МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський державний університет харчування та торгівлі

Оптимізаційні методи та моделі

Методичні вказівки для організації самостійної роботи студентів економічних спеціальностей

Харків
ХДУХТ
2015

Методичні вказівки для організації самостійної роботи студентів економічних спеціальностей з курсу «Оптимізаційні методи та моделі» [Електронний ресурс] / Синєкоп М.С., Софронова М.С. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2015. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Укладачі: Синєкоп М. С., Софронова М. С.

Рецензент: доц., к. ф.-м. н. Торяник Д. О.

Кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін

Схвалено методичною комісією вищого навчального закладу за напрямом підготовки (спеціальністю) 6.030508 „Фінанси та кредит”, 6.030509 „Облік та аудит”
Протокол від 16 грудня 2015 року № 4

Схвалено вченою радою ХДУХТ
Протокол від 24 вересня 2015 року № 2

Схвалено редакційно-видавничою радою ХДУХТ
Протокол від 7 вересня 2015 року № 1

Запропоновано методичні вказівки для студентів економічних спеціальностей денного та заочного відділень при вивченні дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі». Наведено основні теоретичні положення та зразки розв'язання типових прикладів. Розглянуті типові приклади допоможуть студентам організувати самостійну роботу та виконати індивідуальну контрольну роботу.

1. *Оптимізаційні задачі та їх моделі*

Математична дисципліна «Оптимізаційні методи та моделі» вивчає підходи до побудови екстремальних математичних моделей та побудови алгоритмів їх дослідження. Найбільший попит при розв'язанні економічних і виробничих проблем мають лінійні економіко-математичні моделі. Такі моделі використовуються при розробці виробничих програм підприємств, визначенні найкращого асортименту продукції підприємства, в задачах перспективного, поточного і оперативного планування тощо. Особливо широке застосування лінійної моделі одержали при розв'язанні задач економії ресурсів (вибір ресурсозберігаючих технологій, складання сумішей), виробничо-транспортних задач тощо.

Для багатьох важливих економічних проблем галузі створено типові оптимізаційні моделі та розроблено універсальні методи їх дослідження. Чисельні алгоритми цих методів програмно реалізовані на сучасних ПК з типовим сервісом обміну інформації, що сприяє оперативному прийняттю оптимальних рішень.

Математична модель економічної задачі враховує обмеження на наявні ресурси (грошові, часові, матеріальні, трудові, технологічні та ін.) підприємства. Математично обмеження виражаються рівняннями та нерівностями. Їх сукупність утворює область допустимих розв'язків (область економічних можливостей). Показники ефективності (критерій оптимальності) записується функцією цілі, яку необхідно досліджувати на оптимальність з урахуванням обмежень. Безумовно складові виробничого плану (невідомі задачі) повинні задовольняти умові невід'ємності. Таким чином оптимізаційна задача формулюється наступним чином: знайти план $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який забезпечує екстремальне значення цільовій функції Z

$$\max(\min) Z = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при обмеженнях

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \{\leq, =, \geq\} \ b_i, \ i = \overline{1, m},$$

та умові невід'ємності змінних

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n}.$$

План $\overline{x}$, який задовольняє системі обмежень задачі, називається допустимим. Допустимий план, що забезпечує функції цілі екстремальне значення, називається оптимальним.

Приклади оптимізаційних задач та форми запису їх моделей

Задача 1. Нехай для виробництва трьох видів карамелі A_1, A_2, A_3 використовують три види сировини: B_1 – сахарний пісок, B_2 – патока, B_3 – фруктове пюре, запаси яких відповідно b_1, b_2, b_3. Відомі норми витрат a_{ij} кожного виду сировини B_i на виготовлення одиниці карамелі A_j, а також прибуток c_j від реалізації одиниці відповідного виду карамелі. Всі дані зводимо в таблицю

Сировина	Види карамелі			Запаси сировини
	A_1	A_2	A_3	
сахарний пісок	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
патока	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
фруктове пюре	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
прибуток	c_1	c_2	c_3	

Скласти план виробництва карамелі для забезпечення максимального прибутку від її реалізації.

Вважаємо, що буде вироблено карамелі A_1 в кількості x_1 одиниць, A_2 в кількості x_2 одиниць і A_3 в кількості x_3 одиниць. Тоді об'єм сахарного піску на виробництво запланованої кількості карамелі буде дорівнювати $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, а з урахуванням запасу цієї сировини b_1 одержуємо першу лінійну нерівність $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$.

Аналогічно записуються об'єми використання другого та третього видів сировини, а з урахуванням їх запасів – ще дві лінійні нерівності. В результаті одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3. \end{cases} \tag{1}$$

До цієї системи обмежень додаємо ще природну вимогу – невід'ємність змінних

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \tag{2}$$

Враховуючи запланований прибуток від реалізації одиниці кожного виду карамелі можна записати прибуток від реалізації виробленої продукції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max. \tag{3}$$

Це і є функція цілі. Формули (1)–(3) визначають лінійну оптимізаційну модель вихідної задачі.

Для випадку задачі з n видами карамелі та m видами сировини математична модель запишеться так

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{4}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max. \tag{6}$$

Вочевидь, для запису обмежень (1) моделі використані лише нерівності. Така форма запису моделі називається стандартною.

Розглянемо можливість переходу до другої форми запису моделі вихідної задачі, а саме до канонічної. Для цього достатньо доповнити умову вихідної задачі. Наприклад, будемо враховувати в частині прибутку підприємства ще і реалізацію залишків сировини: x_4 – сахарного піску вартістю c_4, x_5 – патоки вартістю c_5, x_6 – фруктового пюре вартістю c_6. Таке доповнення дає змогу записати канонічну модель задачі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + x_6 = b_3. \end{cases} \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,6}, \tag{8}$$

$$Z = \sum_{j=1}^{6} c_j x_j \to \max. \tag{9}$$

Формальний перехід від канонічної форми моделі (7)–(9) до стандартної (1)–(3) здійснюється реалізацією таких кроків:

1. Виражаємо змінні x_4, x_5, x_6 із (7) і підставляємо в (9). Функція цілі буде залежати лише від x_1, x_2, x_3. Коефіцієнти c_1, c_2, c_3 будуть перераховані.

2. Знехтуємо змінними x_4, x_5, x_6 в (7), що забезпечить перехід від рівностей до нерівностей.

Поряд з двома розглянутими формами моделей оптимізаційних задач відмітимо і третю – загальну. Для загальної форми моделі характерно використання в обмеженнях як рівнянь так і нерівностей. Більш того, не виключається можливість використання змінної без обмеження на її знак. Така змінна, наприклад, x_j, запишеться через дві нові змінні x'_j та x''_j за правилом: $x_j = x'_j - x''_j$, $x'_j \geq 0$, $x''_j > 0$.

При необхідності задача пошуку мінімуму

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

може бути замінена задачею пошуку максимуму

$$Z_1 = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max.$$

Задача 2. Необхідно скласти такий план перевезення однорідного вантажу a_1, a_2, a_3 з пунктів відправлення A_1, A_2, A_3 в кожний пункт призначення B_1, B_2, B_3, B_4 в кількості b_1, b_2, b_3, b_4 відповідно, щоб транспортні витрати були найменшими (транспортна задача за критерієм вартості). Відома вартість c_{ij}, $i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}$, перевезення одиниці вантажу з кожного пункту відправлення A_i в кожний пункт призначення B_j. Сформульовані дані заносимо в таблицю

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_3
Потреби	b_1	b_2	b_3	b_4	

Вводимо невідомі x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозиться від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j. В збалансованій задачі сума поставок дорівнює сумарному попиту

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j \tag{10}$$

Оптимізаційну математичну модель сформулюємо так: знайти невідомі x_{ij}, $i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}$, які задовольняють умовам

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,3}, & (11) \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,4}, & (12) \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}$$

та забезпечують мінімум функції цілі

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \to \min . \tag{13}$$

Таким чином, сформульована лінійна оптимізаційна модель транспортної задачі.

2. *Графічний метод розв'язання оптимізаційних задач*

Цей метод можна використовувати ефективно, коли задача має не більше двох змінних і сформульована в стандартній формі.

Нехай маємо оптимізаційну задачу

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \,,\ i = \overline{1, m}\,, \tag{14}$$

$$x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0\,, \tag{15}$$

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max\,. \tag{16}$$

Кожне рівняння $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1, m}$, із (14) визначає пряму на площині $x_1 0 x_2$, яка ділить площину на дві півплощини. Одна з них визначається нерівністю $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$, друга півплощина – нерівністю $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 > b_i$. Допустимою для сформульованої задачі є перша півплощина. Перетин сукупності m півплощин сумісно з півплощинами (15) визначає на площині многокутник розв'язків, який будемо називати областю допустимих розв'язків (ОДР). Для ілюстрації розглянемо ОДР, зображену на рис. 1.

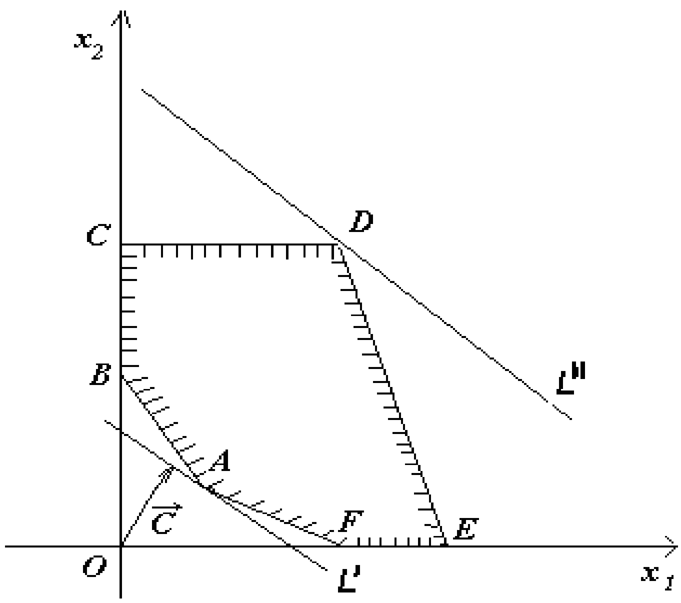

Рис. 1

Далі вводимо до розгляду вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$, який є вектором зростання функції цілі Z. Як бачимо, проекціями розглядуваного вектора на координатні вісі є коефіцієнти при відповідних невідомих функції цілі (16).

У відповідності до рис. 1, $\bar{c} = (c_1, c_2)$ – вектор зростання лінійної функції цілі Z, а L', L'' – лінії рівня цієї функції. В кутовій точці A функція цілі набуває мінімального значення $Z(A) = Z_{\min}$, а у кутовій точці D $Z(D) = Z_{\max}$ – максимального значення. Можливий випадок, коли лінія рівня співпадає зі стороною ОДР в кожній точці, яка належить цій стороні, функція цілі досягає максимального значення. Це так званий альтернативний оптимум.

Графічний метод випливає із геометричної інтерпретації оптимізаційної задачі. Етапи реалізації графічного методу:

1) побудова ОДР за обмеженнями задачі і умовою невід'ємності змінних;
2) знаходження кутової точки, де лінія рівня набуває оптимального значення;
3) визначення координати кутової точки (оптимальний план) і значення функції цілі в цій точці.

Приклад 1. Знайти оптимальне значення змінних x_1, x_2, які задовольняють умовам оптимізаційної задачі

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Побудуємо ОДР. Перша нерівність в обмеженнях визначає одну із двох півплощин, на які гранична пряма $x_1 - 5x_2 = 3$ ділить всю площину. Щоб знайти потрібну півплощину, вибираємо контрольну точку, наприклад, початок координат $x_1 = 0, x_2 = 0$ (рис. 2).

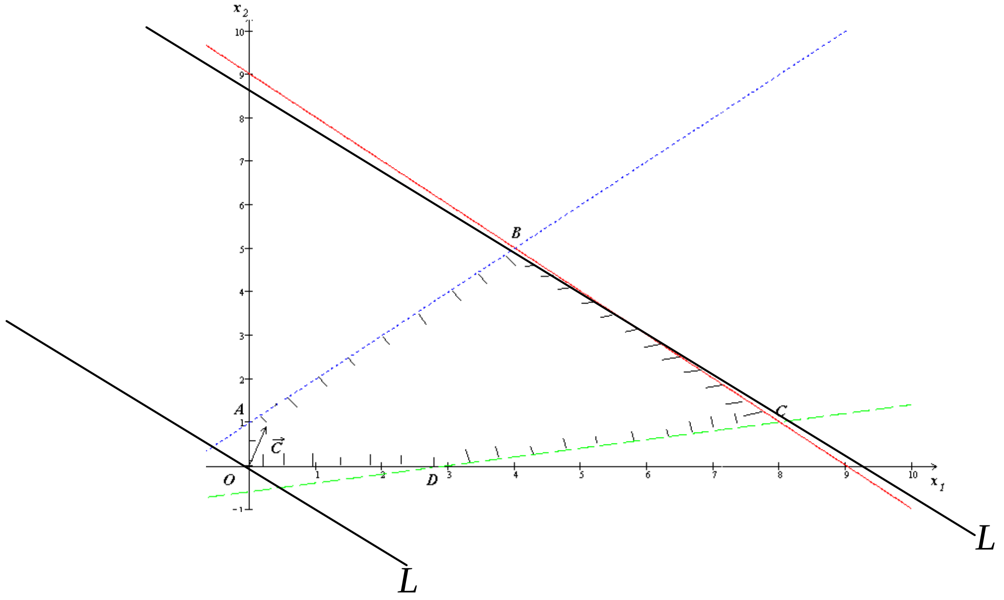

Рис. 2

Підставляємо ці значення в першу нерівність. Як бачимо, $0 < 3$, отже початок координат належить шуканій півплощині (вона відмічена штриховкою). Аналогічно будуємо дві інші граничні прямі та визначаємо півплощини, що задовольняють відповідним нерівностям. Сумісно з умовою невід'ємності маємо ОДР – многокутник $OABCD$. Будуємо вектор $\bar{c} = (1, 4)$ і пряму L перпендикулярно до $\bar{c}$. В точці O пряма L є першою опорною прямою многокутника розв'язків і $Z(O) = Z_{\min}$. За умовою задачі треба знайти кутову точку ОДР, в якій функція цілі набуває максимального значення. Для цього переміщуємо пряму L паралельно самій собі в напрямі вектора $\bar{c}$. Точка B – остання кутова точка, яку перетинає пряма L. Координати цієї точки $x_1 = 4, x_2 = 5$ (це точка перетину другої і третьої граничних прямих). В цій точці $Z(B) = Z_{\max} = 24$.

Приклад 2. Розв'язати графічним методом оптимізаційну задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, & (l_1) \\ x_1 + x_2 \le 8, & (l_2) \\ -x_1 + x_2 \le 4, & (l_3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$Z = 5x_1 + 5x_2 \to \max.$$

Аналізуючи ліву частину другої нерівності в обмеженнях і праву частину функції цілі можна помітити, що відношення коефіцієнтів при відповідних змінних задовольняють умові

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Це свідчить про те, що пряма l_2 паралельна лінії рівня функції цілі $Z(x_1, x_2)$, а значить можна очікувати наявності альтернативного оптимуму.

Використаємо із постановки задачі систему обмежень та умову невід'ємності для формування ОДР (рис. 3).

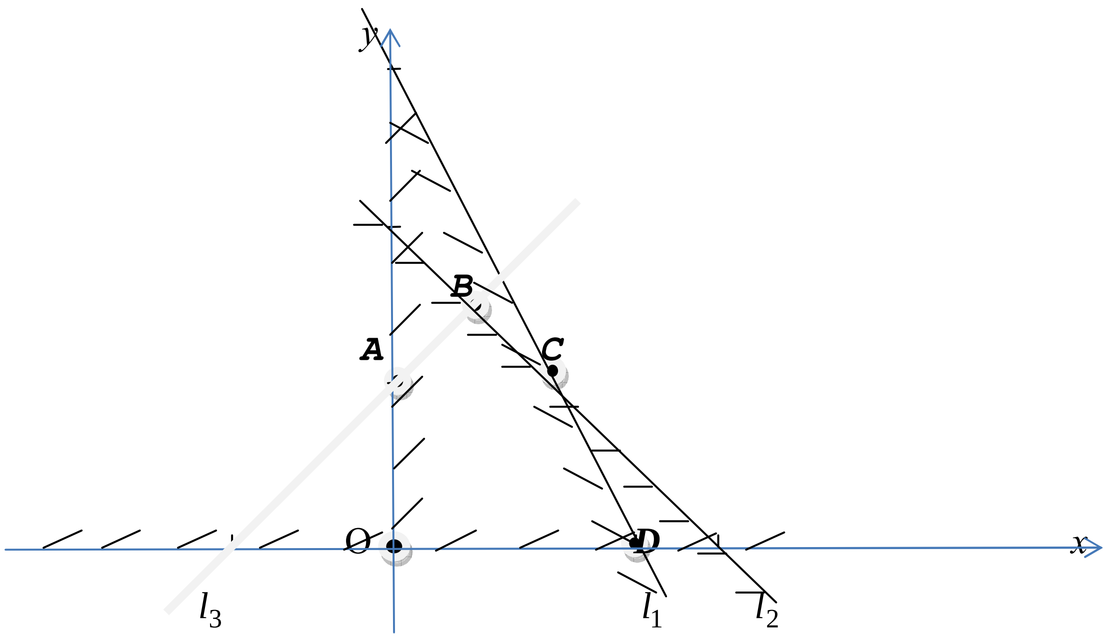

Рис. 3

Будуємо на площині x_1Ox_2 прямі l_1, l_2, l_3 за точками.

$l_1: 2x_1 + x_2 = 12$, $l_2: x_1 + x_2 = 8$, $l_3: -x_1 + x_2 = 4$.

x_1	x_2
0	12
6	0

x_2	x_1
0	8
8	0

x_1	x_2
0	4
–4	0

Вибираємо контрольну точку, наприклад, початок координат т. $O(0,0)$ та встановлюємо, що кожна із нерівностей в обмеженнях задовольняється

(0<12, 0<8, 0<4). Відповідні допустимі півплощини позначаємо штриховкою. Одержуємо ОДР: *OABCD*. На площині x_1Ox_2 відмічаємо вектор $\bar{c} = (5,5)$. Позначаємо в т. O лінію рівня функції цілі (пряму, перпендикулярну до вектора $\bar{c}$) і визначаємо значення функції цілі $Z(O) = Z(0,0) = 0$.

Переміщуємо лінію рівня в напрямку вектора $\bar{c}$ до перетину т. A(0,4): $Z(A) = Z(0,4) = 20$. Наступна вершина ОДР, яку перетинає лінія рівня, це т. D(6,0): $Z(D) = Z(6,0) = 30$. Далі лінія рівня перетинає одночасно дві вершини B і C; маємо: $Z(B) = Z(2,6) = 40$; $Z(C) = Z(4,4) = 40$. Як бачимо, $Z(B) = Z(C)$, тобто одержано альтернативний оптимум: незалежно від вибору точки на відрізку *BC* (стороні ОДР) значення функції цілі незмінна ($Z_{\max} = 40$).

На основі геометричної інтерпретації задачі і одержаного графічним методом її розв'язку можна сформулювати такі висновки:

1. Система лінійних обмежень визначає опуклу многокутну (многогранну) область планів.
2. Оптимальний розв'язок оптимізаційної задачі досягається в одній із вершин многокутника (многогранника) області планів.
3. Як правило оптимальний розв'язок задачі – єдиний, за виключенням випадку альтернативного оптимуму ($Z_{\max}$ досягається на стороні ОДР).
4. Задача може не мати розв'язку, коли ОДР – пуста множина або коли ОДР – відкрита, що призводить до необмеженості функції цілі.

3. *Базисні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0}. \end{cases} \tag{17}$$

Тут $x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі, a_{ij}, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ – задані коефіцієнти, $n>m$. Систему (17) за допомогою методу Жордана–Гаусса (послідовне вилучення невідомих) приводимо до одиничного базису

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + b_{1,r+1}x_{r+1} + b_{1,r+2}x_{r+2} + ... + b_{1,n}x_n = b_{10} \\ \quad x_2 \quad + b_{2,r+1}x_{r+1} + b_{2,r+2}x_{r+2} + ... + b_{2,n}x_n = b_{20} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad\quad x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + b_{r,r+2}x_{r+2} + ... + b_{r,n}x_n = b_{r0} \end{cases} \tag{18}$$

де $r \le m$, $x_1, x_2, ..., x_r$ – базисні змінні, $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ – вільні змінні, b_{ij} $i=\overline{1,r}$; $j=\overline{1,r+1,n}$ – нові коефіцієнти. Основу методу Жордана–Гаусса складають елементарні перетворення:

1) множення лівої і правої частини рівняння на число, відмінне від нуля;

2) викреслення рівняння, ліва і права частини якого дорівнюють нулю;

3) додавання двох рівнянь, одне з яких помножене на довільне число.

Перетворення 1)–3) за умови відмінності від нуля в (17) розв'язувального коефіцієнта a_{11} дозволили невідому x_1 залишити у першому рівнянні (з інших рівнянь ця невідома вилучена) і одержати перший стовпчик еквівалентної системи (18). Невідому x_2 за вказаними перетвореннями залишимо в другому рівнянні і так вчинимо з усіма r невідомими, що дозволило одержати систему (18). Для алгебраїчної системи (18) можна записати базисний розв'язок ($\bar{x}_б$). Для цього достатньо вільні змінні покласти рівними нулю, тобто

$$\bar{x}_б = \left(b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{r0}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r \quad нулів} \right).$$

Зауважимо, що якщо в результаті використання методу Жордана–Гаусса одержано рядок, ліва частина якого є нулями, а права – відмінна від нуля, то така система є несумісною, тобто немає розв'язку.

Приклад. Знайти базисний розв'язок системи

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases} \tag{19}$$

Всі етапи здійснюваних перетворень будемо записувати таблицями. Остання колонка ($k\sum$) в таблиці використовується для контролю обчислень.

№ ітерації	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{i0}	$k\sum$	
вихідна система	3	–5	1	–3	5	3	4	
	–2	2	–1	2	–3	–2	–4	
	2	0	1	–1	2	3	7	
1	1	–5	0	–2	3	0	–3	I-III
	0	2	0	1	–1	1	3	II-III
	2	0	1	–1	2	3	7	
2	1	–1	0	0	1	2	3	I+2II
	0	2	0	1	–1	1	3	
	2	2	1	0	1	4	10	III+II
3	1	–1	0	0	1	2	3	
	1	1	0	1	0	3	6	II+I
	1	3	1	0	0	2	7	III-I

Тут I, II, III – номери рядків попередньої ітерації, змінні x_3, x_4, x_5 стали базисними, x_1, x_2 – вільні змінні, $\overline{x_б} = (0, 0, 2, 3, 2)$. Подальше використання елементарних перетворень дасть змогу виписувати нові базисні розв'язки (якщо вони існують). Одержаний базисний розв'язок $\overline{x_б}$ є допустимим (числові значення базисних змінних невід'ємні), тому його можна назвати опорним $\overline{x_{оп}} = \overline{x_б}$.

4. *Опорні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

Пошук вихідного опорного розв'язку здійснюється за допомогою симплексних перетворень:

1. Вихідна система повинна мати невід'ємні праві частини $\left(a_{i0} > 0, i = \overline{1, m}\right)$. Якщо розв'язувальна система має рівняння з від'ємними правими частинами, то такі рівняння множимо на (–1).
2. Симплексна таблиця повинна мати колонку, в якій виписуються числа $\theta_i = \dfrac{a_{i0}}{a_{ip}}$ ($a_{ip} > 0$). Таким чином невідома, наприклад, x_p, яка планується для введення в число базисних змінних, повинна входити хоча б в одне рівняння системи з додатнім коефіцієнтом. Цей коефіцієнт буде розв'язувальним. Якщо ж є декілька додатних коефіцієнтів у стовпчику при x_p, то в якості розв'язувального коефіцієнта вибирається той, який забезпечує найменше із чисел $\theta_i = \dfrac{a_{i0}}{a_{ip}}$.
3. Після визначення розв'язувального коефіцієнта, наприклад, a_{qp}, змінна x_p за допомогою елементарних перетворень вводиться в число базисних.

Зазначимо, що симплексні перетворення не змінюють знаку правих частин рівнянь.

Приклад. Знайти вихідний опорний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Послідовним введенням в базис невідомих трьох змінних формуємо симплексні таблиці

№ ітерації	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{i0}	$\frac{a_{io}}{a_{ip}}$
вихідна система	3 2 2	–5 –2 0	1 1 1	–3 –2 –1	3 1 2	3 2 3	3/3=1 2/2=1 3/2=1,5
1	0 1 0	–2 –1 2	–0,5 0,5 0	0 –1 1	1,5 0,5 1	0 1 1	– – 1/2=0,5
2	0 1 0	0 0 1	–0,5 0,5 0	1 –0,5 0,5	2,5 1 0,5	1 1,5 0,5	1/2,5=0,4 min 1,5/1=1,5 0,5/0,5=1
3	0 1 0	0 0 1	–0,2 0,7 0,1	0,4 –0,9 0,3	1 0 0	0,4 1,1 0,3	

На першій ітерації у відповідності до чисел, записаних в останній колонці, можна невідому x_1 залишити або в першому рядку (рівнянні), або в другому. Залишимо цю невідому у другому рядку. За допомогою елементарних перетворень x_1 вилучаємо із першого та третього рядків. На другій ітерації однозначно змінну x_2 залишаємо у третьому рядку. Змінну x_5 вводимо в базис на третій ітерації, вилучаючи її з другого та третього рядків. Таким чином, змінні x_3, x_4 стали вільними, а вихідний опорний розв'язок запишеться так $\overline{x}_{on} = (1{,}1; 0{,}3; 0{,}0; 0{,}4)$.

5. *Графічний метод (продовження)*

В п. 2 розглянуто графічний метод для оптимізаційних задач з двома змінними. Цей метод можна використовувати, коли число змінних більше двох, система обмежень записана в канонічній формі, приведена до одиничного базису і має не більше двох вільних змінних.

Розглянемо етапи розв'язання графічним методом такої оптимізаційної задачі: знайти вектор, який задовольняє системі обмежень

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + x_3 = b_{10}, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \quad + x_4 = b_{20}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 \quad + x_{r+2} = b_{r0}, \end{cases}$$

умові невідємності $x_i \geq 0, i = \overline{1, r+2}$, та забезпечує екстремальне значення функції цілі

$$\mathrm{Z} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_rx_r + c_{r+1}x_{r+1} + c_{r+2}x_{r+2} \to \max.$$

Як бачимо, система обмежень складається із r рівнянь та r +2 змінних: дві змінні x_1, x_2 – вільні, r змінних $x_3, x_4, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}$ – базисні. Функція цілі також залежить від r +2 змінних. Використаємо алгебраїчні перетворення вихідної задачі (канонічного виду), що зводять її до стандартного виду (14)-(16), тобто до задачі, яка залежить лише від двох вільних змінних.

Етапи таких перетворень:

1) Із системи обмежень виражаємо базисні змінні через вільні змінні

$$\begin{aligned} x_3 &= b_{10} - b_{11}x_1 - b_{12}x_2, \\ x_4 &= b_{20} - b_{21}x_1 - b_{22}x_2, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{r+2} &= b_{r0} - b_{r1}x_1 - b_{r2}x_2; \end{aligned}$$

2) Праві частині для базисних змінних підставляємо в функцію цілі, що дає змогу одержати новий вираз для функції цілі

$$\mathrm{Z} = d_1x_1 + d_2x_2 + c_0;$$

3) Знехтуємо базисною змінною в кожному рівнянні системи обмежень і, таким чином, кожне рівняння перетворюється в нерівність

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + x_{j+r} = b_{j0}, \; x_{j+2} \geq 0, \; j = \overline{1, r} \Rightarrow$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \leq b_{j0}, \; j = \overline{1, r}.$$

Після таких перетворень одержуємо (для розв'язання графічним методом) оптимізаційну задачу

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \le b_{10}, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \le b_{20}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 \le b_{r0}, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, r+2}$$

$$\mathrm{Z} = d_1x_1 + d_2x_2 + c_0 \to \max,$$

$$x_{j+2} = b_{j0} - b_{j1}x_1 - b_{j2}x_2,\ j = \overline{1, r}.$$

Приклад. Розв'язати графічним методом задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 14, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,5}$$

$$\mathrm{Z} = 6x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 62 \to \max.$$

Тут x_1, x_2 – вільні змінні, x_3, x_4, x_5 – базисні змінні. Виразимо базисні змінні через вільні, одержимо

$$x_3 = 30 - 2x_1 - 3x_2,\ x_4 = 14 - 2x_1 + x_2,\ x_5 = 18 + 2x_1 - 3x_2.$$

Підставимо вирази для базисних змінних в функцію цілі, одержимо її залежність лише від вільних змінних

$$\mathrm{Z} = 4x_1 + 2x_2 \to \max.$$

Знехтуємо в системі обмежень (канонічного виду) базисними змінними і запишемо систему обмежень, яка залежить лише від вільних змінних, у вигляді нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ 2x_1 - x_2 \le 14, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 18. \end{cases}$$

Задача, для розв’язання якої безпосередньо використовується графічний метод, записується так: знайти вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, який задовільняє обмеженням

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad \le 30, \\ 2x_1 - x_2 \quad \le 14, \\ -2x_1 + 3x_2 \quad \le 18, \end{cases}$$

умові невід’ємності змінних $x_i, i = \overline{1,5}$, та забезпечує екстремальне значення функції цілі

$$Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max .$$

Будуємо ОДР та вектор зростання функції цілі $\bar{c}_0$ (рис. 4).

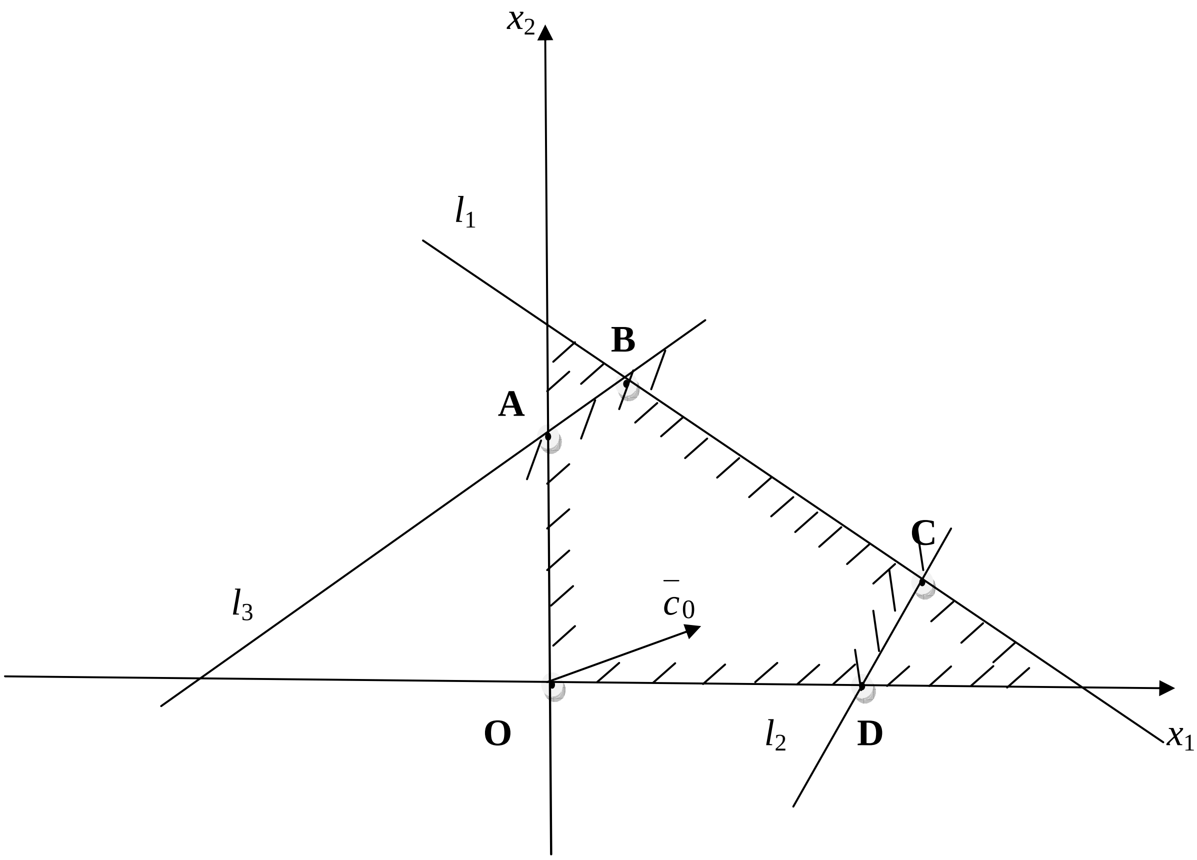

Рис. 4

ОДР: ОАВСД, координати вершин: O(0,0), A(0,6), B(3,8), C(9,4), D(7,0), вектор зростання функції цілі $\bar{c}_0 = (4,2)$. Значення функції цілі у вершинах ОДР: Z(O)=Z(0,0)=0, Z(A)=Z(0,6)=12, Z(B)=Z(3,8)=28, Z(C)=Z(9,4)=44, Z(D)=Z(7,0)=28.

Безпосередній аналіз показує, що $Z_{\max} = \max(1,12,28,44,28) = 44$, $\overline{X}_{опт} = (9,4,0,0,24)$.

6. *Симплексний метод*

Симплексний метод – метод послідовного поліпшення значень цільової функції шляхом переходу від одного опорного розв’язку до іншого.

Нехай маємо оптимізаційну задачу, система обмежень якої за допомогою симплексних перетворень приведена до одиничного базису

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{1,r+1}x_{r+1} + a_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{1,n}x_n = a_{10}, \\ \quad x_2 \qquad + a_{2,r+1}x_{r+1} + a_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{2,n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + a_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{r,n}x_n = a_{r0}. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

а функція цілі записується формулою

$$Z = -c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max .$$

Виписуємо вихідний опорний розв'язок задачі $\overline{x}_0 = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{r0}, 0, 0, \ldots, 0)$. Перевірку опорних розв’язків на оптимальність будемо здійснювати за допомогою симплексних таблиць. Перша з них має вигляд

$C_{баз}$	$x_{баз}$	c_0	c_1	c_2	…	c_r	c_{r+1}	…	c_p	…	c_n	$\frac{a_{i0}}{a_{iq}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_p	…	x_n	
c_1	x_1	a_{10}	1	0	…	0	$a_{1,r+1}$	…	$a_{1,p}$	…	$a_{1,n}$	
c_2	x_2	a_{20}	0	1	…	0	$a_{2,r+1}$	…	$a_{2,p}$	…	$a_{2,n}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
c_r	x_r	a_{r0}	0	0	…	1	$a_{r,r+1}$	…	$a_{r,p}$	…	$a_{r,n}$	
Z		a_{00}	0	0	…	0	$a_{0,r+1}$	…	$a_{0,p}$	…	$a_{0,n}$	

У першому стовпчику таблиці – $C_{баз}$ – коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі, а у другому – $x_{баз}$ – базисні змінні опорного розв'язку. У третьому стовпчику записані праві частини системи (значення базисних змінних). У решті стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записані відповідні коефіцієнти з кожного обмеження задачі. Для зручності обчислень зверху позначень змінних виписані відповідні коефіцієнти з функції цілі. Останній рядок таблиці містить оцінки для вільних змінних, обчислених за формулою

$$a_{ok} = \sum_{i=1}^{r} c_i a_{ik} - c_k\,,\ k = r+1, r+2, \ldots, n, \tag{20}$$

а також значення функції цілі для розглядуваного опорного розв'язку

$$a_{00} = \sum_{i=1}^{r} c_i a_{i0} - c_0\,.$$

Симплексний метод включає такі етапи:

1) Визначення вихідного опорного розв'язку.
2) Побудова вихідної симплексної таблиці.
3) Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою формули (20).

Якщо всі оцінки задовольняють умові оптимальності $a_{0k} > 0$, $k = r+1, r+2, \ldots, n$, то опорний розв'язок є оптимальним. Якщо ж є хоча б одна від'ємна оцінка, то переходять до нового опорного розв'язку, або встановлюють, що оптимального розв'язку не існує.

4) Перехід до нового опорного розв'язку здійснюється симплексними перетвореннями та запису нової симплексної таблиці з послідуючим її аналізом у відповідності до дій третього етапу. Можливі випадки:

1. Оцінка вільної змінної дорівнює нулю. Це свідчить про наявність альтернативного оптимуму.
2. Відсутність додатних елементів у стовпчику вільної змінної з від'ємною оцінкою означає, що цільова функція задачі є необмеженою (задача не має розв'язку).

7. *Застосування симплексного методу*

На типових прикладах розглянемо етапи пошуку оптимального розв’язку.

Приклад. Знайти оптимальний розв'язок оптимізаційної задачі.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,5},$$

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max .$$

Розв'язок задачі представимо наступними симплексними таблицями.

$c_{баз}$	$x_{баз}$	0	2	1	–1	1	–1	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_3	5	1	1	1	0	0	5/1=5
1	x_4	9	2	1	0	1	0	9/1=9
-1	x_5	7	1	2	0	0	1	7/2=3,5 *min*
	Z	–3	–2	–3	0	0	0	
-1	x_3	3/2	1/2	0	1	0	–1/2	3 *min*
1	x_4	11/2	3/2	0	0	1	–1/2	11/3
1	x_2	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
	Z	15/2	–12	0	0	0	–1/2	
2	x_1	3	1	0	2	0	–1	
1	x_4	1	0	0	–3	1	1	
1	x_2	2	0	1	–1	0	1	
	Z	9	0	0	1	0	1	

Перша таблиця відображає дані вихідної задачі, поділ змінних на вільні (x_1, x_2) та базисні (x_3, x_4, x_5), та визначає вихідний опорний розв'язок $\overline{x_1} = (0, 0, 5, 9, 7)$ і $Z(\overline{x_1}) = -3$. Оцінки вільних змінних обчислюємо безпосередньо із симплексної таблиці. Наприклад, оцінка змінної x_1

визначається як скалярний добуток векторів–стовпців $c_{баз}$ та x_1 мінус коефіцієнт c_1, тобто $a_{01} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 - 2 = -2$. Аналогічно обчислюємо оцінку змінної x_2 $(a_{02} = -3)$. При двох від'ємних оцінках пріоритет віддається тій, яка за абсолютною величиною більша. Значить невідому x_2 вводимо в базис. Аналіз чисел в останній колонці визначає, що змінна x_2 заміщує змінну x_5. Це відображено в другій симплексній таблиці, за допомогою якої знаходимо другий опорний розв'язок $\overline{x_2} = (0,\ 7/2,\ 3/2,\ 11/2,\ 0)$ і $Z(\overline{x_2}) = 15/2$. Вільна змінна x_1 цієї таблиці має від'ємну оцінку (за модулем ця оцінка найбільша). Тому змінна x_2 стає базисною, а базисна x_3 переходить до складу вільних змінних. В третій симплексній таблиці всі оцінки додатні. Таким чином опорний розв'язок $\overline{x_3} = (3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0)$ є оптимальним і $Z_{\max} = Z(\overline{x_3}) = 9$.

8. *Післяоптимізаційний аналіз економіко-математичної моделі*

Природно вивчити вплив зміни параметрів моделі на одержаний оптимальний розв'язок оптимізаційної задачі. Цей аналіз будемо здійснювати графічним методом.

Розглянемо два випадки.

1. Зміну коефіцієнтів цільової функції.

Досліджується зміна коефіцієнтів функції цілі $Z_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$ в рамках реалізації принципу альтернативного оптимуму. Визначимо інтервали зміни коефіцієнтів c_1 і c_2 вихідної задачі, для яких одержаний оптимальний розв'язок $Z_{\max} = Z_0$ залишається незмінним, а саме

$\dfrac{a_{21}}{a_{22}} \le \dfrac{c_1}{c_2} \le \dfrac{a_{11}}{a_{12}}$ ($c_2 \ne 0$, лінія $l: c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$ не може бути вертикальною)

або

$\dfrac{a_{22}}{a_{21}} \ge \dfrac{c_2}{c_1} \ge \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ ($c_1 \ne 0$, лінія $l: c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$ не може бути горизонтальною).

2. Зміну значень коефіцієнтів у правій частині нерівностей.

Шляхом зміни правих частин обмежень запропонований алгоритм не змінює одержане значення $Z_{\max} = Z_0$ оптимального розв'язку. Знайдено інтервали зміни поточного рівня ресурсів

$$\alpha_1 \le b_1 \le \beta_1, \qquad \alpha_2 \le b_2 \le \beta_2,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ визначаються з умови реалізації альтернативного оптимуму на відрізках, що належать прямим $l_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ та $l_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$.

Цей аналіз здійснюється після одержання оптимального розв'язку.

З кожною оптимізаційною задачею поєднується її двоїста. Для вихідної задачі (4) – (6) двоїста записується формулами

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \; j = \overline{1, n},$$

$$y_i \ge 0, \; i = \overline{1, m},$$

$$T = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min.$$

Тут y_i вартість одиниці $i-$ї сировини, $Z_{\max} = T_{\min}$. Двоїста модель в економічному сенсі виражає вартість одиниці кожної з сировини, що мінімізує загальну вартість витрат на сировину.

Зазначимо, що при отриманні оптимального розв'язку вихідної задачі одержують оцінки, за допомогою яких визначають оптимальний план двоїстої задачі. Так, для прикладу (пункт 7) одержимо $Z_{\max} = T_{\min}$, $\overline{y} = (0, 1, 0)$, $T(\overline{y}) = 5 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 9$.

9. *Транспортна задача*

Транспортна задача відноситься до лінійних оптимізаційних задач з рядом додаткових властивостей, які дозволяють розробити спеціальні методи їх розв'язання: розподільний метод та метод потенціалів. Процес розв'язання транспортної задачі можна оформляти послідовністю таблиць, які визначають певні етапи розрахункового алгоритму. Будемо розглядати транспортну задачу за критерієм вартості перевезень. Нехай в m пунктах відправлення $A_1, A_2, \ldots, A_m$ знаходиться однорідний вантаж в кількостях $a_1, a_2, \ldots, a_m$ одиниць відповідно. Зазначений вантаж необхідно перевести до n пунктів призначення $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в кількостях $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць вантажу відповідно. Вважаємо, що виконується умова балансу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{21}$$

тобто попит і пропозиція збалансовані.

Вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення будемо позначати c_{ij} (тарифи). Позначимо також через x_{ij}, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, кількість одиниць вантажу, що перевозиться з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Треба скласти такий план перевезень, за яким загальна їх вартість буде найменшою

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \tag{22}$$

Умови задачі запишемо у вигляді таблиці

A_i \ B_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	x_{12} $\boxed{c_{12}}$	…	x_{1n} $\boxed{c_{1n}}$
a_2	x_{21} $\boxed{c_{21}}$	x_{22} $\boxed{c_{22}}$	…	x_{2n} $\boxed{c_{2n}}$
…	…	…	…	…
a_m	x_{m1} $\boxed{c_{m1}}$	x_{m2} $\boxed{c_{m2}}$	…	x_{mn} $\boxed{c_{mn}}$

Як бачимо, кожна клітинка таблиці містить як вантаж x_{ij}, що транспортується із i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, також і вартість c_{ij} одиниці вказаного вантажу.

Для m рядків та n стовпчиків таблиці можна записати умови

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{23}$$

Математично транспортну задачу формулюють так: знайти такий план перевезень

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

на множині $m+n$ обмежень (23), умови балансу (21) та дозволяє мінімізувати функцію цілі (22). Матриці двох систем рівнянь (23) мають ранги, які дорівнюють m і n відповідно. До того ж, якщо, з одного боку, скласти всі m рівнянь першої системи (23), а з другого – суму n рівнянь другої системи (23), то з огляду на тотожність (21), одержимо одне і те ж значення. Із цього випливає, що одне із рівнянь систем (23) є лінійною комбінацією інших. Таким чином, ранг матриці системи (23) дорівнює $m+n-1$ і її невироджений базисний план повинен містити $m+n-1$ ненульових компонентів.

По аналогії з іншими оптимізаційними лінійними задачами розв’язок транспортної задачі починається з побудови допустимого базисного плану. Найбільш простий спосіб його знаходження ґрунтується на так званому методі північно-західного кута. Суть методу полягає в послідовному розподіленні вантажу між пунктами відправлення та прийому вантажу. Побудова допустимого початкового плану починається з лівої верхньої клітинки (північно-західний кут таблиці).

Приклад. Знайти вихідний опорний розв’язок транспортної задачі методом північно-західного кута.

A_i \ B_j	40	15	25	20
20	20 [1]	× [4]	× [5]	× [6]
30	20 [1]	10 [3]	× [2]	× [4]
50	× [5]	5 [1]	25 [4]	20 [1]

Заповнення таблиці починається з клітинки, розташованої у верхньому лівому куті. В ній записується найменше із чисел a_1, b_1, тобто $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(20, 40) = 20$. У першого постачальника не залишилося вантажу, тобто перший рядок закрито. Рухаємось по відкритому першому стовпчику. Першому споживачу залишилося придбати ще 20 одиниць вантажу, тоді $x_{21} = \min(a_2, b_1) = \min(30, 40-20) = 20$. Перший стовпчик закрито. Рухаємось по відкритому другому рядку. У постачальника a_2 залишилося 10 одиниць вантажу, тоді $x_{22} = \min(a_2, b_2) = \min(30-20, 15) = 10$. Другий рядок закрито. Рухаємось вниз по відкритому другому стовпчику. Споживачу b_2 залишилося придбати 5 одиниць вантажу, тому $x_{32} = \min(a_3, b_2) = \min(50, 15-10) = 5$. Другий стовпчик закрито. Рухаємося по відкритому третьому рядку. У третього постачальника залишилося 45 одиниць вантажу, тоді $x_{33} = \min(a_3, b_3) = \min(50-5, 25) = 25$. Третій стовпчик закрито. Залишилася одна клітинка в яку ми записуємо решту вантажу від постачальника a_3, $x_{34} = 20$. Знайдена сукупність величин x_{ij} складає опорний розв’язок. Кількість базисних клітинок 6 співпадає з $m+n-1 = 3+4-1 = 6$, значить початковий опорний розв’язок знайдено вірно.

Початковий опорний розв’язок:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 20 \end{pmatrix}.$$

Значення цільової функції $Z(x_0) = 1\cdot 20 + 1\cdot 20 + 3\cdot 10 + +1\cdot 5 + 4\cdot 25 + +1\cdot 20 = 195$.

Бувають випадки, коли на деякому, не останньому кроці одночасно закриваються і рядок і стовпчик. В кожному із цих випадків необхідно записати в закритий рядок або закритий стовпчик базисний нуль у клітинку з найменшим тарифом. Одержана нульова базисна невідома говорить про те, що відповідний опорний розв’язок вироджений.

Особливістю допустимого плану, побудованого методом південно-західного кута, є те, що цільова функція на ньому приймає значення, як правило, далеке від оптимального. Це відбувається тому, що при його побудові ніяким чином не враховуються тарифи c_{ij}. У зв’язку з цим на практиці для побудови вихідного опорного розв’язку використовується інший метод – метод мінімальної вартості, в якому при розподілі об’єму перевезень в першу чергу заповнюються клітини з найменшими тарифами.

Для попереднього прикладу знайти вихідний опорний розв’язок методом мінімальної вартості.

A_i \ B_j	40	15	25	20
20	20 [1]	× [4]	× [5]	× [6]
30	20 [1]	× [3]	10 [2]	× [4]
50	× [5]	15 [1]	15 [4]	20 [1]

Початковий опорний розв'язок:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

Значення цільової функції $Z(x_1) = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 15 + {}$ $+ 1 \cdot 20 = 155$.

Як бачимо, різниця між $Z(x_0)$ і $Z(x_1)$ суттєва.

10. *Методи поліпшення плану ТЗ*

Покращення початкового опорного плану будемо здійснювати методом потенціалів за алгоритмом:

1. Виписуємо матрицю тарифів і підкреслюємо тарифи базисних клітин.
2. Знаходимо потенціали u_i, v_j із умови $c_{ij} + u_i + v_j = 0$ для базисних клітинок. Оскільки невідомих потенціалів на одиницю більше кількості рівнянь для їх знаходження, то можна покласти $u_1 = 0$. Формуємо елементи матриці псевдо тарифів c_{ij}^{Π} з нульовими елементами на місці базисних елементів. Для вільних елементів $c_{ij}^{\Pi} = c_{ij} + u_i + v_j$. На місці вільних невідомих маємо їх оцінки. Якщо всі оцінки додатні – то оцінювальний опорний план є оптимальним. Якщо ж є хоча б одна від'ємна оцінка, то план можна покращити.

Приклад.

$A_i \backslash B_j$	40	15	25	20
20	$20\ \boxed{1}$	$\times\ \boxed{4}$	$\times\ \boxed{5}$	$\times\ \boxed{6}$
30	$20\ \boxed{1}$	$10\ \boxed{3}$	$\times\ \boxed{2}$	$\times\ \boxed{4}$
50	$\times\ \boxed{5}$	$5\ \boxed{1}$	$25\ \boxed{4}$	$20\ \boxed{1}$

Початковий опорний розв’язок знайдено методом південно-західного кута

$$x_0 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 20 \end{pmatrix}.$$

Значення цільової функції $Z(x_0) = 1\cdot 20 + 1\cdot 20 + 3\cdot 10 + 1\cdot 5 + 4\cdot 25 + 1\cdot 20 = 195$.

Матриця тарифів (підкреслено базисні клітини)

$$c = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{1} & 4 & 5 & 6 \\ \underline{1} & \underline{3} & 2 & 4 \\ 5 & \underline{1} & \underline{4} & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array}.$$

Нехай $u_1 = 0$. Для базисних клітин $c_{ij}^{\Pi} = c_{ij} + u_i + v_j = 0$. Складемо матрицю псевдотарифів

$$c_{11}^{\Pi} = c_{11} + u_1 + v_1 = 1 + 0 + v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -1;$$

$$c_{21}^{\Pi} = c_{21} + u_2 + v_1 = 1 + u_2 + (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0;$$

$$c_{22}^{\Pi} = c_{22} + u_2 + v_2 = 3 + 0 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -3;$$

$$c_{32}^{\Pi} = c_{32} + u_3 + v_2 = 1 + u_3 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 2;$$

$$c_{33}^{\Pi} = c_{33} + u_3 + v_3 = 4 + 2 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -6;$$

$$c_{34}^{\Pi} = c_{34} + u_3 + v_4 = 1 + 2 + v_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_4 = -3.$$

Маємо

$$c = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{1} & 4 & 5 & 6 \\ \underline{1} & \underline{3} & 2 & 4 \\ 5 & \underline{1} & \underline{4} & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} -1 & -3 & -6 & -2 \end{array} \end{array}.$$

Відповідно потенціалам, які знайдено, запишемо матрицю псевдотарифів, елементи якої обчислюються за формулою $c_{ij}^{\Pi} = c_{ij} + u_i + v_j$:

$$c^{\Pi} = \begin{pmatrix} \underline{0} & 1 & -1 & 3 \\ \underline{0} & \underline{0} & \boxed{-4} & 1 \\ 6 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, найменша від'ємна оцінка $\Delta_{23} = c_{23}^{\Pi} = -4$; $\lambda = \min(25, 10) = 10$.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10-\lambda & 0+\lambda & 0 \\ 0 & 5+\lambda & 25-\lambda & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

Значення цільової функції $Z(x_1) = Z(x_0) + \Delta_{23} \cdot \lambda = 195 - 4 \cdot 10 = 155$.

Оцінимо цей план на оптимальність. Знову випишемо матрицю тарифів, підкресливши базисні клітинки

$$\begin{array}{cc} c = \begin{pmatrix} \underline{1} & 4 & 5 & 6 \\ \underline{1} & 3 & \underline{2} & 4 \\ 5 & \underline{1} & \underline{4} & \underline{1} \end{pmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}. \\ \quad\;\; \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} & \end{array}$$

Нехай $u_1 = 0$.

$c_{11}^{\Pi} = c_{11} + u_1 + v_1 = 1 + 0 + v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -1$;

$c_{21}^{\Pi} = c_{21} + u_2 + v_1 = 1 + u_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$;

$c_{23}^{\Pi} = c_{23} + u_2 + v_3 = 2 + 0 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -2$;

$c_{33}^{\Pi} = c_{33} + u_3 + v_3 = 4 + u_3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = -2$;

$c_{32}^{\Pi} = c_{32} + u_3 + v_2 = 1 - 2 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 1$;

$c_{34}^{\Pi} = c_{34} + u_3 + v_4 = 1 - 2 + v_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 1$.

Маємо

$$c = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{1} & 4 & 5 & 6 \\ \underline{1} & 3 & \underline{2} & 4 \\ 5 & \underline{1} & \underline{4} & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -2 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \end{array}.$$

Відповідно потенціалам, які знайдено, запишемо матрицю псевдотарифів:

$$c^{\Pi} = \begin{pmatrix} \underline{0} & 5 & 3 & 7 \\ \underline{0} & 4 & \underline{0} & 5 \\ 2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, від’ємних оцінок немає. Це означає, що знайдено оптимальний план, тобто $x_{опт} = x_1$.

11. *Транспортні задачі з порушеним балансом*

Транспортна задача називається відкритою, якщо обсяг пропозиції не дорівнює обсягу попиту, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$. Якщо ми маємо справу із транспортною задачею відкритого типу, то вводять або фіктивного постачальника або фіктивного споживача й вирішують як закриту задачу. У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводиться фіктивний $(n+1)$-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Аналогічно, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний $(m+1)$-й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1,\,j} = 0$, $j = \overline{1, n}$.

Приклад. Скласти опорний план перевезень методом південно-західного кута.

A_i \ B_j	30	25	35	20
50	3	2	4	1
10	2	3	1	5
20	3	2	4	4
50	5	3	2	6

Транспортна задача відкритого типу оскільки $\sum_{i} a_i = 130 \neq \sum_{j} b_j = 110$.

Вводимо фіктивного споживача B_5, $b_5 = \sum_{i} a_i - \sum_{j} b_j = 20$.

A_i \ B_j	30	25	35	20	20
50	3	2	4	1	0
10	2	3	1	5	0
20	3	2	4	4	0
50	5	3	2	6	0

Заповнення таблиці виконаємо поетапно.

- $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(50, 30) = 30$. Закрито 1-й стовпчик. Переходимо до сусідньої клітини (1, 2).

- $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2) = \min(20, 25) = 20$. Закрито 1-й рядок. Переходимо до сусідньої клітини (2, 2).
- $x_{22} = \min(10, 5) = 5$. Закрито 2-й стовпчик. Переходимо до сусідньої клітини (2, 3).
- $x_{23} = \min(5, 35) = 5$. Закрито 2-й рядок. Переходимо до сусідньої клітини (3, 3).
- $x_{33} = \min(20, 30) = 20$. Закрито 3-й рядок. Переходимо до сусідньої клітини (4, 3). $x_{44} = \min(40, 20) = 20$
- $x_{43} = \min(50, 10) = 10$. Закрито 3-й стовпчик. Переходимо до сусідньої клітини (4, 4).
- $x_{44} = \min(40, 20) = 20$. Закрито 4-й стовпчик. Переходимо до сусідньої клітини (4, 5).
- $x_{45} = \min(20, 20) = 20$. Закрито 5-й стовпчик та 4-й рядок. Заповнення таблиці завершено.

Число заповнених (базисних) клітинок дорівнюється $m + n - 1 = 8$, тобто дійсно знайдено опорний план перевезень.

A_i \ B_j	30	25	35	20	20
50	30 $\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	$\boxed{4}$ -	$\boxed{1}$ -	$\boxed{0}$ -
10	$\boxed{2}$ -	5 $\boxed{3}$	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{5}$ -	$\boxed{0}$ -
20	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 20	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$
50	$\boxed{5}$ -	$\boxed{3}$ -	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{0}$ 20

Отримано початковий опорний розв'язок

$$X_{ОП} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Витрати за планом $X_{ОП}$ складають $Z(X_{ОП}) = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5 +$ $+ 4 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 20 = 370$.

12. *Задачі теорії гри*

Спрощена модель конфліктної ситуації називається грою, її учасники – гравцями, їх можливі дії – стратегіями. Розглядається парна гра з двома гравцями *A* і *B*. В парній грі результати наслідків гри представлені у вигляді платіжної матриці розміром $m \times n$. Елемент матриці a_{ij} відображає виграш при виборі першим гравцем стратегії A_i, другим – B_j. Вважаємо також, що виграш одного із гравців дорівнює програшу другого (матрична гра з нульовою сумою).

Маємо платіжну матрицю гравця *A*:

B \ A	B_1	B_2	…	B_n	α_i min
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j max	β_1	β_2	…	β_n	

Гравець *A* для кожної своєї стратегії A_i знаходить найменший виграш $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$. Найбільша із цих величин називається нижньою ціною гри $\alpha = \max\limits_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Величина α – це гарантований виграш гравця *A*. В цей же час гравець *B* оцінює найбільший програш $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$. Найменша із цих величин визначає верхню ціну гри $\beta = \min\limits_j(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ – максимальний програш гравця *B*.

Фактичний виграш гравця *A*: $v \in [\alpha, \beta]$. Якщо маємо сідлову точку $\alpha = \beta$, тобто гру в чистих стратегіях, то ціна гри $v = \alpha = \beta$. Розв'язок любої матричної гри треба починати з пошуку сідлової точки.

Приклад.

B / A	A_1	A_2	A_3	A_4	α_i min
B_1	5	7	6	4	4
B_2	3	4	1	2	1
B_3	8	6	5	3	3
β_j max	8	7	6	4	α / β

$\alpha = \max(4, 1, 3) = 4$, $\beta = \min(8, 7, 6, 4) = 4$, $v = \alpha = \beta = 4$.

Оптимальною стратегією для гравця *A* є A_4, а для гравця *B* – стратегія B_1.

Розглянута задача не є типовою, тому що для більшості випадків $\alpha \neq \beta$. Для розв'язання задач без сідлової точки можна обирати чисті стратегії по правилу змішаних стратегій з використанням теорії ймовірності.

Нехай гравець *A* обирає свої стратегії $A_1, A_2, \ldots, A_m$ з ймовірностями $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $\left(\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right)$, а гравець *B* вибирає свої стратегії з ймовірностями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $\left(\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right)$. Очікуваний платіж при цьому складає $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. Випадок обрання пари чистих стратегій A_p, B_q враховується для ймовірностей $x_p = 1$, $x_q = 1$ (всі інші ймовірності x_i, y_j дорівнюють нулю).

Алгоритм розв’язання матричної гри в змішаних стратегіях реалізує твердження: люба скінчена матрична гра має оптимальний розв’язок $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, причому

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^0 \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j^0 \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j ,$$

а величина $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j^0$ – ціна гри.

13. *Зведення задачі теорії гри до оптимізаційної задачі.*

Якщо кожний із гравців має лише дві стратегії, то задачу теорії ігор можна звести до оптимізаційної задачі і розв’язати її графічним методом. Такий спосіб розв’язання розглянемо на прикладі гри з платіжною матрицею

B_j / A_i	B_1	B_2	α_i min
A_1	1	9	1
A_2	7	2	2
β_j max	7	9	$\alpha = 2$ / $\beta = 7$

Нехай x_1 – ймовірність застосування гравцем *A* своєї першої стратегії, x_2 – ймовірність застосування гравцем *A* другої стратегії. Якщо гравець *B* буде дотримуватися першої стратегії, то виграш *A* становить $x_1 + 7x_2$, якщо гравець *B* буде дотримуватися стратегії B_2, то виграш гравця *A* буде $9x_1 + 2x_2$. Відомо, якщо один гравець буде дотримуватися змішаної стратегії, то незалежно від стратегії другого гравця, середній виграш залишається незмінним і дорівнює ціни гри v $(\alpha < v < \beta)$, тобто $2 < v < 7$.

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq v, \\ 9x_1 + 2x_2 \geq v, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Введемо нові змінні $x_i' = \dfrac{x_i}{v}$, тоді $x_i = x_i' v$, $i = 1,2$.

Система набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1' + 7x_2' \geq 1, \\ 9x_1' + 2x_2' \geq 1, \\ x_1' \geq 0, \\ x_2' \geq 0. \end{cases}$$

Необхідно знайти значення x_1' і x_2', що задовольняють одержаній системі нерівностей і при яких цільова функція: $Z' = \sum\limits_i x_i' = \dfrac{1}{v}$ приймає найменше значення.

Розв'яжемо цю задачу:

Запишемо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1' + 7x_2' = 1, \\ 9x_1' + 2x_2' = 1 \end{cases}$ та знайдемо її розв'язок $\begin{cases} -9x_1' - 63x_2' = -9, \\ 9x_1' + 2x_2' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -61x_2' = -8, \\ 9x_1' + 2x_2' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2' = \dfrac{8}{61}, \\ x_1' = 1 - 7 \cdot \dfrac{8}{61} = \dfrac{5}{61} \end{cases}$.

Значення цільової функції: $Z = x_1' + x_2' = \dfrac{5}{61} + \dfrac{8}{61} = \dfrac{13}{61}$. Тоді ціна гри $v = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{\frac{13}{61}} = \dfrac{61}{13}$.

Ймовірність застосування стратегії гравцем A: $x_1 = x_1' v = \frac{61}{13} \cdot \frac{5}{61} = \frac{5}{13}$,

$x_2 = x_2' v = \frac{61}{13} \cdot \frac{8}{61} = \frac{8}{13}$.

Зобразимо ОДР (рис. 5). Умови $x \geq 0$, $y \geq 0$ означають, що ОДР лежить у першому квадранті. Побудуємо відповідні прямі лінії на площині. Оскільки пряма задається двома точками, досить взяти будь-які два значення x_1' і знайти відповідні ним значення x_2'.

$x_1' + 7x_2' = 1$ (1) $\qquad$ $9x_1' + 2x_2' = 1$(2)

x_1'	$\frac{5}{61}$	1
x_2'	$\frac{13}{61}$	0

x_1'	$\frac{5}{61}$	0
x_2'	$\frac{13}{61}$	0,5

$$\begin{cases} x_1' + 7x_2' \geq 1, \\ 9x_1' + 2x_2' \geq 1, \\ x_1' \geq 0, \\ x_2' \geq 0. \end{cases}$$

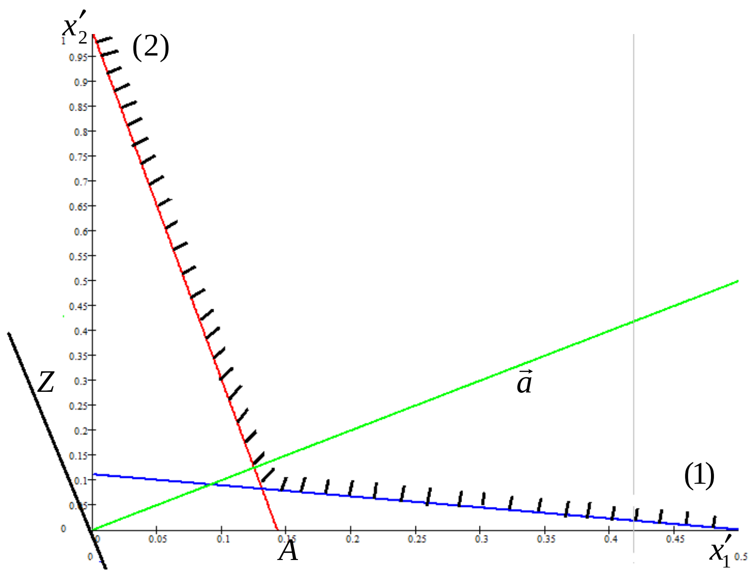

Рис. 5

$Z = x_1 + x_2$ – цільова функція.

$\vec{a}$ (1, 1) – вектор зростання лінійної функції Z.

Щоб знайти півплощину, що відповідає першій нерівності, візьмемо довільну точку, про яку точно відомо, що вона не лежить на цій прямій, наприклад, (0,0) і перевіримо, чи задовольняють нерівності координати взятої контрольної точки. Отримаємо $0 \geq 1$, і отже, вся півплощина є припустимою відносно цієї умови (заштриховується). Аналогічно перевіряємо усі умови. Якщо переміщати Z вздовж вектора $\vec{a}$, то пряма Z перетне площину ОДР в крайній точці $A\left(\frac{5}{61}, \frac{8}{61}\right)$. Тоді $Z_{\min} = \frac{5}{61} + \frac{8}{61} = \frac{13}{61}$.

Ціна гри $v = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{13}{61}} = \frac{61}{13}$, $x_1 = x_1' v = \frac{61}{13} \cdot \frac{5}{61} = \frac{5}{13}$, $x_2 = x_2' v = \frac{61}{13} \cdot \frac{8}{61} = \frac{8}{13}$.

14. *Індивідуальні завдання*

Завдання № 1

Побудувати математичну модель задачі.

1. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском стільців і табуреток, враховуючи, що попит на стільці не менше ніж в 2 рази перевищує попит на табуретки.

Стілець потрібно обробляти 2 хв на верстаті 1, 4 хв на верстаті 2. Табурет потрібно обробляти 3 хв на верстаті 1, 1 хв на верстаті 2. Верстат 1 може працювати не більше ніж 250 хв, верстат 2 може працювати не більше ніж 300 хв Прибуток від реалізації стільця становить 5, від реалізації табурету – 6 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

2. Пекарня планує розширити виробничу програму виготовлення печива та кексів, враховуючи, що попит на печиво не менше ніж в 3 рази перевищує попит на кекси.

Для виготовлення кексу потрібно 2 од. муки, 3 од. цукру, 4 од. яєць, для виготовлення потрібно 2 од. муки, 4 од. цукру, 1 од. яєць. Запаси сировини на підприємстві становлять 200, 120 і 300 од. Прибуток від реалізації кексу становить 5, від реалізації печива – 4 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

3. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском деталей виду 1 та 2, враховуючи, що попит на деталі 1 не менше ніж в 5 разів перевищує попит на деталі 2.

Потрібно виготовити два види деталей. Прибуток від реалізації деталі 1 становить 7, від реалізації деталі 2 – 6 грош. одиниць. Деталь 1 виготовляється 2 хв на верстаті 1, 4 хв на верстаті 2. Деталь 2 виготовляється 2 хв на верстаті 1, 1 хв на верстаті 2. Загальний час використання верстатів не повинен перевищувати 250 хв для верстата 1, 300 хв для верстата 2. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

4. Фермерське господарство планує розширити розведення тварин, зокрема свиней та корів, враховуючи, що попит на свиней не менше ніж в 4 рази перевищує попит на корів.

Фермерське господарство вирощує свиней та корів. Для утримування свині потрібно 2 кв м скотного двору, 3 кг корму щоденно, для утримування корови потрібно 4 кв м скотного двору, 4 кг корму щоденно. В наявності є 600 кв. м дворів, 1000 кг корму. Прибуток від реалізації свині становить 100 грош. од., корови – 150 грош. од. Необхідно скласти план роботи з максимальним прибутком.

5. Меблевий цех планує розширити виробничу програму випуском шаф та книжкових полиць, враховуючи, що попит на шафи не менше ніж в 3 рази перевищує попит на полиці.

Цех виготовляє шафи та книжкові полиці. Для виготовлення шафи потрібно 2 кв. м дерева, 0,25кв м скла, 24 од. фурнітури, для виготовлення полиці потрібно 0,5 кв. м дерева, 0,05 кв. м скла, 10 од. фурнітури. На складі є 700 кв. м дерева, 150 кв. м скла і 10000 од фурнітури. Прибуток від реалізації шафи становить 8, від реалізації полиці – 2 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

6. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском стільців та столів, враховуючи, що попит на стільці в 3 рази перевищує попит на столи.

Стілець потрібно обробляти 2 хв на верстаті 1, 4 хв на верстаті 2; стіл потрібно обробляти 3 хв на верстаті 1, 1 хв на верстаті 2. Верстат 1 може працювати не більше ніж 250 хв, верстат 2 може працювати не більше ніж 300 хв. Прибуток від реалізації стільця становить 5, від реалізації стола – 6 грош. од. Необхідно знайти план випуску з максимальним прибутком.

7. Кондитерська фабрика планує розширити асортимент випуском печива „Мрія” та печива «Надія», враховуючи, що попит на печиво «Мрія» в 2 рази перевищує попит на печиво «Надія».

Для виготовлення печива «Мрія» потрібно 2 од. муки, 6 од. цукру, 4 од. яєць, для виготовлення печива «Надія» потрібно 2 од. муки, 4 од. цукру, 1 од. яєць. Запаси сировини на підприємстві становлять 200, 250 і 160 од. Прибуток від реалізації печива «Мрія» становить 7, від реалізації печива «Надія» – 2 грош. од. Необхідно знайти план випуску з максимальним прибутком.

8. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском двох видів іграшок: ведмедиків та зайчиків, враховуючи, що попит на ведмедиків у 3 рази перевищує попит на зайчиків.

Підприємство випускає два види іграшок: ведмедиків та зайчиків. Прибуток від реалізації ведмедика становить 6, від реалізації зайчика – 10 грн. Ведмедика шиють 7 хвилин на швейній машинці і 1 хвилину на оверлоці. Зайчика шиють 10 хвилин на машинці і 2 хвилини на оверлоці. Загальна тривалість використання обладнання не повинна перевищувати 80 хвилин для швейної машинки і 12 хвилин для оверлока. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

9. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском двох видів іграшок: ведмедиків та зайчиків, враховуючи, що попит на ведмедиків не менше ніж в 6 разів перевищує попит на зайчиків.

Для виготовлення зайчика потрібно 2 од. пластмаси, 3 од. тканини, 6 од. синтепону, для виготовлення ведмедика потрібно 4 од. пластмаси, 1 од. тканини і 2 од. синтепону. Запаси сировини на підприємстві становлять 400, 250 і 300 од. відповідно. Прибуток від реалізації зайчика становить 10, від реалізації ведмедика – 7 грн. Необхідно знайти план випуску з максимальним прибутком.

10. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском виробів A_1 та A_2, враховуючи, що попит на виріб A_1 у 4 рази перевищує попит на виріб A_2.

Для виготовлення виробу A_1 потрібно 5 од. сировини B_1, 1 од. сировини B_2, 5 од. сировини B_3, для виготовлення виробу A_2 потрібно відповідно 4, 6 і 2 од. сировини B_1, B_2, B_3. Запаси сировини на підприємстві становлять 350, 330 і 300 од. Прибуток від реалізації A_1 становить 4, від реалізації A_2 – 8 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

11. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском стільців і табуреток, враховуючи, що попит на стільці в 2 рази перевищує попит на табуретки.

Стілець потрібно обробляти 3 хв на верстаті 1, 5 хв на верстаті 2. Табурет потрібно обробляти 4 хв на верстаті 1, 2 хв на верстаті 2. Верстат 1 може працювати не більше ніж 300 хв, верстат 2 може працювати не більше ніж 320 хв. Прибуток від реалізації стільця становить 5, від реалізації табурету – 6 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

12. Пекарня планує розширити виробничу програму виготовленням печива та кексів, враховуючи, що попит на печиво в 3 рази перевищує попит на кекси.

Для виготовлення кексу потрібно 3 од. муки, 4 од. цукру, 5 од. яєць, для виготовлення печива потрібно 3 од. муки, 5 од. цукру, 2 од. яєць. Запаси сировини на підприємстві становлять 250, 140 і 310 од. Прибуток від реалізації кексу становить 5, від реалізації печива – 4 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

13. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском деталей виду 1 та 2, враховуючи, що попит на деталі 1 в 5 разів перевищує попит на деталі 2.

Потрібно виготовити два види деталей. Прибуток від реалізації деталі 1 становить 7, від реалізації деталі 2 – 6 грош. одиниць. Деталь 1 виготовляється 3 хв на верстаті 1, 5 хв на верстаті 2. Деталь 2 виготовляється 3 хв на верстаті 1, 2 хв на верстаті 2. Загальний час використання верстатів не повинен перевищувати 270 хв для верстата 1, 320 хв для верстата 2. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

14. Фермерське господарство планує розширити розведення тварин, зокрема свиней та корів, враховуючи, що попит на свиней в 4 рази перевищує попит на корів.

Фермерське господарство вирощує свиней та корів. Для утримування свині потрібно 3 кв м скотного двору, 4 кг корму щоденно, для утримування корови потрібно 5 кв м скотного двору, 5 кг корму щоденно. В наявності є 700 кв. м дворів, 1050 кг корму. Прибуток від реалізації свині становить 100 грош. од., корови – 150 грош. од. Необхідно скласти план роботи з максимальним прибутком.

15. Меблевий цех планує розширити виробничу програму випуском шаф та книжкових полиць, враховуючи, що попит на шафи в 3 рази перевищує попит на полиці.

Цех виготовляє шафи та книжкові полиці. Для виготовлення шафи потрібно 2,3 кв. м дерева, 0,3 кв м скла, 30 од. фурнітури, для виготовлення полиці потрібно 0,6 кв. м дерева, 0,07 кв. м скла, 15 од. фурнітури. На складі є 800 кв.м дерева, 200 кв.м скла і 10000 од фурнітури. Прибуток від реалізації шафи становить 8, від реалізації полиці – 2 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

16. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском стільців та столів, враховуючи, що попит на стільці не менше ніж в 3 рази перевищує попит на столи.

Стілець потрібно обробляти 3 хв на верстаті 1, 5 хв на верстаті 2; стіл потрібно обробляти 4 хв на верстаті 1, 2 хв на верстаті 2. Верстат 1 може працювати не більше ніж 270 хв, верстат 2 може працювати не більше ніж 290 хв. Прибуток від реалізації стільця становить 5, від реалізації стола – 6 грош. од. Необхідно знайти план випуску з максимальним прибутком.

17. Кондитерська фабрика планує розширити асортимент випуском печива «Мрія» та печива «Надія», враховуючи, що попит на печиво «Мрія» не менше ніж в 2 рази перевищує попит на печиво «Надія».

Для виготовлення печива «Мрія» потрібно 3 од. муки, 7 од. цукру, 5 од. яєць, для виготовлення печива «Надія» потрібно 3 од. муки, 5 од. цукру, 2 од. яєць. Запаси сировини на підприємстві становлять 280, 300 і 200 од. Прибуток від реалізації печива «Мрія» становить 7, від реалізації печива «Надія» – 2 грош. од. Необхідно знайти план випуску з максимальним прибутком.

18. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском двох видів іграшок: ведмедиків та зайчиків, враховуючи, що попит на ведмедиків не менше ніж у 3 рази перевищує попит на зайчиків.

Підприємство випускає два види іграшок: ведмедиків та зайчиків. Прибуток від реалізації ведмедика становить 6, від реалізації зайчика – 10 грн. Ведмедика шиють 8 хвилин на швейній машинці і 2 хвилини на оверлоці. Зайчика шиють 11 хвилин на машинці і 3 хвилини на оверлоці. Загальна тривалість використання обладнання не повинна перевищувати 90 хвилин для швейної машинки і 15 хвилин для оверлока. Необхідно скласти план випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток.

19. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском двох видів іграшок: ведмедиків та зайчиків, враховуючи, що попит на ведмедиків в 6 разів перевищує попит на зайчиків.

Для виготовлення зайчика потрібно 3 од. пластмаси, 4 од. тканини, 7 од. синтепону, для виготовлення ведмедика потрібно 5 од. пластмаси, 2 од. тканини і 3 од. синтепону. Запаси сировини на підприємстві становлять 500, 300 і 400 од. відповідно. Прибуток від реалізації зайчика становить 10, від реалізації ведмедика – 7 грн. Необхідно знайти план випуску з максимальним прибутком.

20. Підприємство планує розширити виробничу програму випуском виробів A_1 та A_2, враховуючи, що попит на виріб A_1 не менше ніж у 4 рази перевищує попит на виріб A_2.

Для виготовлення виробу A_1 потрібно 6 од. сировини B_1, 2 од. сировини B_2, 6 од. сировини B_3, для виготовлення виробу A_2 потрібно відповідно 5, 7 і 3 од. сировини B_1, B_2, B_3. Запаси сировини на підприємстві становлять 380, 350 і 320 од. Прибуток від реалізації A_1 становить 4, від реалізації A_2 – 8 грош. од. Необхідно скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Завдання № 2

Розв'язати задачу графічним методом.

Варіант 1

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 2{,}5 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 2

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = 4x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 3

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 3x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$.

Варіант 4

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = 2x_1 + 6x_2 \to \max$.

Варіант 5

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = x_1 + 3x_2 \to \max$.

Варіант 6

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 1{,}5 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$.

Варіант 7

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 8

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 9

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 10

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 2{,}5 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$.

Варіант 11

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 2{,}5 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 12

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 13

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 1{,}5 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 8 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 14

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = 8x_1 + 2x_2 \to \max$.

Варіант 15

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 8 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 16

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 8x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$.

Варіант 17

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 8 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 18

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 5 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$.

Варіант 19

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Варіант 20

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 2{,}5 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 7 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,
$Z = x_1 + x_2 \to \max$.

Завдання № 3

Знайти вихідний опорний розв'язок.

1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	2	1	-1	1	2
1	4	-1	1	-2	1
-1	1	1	1	3	5

2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	2	1	-1	4	2
1	6	-1	1	2	2
-1	4	1	1	3	5

3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	2	1	1	2	2
1	1	-1	1	-1	3
1	1	1	-1	1	5

4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	2	-1	1	2	3
-1	1	1	1	-1	2
1	-2	1	-1	1	5

5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	2	-1	1	1	2
1	1	1	-1	-2	3
-1	-2	1	1	1	1

6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	1	1	-1	1	2
1	-6	1	-1	-1	8
1	-1	-1	3	1	1

7

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	-1	1	-1	2	1
-1	1	1	1	2	4
1	1	-1	2	1	1

8

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	2	1	1	-1	2
-1	-3	1	-1	1	2
1	5	-1	2	1	5

9

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	1	1	1	-1	1
1	-3	-1	1	4	1
1	1	1	-1	1	2

10

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	-1	1	1	-1	3
1	1	4	-1	-2	6
-1	1	2	1	1	2

11

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	1	1	1	-1	1
1	1	-2	-1	2	4
1	-1	2	1	1	2

12

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	1	-1	1	2	2
1	1	2	-1	1	3
1	-1	1	1	4	2

13

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	2	-1	1	2	2
1	-1	1	-1	1	1
-1	1	1	1	-1	1

14

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	3	-1	-1	1	2
-1	-1	2	1	1	3
1	-1	1	1	-1	4

15

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	3	-1	1	-2	1
1	-2	1	-1	1	1
-1	1	1	1	-1	1

16

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	-1	2	-1	1	2
-1	1	1	1	1	3
1	3	3	1	-1	2

17

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
1	2	1	-1	2	2
1	-2	-1	1	3	3
-1	1	1	1	1	1

18

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	1	1	2	4	1
1	-1	1	-1	-4	2
1	1	-1	2	2	2

19

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	1	1	1	2	1
1	2	1	-1	-1	2
1	1	-1	1	-2	3

20

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{io}
-1	-1	1	1	-1	2
2	1	1	-1	1	5
4	1	-1	1	3	8

Завдання № 4

Знайти два базисних розв'язки.

1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -19 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 36 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -19 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 36 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=5 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+x_4=-2 \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=2 \\ x_1-2x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3+2x_4=2 \\ x_1-2x_2+4x_3-x_4=3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1+5x_2-4x_3+2x_4=-5 \\ 4x_1+x_2-3x_3 22x_4=-4 \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$

Завдання № 5

Скласти оптимізаційну модель економічної задачі. Розв'язати задачу графічним і симплексним методами.

Для виготовлення двох видів сировини A_1, A_2 підприємство використовує три види сировини B_1, B_2, B_3. Відомо: норми витрат сировини B_i на виробництво виробу A_j – a_{ij} од.; запаси сировини B_i – b_i од; вартість одиниці виробу A_j – c_j гр. од. Запланована реалізація невикористаного при виробництві залишків сировини B_2 вартістю t гр. од. Скласти план виробництва, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації виробів і залишків сировини.

варіант	a_{11}	a_{12}	b_1	a_{21}	a_{22}	b_2	a_{31}	a_{32}	b_3	c_1	c_2	t
1	2	2	220	2	4	310	5	3	450	17	21	1
2	2	2	240	1	4	480	6	2	600	17	18	1
3	2	4	280	2	8	480	4	3	360	15	21	1
4	5	4	350	2	12	660	10	4	600	10	17	1
5	5	8	500	2	8	440	5	4	400	11	17	1
6	5	6	450	2	4	260	5	4	400	12	17	1
7	5	6	480	1	6	360	12	4	480	7	18	1
8	3	6	255	2	6	390	4	2	280	13	15	1
9	5	6	320	2	4	260	6	2	300	13	16	1
10	5	6	430	2	8	280	6	4	420	15	11	1
11	3	3	240	2	4	280	8	2	400	14	9	1
12	6	4	500	2	6	540	5	1	300	18	16	1
13	4	2	320	1	4	360	1	1	360	18	15	1
14	6	4	500	2	6	540	6	2	600	12	15	1
15	4	3	320	2	4	360	8	2	480	20	9	1
16	4	2	400	1	4	520	8	1	560	18	26	1
17	2	2	200	2	6	480	4	2	360	12	18	1
18	4	2	260	1	6	450	10	2	500	7	13	1
19	2	2	140	2	4	240	6	4	360	8	13	1

20	4	6	320	2	8	360	4	2	240	9	17	1

Завдання № 6

1. Знайти опорний розв’язок методом північно-західного кута.
2. Методом потенціалів знайти оптимальний розв’язок.

Варіант 1

A_i \ B_j	40	30	50
25	3	5	6
30	3	2	1
65	4	2	3

Варіант 2

A_i \ B_j	30	40	50	60
55	3	2	1	5
60	4	2	3	6
65	4	5	3	3

Варіант 3

A_i \ B_j	20	30	40	50
40	2	3	4	4
45	1	2	3	3
55	4	6	3	3

Варіант 4

A_i \ B_j	30	40	50	60
40	3	3	5	6
60	3	3	2	1
80	4	5	2	3

Варіант 5

A_i \ B_j	35	40	45
30	3	5	6

Варіант 6

A_i \ B_j	50	40	60
35	3	5	6

40	3	2	1
50	4	2	3

40	3	2	1
75	4	2	3

Варіант 7

A_i \ B_j	35	40	50	55
50	3	2	1	5
60	4	2	3	6
70	4	5	3	3

Варіант 8

A_i \ B_j	35	40	50	55
45	3	3	5	6
60	3	3	2	1
75	4	5	2	3

Варіант 9

A_i \ B_j	30	40	50
35	3	5	6
40	3	2	2
45	4	1	3

Варіант 10

A_i \ B_j	30	40	60
40	3	3	5
50	4	2	3
40	6	1	2

Варіант 11

A_i \ B_j	25	40	50	65
50	3	3	1	6
60	3	3	2	1
70	4	5	2	3

Варіант 12

A_i \ B_j	25	30	65
40	3	5	6
30	3	2	2
50	4	1	3

Варіант 13

A_i \ B_j	35	40	55
35	3	3	5
50	4	2	3
45	6	1	2

Варіант 14

A_i \ B_j	25	30	40	45
40	2	3	4	5
45	1	2	3	3
55	4	6	3	3

Варіант 15

A_i \ B_j	30	45	45	60
50	3	3	5	6
55	3	3	2	1
75	4	5	2	3

Варіант 16

A_i \ B_j	45	50	55
40	3	5	6
50	3	2	1
60	4	2	3

Варіант 17

A_i \ B_j	30	40	60
20	3	3	5
50	4	2	3
60	6	1	2

Варіант 18

A_i \ B_j	40	50	60
45	3	5	6
50	3	2	2
55	4	1	3

Варіант 19

A_i \ B_j	35	40	55
40	3	3	5
50	4	2	3
40	6	1	2

Варіант 20

A_i \ B_j	35	40	75
50	3	5	6
40	3	2	2
60	4	1	3

Завдання № 7

Дана платіжна матриця для гравця *A*. Скласти математичну модель вибору оптимальних стратегій гравців *A* та *B*. Знайти нижню та верхню ціну гри. Розв’язати задачу графічним методом.

1

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	3	6
A_2	5	2

2

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	4	7
A_2	6	1

3

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	5	9
A_2	7	2

4

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	7	9
A_2	6	2

5

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	1	3
A_2	8	4

6

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	5	2
A_2	6	3

7

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	6	2
A_2	1	7

8

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	7	3
A_2	2	8

9

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	5	3
A_2	4	9

10

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	8	1
A_2	3	6

11

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	4	7
A_2	6	3

12

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	7	2

13

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	6	10
A_2	8	3

14

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	8	10
A_2	7	3

15

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	9	5

16

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	6	3
A_2	7	10

17

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	7	3
A_2	2	8

18

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	8	4
A_2	3	9

19

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	6	4
A_2	5	10

20

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	9	2
A_2	4	7

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крутовий Ж. А. Оптимізація технологічних процесів. Математичне моделювання : навчальний посібник. Ч.1 / Крутовий Ж. А., Любар С. В., Манжос Н. В. – Х. : ХДУХТ, 2011.

2. Вища та прикладна математика : навчальний посібник / Торяник Д. О., Синєкоп М. С., Янютін Є. Г. та ін. – Х. : ХДУХТ, 2014.

3. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посібник / Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. – К. : КНЕУ, 2006.

4. Генманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування : навчальний посібник. – К. : Либідь, 2011.

Зміст

Навчальне електронне видання
комбінованого використання

Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Оптимізаційні методи та моделі

Методичні вказівки для організації самостійної роботи
студентів економічних спеціальностей

Укладачі:
Синєкоп Микола Сергійович
Софронова Марина Сергіївна

Відповідальний за випуск
зав. кафедри
фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін
д.т.н., проф. Погожих М.І.

Технічний редактор
Шегельська О.В.

План 2015 р., поз. 57/24/16

Підп. до друку 26.12.2015. Об’єм даних 2,21 Мб. Тираж 100 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі.
Харків, вул. Клочківська, 333, 61051

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.12 р.