdot\ln\frac{35}{2}}{3!}+\ldots,\quad -\infty<x<\infty.$$

Диференціальне числення функцій двох змінних

Завдання № 1

№	*Умова*	*Знайти*
1	$z=\ln\left(y^2+x^2\right)$	$D(z)$ – область визначення функції
2	$z=4x+y/(2x-5y)$	$D(z)$ – область визначення функції
3	$z=5/\left(4-x^2-y^2\right)$	$D(z)$ – область визначення функції
4	$z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$	$D(z)$ – область визначення функції
5	$z=\arcsin(2x-y)$	$D(z)$ – область визначення функції
6	$z=4xy/(x-3y+1)$	$D(z)$ – область визначення функції
7	$z=\sqrt{x+y}$	$D(z)$ – область визначення функції
8	$z=\ln(2x-y)$	$D(z)$ – область визначення функції
9	$z=e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$	$D(z)$ – область визначення функції
10	$z=\sqrt{2x^2-y^2}$	$D(z)$ – область визначення функції
11	$z=1/\left(x^2+y^2-6\right)$	$D(z)$ – область визначення функції
12	$z=\sqrt{3-x^2-y^2}$	$D(z)$ – область визначення функції
13	$z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$	$D(z)$ – область визначення функції

14	$z = 2/\left(6 - x^2 - y^2\right)$	$D(z)$ – область визначення функції
15	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$	$D(z)$ – область визначення функції
16	$z = \arccos(x + y)$	$D(z)$ – область визначення функції
17	$z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$	$D(z)$ – область визначення функції
18	$z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$	$D(z)$ – область визначення функції
19	$z = \arcsin\dfrac{y}{x}$	$D(z)$ – область визначення функції
20	$z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}}$	$D(z)$ – область визначення функції
21	$z = \sqrt{\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} - 1}$	$D(z)$ – область визначення функції
22	$z = \dfrac{x}{x + y}$	$D(z)$ – область визначення функції
23	$z = \sqrt{xy}$	$D(z)$ – область визначення функції
24	$z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$	$D(z)$ – область визначення функції
25	$z = \ln(y + x)$	$D(z)$ – область визначення функції
26	$z = \dfrac{y}{y - x}$	$D(z)$ – область визначення функції

Диференціальне числення функцій двох змінних

Завдання № 2

№	*Умова*	*Знайти*
1	$z = \cos xy$	$z'_x,\ z'_y$
2	$z = \sin xy$	$z'_x,\ z'_y$
3	$z = e^{xy}$	$z'_x,\ z'_y$
4	$z = x^2 y^2$	$z'_x,\ z'_y$
5	$z = x^2 y^3$	$z'_x,\ z'_y$
6	$z = x^3 y^2$	$z'_x,\ z'_y$
7	$z = (5x + 3y)^2$	$z'_x,\ z'_y$
8	$z = \left(x^2 + y^2\right)^3$	$z'_x,\ z'_y$
9	$z = e^{x^2 + y^2}$	$z'_x,\ z'_y$
10	$z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$	$z'_x,\ z'_y$
11	$z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$	$z'_x,\ z'_y$
12	$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$	$z'_x,\ z'_y$
13	$z = \dfrac{x}{y}$	$z'_x,\ z'_y$

14	$z=\dfrac{y}{x}$	$z'_x,\ z'_y$
15	$z=(\cos x+\sin y)^2$	$z'_x,\ z'_y$
16	$z=\left(e^x+e^y\right)^3$	$z'_x,\ z'_y$
17	$z=\sqrt{x^3+y^3}$	$z'_x,\ z'_y$
18	$z=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$	$z'_x,\ z'_y$
19	$z=\cos\dfrac{y}{x}$	$z'_x,\ z'_y$
20	$z=\sin\dfrac{2x}{y}$	$z'_x,\ z'_y$
21	$z=arctgxy$	$z'_x,\ z'_y$
22	$z=e^{-2xy^2}$	$z'_x,\ z'_y$
23	$z=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2x}{y}$	$z'_x,\ z'_y$
24	$z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$z'_x,\ z'_y$
25	$z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$	$z'_x,\ z'_y$
26	$z=e^{x^3+y^3}$	$z'_x,\ z'_y$

Диференціальне числення функцій двох змінних

Завдання № 3

№	*Умова*	*Знайти*
1	$z = e^{\frac{y}{2x}}$	dz
2	$z = xe^{xy}$	dz
3	$z = \sqrt{\frac{x}{y}}$	dz
4	$z = arctgxxy$	dz
5	$z = ye^{2x-y}$	dz
6	$z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$	dz
7	$z = \frac{2xy}{y-x}$	dz
8	$z = \ln\left(x^2 + 2y\right)$	dz
9	$z = ye^{\frac{y}{x}}$	dz
10	$z = \sin^2(2x - y)$	dz
11	$z = x^{y^2}$	dz
12	$z = \sin x \cdot e^{2y}$	dz
13	$z = \cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$	dz

Продовження таблиці

14	$z=\ln\left(e^{x}+e^{y}\right)$	dz
15	$z=arctge^{xy}$	dz
16	$z=\dfrac{2}{\sqrt{xy}}$	dz
17	$z=\sin^2 y+\cos^2 x$	dz
18	$z=\dfrac{x+y}{xy}$	dz
19	$z=arctg\,\dfrac{x}{y}$	dz
20	$z=e^{\sqrt{xy}}$	dz
21	$z=y^2\cos 2x$	dz
22	$z=ye^{\frac{x}{y}}$	dz
23	$z=arctg\sqrt{xy}$	dz
24	$z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$	dz
25	$z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$	dz
26	$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$	dz

Диференціальне числення функцій двох змінних

Завдання № 4

№	*Умова*	*Знайти*
1	$z = x^3 - 3xy$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
2	$z = x^3 + 3xy$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
3	$z = 4xy - x^4$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
4	$z = 4xy - y^4$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
5	$z = x^3 + 3xy$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
6	$z = y^3 - 3xy$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
7	$z = y^5 - 5xy$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
8	$z = x^5 + 5xy$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
9	$z = 2\cos x + \sin y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
10	$z = \sin x + 2\cos y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
11	$z = e^{2x} + e^{-3y}$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
12	$z = e^{-3x} + e^{2y}$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
13	$z = e^x \cos y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

14	$z = e^{y} \sin x$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
15	$z = 5x^3 + 7y^3$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
16	$z = 3y^3 - 2x^3$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
17	$z = x^3 + 3x^2 y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
18	$z = xy^2 - x^3$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
19	$z = (x-1)^3 + x^2 y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
20	$z = yx^3 + (y-1)^2$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
21	$z = 2x^3 + x^2 y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
22	$z = e^{x} \cdot \cos 2y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
23	$z = (y+2)^3 + x^3$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
24	$z = e^{-3x} \sin 2y$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
25	$z = x^3 y^2 + y^3$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}
26	$z = 2\cos\frac{x}{2} + 3\sin\frac{y}{3}$	z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

Диференціальне числення функцій двох змінних

Завдання № 5

№	*Умова*	*Знайти*
1	$z=y^4-x^3y^2+7$	d^2z
2	$z=x^3-y^3+2x^2y^2$	d^2z
3	$z=\left(3x^2-y^2+x\right)^2$	d^2z
4	$z=2x^3y-4xy^5$	d^2z
5	$z=5xy^2-3x^3y^4$	d^2z
6	$z=\cos(3x+y)-x^2$	d^2z
7	$z=x^2\sin y-3xy^2$	d^2z
8	$z=y^2-3xy-x^4$	d^2z
9	$z=e^{x+y-5}+x^2y^2$	d^2z
10	$z=xy^3-2x^3y+2$	d^2z
11	$z=x^4y-4xy^2+1$	d^2z
12	$z=\left(3x^2-2y^2+1\right)^2$	d^2z
13	$z=4x^3y-(xy)^4$	d^2z

14	$z=e^{x-y}+x^3y^3$	d^2z
15	$z=3xy^4+x^2y^7$	d^2z
16	$z=x^5y-y^5x$	d^2z
17	$z=x^3+x^2y+y^2$	d^2z
18	$z=\dfrac{x^2}{y^2}$	d^2z
19	$z=e^{\frac{x-y}{2}}+x^2y^2$	d^2z
20	$z=\sin(ax+by)$	d^2z
21	$z=2x^2y^3-x^3$	d^2z
22	$z=\cos^2(2x-3y)$	d^2z
23	$z=\sin^2(x+2y)$	d^2z
24	$z=\left(\dfrac{1}{2}x+y+4\right)^3$	d^2z
25	$z=\dfrac{1-x^2}{2y+1}$	d^2z
26	$z=\dfrac{2-y^2}{1+2x}$	d^2z

Диференціальне числення функцій двох змінних

Завдання № 6

№	*Умова*	*Знайти*
1	$z = x^3 + 3xy$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
2	$z = x^4 - 2xy$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
3	$z = 3xy - y^3$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
4	$z = 4xy - x^4 + 2x^2$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
5	$z = x^4 + 3xy + 5$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
6	$z = y^3 + 5xy - 5$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
7	$z = y^3 - 2xy + 5$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
8	$z = x^3 + 4xy + 2x$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
9	$z = y^3 + 2y^2 - 4xy$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
10	$z = x^4 - 5xy - 2$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
11	$z = y^4 - 4(x + y) + 5$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
12	$z = 5 - 3(x + y) - x^3$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
13	$z = 6 + 4(x + y) - y^4$	(x_0, y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер

14	$z=(y+1)^3-5xy$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
15	$z=(x-1)^3+4xy$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
16	$z=x^3+6(x+y)-5$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
17	$z=(x-1)^2+2y^2$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
18	$z=(x-1)^2-2y^2$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
19	$z=x^2+xy+y^2-3x-6y$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
20	$z=x^2+xy+y^2-2x-y$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
21	$z=x^2-xy+y^2-2x+y$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
22	$z=2xy-2x-4y$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
23	$z=4(x-y)-x^2-y^2$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
24	$z=1+6x-x^2-xy-y^2$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
25	$z=2xy-4x-2y$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер
26	$z=x(3-x-y)+y(6-y)$	(x_0,y_0) – точку екстремуму функції і вказати його характер

Невизначений інтеграл

Завдання № 7

№	*Умова*	*Знайти*
1	$f(x)=5x^4+3x^2-1, F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
2	$f(x)=\frac{1}{x^2}+1,\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
3	$f(x)=3x^2-2x+1,\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
4	$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{x+1}},\ F(x)+C$ – первісні	$F(3)$
5	$f(x)=5x^4-6x^2+2,\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
6	$f(x)=1-\frac{1}{x^2},\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
7	$f(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}},\ F(x)+C$ – первісні	$F(4)$
8	$f(x)=9x^2-8x^3+1,\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
9	$f(x)=10x^9+\frac{2}{x^2},\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
10	$f(x)=2x+4x^2+\frac{1}{x},\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
11	$f(x)=3x^2-5x^4+e^x,\ F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
12	$f(x)=e^{-x}+2x-5x^4,\ F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
13	$f(x)=\frac{1}{x}+3-2x-3x^2,\ F(x)+C$ – первісні	$F(1)$

14	$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(8)$
15	$f(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(2)$
16	$f(x)=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
17	$f(x)=9(3x+1)^{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
18	$f(x)=6(2x+1)^{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
19	$f(x)=5-6x^{2}+\dfrac{1}{x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
20	$f(x)=6x^{5}+5x^{4}-7$, $F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
21	$f(x)=2-x+\dfrac{1}{x^{2}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
22	$f(x)=4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x\right)^{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
23	$f(x)=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^{2}dx$, $F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
24	$f(x)=\dfrac{x^{2}+2}{1+x^{2}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
25	$f(x)=\left(e^{-2x}+e^{2x}\right)^{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
26	$f(x)=\dfrac{xe^{x}-x}{x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$

Невизначений інтеграл

Завдання № 8

№	*Умова*	*Знайти*
1	$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
2	$f(x)=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$
3	$f(x)=2\sin 2x$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
4	$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
5	$f(x)=4\sin 4x$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
6	$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(\pi)$
7	$f(x)=3\cos 3x$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$
8	$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(\pi)$
9	$f(x)=\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{x}{3}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(\pi)$
10	$f(x)=10\cos 10x$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{20}\right)$
11	$f(x)=\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{x}{5}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(5\pi)$
12	$f(x)=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$
13	$f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

14	$f(x)=2\cos^2 x$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
15	$f(x)=2\sin^2 x$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
16	$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 2x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$
17	$f(x)=\sin 5x$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$
18	$f(x)=\cos 7x$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{14}\right)$
19	$f(x)=tg^2 x$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
20	$f(x)=\dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
21	$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
22	$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{x}{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
23	$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
24	$f(x)=\dfrac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
25	$f(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
26	$f(x)=x\cos\dfrac{x^2}{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$

Невизначений інтеграл

Завдання № 9

№	*Умова*	*Знайти*
1	$\int \frac{16\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{1}{2}\right)$
2	$\int \frac{2\ln x}{x}dx = F(x)+C$	$F(e)$
3	$\int 9\cos^2 3x \sin 3x dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{\pi}{3}\right)$
4	$\int \frac{6\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx = F(x)+C$	$F\left(-\frac{1}{3}\right)$
5	$\int \frac{8dx}{(2+x)^3}dx = F(x)+C$	$F(0)$
6	$\int \frac{64 arctg 2x}{1+4x^2}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{1}{2}\right)$
7	$\int \frac{6tg3x}{\cos^2 3x}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{\pi}{12}\right)$
8	$\int \frac{96 arcctg 3x}{1+9x^2}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{1}{3}\right)$
9	$\int 9\sin^2 3x \cos 3x dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{\pi}{6}\right)$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{(2+x)^3}} = F(x)+C$	$F(2)$
11	$\int \frac{4}{3}\left(1+e^{2x}\right)e^{2x} = F(x)+C$	$F(0)$
12	$\int \frac{96ctg3x}{\sin^2 3x}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{\pi}{12}\right)$
13	$\int \frac{24dx}{4+9x^2}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{2}{3}\right)$

14	$\int \frac{dx}{4x^2-9}dx = F(x)+C$	$F(0)$
15	$\int \frac{4dx}{\sqrt{9-4x^2}} = F(x)+C$	$F\left(\frac{3}{2}\right)$
16	$\int \frac{dx}{4-9x^2} = F(x)+C$	$F(0)$
17	$f(x)=\frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\frac{\pi}{4}\right)$
18	$f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(e)$
19	$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
20	$f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
21	$f(x)=\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1+x^2}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
22	$f(x)=\frac{(\ln x)^2+1}{x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(e)$
23	$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
24	$f(x)=\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
25	$f(x)=e^{-x^2}x$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
26	$f(x)=\frac{\cos x dx}{\sqrt{3+\sin x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Невизначений інтеграл

Завдання № 10

№	*Умова*	*Знайти*
1	$\int \frac{x}{x^2-1}dx = F(x)+C$	$F(0)$
2	$\int \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{ctgx}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{\pi}{4}\right)$
3	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-2}dx = F(x)+C$	$F(0)$
4	$\int \frac{x^3}{x^4+1}dx = F(x)+C$	$F(0)$
5	$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = F(x)+C$	$F(e)$
6	$\int \frac{e^x}{e^x-2}dx = F(x)+C$	$F(0)$
7	$\int \frac{x^2}{x^3-1}dx = F(x)+C$	$F(0)$
8	$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = F(x)+C$	$F(0)$
9	$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{\pi}{2}\right)$
10	$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx}dx = F(x)+C$	$F\left(\frac{\pi}{4}\right)$
11	$\int \frac{x-2}{x^2-4x+1}dx = F(x)+C$	$F(0)$
12	$\int \frac{e^{3x}}{2-e^{3x}}dx = F(x)+C$	$F(0)$
13	$\int \frac{x^4}{1-x^5}dx = F(x)+C$	$F(0)$

14	$\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}dx = F(x)+C$	$F(0)$
15	$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
16	$f(x)=\frac{4x}{3+4x^4}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
17	$f(x)=\frac{e^x \cdot \sqrt{arctgx}}{1+e^{2x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
18	$f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
19	$f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
20	$f(x)=(x^2+1)\cdot 8x$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
21	$f(x)=\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(1)$
22	$f(x)=\frac{3}{x\sqrt{\ln x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(e)$
23	$f(x)=x\cdot\cos\frac{x^2}{2}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
24	$f(x)=\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
25	$f(x)=\frac{3^x}{1+3^{2x}}$, $F(x)+C$ – первісні	$F(0)$
26	$f(x)=\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x)+C$ – первісні	$F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Невизначений інтеграл

Завдання №11

№	*Умова*	*Знайти*
1	$A=\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$	A
2	$A=\int\limits_0^{\infty}3e^{-3x}dx$	A
3	$A=\int\limits_0^{\infty}2xe^{-x^2}dx$	A
4	$A=\int\limits_e^{\infty}\frac{2dx}{x\ln^3 x}$	A
5	$A=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$	A
6	$A=\int\limits_0^{\infty}2e^{-2x}dx$	A
7	$A=\int\limits_0^{\infty}\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}$	A
8	$A=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$	A
9	$A=\int\limits_e^{\infty}\frac{3dx}{x\ln^4 x}$	A
10	$A=\int\limits_0^{\infty}\frac{2dx}{(x+2)^3}$	A
11	$A=\int\limits_0^{\infty}3x^2e^{-x^3}dx$	A
12	$A=\int\limits_0^{\infty}4e^{-4x}dx$	A
13	$A=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx$	A

14	$A=\int_0^{\infty}\frac{2xdx}{\left(x^2+2\right)^2}$	A
15	$A=\int_0^{\infty}\frac{3x^2dx}{\left(x^3+1\right)^2}$	A
16	$A=\int_0^{\infty}5e^{-5x}dx$	A
17	$A=\int_0^{\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx$	A
18	$A=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	A
19	$A=\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	A
20	$A=\int_4^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$	A
21	$A=\int_1^{\infty}\frac{x^2}{1+x^6}dx$	A
22	$A=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$	A
23	$A=\int_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$	A
24	$A=\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(4x^2+1\right)^3}}$	A
25	$A=\int_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}$	A
26	$A=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$	A

Визначений інтеграл

Завдання № 12

№	*Умова*	*Знайти*
1	$\int_{2}^{3} f(x)dx = 5$, $B = \int_{3}^{2} f(x)dx$	B
2	$\int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx = 2$, $B = \int_{2}^{4} f(x)dx$	B
3	$A = \int_{-2}^{2} f(x)dx$, де $f(x)$ – непарна функція	A
4	$\int_{-3}^{-1} f(x)dx = 2$, $B = \int_{-1}^{3} f(x)dx$	B
5	$\int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx = 3$, $B = \int_{3}^{1} f(x)dx$	B
6	$A = \int_{-3}^{3} f(x)dx$, де $f(x)$ – непарна функція	A
7	$\int_{2}^{4} f(x)dx = -4$, $B = \int_{4}^{2} f(x)dx$	B
8	$A = \int_{2}^{2} f(x)dx$	A
9	$\int_{-2}^{0} f(x)dx = 1$, $B = \int_{0}^{-2} f(x)dx$	B
10	$\int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx = 7$, $B = \int_{2}^{5} f(x)dx$	B
11	$\int_{0}^{3} f(x)dx = 2$, де $f(x)$ –непарна функція, $B = \int_{-3}^{3} f(x)dx$	B
12	$\int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = 8$, $B = \int_{4}^{1} f(x)dx$	B
13	$\int_{2}^{0} f(x)dx = 3$, $B = \int_{0}^{2} f(x)dx$	B

14	$A=\int_{-1}^{1}(arctg)^{99}dx$	A
15	$\int_{1}^{3}f(x)dx=7$, $B=\int_{3}^{1}f(x)dx$	B
16	$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{19}dx$	A
17	$\int_{2}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{8}f(x)dx=15$, $B=\int_{8}^{2}f(x)dx$	B
18	$A=\int_{-1}^{1}(arctgx)^{25}dx$	A
19	$\int_{-5}^{-2}f(x)dx=3$, $B=\int_{-2}^{-5}f(x)dx$	B
20	$\int_{1}^{0}f(x)dx=-3$, $B=\int_{0}^{1}f(x)dx$	B
21	$\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{7}f(x)dx=9$, $B=\int_{7}^{0}f(x)dx$	B
22	$A=\int_{5}^{5}f(x)dx$, де $f(x)$ – парна функція	A
23	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=1$, де $f(x)$ –непарна функція, $B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$	B
24	$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{25}dx$	A
25	$\int_{-3}^{0}f(x)dx=-4$, де $f(x)$ –непарна функція, $B=\int_{0}^{3}f(x)dx$	B
26	$A=\int_{3}^{3}f(x)dx$, де $f(x)$ – парна функція	A

Визначений інтеграл

Завдання № 13

№	*Умова*	*Знайти*
1	$A=\int\limits_{-5}^{0}\frac{3}{38}\sqrt{4-x}dx$	A
2	$A=\int\limits_{-8}^{2}\frac{5}{121}\sqrt[4]{8x+65}dx$	A
3	$A=\int\limits_{1}^{81}\frac{3dx}{104\sqrt[4]{x}}$	A
4	$A=\int\limits_{0}^{11}\frac{22dx}{\sqrt[5]{243-22x}}$	A
5	$A=\int\limits_{1}^{4}\frac{7}{254}x^{2}\sqrt{x}dx$	A
6	$A=\int\limits_{-27}^{8}\frac{1}{165}\sqrt[3]{x^{2}}dx$	A
7	$A=\int\limits_{10}^{78}\frac{dx}{\sqrt[4]{(8x+1)^{3}}}$	A
8	$A=\int\limits_{1}^{16}\frac{5}{124}\sqrt[4]{x}dx$	A
9	$A=\int\limits_{1}^{13}\frac{dx}{\sqrt{6x+3}}$	A
10	$A=\int\limits_{4}^{49}\frac{1}{5}\left(1-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)$	A
11	$A=\int\limits_{-4}^{16}\frac{dx}{2\sqrt{32-x}}$	A
12	$A=\int\limits_{5}^{2}\frac{3}{74}\sqrt{x+4}dx$	A
13	$A=\int\limits_{1}^{16}\frac{3}{169}\sqrt{65-x}dx$	A

14	$A=\int_{4}^{17}\frac{dx}{2\sqrt{32+x}}dx$	A
15	$A=\int_{1}^{8}\frac{5}{93}\sqrt[3]{x^2}\,dx$	A
16	$A=\int_{9}^{36}\frac{1}{21}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	A
17	$A=\int_{4}^{9}\frac{1}{40}\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	A
18	$A=\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	A
19	$A=\int_{2}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$	A
20	$A=\int_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$	A
21	$A=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^2}$	A
22	$A=\int_{4}^{5}\frac{\ln^3 x}{x}dx$	A
23	$A=\int_{4}^{9}\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	A
24	$A=\int_{1}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$	A
25	$A=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	A
26	$A=\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx$	A

Визначений інтеграл

Завдання № 14

№	*Умова*	*Знайти*
1	$y = x$; $y = 3x$; $x = 1 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
2	$y = 0{,}5x$; $y = 2{,}5x$; $x = 1 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
3	$y = 2x$; $y = 4x$; $x = 1 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
4	$y = 1{,}5x$; $y = 3{,}5x$; $x = 1 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
5	$y = 2{,}5x$; $y = 4{,}5x$; $x = 1 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
6	$y = 0{,}5x$; $y = x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
7	$y = x$; $y = 1{,}5x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
8	$y = 1{,}5x$; $y = 2x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
9	$y = 2x$; $y = 2{,}5x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
10	$y = 2{,}5x$; $y = 3x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
11	$y = 3x$; $y = 3{,}5x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
12	$y = 3{,}5x$; $y = 4x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S
13	$y = 4x$; $y = 4{,}5x$; $x = 2 -$ *рівняння сторін трикутника*; $S -$ *його площа*	S

14	$y=0{,}5x$; $y=1{,}5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
15	$y=x$; $y=2x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
16	$y=1{,}5x$; $y=3x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
17	$y=2x$; $y=3{,}5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
18	$y=2{,}5x$; $y=3{,}5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
19	$y=3x$; $y=4{,}5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
20	$y=3{,}5x$; $y=4x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
21	$y=4x$; $y=5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
22	$y=4{,}5x$; $y=5{,}5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
23	$y=5x$; $y=6x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
24	$y=5{,}5x$; $y=6{,}5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
25	$y=6x$; $y=7x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S
26	$y=6{,}5x$; $y=8{,}5x$; $x=1-$ *рівняння сторін трикутника*; $S-$ *його площа*	S

Визначений інтеграл

Завдання № 15

№	*Умова*	*Знайти*
1	Область обмежена лініями: $y=3x^2$, $y=3$; S – *її площа*	S
2	Область обмежена лініями: $y=3x^2+1$, $y=4$; S – *її площа*	S
3	Область обмежена лініями: $y=3x^2-1$; $y=2$; S – *її площа*	S
4	Область обмежена лініями: $y=-3x^2+3$; $y=0$; S – *її площа*	S
5	Область обмежена лініями: $y=-3x^2+1$; $y=-2$ S – *її площа*	S
6	Область обмежена лініями: $y=-3x^2+2$; $y=-1$; S – *її площа*	S
7	Область обмежена лініями: $y=3x^2-3$; $y=0$; S – *її площа*	S
8	Область обмежена лініями: $y=3x^2$; $y=0$; $x=2$; S – *її площа*	S
9	Область обмежена лініями: $y=3x^2+1$; $y=0$; $x=0$; $x=1$; S – *її площа*	S
10	Область обмежена лініями: $y=3x^2+2$; $y=0$; $x=0$; $x=1$; S – *її площа*	S
11	Область обмежена лініями: $y=3x^2+3$; $y=0$; $x=0$; $x=1$; S – *її площа*	S
12	Область обмежена лініями: $y=\dfrac{1}{x}$; $y=0$; $x=1$; $x=e$; S – *її площа*	S
13	Область обмежена лініями: $y=3x^2-6x$; $y=0$; S – *її площа*	S

14	Область обмежена лініями: $y = 2x - x^2$; $y = 0$; *S – її площа*	S
15	Область обмежена лініями: $y = -x^2 + 2$; $y = 0$; *S – її площа*	S
16	Область обмежена лініями: $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = \frac{1}{3}x$; *S – її площа*	S
17	Область обмежена лініями: $y = 6x - x^2 - 5$; $y = 0$; *S – її площа*	S
18	Область обмежена лініями: $y^2 = x^3$; $y = 1; x = 0$ *S – її площа*	S
19	Область обмежена лініями: $y^2 = x^2$; $y = \sqrt{x}$; *S – її площа*	S
20	Область обмежена лініями: $y = \frac{6}{x}; x = e; x = 1$; $y = 0$; *S – її площа*	S
21	Область обмежена лініями: $y = 5 - x^2$; $y = 0$; *S – її площа*	S
22	Область обмежена лініями: $y^2 = 9x$; $y = \frac{x^2}{9}$; *S – її площа*	S
23	Область обмежена лініями: $y^2 = 4x$; $y = \frac{x^2}{4}$; *S – її площа*	S
24	Область обмежена лініями: $y = \frac{4}{x}; x = 1; x = 4$; *$S$ – її площа*	S
25	Область обмежена лініями: $y = x^2 + 2$; $x + y = 4$; *S – її площа*	S
26	Область обмежена лініями: $y^2 = 4x$; $y = x$; *S – її площа*	S

Ряди

Завдання № 16

№	*Умова*	*Знайти*
1	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{n+1}}{5^n}$	a_2
2	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n3^n}$	a_3
3	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$	a_2
4	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^3}$	a_3
5	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-1)(3n+1)}$	a_2
6	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n!}{n^n}$	a_3
7	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$	a_3
8	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$	a_3
9	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$	a_3
10	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2}$	a_2
11	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{n^2+1}$	a_3
12	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{(n+1)!}$	a_2
13	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$	a_3

14	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3\sqrt[n]{n}}$	a_4
15	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$	a_4
16	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$	a_2
17	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}$	a_2
18	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n-1}$	a_2
19	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n+1}$	a_2
20	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}}$	a_4
21	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{3^n}$	a_3
22	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	a_5
23	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n-3)}{\sqrt[3]{n\cdot 2^n}}$	a_4
24	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{(2n-1)!}$	a_1
25	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{\sqrt{(4n-3)\cdot 5^{n-1}}}$	a_3
26	$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 10^n}{\sqrt{n+1}}$	a_3

Ряди

Завдання № 17

№	*Умова*	*Знайти*
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+8}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8n+15}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+4}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+10}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9n+18}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S
13	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$, $S=\lim_{n\to\infty}Sn$	S

14	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
15	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
16	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-2n}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
19	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9n+20}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)(2n+3)}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S
26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}Sn$	S

Ряди

Завдання № 18

№	*Умова*	*Знайти*
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n-1}}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$	l
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{2n^2+1}\right)^n$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$	l
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{n!}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{2n-1}}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)!}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n5^n}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l

14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2n-1)!}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(2n)!}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+10}{n2^n}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{2n-1}}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2n+1}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n\cdot 3^n}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{7^n}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n+1}{2^n}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l
26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^{n-1}}$, $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	l

Ряди

Завдання № 19

№	*Умова*	*Знайти*
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$, R – радіус збіжності	R
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^n}{2^n}$, R – радіус збіжності	R
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}$, R – радіус збіжності	R
4	$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$, R – радіус збіжності	R
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$, R – радіус збіжності	R
6	$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n$, R – радіус збіжності	R
7	$\sum_{n=1}10^n(x+1)^n$, R – радіус збіжності	R
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n10^{n-1}}$, R – радіус збіжності	R
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(1+n)}$, R – радіус збіжності	R
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$, R – радіус збіжності	R
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$, R – радіус збіжності	R
12	$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-3)^n$, R – радіус збіжності	R
13	$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, R – радіус збіжності	R

14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n}$, R – радіус збіжності	R
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x-1)^n}{n}$, R – радіус збіжності	R
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^n x^n$, R – радіус збіжності	R
17	$\sum_{n=1}^{\infty}3^n n(x+1)^n$, R – радіус збіжності	R
18	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-4}{10n-9}\right)^n x^n$, R – радіус збіжності	R
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$, R – радіус збіжності	R
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$, R – радіус збіжності	R
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n-1}\cdot n}$, R – радіус збіжності	R
22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, R – радіус збіжності	R
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+2)}$, R – радіус збіжності	R
24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$, R – радіус збіжності	R
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$, R – радіус збіжності	R
26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{4^n\sqrt{n}}$, R – радіус збіжності	R

Диференціальні рівняння

Завдання № 20

№	*Умови*	*Знайти*
1	$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{x}dy=0$, $y(1)=3$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
2	$e^{y}dx+e^{x}dy=0,\ y(0)=0$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
3	$y^2dx+x^2dy=0,\ y(1)=1$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
4	$ydx+xdy=0,\ y(1)=1$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
5	$\frac{1}{y-1}dx+\frac{1}{x+1}dy=0,\ y(2)=2$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
6	$e^{-(y+1)}dx+e^{-(x-1)}dy=0,\ y(1)=-1$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
7	$y^3dx-x^2dy=0,\ y(1)=\frac{1}{2}$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
8	$y^2dx-x^3dy=0,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=1$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
9	$e^{-y}dx+e^{x}dy=0,\ y(0)=0$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
10	$e^{y}dx+e^{-x}dy=0,\ y(0)=0$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
11	$e^{-y}dx+e^{-x}dy=0,\ y(0)=0$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
12	$\frac{3}{y}dx+\frac{2}{x^2}dy=0,\ y(1)=1$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C
13	$3e^{-2y}dx+2e^{-2x}dy=0,\ y(0)=0$ $\phi(x,y,c)-$ *загальний інтеграл рівняння*	C

14	$\sin^2 2xdy - 2\cos^2 2ydx = 0,\ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
15	$\frac{1}{x}dy - 2\cos^2 ydx = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
16	$\sqrt{-1+2x}dy - \sqrt{2y-1}dx = 0,\ y(1) = 1$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
17	$\frac{1}{\sqrt{3-2y}}dx - \frac{2}{\sqrt{2-x}}dy = 0,\ y(1) = 1$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
18	$y^2dx - 2x^2dy = 0,\ y(1) = 2$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
19	$2e^{-3x}dy + 3e^{-3y}dx = 0,\ y(0) = 0$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
20	$2\cos^2 xdy - \frac{1}{y}dx = 0,\ y(0) = 1$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
21	$2\sin^2 ydx - \frac{1}{x}dy = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
22	$e^{-3x+2}dy - e^{2-3y}dx = 0,\ y(1) = 1$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
23	$\frac{3}{2x-3}dy + \frac{2}{3y+1}dx = 0,\ y(0) = 1$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
24	$e^{-(2x+1)}dy + e^{-(y-1)}dx = 0,\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
25	$(y^2+1)dx + (x^2+1)dy = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C
26	$y^2dx - (x+1)^2dy = 0,\ y(0) = 1$ $\phi(x, y, c)$– *загальний інтеграл рівняння*	C

Диференціальні рівняння

Завдання № 21

№	*Умова*	*Знайти*
1	$y' = -4y,\ y(0) = 2$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
2	$y' = 4y,\ y(0) = -2$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
3	$y' = 3y,\ y(0) = 4$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
4	$y' = -3y,\ y(0) = -4$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
5	$y' = 7y,\ y(0) = 2$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
6	$y' = -7y,\ y(0)3$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
7	$y' = 5y,\ y(0) = -1$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
8	$y' = -5y,\ y(0) = -3$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
9	$y' = -2y,\ y(0) = 1$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
10	$y' = 2y,\ y(0) = 5$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
11	$y' = y,\ y(0) = -5$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
12	$y' = -y,\ y(0) = 3$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C
13	$y' = 8y,\ y(0) = -2$ $y = \varphi(x, c) - загальний\ розв'язок$	C

14	$y' = -8y,\ y(0) = 3$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
15	$y' = 9y,\ y(0) = -4$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
16	$y' = -9y,\ y(0) = 4$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
17	$y' = -10y,\ y(0) = 2$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
18	$y' = 10y,\ y(0) = -2$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
19	$y' = 6y,\ y(0) = -3$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
20	$y' = -6y,\ y(0) = 3$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
21	$y' = 0{,}5y,\ y(0) = -1$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
22	$y' = -2{,}5y,\ y(0) = 2$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
23	$y' = -0{,}5y,\ y(0) = 3$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
24	$y' = 0{,}4y,\ y(0) = -4$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
25	$y' = 3{,}5y,\ y(0) = -2$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C
26	$y' = 2{,}5y,\ y(0) = -3$ $y = \varphi(x, c) -$ *загальний розв'язок*	C

Диференціальні рівняння

Завдання № 22

№	*Умова*	*Знайти*
1	$y' + by = -\sin x + 2\cos x$ $y = \cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
2	$y' + by = \cos x + 3\sin x$ $y = \sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
3	$y' + by = -2\sin x + 6\cos x$ $y = 2\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
4	$y' + by = -3\sin x + 6\cos x$ $y = 3\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
5	$y' + by == 2\cos x + 4\sin x$ $y = 2\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
6	$y' + by = \cos x + 4\sin x$ $y = \sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
7	$y' + by = \cos x + \sin x$ $y = \sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
8	$y' + by = -\sin x + \cos x$ $y = \cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
9	$y' + by = 3\sin x + 6\cos x$ $y = -3\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
10	$y' + by = 2\cos x + \sin x$ $y = 2\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
11	$y' + by = 2\sin x - 6\cos x$ $y = -2\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
12	$y' + by = 2\cos x - 4\sin x$ $y = 2\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
13	$y' + by = \cos x - 4\sin x$ $y = \sin x -$ *розв'язок рівняння*	b

14	$y' + by = 2\sin x - 4\cos x$ $y = -2\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
15	$y' + by = 4\sin x + \cos x$ $y = -4\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
16	$y' + by = 3\cos x - \sin x$ $y = 3\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
17	$y' + by = 2\sin x - \cos x$ $y = -2\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
18	$y' + by = 2\sin x - 3\cos x$ $y = -2\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
19	$y' + by = -\cos x + 5\sin x$ $y = -\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
20	$y' + by = \frac{1}{2}\cos x + 2\sin x$ $y = \frac{1}{2}\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
21	$y' + by = \frac{1}{2}\sin x + 3\cos x$ $y = -\frac{1}{2}\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
22	$y' + by = \frac{1}{3}\cos x - \sin x$ $y = \frac{1}{3}\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
23	$y' + by = -1{,}5\cos x + 3\sin x$ $y = -1{,}5\sin x -$ *розв'язок рівняння*	b
24	$y' + by = -2{,}5\sin x + 5\cos x$ $y = 2{,}5\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b
25	$y' + by = -1{,}2\sin x$	b
26	$y' + by = 0{,}6\sin x + 3\cos x$ $y = -0{,}6\cos x -$ *розв'язок рівняння*	b

Диференціальні рівняння

Завдання № 23

№	*Умова*	*Знайти*
1	$y' + by = 2$ $y = e^{-2x} + 1 -$ розв'зок рівняння	b
2	$y' + by = 3$ $y = e^{-3x} + 1 -$розв'язок рівняння	b
3	$y' + by = 4$ $y = e^{-4x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
4	$y' + by = 5$ $y = e^{-5x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
5	$y' + by = 6$ $y = e^{-6x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
6	$y' + by = 7$ $y = e^{-7x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
7	$y' + by = 8$ $y = e^{-8x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
8	$y' + by = 1$ $y = e^{-x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
9	$y' + by = 9$ $y = e^{-9x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
10	$y' + by = -1$ $y = e^{x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
11	$y' + by = -2$ $y = e^{2x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
12	$y' + by = -3$ $y = e^{3x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
13	$y' + by = -4$ $y = e^{4x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b

Продовження таблиці

14	$y' + by = -5$ $y = e^{5x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
15	$y' + by = -6$ $y = e^{6x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
16	$y' + by = -7$ $y = e^{7x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
17	$y' + by = -8$ $y = e^{8x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
18	$y' + by = -9$ $y = e^{9x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
19	$y' + by = 0{,}2$ $y = e^{-0{,}2x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
20	$y' + by = -0{,}5$ $y = e^{0{,}5x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
21	$y' + by = 0{,}1$ $y = e^{-0{,}1x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
22	$y' + by = -2{,}1$ $y = e^{2{,}1x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
23	$y' + by = 2{,}5$ $y = e^{-2{,}5x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
24	$y' + by = -2{,}8$ $y = e^{2{,}8x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
25	$y' + by = 3{,}2$ $y = e^{-3{,}2x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b
26	$y' + by = -3{,}5$ $y = e^{3{,}5x} + 1 -$ розв'язок рівняння	b

Диференціальні рівняння

Завдання № 24

№	*Умова*	*Знайти*
1	$y'' + ay = 2\sin x$ $y = \sin x$ – розв'язок рівняння	a
2	$y'' + ay = -3\sin x$ $y = \sin x$ – розв'язок рівняння	a
3	$y'' + ay = 2\cos 2x$ $y = \cos 2x$ – розв'язок рівняння	a
4	$y'' + ay = -\cos 2x$ $y = \cos 2x$ – розв'язок рівняння	a
5	$y'' + ay = 10\sin x$ $y = -\sin x$ – розв'язок рівняння	a
6	$y'' + ay = -5\sin x$ $y = \sin x$ – розв'язок рівняння	a
7	$y'' + ay = 3\cos 2x$ $y = \cos 2x$ – розв'язок рівняння	a
8	$y'' + ay = 3\cos 2x$ $y = -\cos 2x$ – розв'язок рівняння	a
9	$y'' + ay = -3\cos 2x$ $y = \cos 2x$ – розв'язок рівняння	a
10	$y'' + ay = 3\sin x$ $y = -\sin x$ – розв'язок рівняння	a
11	$y'' + ay = \sin 3x$ $y = \sin 3x$ – розв'язок рівняння	a
12	$y'' + ay = -2\sin 3x$ $y = \sin 3x$ – розв'язок рівняння	a
13	$y'' + ay = 5\sin 2x$ $y = \sin 2x$ – розв'язок рівняння	a

14	$y'' + ay = \ y = 5\cos 2x$ $y = \cos 2x -$ розв'язок рівняння	a
15	$y'' + ay = 2\sin 3x$ $y = \sin 3x -$ розв'язок рівняння	a
16	$y'' + ay = 4\cos 2x$ $y = \cos 2x -$ розв'язок рівняння	a
17	$y'' + ay = -6\cos 2x$ $y = \cos 2x -$ розв'язок рівняння	a
18	$y'' + ay = 6\sin 2x$ $y = \sin 2x -$ розв'язок рівняння	a
19	$y'' + ay = -5\cos 3x$ $y = \cos 3x -$ розв'язок рівняння	a
20	$y'' + ay = \frac{1}{2}\sin x$ $y = \sin x -$ розв'язок рівняння	a
21	$y'' + ay = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $y = \cos 2x -$ розв'язок рівняння	a
22	$y'' + ay = -\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$ $y = \cos\frac{x}{2} -$ розв'язок рівняння	a
23	$y'' + ay = \frac{1}{9}\cos\frac{x}{3}$ $y = \cos\frac{x}{3} -$ розв'язок рівняння	a
24	$y'' + ay = -\frac{1}{2}\sin 2x$ $y = \sin 2x -$ розв'язок рівняння	a
25	$y'' + ay = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ $y = \sin\frac{x}{2} -$ розв'язок рівняння	a
26	$y'' + ay = \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$ $y = \sin\frac{x}{3} -$ розв'язок рівняння	a

Диференціальні рівняння

Завдання № 25

№	*Умова*	*Знайти*
1	$y'' = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = e, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -1$	$y(x_0)$
2	$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x_0 = \pi, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$	$y(x_0)$
3	$y'' = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$y(x_0)$
4	$y'' = -\frac{2}{x^3}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$	$y(x_0)$
5	$y'' = 4\cos 2x, \quad x_0 = \pi, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$y(x_0)$
6	$y'' = 4\sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = -2$	$y(x_0)$
7	$y'' = \cos x, \quad x_0 = \pi, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$	$y(x_0)$
8	$y'' = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$	$y(x_0)$
9	$y'' = 4e^{2x}, \quad x_0 = \ln 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$	$y(x_0)$
10	$y'' = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}, \quad x_0 = \ln 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$	$y(x_0)$
11	$y'' = 4e^{-2x}, \quad x_0 = \ln 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$	$y(x_0)$
12	$y'' = 4e -^{2x}, \quad x_0 = \ln 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$	$y(x_0)$
13	$y'' = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x_0 = \ln 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}$	$y(x_0)$

14	$y'' = 6x, \quad x_0 = 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$	$y(x_0)$
15	$y'' = -\dfrac{2}{(x+1)^3}, \quad x_0 = 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$	$y(x_0)$
16	$y'' = 6(x+2), \quad x_0 = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(-2) = 0$	$y(x_0)$
17	$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}, \quad x_0 = 2, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -1$	$y(x_0)$
18	$y'' = \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{1}{2}x, \quad x_0 = 2\pi, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$	$y(x_0)$
19	$y'' = \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{2}x, \quad x_0 = 3\pi, \quad y(\pi) = -1, \quad y'(\pi) = 0$	$y(x_0)$
20	$y'' = \dfrac{8}{(x+2)^3}, \quad x_0 = 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$	$y(x_0)$
21	$y'' = \dfrac{6}{x^2}, \quad x_0 = e, \quad y(1) = 1, \quad y'(6) = -1$	$y(x_0)$
22	$y'' = \dfrac{2}{(x-2)^3}, \quad x_0 = 0, \quad y(3) = 0, \quad y'(1) = 1$	$y(x_0)$
23	$y'' = 2\left(\dfrac{1}{2} - x\right), \quad x_0 = -\dfrac{1}{2}, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$	$y(x_0)$
24	$y'' = \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{2}, \quad x_0 = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(0) = 0$	$y(x_0)$
25	$y'' = -\dfrac{6}{(x+2)^4}, \quad x_0 = -1, \quad y - 3 = 0, \quad y'(-3) = 2$	$y(x_0)$
26	$y'' = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}, \quad x_0 = \pi, \quad y(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$	$y(x_0)$

Ряди

Завдання № 26

№	*Умова*	*Знайти*
1	Обчислити за допомогою $A=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x^3}\,dx$ рядів з точністю до 0,01	*A*
2	Обчислити за допомогою $A=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x^4}$ рядів з точністю до 0,01	*A*
3	Обчислити за допомогою $A=\frac{1}{\sqrt{e}}$ рядів з точністю до 0,01	*A*
4	Обчислити за допомогою $A=\sqrt[5]{40}$ рядів з точністю до 0,01	*A*
5	Обчислити за допомогою $A=\ln 1{,}04$ рядів з точністю до 0,01	*A*
6	Обчислити за допомогою $A=\int\limits_{0{,}1}^{0{,}25}\frac{\sin x}{x}dx$ рядів з точністю до 0,01	*A*
7	Обчислити за допомогою $A=\frac{1}{e}$ рядів з точністю до 0,01	*A*
8	Обчислити за допомогою $\cos 2^0$ рядів з точністю до 0,01	*A*
9	Обчислити за допомогою $A=\sqrt{1{,}3}$ рядів з точністю до 0,01	*A*
10	Обчислити за допомогою $A=\int\limits_0^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}dx$ рядів з точністю до 0,01	*A*
11	Обчислити за допомогою $A=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}dx$ рядів з точністю до 0,01	*A*
12	Обчислити за допомогою $A=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3}\sqrt{8{,}36}dx$ рядів з точністю до 0,01	*A*
13	Обчислити за допомогою $A=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx$ рядів з точністю до 0,01	*A*

14	Обчислити за допомогою $A=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ рядів з точністю до 0,01	A
15	Обчислити за допомогою $A=\int_0^{\frac{1}{4}} \sin x^2 dx$ рядів з точністю до 0,01	A
16	Обчислити за допомогою $A=\sqrt[5]{250}$ рядів з точністю до 0,01	A
17	Обчислити за допомогою $A=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ рядів з точністю до 0,01	A
18	Обчислити за допомогою $A=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctgx}{x}dx$ рядів з точністю до 0,01	A
19	Обчислити за допомогою $A=\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\cos x dx$ рядів з точністю до 0,01	A
20	Обчислити за допомогою $A=\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ рядів з точністю до 0,01	A
21	Обчислити за допомогою $A=\sqrt[3]{9}$ рядів з точністю до 0,01	A
22	Обчислити за допомогою $A=\cos 10^0$ рядів з точністю до 0,01	A
23	Обчислити за допомогою $A=\sqrt[4]{20}$ рядів з точністю до 0,01	A
24	Обчислити за допомогою $A=\ln 1{,}2$ рядів з точністю до 0,01	A
25	Обчислити за допомогою $A=\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$ рядів з точністю до 0,01	A
26	Обчислити за допомогою $A=arctg\left(\frac{1}{2}\right)$ рядів з точністю до 0,01	A

Відповіді:
Диференціальне числення функцій двох змінних
Завдання № 1

1. Вся площина, окрім точки (0,0); 2. Вся площина, окрім точок прямої $y=\frac{2}{5}x$; 3. Вся площина, окрім точок кола $x^2+y^2=4$; 4. Частина площини, що міститься поза колом $x^2+y^2=4$, не включаючи його точок; 5. Смуга, що лежить між паралельними прямими $y=2x-1$ і $y=2x+1$, включаючи точки цих прямих; 6. Вся площина, окрім точок прямої $y=\frac{1}{3}(x+1)$; 7. Частина площини, що міститься над прямою $y=-x$, включаючи її точки; 8. Частина площини, що міститься під прямою $y=2x$, не включаючи її точок; 9. Частина площини, що міститься поза колом $x^2+y^2=1$, включаючи його точки; 10. Частина площини, що міститься всередині параболи $y^2=2x$, включаючи і її точки; 11. Вся площина, окрім точок кола $x^2+y^2=6$; 12. Частина площини, що міститься всередині кола $x^2+y^2=3$, включаючи і його точки; 13. частина площини, що міститься всередині кола $x^2+y^2=9$, не включаючи його точок; 14. Вся площина, окрім точок кола $x^2+y^2=6$; 15. Частина площини, що міститься поза колом $x^2+y^2=5$, включаючи і його точки; 16. Смуга, що лежить між паралельними прямими $y=-x-1$ і $y=-x+1$, включаючи точки цих прямих; 17. Вся площина, окрім точки $O(0;0)$; 18. Частина площини, що міститься поза колом $x^2+y^2=1$; 19. Область $|y|\le|x|$, окрім точки $O(0;0)$;

20. Частина площини, що міститься всередині еліпса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$, включаючи і його точки; 21. Частина площини, що міститься поза еліпсом $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, включаючи його точки; 22. Вся площина, окрім точки $O(0;0)$; 23. Частина площини, що міститься у першому та третьому кутах; 24. Частина площини, що міститься всередині кола $x^2+y^2=1$, не включаючи його точок; 25. Частина площини, що міститься над прямою $x+y=0$ ($x+y>0$); 26. Вся площина, окрім точок прямої $y=x$.

Завдання № 2

1. $-y\sin xy$, $-x\sin xy$; 2. $y\cos xy$, $x\cos xy$; 3. ye^{xy}, xe^{xy}; 4. $2xy^2$, $2x^2y$; 5. $2xy^3$, $3x^2y^2$; 6. $3x^2y^2$, $2x^3y$; 7. $10(5x+3y)$, $6(5x+3y)$; 8. $6x\left(x^2+y^2\right)$, $6y\left(x^2+y^2\right)^2$; 9. $2xe^{x^2+y^2}$, $2ye^{x^2+y^2}$; 10. $-2x\sin\left(x^2+y^2\right)$, $-2y\sin\left(x^2+y^2\right)$; 11. $2x\cos\left(x^2+y^2\right)$, $2y\cos\left(x^2+y^2\right)$; 12. $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{2y}{x^2+y^2}$;

13. $\dfrac{1}{y}$, $-\dfrac{x}{y^2}$; 14. $-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{1}{x}$; 15. $-2\sin x(\cos x+\sin y)$, $2\cos x(\cos x+\sin y)$; 16. $3e^x\left(e^x+e^y\right)^2$, $3e^y\left(e^x+e^y\right)^2$; 17. $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, $\dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$; 18. $2\dfrac{x}{y^2}$, $-2\dfrac{x^2}{y^3}$; 19. $\dfrac{y}{x^2}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$, $-\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$; 20. $\dfrac{2}{y}\cdot\cos\dfrac{2x}{y}$, $-\dfrac{2x}{y^2}\cdot\cos\dfrac{2x}{y}$; 21. $\dfrac{y}{1+x^2y^2}$, $\dfrac{x}{1+x^2y^2}$; 22. $-2y^2\cdot e^{-2xy^2}$, $e^{-2xy^2}(-4xy)$; 23. $\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{2x}{y}$, $-\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}$; 24. $-\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $-\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 25. $\dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$, $\dfrac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$; 26. $3x^2\cdot e^{x^3+y^3}$, $3y^2\cdot e^{x^3+y^3}$.

Завдання № 3

1. $e^{\frac{y}{2x}}\cdot\left(-\dfrac{y}{4x^2}dx+\dfrac{1}{2x}dy\right)$; 2. $e^{xy}\cdot\left[(1+xy)dx+x^2dy\right]$; 3. $\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}dx-\dfrac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}}dy$;

4. $\dfrac{1}{1+x^2y^2}(ydx+xdy)$; 5. $e^{2x-y}[2ydx+(1-y)dy]$; 6. $\sqrt{\dfrac{y}{x}}\left(-\dfrac{y}{2x}dx+\dfrac{3}{2}dy\right)$;

7. $\dfrac{2}{(y-x)^2}\left(y^2dx-x^2dy\right)$; 8. $\dfrac{2}{x^2+2y}(xdx+dy)$; 9. $e^{\frac{y}{x}}\left[-\dfrac{y^2}{x^2}dx+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\right]dy$;

10. $\sin 2(2x-y)(2dx-dy)$; 11. $y^2x^{y^2-1}dx+x^{y^2}\cdot 2y\ln xdy$;

12. $e^{2y}(\cos xdx+2\sin xdy)$; 13. $\sin(2y-x)\left(\dfrac{1}{2}dx-dy\right)$; 14. $\dfrac{1}{e^x+e^y}\left(e^xdx+e^ydy\right)$; 15. $\dfrac{e^{xy}}{1+e^{2xy}}(ydx+xdy)$; 16. $-\dfrac{1}{\sqrt{yx}}\left(\dfrac{1}{x}dx+\dfrac{1}{y}dy\right)$; 17. $-\sin 2xdx+\sin 2ydy$; 18. $-\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot dx+\dfrac{1}{y^2}\cdot dy\right)$; 19. $\dfrac{1}{y^2+x^2}(ydx-xdy)$; 20.

$\frac{1}{2}e^{\sqrt{xy}}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}dx+\sqrt{\frac{x}{y}}dy\right)$; 21. $2y(-y\sin 2xdx+\cos 2xdy)$; 22. $e^{\frac{x}{y}}\left[dx\left(1-\frac{x}{y}\right)dy\right]$; 23. $\frac{1}{2\sqrt{xy}(1+xy)}(ydx+xdy)$; 24. $\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\left(\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{dy}{\sqrt{y}}\right)$; 25. $\frac{y^2+x^2}{xy}\left(-\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy\right)$; 26. $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(-\frac{y}{x}dx+dy\right)$.

Завдання № 4

1.6x, -3, 0; 2. 0, 3, 6y; 3. $-12x^2$, 4, 0; 4. 0, 4, $-12x^2$; 5. 6x, 3, 0; 6. 0, -3, 6y; 7. 0, -5, $20y^3$; 8. $20x^3$, 5, 0; 9. $-2\cos x$, 0, $-\sin y$; 10. $-\sin x$, 0, $-2\cos y$; 11. $4e^{2x}$, 0, $9e^{-3y}$; 12. $9e^{-3x}$, 0, $4e^{2y}$; 13. $e^x\cos y$, $-e^x\sin y$, $-e^x\cos y$; 14. $-e^y\sin x$, $e^y\cos x$, $e^y\sin x$; 15. 30x, 0, 42y; 16. $-12x$, 0, 18y; 17. $6(x+y)$, 6x, 0; 18. $-6x, 2y, 2x$; 19. $6(x-1)$, 2y, 2x; 20. $6xy, 3x^2, 2$; 21. $2(6x+y), 2x, 0$; 22. $e^x\cos 2y, -2e^x\sin 2y, -4e^x\cos 2y$; 23. $6x, 0, 6(y+2)$; 24. $9e^{-3x}\sin 2y; -6e^{-3x}\cos 2y; -4e^{-3x}\sin 2y$; 25. $6xy^2, 6yx^2, 2x^3+6y$; 26. $-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, 0, -\frac{1}{3}\sin\frac{y}{3}$.

Завдання № 5

1. $2\left(-y^2dx^2-4xydxdy+\left(6y^2-x^2\right)dy^2\right)$; 2. $2\left(\left(3x+2y^2\right)dx^2+8xydxdy+2x^2dy^2\right)$;

3. $2\left(3dx^2-dxdy-dy^2\right)$; 4. $6\left(xydx^2+\left(x^2-y^2\right)dxdy-xydy^2\right)$;

5. $2\left(-9xy^4dx^2+2y\left(5-18x^2y^2\right)dxdy+2\left(5x-18x^3y^2\right)dy^2\right)$;

6. $(-9\cos(3x+y)-2)dx^2-6\cos(3x+y)dxdy-\cos(3x+y)dy^2$;

7. $2\sin ydx^2+2(2x\cos y-6y)dxdy-\left(x^2\sin y+6x\right)dy^2$; 8. $2\left(6x^2dx^2-3dxdy+dy^2\right)$; 9. $\left(e^{x+y-5}+2y^2\right)dx^2+2\left(e^{x+y-5}+4xy\right)dxdy+\left(e^{x+y-5}+2x^2\right)dy^2$;

10. $6\left(-2xdx^2+\left(y^2-2x^2\right)dxdy+xydy^2\right)$; 11. $4\left(3x^2ydx^2+\left(2x^3-4y\right)dxdy-2xdy^2\right)$;

12. $2\left(3dx^2+dxdy-2dy^2\right)$; 13. $4\left(\left(6xy-3x^2y^4\right)dx^2+2\left(3x^2-4x^3y^3\right)dxdy-3x^4y^2\right)dy^2$;

14. $\left(e^{x-y}+6xy^3\right)dx^2+2\left(-e^{x-y}+9x^2y^2\right)dxdy+\left(e^{x-y}+6x^3y\right)dy^2$;

15. $2\left(2y^2dx^2+4\left(3y^3+xy\right)dxdy+\left(18xy^2+x^2\right)dy^2\right)$;

16. $10\left(2x^3ydx^2+\left(x^4-y^4\right)dxdy-2y^3xdy^2\right)$; 17. $2\left[(3x+y)dx^2+2xdxdy+3ydy^2\right]$;

18. $2\left[\frac{1}{y^2}dx^2-\frac{4x}{y^3}dxdy+\frac{3x^2}{y^4}dy^2\right]$;

19. $\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x-y}{2}}+2y^2\right)dx^2+\left(8xy-\frac{1}{2}e^{\frac{x-y}{2}}\right)dxdy+\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x-y}{2}}+2x^2\right)dy^2$;

20. $-\sin(ax+by)\left[+a^2dx^2+abdxdy+b^2dy^2\right]$;

21. $2\left[\left(2y^3-3x\right)dx^2+12xy^2dxdy+6x^2ydy^2\right]$; 22.

$-2\cdot\left[4\cos(4x-6y)dx^2-12\cos(4x-6y)dxdy+9\cos(4x-6y)dy^2\right]$;

23. $2\cdot\left[\cos 2(x+2y)dx^2+4\cos 2(x+2y)dxdy+2\cos 2(x+2y)dy^2\right]$;

24. $3\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+y+4\right)dx^2+2\left(\frac{1}{2}x+y+4\right)dxdy+2\left(\frac{1}{2}x+y+4\right)dy^2\right]$;

25. $2\cdot\left[-\frac{1}{2y+1}dx^2+\frac{4x}{(2y+1)^2}dxdy+\frac{2\left(1-x^2\right)}{(2y+1)^3}dy^2\right]$;

26. $2\cdot\left[\frac{4\left(2-y^2\right)}{(1+2x)^3}dx^2+\frac{4y}{(1+2x)^2}dxdy-\frac{1}{1+2x}dy^2\right]$.

Завдання № 6

1. не має; 2. не має; 3. не має; 4. не має; 5. не має; 6. не має; 7. не має; 8. не має; 9. не має; 10. не має; 11. не має; 12. не має; 13. не має; 14. не має; 15. не має; 16. не має; 17. (0;0)- т. min; 18. не має; 19. (0;3)- т. min; 20. (1;0)- т. min; 21. (1;0)- т. min; 22. не має; 23. (2;-2)- т. max; 24. (4;-2)- т. max; 25. не має; 26. (0;3)- т. max.

Невизначений інтеграл

Завдання № 7

1. 1; 2. 0; 3. 1; 4. 1; 5. 0; 6. 2; 7. ; 8. 2; 9. -1; 10. 2; 11. 1; 12. -1; 13. 1; 14. 3; 15. 3; 16. 2; 17. 1; 18. 1; 19. 3; 20. -5; 21. $\frac{1}{2}$; 22. $\frac{1}{3}$; 23. 0; 24. 0; 25. 0; 26. 1.

Завдання № 8

1. 1; 2. 1; 3. 1; 4. -1; 5. 1; 6. 1; 7. 1; 8. 0; 9. -1; 10. 1; 11. 1; 12. 1; 13. -1; 14. 0; 15. 0; 16. $-\frac{1}{2}$; 17. $-\frac{1}{5}$; 18. $\frac{1}{7}$; 19. 0; 20. $\frac{1}{2}$; 21. -2; 22. 0; 23. 0; 24. 1; 25. 0; 26. 0.

Завдання № 9

1. π^2; 2. 1; 3. 1; 4. $-\pi^2$; 5. -1; 6. π^2; 7. 1; 8. $-\pi^2$; 9. 1; 10. -1; 11. 1; 12. -1; 13. π; 14. 0; 15. π; 16. 0; 17. $\frac{3}{4}$; 18 $\frac{1}{3}$; 19. 0; 20. 0; 21. 1; 22. $\frac{4}{3}$; 23. $\frac{\pi}{6}$; 24. -1; 25. $-\frac{1}{2}$; 26. 4.

Завдання № 10

1. 0; 2. 0; 3. 0; 4. 0; 5. 0; 6. 0; 7. 0; 8. 0; 9. 0; 10. 0; 11. 0; 12. 0; 13. 0; 14. 0.; 15. 0; 16. 0; 17. 0; 18. -1; 19. -2; 20. 1; 21. $\frac{2}{3}$; 22. 6; 23. 0; 24. $-\frac{1}{2}\ln 2$; 25. $\frac{\pi}{4\ln 3}$; 26. 1.

Завдання № 11

1. 1; 2. 1; 3. 1; 4. 1; 5. 1; 6. 1; 7. 1; 8. 1; 9. 1; 10. $\frac{1}{4}$; 11. 1; 12. 1; 13. 1; 14. $\frac{1}{2}$; 15. 1; 16. 1; 17. 1.; 18. ∞; 19. ∞; 20. $\frac{1}{2}$; 21. $\frac{\pi}{4}$; 22. $\frac{\pi}{8}$; 23. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 24. $\frac{1}{4}$; 25. $\frac{1}{2}$; 26. $\frac{\pi}{4}$.

Визначений інтеграл

Завдання № 12

1. -5; 2. 2; 3. 0; 4. -2; 5. -3; 6. 0; 7. 4; 8. 0; 9. -1; 10. 7; 11. 4; 12. -8; 13. -3; 14. 0; 15. -7; 16. 0; 17. -15; 18. 0; 19. -3; 20. 3; 21. -9; 22. 0; 23. 0; 24. 0; 25. 4; 26. 0.

Завдання № 13

1. 1; 2. 1; 3. 1; 4. 1; 5. 1; 6. 1; 7. 1; 8. 1; 9. 1; 10. 1; 11. 1; 12. 1; 13. 1; 14. 1; 15. 1; 16. 1; 17. 1.; 18. 1; 19. $\frac{7}{4}$; 20. $\frac{3}{2}$; 21. $\frac{2}{5}$; 22. $\ln\frac{5}{4}$; 23. 40; 24. $\frac{21}{8}$; 25. $\frac{\pi}{6}$; 26. 1.

Завдання № 14

1. 1; 2. 1; 3. 1; 4. 1; 5. 1; 6. 1; 7. 1; 8. 1; 9. 1; 10. 1; 11. 1; 12. 1; 13. 1.; 14.0,5; 15. 0,5; 16. 0,75; 17. 0,75; 18. 0,5; 19. 0,75; 20. 0,25; 21. 0,5; 22. 0,5; 23. 0,5; 24. 0,5; 25. 0,5; 26. 1.

Завдання № 15

1. 4; 2. 4; 3. 4; 4. 4; 5. 4; 6. 4; 7. 4; 8. 8; 9. 2; 10. 3; 11. 4; 12. 1; 13. 4.; 14. $\frac{4}{3}$; 15. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 16. $\frac{1}{18}$; 17. $\frac{32}{3}$; 18. $\frac{3}{5}$; 19. $\frac{1}{3}$; 20. 6; 21. 14,9; 22. 27; 23. $\frac{16}{3}$; 24. $8\ln 2$; 25. 9,8; 26. $\frac{32}{3}$.

Завдання № 16

1. $\frac{16}{25}$; 2. $\frac{4}{81}$; 3. $\frac{2}{15}$; 4. $\frac{5}{27}$; 5. $\frac{2}{35}$; 6. $\frac{16}{9}$; 7. $\frac{7}{9}$; 8. $\frac{27}{8}$; 9. $\frac{8}{9}$; 10. $-\frac{3}{4}$; 11. $-\frac{2}{5}$; 12. $\frac{1}{3}$; 13. $\frac{16}{27}$; 14. $\frac{8}{81}$; 15. $\frac{1}{3}$; 16. $\frac{4}{5}$; 17. $\frac{3}{8}$; 18. $\frac{2}{5}$; 19. $\frac{4}{7}$; 20. $\frac{9}{2\sqrt{5}}$; 21. $\frac{5}{3^3}$; 22. $-\frac{1}{6\ln^2 7}$; 23. $-\frac{13}{\sqrt[3]{4\cdot 2^4}}$; 24. $-\frac{1}{1!}$; 25. $\frac{2^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}$; 26. $-\frac{10^3}{\sqrt{4}}$.

Ряди

Завдання № 17

1. 1; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $\frac{1}{3}$; 4. $\frac{1}{3}$; 5. $\frac{3}{4}$; 6. $\frac{5}{12}$; 7. $\frac{7}{24}$; 8. $\frac{9}{40}$; 9. $\frac{11}{18}$; 10. $\frac{13}{36}$; 11. $\frac{47}{180}$; 12. $\frac{37}{180}$; 13. 1; 14. $\frac{3}{4}$; 15. $\frac{11}{18}$; 16. $\frac{3}{4}$; 17. $\frac{1}{18}$; 18. $\frac{1}{2}$; 19. 1; 20. $\frac{1}{5}$.

Завдання № 18

1. 0; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $\frac{1}{3}$; 4. 0; 5. $\frac{1}{4}$; 6. $\frac{2}{3}$; 7. $\frac{1}{2}$; 8. $\frac{1}{3}$; 9. 0; 10. $\frac{1}{4}$; 11. 0; 12. $\frac{2}{5}$; 13. $\frac{1}{5}$; 14. 0; 15. 0; 16. $\frac{1}{2}$; 17. $\frac{1}{9}$; 18. $\frac{1}{2}$; 19. $\frac{1}{3}$; 20. 0; 21. 3; 22. $\frac{1}{3}$; 23. $\frac{1}{7}$; 24. $\frac{1}{2}$; 25. 0; 26. $\frac{1}{5}$.

Завдання № 19

1. 2; 2. 2; 3. 1; 4. 1; 5. 2; 6. $\frac{1}{2}$; 7. $\frac{1}{10}$; 8. 10; 9. 1; 10. 1; 11. 2; 12. 1; 13. 1; 14. 3; 15. $\frac{1}{4}$; 16. 3; 17. $\frac{1}{3}$; 18. 2; 19. 2; 20. 0,2; 21. 3; 22. ∞; 23. 2; 24. 3; 25. $\frac{1}{2}$; 26. $\frac{4}{3}$.

Диференціальні рівняння

Завдання № 20

1. 5; 2. -2; 3. -2; 4. 1; 5. 4; 6. 2; 7. 1; 8. -1; 9. 0; 10. 0; 11. 2; 12. 2; 13. 2; 14. 1; 15. 1.; 16. 2; 17. $\frac{2}{3}$; 18. 0; 19. $\frac{1}{3}$; 20. 1; 21. 1; 22. 0; 23. $\frac{3}{4}$; 24. $\frac{3}{2}$; 25. 1; 26. 0.

Завдання № 21

1. 2; 2. -2; 3. 4; 4. -4; 5. 2; 6. 3; 7. -1; 8. -3; 9. 1; 10. 5; 11. -5; 12. 3; 13. -2; 14. 3; 15. – 4; 16. 4; 17. 2; 18. -2; 19. -3; 20. 3; 21. -1; 22. 2; 23. 3; 24. -4; 25. -2; 26. -3.

Завдання № 22

1. 2; 2. 3; 3. 3; 4. 2; 5. 2; 6. 4; 7. 1; 8. 1; 9. -2; 10. $\frac{1}{2}$; 11. 3; 12. -2; 13. -4; 14. 2; 15. $-\frac{1}{4}$; 16. $-\frac{1}{3}$; 17. $\frac{1}{2}$; 18. $\frac{3}{2}$; 19. -5; 20. 4; 21. $-\frac{3}{2}$; 22. -3; 23. -2; 24. 2; 25. 5; 26. -5.

Завдання № 23

1. 2; 2. 33; 3. 4; 4. 5; 5. 6; 6. 7; 7. 8; 8. 1; 9. 9; 10. -1; 11. -2; 12. -3; 13. -4; 14. -5; 15. -6; 16. -7; 17. -8; 18. -9; 19. 0,2; 20. -0,5; 21. 0,1; 22. -2.1; 23. 2,5; 24. -2,8; 25. 3,2; 26. -3,5.

Завдання № 24

1. 3; 2. -2; 3. 6; 4. 3; 5. -9; 6. -4; 7. 7; 8. 1; 9. 1; 10. 2; 11. 10; 12. 7; 13. 9; 14. 9; 15. 11; 16. 8; 17. -2; 18. 10; 19. 4; 20. -0,5; 21. 3,5; 22. -0,25; 23. $\frac{2}{9}$; 24. 3,5; 25. -0,25; 26. $\frac{4}{9}$.

Завдання № 25

1. -1; 2. 0; 3. 0; 4. -2; 5. 1; 6. -1; 7. 1; 8. -1; 9. 4; 10. 2; 11. $\frac{1}{2}$; 12. $\frac{1}{4}$; 13. $\frac{1}{2}$; 14. 8; 15. $-\frac{1}{2}$; 16. 8; 17. 1; 18. 1; 19. 1; 20. 1.; 21. -5; 22. -1,5; 23. $\frac{4}{3}$; 24. $\frac{3}{4}$; 25. 0; 26.-2.

Завдання № 26

1. 0,508; 2. 0,494; 3. 0,605; 4. 2,10; 5. 0,04; 6. 0,141; 7. 0,367; 8. 0,999; 9. 1,140; 10. 245; 11. 1,995; 12. 2,030; 13. 0,508; 14. 0,946; 15. 0,005; 16. 3,017; 17. 0,716; 18. 0,487; 19. 0,608; 20. 8,041; 21. 2,080; 22. 0,984; 23. 2,058; 24. 0,182; 25. 0,764; 26. 0,464.

ДОДАТОК

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Змінна z **називається однозначною функцією змінних** $\boldsymbol{x}$ **і** $\boldsymbol{y}$, якщо кожній парі значень x і y з деякої області їх змінювання відповідає одне значення z. Ця залежність записується у вигляді $z = f(x, y)$. Геометрично це рівняння визначає деяку поверхню у просторі, а область існування функції є деяка частина площини XOY, обмежена лініями, які можуть належати або не належати цій області. Тобто, якщо функція задана аналітичним виразом (формулою), то **областю існування (областю визначення)** слід вважати область існування її аналітичного виразу – множину всіх тих точок (x, y), в яких даний аналітичний вираз визначений і набуває тільки дійсних і скінченних значень.

Величина $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називається **повним приростом функції** $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0), а величини $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ та $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називаються **частинними приростами** функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0).

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ **за змінною** $\boldsymbol{x}$ в точці (x_0, y_0) називається

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$ і позначається $\frac{\partial x}{\partial x}, z'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x$.

При цьому змінна y вважається сталою величиною.

Аналогічно визначається **частинна похідна функції** $z = f(x, y)$ **за змінною** $\boldsymbol{y}$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$; позначається $\frac{\partial z}{\partial y}, z'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y$.

Відповідно змінна x при цьому x вважається сталою величиною.

Δx і Δy прямують до нуля довільним чином.

Частинні похідні другого порядку визначаються так:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$. При певних умовах $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Можна записувати $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$.

Повним диференціалом функції двох змінних в довільній точці (x, y) називається вираз $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, (*)

де $dx=\Delta x, dy=\Delta y$ - диференціали незалежних змінних. Повний диференціал використовується у наближених обчисленнях значень функцій , тому що $\Delta z \approx dz$, тобто

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0, y_0)+dz(x_0, y_0)$.

Диференціал другого порядку d^2z записується за формулою $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial xdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$.

Екстремум функції двох змінних. Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$, якщо в будь-якому досить малому околі цієї точки $f(x_0, y_0)>f(x, y)$ ($f(x_0, y_0)<f(x, y)$).

Необхідна умова існування екстремуму. В точках екстремуму всі частинні похідні дорівнюють нулю $\left(\frac{\partial z}{\partial x}=0;\frac{\partial z}{\partial y}=0\right)$ або ∞, або не існують.

Достатні умови існування екстремуму.

Нехай $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=0$ і в точці M_0 існують частинні похідні другого порядку $A=\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}, B=\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\,\partial y}, C=\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}$ і $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Тоді, якщо

1) $\Delta>0$ і $A<0$ - точка M_0 є точкою *max*;

2) $\Delta>0$ і $A>0$ - точка M_0 є точкою *min*;

3) $\Delta<0$ - екстремуму немає;

4) $\Delta=0$ - необхідні додаткові дослідження.

При знаходженні **найбільшого і найменшого значень функції** в обмеженій замкненій області слід мати на увазі, що ці значення досягаються або в точках екстремуму, або на межі області.

Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на $(a; b)$, якщо для будь-якого x, яке належить інтервалу $(a; b)$ має місце формула

$$F'(x) = f(x).$$

Сукупність усих первісних функцій $F(x) + c$ для функції $f(x)$ на деякому інтервалі називається невизначеним інтегралом від функцій $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

де c - будь-яка стала.

Відомо, що будь-яка неперервна на деякому інтервалі функція має на цьому інтервалі первісну.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$;
2. $\int dF(x) = F(x) + c$;
3. $\int \left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, де $c = const;$

Таблиця інтегралів :

1. $\int u^n du = \frac{u^{n=1}}{n+1} + c \ (n \neq -1);$ 2. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + c$;
3. $\int sin\, udu = -cosu + c$; 4. $\int cos\, udu = sinu + c;$
5. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + c$; 6. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + c$;
7. $\int tgudu = -ln|cos\, u| + c$; 8. $\int ctgudu = ln|sin\, u| + c$;
9. $\int e^u du = e^u + c$; 10. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \ \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix};$
11. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{u}{a} + c$; 12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$;
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\, \frac{u}{a} + c$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c.$

Методи інтегрування

Заміна змінної

Якщо $x = \varphi(t)$ - монотонна функція, яка має неперервну похідну $\varphi'(t)$, тоді

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні $u'(x)$ та $v'(x)$, тоді

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Розглянемо кілька типів підінтегральних виразів і способи визначення функцій u та v в методі інтегрування частинами:

а) $P_n(x)costx\, dx$; $P_n(x)sintx\, dx$; $P_n(x)a^{tx}\, dx$;

де a,t - сталі. У цьому випадку позначають

$$u = P_n(x), \qquad dv = \begin{Bmatrix} cos\, tx \\ sin\, tx \\ a^{tx} \end{Bmatrix} dx;$$

б) $P_n(x)\ln x\, dx$; $P_n(x)\text{arctg}x\, dx$; $P_n(x)\arcsin x\, dx$; у цьому випадку

$$u = \begin{Bmatrix} ln\, x \\ arctgx \\ arcsin\, x \end{Bmatrix} \qquad dv = P_n(x)dx;$$

в) $e^{ax} cos\, txdx$; $e^{ax} sin\, txdx$.

У випадку в інтегрування частинами проводиться двічі до появи в правій частині інтеграла, що збігається із даним з точністю до довільної сталої.

Інтегрування раціональних дробів

При інтегруванні найпростіших раціональних дробів маємо:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot ln|x-a| + c;$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c;$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}ln\left| x^2 + px + q \right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c.$

Інтегрування тригонометричних функцій

Невизначені інтеграли від тригонометричних функцій можна привести до інтегралів від раціональних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$tg\frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad sin\ x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad cos\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int R(sin\ x, cos\ x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Існують окремі види підстановок, які ефективні для деяких підінтегральних функцій.

Якщо інтеграл має вигляд $\int R(sinx)cosxdx$, то після використання заміни $sinx = t$, $cosx\ dx = dt$ інтеграл матиме вигляд $\int R(t)dt$.

Для знаходження інтегралу $\int R(cos\ x)\,sin\ xdx$ слід зробити заміну $cosx = t$,

$-sinx\ dx = dt$.

Якщо інтеграл має вигляд $\int R(tgx)dx$, то заміна

$tgx = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводить до інтегралу $\int \frac{R(t)dt}{1+t^2}$.

Цю заміну доцільно використовувати і тоді, коли підінтегральна функція має вигляд R ($cos^2 x$, $sin^2 x$).

Для інтегралів $\int \sin mx \cdot \cos nxdx$, $\int \cos mx \cdot \cos nxdx$, $\int \sin mx \cdot \sin nxdx$ слід використати формули із Додатку, а саме:

$$sin\,mx \cdot cos\,nx = \frac{1}{2}\left[sin(m+n)x + sin(m-n)x\right];$$

$$cos\,mx \cdot cos\,nx = \frac{1}{2}\left[cos(m+n)x + cos(m-n)x\right];$$

$$sin\,mx \cdot sin\,nx = \frac{1}{2}\left[-cos(m+n)x + cos(m-n)x\right].$$

Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів

Розглянемо інтеграл $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, де R - раціональна функція своїх аргументів.

В цьому випадку робимо заміну $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}\,dt$, де $к$ - спільний знаменник дробів.

При інтегруванні виразів $R\left(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$ використовують такі заміни змінної:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx, \qquad \begin{cases} x = a\sin t, & dx = a\cos t dt \\ x = a\cos t, & dx = -a\sin t dt \end{cases}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx, \qquad \begin{cases} x = a \cdot tgt, & dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \\ x = a \cdot ctgt, & dx = -\dfrac{a}{\sin^2 t}dt \end{cases}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx, \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t}, & dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}\sin t dt \\ x = \dfrac{a}{\sin t}, & dx = -\dfrac{a}{\sin^2 t}\cos t dt \end{cases}$$

Визначений інтеграл

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$. Розділимо відрізок $[a, b]$ довільно на n елементарних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Позначимо через Δx_k довжину елементарного відрізку $[x_{k-1}, x_k]$, тобто

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

На кожному елементарному відрізку виберемо довільну точку

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ та визначимо λ як

$\lambda = \max \Delta x_k$, $k = 1,2,\ldots, n$.

Складемо суму

$$\sigma_\lambda = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Число σ_λ називається інтегральною сумою.

Скінчена границя інтегральної суми при $\lambda \to 0$ називається визначеним інтегралом від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[\,a,b\,]$, то вона інтегрована на цьому проміжку й існує інтеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Числа a та b називають відповідно нижньою та верхньою межею інтеграла.

Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо міняти місцями верхню і нижню границі інтеграла, знак інтеграла змінюється на протилежний :

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx\,.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx\,.$$

3. Адитивність відносно інтервалу в інтегруванні:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx\,, \qquad \text{якщо } a < c < b.$$

4. Властивість лінійності:

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx\,.$$

Формула Ньютона–Лейбніца

Якщо $F(x)$ – первісна функції $y = f(x)$, неперервної в проміжку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Обчислення визначених інтегралів як границь інтегральних сум вимагає значних зусиль. Застосування формули Ньютона-Лейбніца істотно спрощує задачу обчислення інтегралів.

Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Методи інтегрування

Якщо $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$ і

$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а складена функція $f[\varphi(t)]$ також неперервна на цьому відрізку, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

При застосуванні формули заміни змінної у визначеному інтегралі треба:

1) визначити співвідношення між старою і новою змінними та їхніми диференціалами;
2) знайти межі границі інтегрування для нової змінної.

Формула інтегрування частинами

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu ,$$

де $u(x)$, $v(x)$ – диференційовані функції на проміжку $[a,b]$. При розбитті підінтегрального виразу на співмножники u і dv слід керуватися тими самими правилами, що й при обчисленні невизначених інтегралів.

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі.

Площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ та кривою $y = f(x)$, де $f(x) > 0$ й неперервна на проміжку $[a,b]$, виражається формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

При обчисленні площі слід переконатися, що на інтервалі інтегрування функція не змінює знак, бо площі фігур, що розміщені вище осі OX, беруться зі знаком “ + ”, а ті, що розміщені під віссю OX – зі знаком “ – “. Якщо область обмежена замкнутою кривою, верхня частина якої $y = f_1(x)$, а нижня $y = f_2(x)$, де $f_2(x) > f_1(x)$ всюди на $[a,b]$, то площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$$

Якщо рівняння лінії, що обмежує фігуру, дано в параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$,, тоді для обчислення площі застосовується формула

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\varphi'(t)\, dt .$$

Якщо рівняння неперервної лінії дано в полярних координатах r = r (φ);

$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то площа криволінійного сектора визначається за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі *OX* криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $y = f(x)$, знизу віссю *OX*, а з боків прямими $x = a$, $x = b$, визначається за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

або

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Якщо треба знайти об'єм тіла, утвореного обертанням ліній $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$, то маємо формулу

$$V = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2 \right) dx , \qquad (y_1 > y_2).$$

Довжина дуги кривої

Довжина дуги кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$ та $x = b$, обчислюється за формулою

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx .$$

У випадку , коли рівняння кривої задане в параметричній формі : $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$), маємо формулу

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

Якщо рівняння кривої задане у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $(\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$, тоді

$$\ell = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$$

Невласні інтеграли

Невласні інтеграли виникають тоді, коли проміжок інтегрування є нескінченним або підінтегральна функція необмежена в деяких точках, що належать інтервалу інтегрування.

Невласні інтеграли з нескінченою границею

Нехай, функція $f(x)$ визначена у проміжку $[a\ ;+\infty)$, тобто для $x \ge a$, і інтегрована у будь-якій скінченній частині $[a;b]$. Границя даного інтеграла (скінченна або нескінченна) при $b \to +\infty$ називається невласним інтегралом функції $f(x)$ і позначається

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо границя скінченна, то невласний інтеграл є збіжним, а функцію $f(x)$ називають інтегрованою у нескінченому проміжку $[a;+\infty)$. Якщо ж ця границя нескінчена або не існує, то невласний інтеграл є розбіжним.

Геометрично невласний інтеграл при $f(x) > 0$ визначає площу фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = a$ та віссю Ох.

Аналогічно визначають невласний інтеграл функції $f(x)$ на інтервалі від $-\infty$ до b.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

та інтеграл функції від $-\infty$ до $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Обчислюють невласний інтеграл у два етапи: спочатку відшукують інтеграл на скінченому проміжку, потім виконують відповідний граничний перехід.

Якщо для $f(x)$ існує первісна $F(x)$ на всьому проміжку $[a\ ;+\infty)$, то

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a), \text{ де}$$

$$F(\infty) = \lim_{b\to\infty} F(b)$$

і передбачається існування даної границі.

У випадках, коли первісна невідома, керуються ознаками порівняння, які дозволяють з’ясувати збіжність невласного інтеграла, виходячи з аналізу збіжності іншого інтеграла.

1. Якщо хоча б при $a \le x < \infty$ має місце нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^\infty f(x)dx$, або із розбіжності $\int_a^\infty f(x)dx$ витікає розбіжність $\int_a^\infty g(x)dx$.

2. Якщо існує границя

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 < k < \infty,\ f(x) > 0,\ q(x) > 0),$ то інтеграли $\int_a^\infty f(x)dx$ та $\int_a^\infty g(x)dx$ одночасно або збіжні або розбіжні.

Невласні інтеграли від необмежених функцій

Розглянемо необмежену функцію $f(x)$, задану у скінченому проміжку $[a; b]$. Нехай $f(x)$ обмежена й інтегрована у будь-якому проміжку $[a; b - \varepsilon]$ та необмежена у кожному проміжку $[b - \varepsilon; b]$ зліва від точки b. Точку b називають особливою точкою.

Границя інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ (скінчена або нескінчена) називається невласним інтегралом функції $f(x)$ від a до b і позначається $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Якщо ця границя скінченна, то кажуть, що інтеграл є збіжним, а функцію $f(x)$ називають інтегрованою на проміжку $[a; b]$. Якщо ж границя нескінчена або не існує, то інтеграл є розбіжним.

Аналогічно визначають невласний інтеграл, коли особливою точкою є нижня границя інтеграла (точка a), то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо функція необмежена в точці $c \in [a; b]$, то тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$

Диференціальні рівняння

Рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y=f(x)$ та її похідні $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, називається диференціальним. Символічно диференціальні рівняння n-го порядку можна записати так:

$$F = (x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Якщо шукана функція залежить від одного аргументу , то диференціальне рівняння називається звичайним.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної від шуканої функції цього рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння $F(x,y,\ldots)=0$ називається така функція (загальний розв'язок рівняння) $y=\varphi(x,c_1, c_2,\ldots, c_n)$, яка при підставленні в рівняння перетворює його на тотожність, де c_1, c_2,..., c_n – невизначені сталі, кількість яких визначається порядком диференціального рівняння.

Якщо функція знайдена в неявній формі $\varphi(x,y, c_1, c_2,..., c_n)=0$, то цей вираз називають загальним інтегралом рівняння . Процес відшукання таких функцій називається інтегруванням диференціальних рівнянь.

Диференціальні рівняння першого порядку

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку :

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо рівняння розв'язати відносно y', дістанемо

$$y' = f(x, y).$$

Загальний розв'язок цього рівняння є функція

$$y=\varphi(x,c) .$$

Якщо до рівняння додається ще і початкова умова

$$y(x_0)=y_0 ,$$

тоді $c=c_0$ і маємо $y=\varphi(x,c_0)$ –частковий розв'язок.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння вигляду

$$f_1(x)\varphi_2(y)dx+f_2(x)\varphi_1(y)dy=0$$

називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо $\varphi_2(y)f_2(x)\neq 0$.

За умови $\varphi_2(y)\, f_2\,(x) \neq 0$ складові цього рівняння перемножимо на $1/\,(\varphi_2\,(y)\, f_2\,(x))$, одержимо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy = 0 .$$

Такі перетворення називаються відокремлюванням змінних, а останнє рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними.

Загальний інтеграл останнього рівняння має вигляд

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy = c .$$

Однорідні рівняння

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \text{ або } p\,(x, y)\,dx + q\,(x, y)\,dy = 0$$

називається однорідним,якщо $p(x, y)$ та $q(x, y)$ є однорідні функції одного й того ж виміру. Функцію $f\,(x, y)$ називають однорідною функцією виміру m, коли виконується рівність

$$f\,(tx, ty) = t^m \cdot f\,(x, y)$$

для довільного $t \neq 0$.

Вважаючи, що $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру та використовуючи заміну $t = \frac{1}{x}$, $y = zx$, $y' = z + xz'$, $z = z(x)$, одержимо

$$z + xz' = f(1, z).$$

Тоді
$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x},$$

а це уже рівняння з відокремленими змінними відносно z. Розв'язавши його, знаходимо $y = zx$.

Лінійні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно першого ступеня відносно шуканої функції та її похідної. Загальний вигляд лінійного рівняння

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Зробимо підстановку $y = u(x)\cdot v(x)$,де u та v – деякі диференційовані функції. Тоді $y' = u'v + uv'$.

Підставляючи праві частини для y і y' в рівняння, маємо

$$vu' + uv' + p(x)\cdot uv = q(x)$$

або
$$v\left(\frac{du}{dx} + p(x)u\right) + u\frac{dv}{dx} = q(x).$$

Цілком зрозуміло, що одну із функцій u або v можна вибрати довільно. Отже, підберемо $u(x)$ так, щоб вона була розв'язком рівняння $u' + p(x)\cdot u = 0$

Звідки $u = e^{-\int P(x)dx}$.

Вибравши так $u(x)$,одержимо рівняння відносно функції v

$$e^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{dv}{dx} = q(x) \qquad \text{або} \qquad dv = e^{\int P(x)dx}\cdot q(x)dx.$$

Отже $v(x) = \int q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$.

Тому загальний розв'язок лінійного рівняння буде

$$y = u\cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right).$$

Викладений спосіб вперше застосував Йоган Бернуллі в 1697р.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Загальний вигляд лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

Якщо $f(x)=0$ рівняння називають однорідним, якщо ж $f(x)\neq 0$ – неоднорідним. Будемо вважати, що $y_1(x)$, $y_2(x)$ лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, тоді його загальний розв'язок буде $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.

Нагадаємо, що функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ називаються лінійно незалежними, якщо їх лінійна комбінація $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)$ (де α_1, α_2– сталі) дорівнює нулю лише тоді, коли $\alpha_1=\alpha_2=0$. Якщо ж вказана лінійна комбінація дорівнює нулю при $\alpha_1\neq 0$, або $\alpha_2\neq 0$, то функції y_1 і y_2 називають лінійно залежними.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сума будь-якого його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Рівняння вигляду

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x),$$

де a_0, a_1, a_2 – сталі, називають лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0.$$

Будемо шукати частинний розв'язок цього рівняння у вигляді $y=e^{kx}$. Підставляючи в ліву частину рівняння, матимемо характеристичне рівняння

$$a_0k^2+a_1k+a_2=0.$$

Розв'язавши його, знайдемо два частинних розв'язки вихідного рівняння. Розглянемо три випадки.

1) Корені характеристичного рівняння дійсні, різні. Тоді маємо два лінійно незалежних частинних розв'язка

$$y_1=e^{k_1x}, \qquad y_2=e^{k_2x}.$$

Отже вираз $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$ буде загальним розв'язком вихідного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Тут C_1, C_2 – довільні сталі.

2) Корені характеристичного рівняння дійсні, кратні. Якщо є двократний корінь характеристичного рівняння, то йому відповідають два різних частинних розв'язки рівняння, а саме

$$y_1=e^{kx}, \qquad y_2=xe^{kx}.$$

Тобто загальний розв'язок буде

$$y=e^{kx}(C_1+C_2x).$$

3) Корені характеристичного рівняння комплексні.

Якщо $k_1=\alpha+\beta i$ $\left(i=\sqrt{-1}\right)$, то повинен бути обов'язково спряжений з ним корінь $k_2=\alpha-\beta i$.

Тоді розв'язки $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ – лінійно незалежні.

Отже, загальний розв'язок

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

Лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

Як було вже зазначено, таке рівняння має вигляд

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

де a_i $(i = 0, 1, 2)$ – стала.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сума загального розв'язку відповідно однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y = \overline{y} + y^*$, де

$\overline{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, а y^* – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння вдаються до методу неозначених коефіцієнтів, який дозволяє, при певній структурі правої частини рівняння $(f(x))$, знайти його частинний розв'язок.

Якщо $f(x) = e^{\alpha x}\left(p_n(x)\cos\beta x + q_m(x)\sin\beta x\right)$

а $p_n(x)$ і $q_m(x)$ – многочлени степеня n та m відповідно, то частинний розв'язок знайдемо у вигляді

$$y^*(x) = x^r e^{\alpha x}\left(p_e(x)\cos\beta x + q_e(x)\sin\beta x\right),$$

де $\alpha+\beta i$ є r – кратним коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

Якщо $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівня , то слід покласти $r = 0$. Тут $p_e(x)$, $q_e(x)$ - многочлени степеня $e = max\ (m;\ n)$з невизначеними коефіцієнтами, а іменно

$p_e(x) = A_0x^e + A_1x^{e-1} +...+ A_e$; $q_e(x) = B_0x^e + B_1x^{e-1} +...+ B_e$.

Якщо $f(x)$ – сума кількох перелічених вище виразів , то y^* слід шукати у вигляді суми всіх відповідних виразів з неозначеними коефіцієнтами.

Ряди

Розглянемо нескінченну послідовність чисел $u_1, u_2, ..., u_n, ...$.

Вираз $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ називають числовим рядом, числа $u_1, u_2, ...$ – членами ряду, u_n – загальним членом ряду. Для означення рядів використовують запис

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Ряд вважається заданим, якщо його загальний член є функцією номеру n.

Сума n перших членів ряду називається n-ю частковою сумою ряду і позначається $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Необхідна ознака збіжності ряду.

Ряд називається збіжним, якщо послідовність його часткових сум при необмеженому зростанні n прямує до скінченної границі, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S називають сумою ряду. Якщо при $n \to \infty$ послідовність часткових сум не прямує до скінченної границі, тоді ряд називають розбіжним.

Залишок ряду $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$, називається n - им залишком ряду. Якщо ряд збіжний, залишок ряду r_n прямує до нуля зі зростанням n.

При дослідженні рядів треба знати: ряд збіжний чи розбіжний. Необхідна ознака збіжності ряду формулюється так: якщо ряд збіжний, то загальний член ряду прямує до нуля при нескінченному зростанні n, тобто

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Невиконання цієї ознаки є достатньою умовою для розбіжності ряду: якщо $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Наведена ознака є необхідною, але недостатньою умовою для ствердження, що досліджуваний ряд збіжний. Наприклад, гармонічний ряд з загальним членом $u_n = \dfrac{1}{n}$ є розбіжним, незважаючи на те, що виконується необхідна ознака

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Достатні ознаки збіжності знакопостійних рядів

При дослідженні збіжності або розбіжності рядів, по-перше, перевіряють необхідну ознаку, а потім достатню. Наведемо найвживаніші з достатніх ознак.

Ознаки порівняння

Задані два ряди з членами:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... \tag{2}$$

а) якщо члени ряду (1) не перевершують відповідних членів ряду (2) ($u_n \leq v_n$) і ряд (1) розбіжний, то й ряд (2) розбіжний; якщо ряд (2) збіжний, то й ряд (1) збіжний;

б) якщо для рядів з загальними членами u_n та v_n відношення $\dfrac{u_n}{v_n}$ має скінченну границю при необмеженому зростанні n, то ряди збіжні або розбіжні одночасно

$$\left(\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = const \right).$$

Щоб дослідити ряд за допомогою однієї з ознак порівняння, необхідно вибрати інший відомий ряд, з яким можна було б його порівняти. Найчастіше це розбіжний гармонічний ряд із загальним членом $v_n = \dfrac{1}{n}$; збіжна нескінченно спадна геометрична прогресія $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + ...$ для довільного

$|q| < 1$ та збіжні ряди з загальним членом $v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}, \alpha > 1.$

Ознака Даламбера

Якщо для ряду $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ існує границя відношення наступного члена до попереднього при необмеженому зростанні n

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho ,$$

тоді при $\rho < 1$ ряд збіжний, при $\rho > 1$ – розбіжний. При $\rho = 1$ ознака відповіді не дає.

Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ величина $\sqrt[n]{u_n}$ має кінцеву границю при $n \to \infty$ $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, тоді при $\rho < 1$ ряд збіжний, при $\rho > 1$ – розбіжний. При $\rho = 1$ ознака відповіді не дає.

Інтегральна ознака Коші

Якщо $f(x)$ при $x \geq 1$ неперервна, додатня й монотонно спадаюча функція, тоді ряд $\sum\limits_{n \to 1}^{\infty} u_n$, де $u_n = f(n)$, збіжний або розбіжний в залежності від того, збіжний чи розбіжний невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx .$$

Знакопереміжні ряди

Числовий ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ... ,$$

де $u_n > 0$, $n=1,2,\ldots$ називається знакопереміжним рядом.

Достатньою ознакою збіжності знакопереміжного ряду є теорема Лейбніца: якщо в знакопереміжному ряді члени ряду складають спадну послідовність $(u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...)$ і загальний член ряду при необмеженому зростанні n прямує до нуля $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, тоді ряд збіжний, його сума додатня і не перевищує першого члена.

Достатню ознаку знакопереміжного ряду становить твердження: якщо ряд, складений із абсолютних величин членів знакопереміжного ряду збіжний, тоді і початковий ряд збіжний і називається абсолютно збіжним. Якщо знакопереміжний ряд збіжний, а ряд із абсолютних величин його членів розбіжний, тоді він називається умовно збіжним.

Степеневі ряди

Ряд, члени якого становлять функції змінної x, називається функціональним рядом

$u_1(x) + u_2(x) + ... +u_n(x) + ...$

Сукупність значень змінної x, для яких функції $u_1(x)$, $u_2(x)$,...,$u_n(x)$ визначені і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжний, називають областю збіжності функціонального ряду. В області збіжності ряду його сума становить функцію змінної x : $S(x)$.

Для збіжного функціонального ряду його n-й залишок задовольняє формулі

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 .$$

Функціональний ряд у вигляді

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_{n-1}x^{n-1} + C_nx^n + ... \qquad (3)$$

називають степеневим рядом, сталі C_0, C_1, C_2, ...,C_n,... коефіцієнтами ряду.

Ряд $C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + ... + C_n(x - a)^n + ...$

також є степеневим, він може бути зведений до ряду (10.3) заміною $x - a = x_1$.

Основу дослідження степеневих рядів складає теорема Абеля: якщо степеневий ряд (3) збіжний для деякого $x = x_0$, тоді він збіжний абсолютно для всіх значень x, для яких

$$|x| < x_0 ;$$

якщо ж ряд (10.3) розбіжний для $x = x_0$,то він розбіжий для всіх значень x, для яких $|x| > x_0$.

Якщо степеневий ряд абсолютно збіжний для усіх значень x із інтервалу $[-R,R]$, то такий інтервал є інтервалом збіжності. Іншими словами, ряд збіжний для усіх $|x| < R$.

Питання збіжності для $x = -R$, $x = R$ вирішується конкретно для кожного ряду.

Радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|.$$

Основні властивості степеневих рядів

1. Якщо степеневий ряд збіжний, то його сума неперервна функція від x.

2. Степеневий ряд можна почленно диференціювати, при цьому сума знайденого ряду дорівнює похідній від суми початкового ряду.

3. Степеневий ряд в області збіжності можна почленно інтегрувати, при цьому сума знайденого ряду дорівнює інтегралу від суми початкового ряду.

Розвинення функцій у степеневі ряди

Основними для розвинення функції в степеневі ряди є формули Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

та Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots.$$

На основі цих формул можна знайти розвинення в степеневий ряд функцій: e^x, *sinx*, *cosx*, *ln*(1+*x*), *arctgx*, *arcsinx*, $(1+x)^m$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots(-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots(-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots(-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots(-1 < x \le 1),$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots(-1 \le x \le 1),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots(-1 < x < 1),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots(-1 \le x \le 1).$$

Використавши ці наведені формули можна обчислити значення цих функцій з яким завгодно ступенем точності.

Список літератури

1. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – 400с.

2. Вища математика: посібник для самостійного вивчення курсу: Посібник/ В.Г. Гула, М.С. Синєкоп та ін.; ХДУХТ – Харків, 2007. – 303 с.

3. Корж О.П. Елементи аналітичної геометрії і лінійної алгебри. Навч. посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навч. закладів. – Харків: Студцентр, 2001. – 200с.

Навчальне видання

Укладачі:
Жилюк Ніна Олексіївна
Ільюшко Вадим Миколайович
Синєкоп Микола Сергійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
Для організації самостійної роботи та підготовки
до модульного контролю з дисципліни
«Вища математика»
Модуль № 2: ***«Диференціальне числення функцій двох змінних»,***
« Інтегрування функції однієї змінної», « Числові та функціональні ряди»,
«Диференціальні рівняння»

Для студентів економічних спеціальностей

Підп. до друку , формат . Папір газ. Друк. офс. Умов. друк. арк.
обл.-вид. арк. Умовн. фарб.-відб. Тир. прим. Зам № .

Харківський державний університет харчування та торгівлі.
61051, Харків-51, вул. Клочківська, 333.

ДОД ХДУХТ Харків-51, вул. Клочківська, 333.