Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧУВАННЯ ТА ТОРГІВЛІ

Крутовий Ж.А., Софронова М.С.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Стислий конспект лекцій

Частина 2

для студентів спеціальностей 6.051701, 6.05170108, 6.05170103, 6.05170104, 6.05170107, 6.05170112

Харків
ХДУХТ
2015

Рекомендовано до видання
кафедрою вищої математики,
протокол № 9 від 06.03.2015

Схвалено науково-методичною
комісією НН ІХТБ,
протокол № 5 від 19.03.2015

Рецензент: проф., д-р техн. наук М.С. Синєкоп

ПЕРЕДМОВА

Дане навчальне видання написане на основі лекцій, прочитаних авторами протягом багатьох років студентам різних факультетів ХДУХТ.

Доцільність підготовки посібника зумовлена суттєвим зменшенням кількості аудиторних годин, передбачених програмою навчальної дисципліни, що впливає як на обсяг матеріалу, так і на методику викладання.

Мета посібника – забезпечити засвоєння понять курсу вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні математичних методів, допомогти студентам при самостійному розв’язуванні задач.

Перша частина посібника містить лекції з таких розділів: елементи векторної та лінійної алгебри, аналітичної геометрії, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної, функції багатьох змінних, невизначені інтеграли.

Друга частина посібника містить лекції з таких розділів: визначені інтеграли та їх застосування, диференціальні рівняння, числові ряди, ознаки їх збіжності, степеневі ряди та їх застосування, елементи теорії ймовірностей.

Формули та рисунки пронумеровані полекційно.

Л Е К Ц І Я № 1. ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

План

1. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми.
2. Геометричний, економічний, фізичний зміст визначеного інтеграла.
3. Властивості визначених інтегралів.
4. Формула Ньютона-Лейбниця.
5. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
6. Інтегрування частинами.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, неперервну на інтервалі $[a,b]$ (рис. 1)

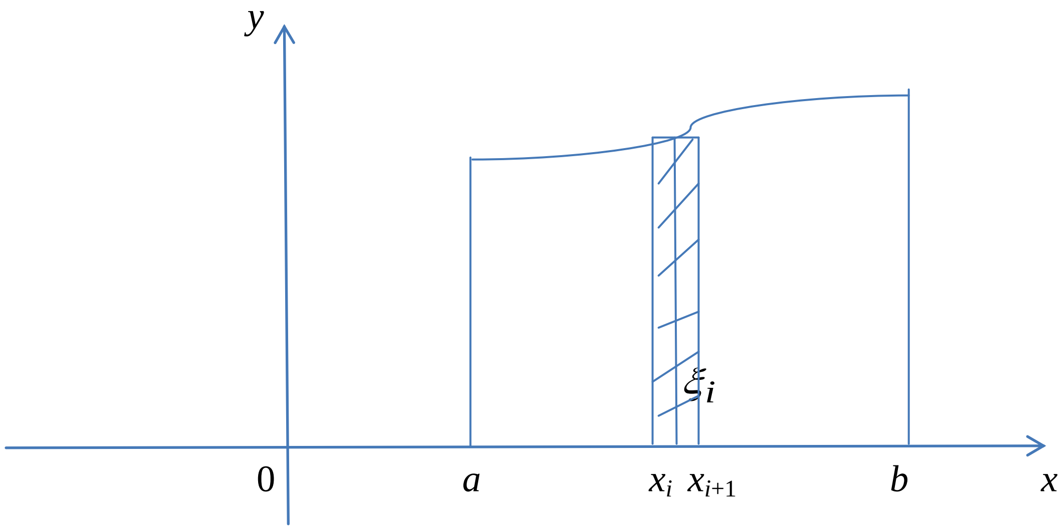

Рис. 1

Припустимо, що функція $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Необхідно визначити площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Розіб'ємо інтервал $[a,b]$ на n відрізків довжиною, відповідно, $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. На кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ виберемо довільну точку, наприклад ξ_i, i=1,2,..,n. Значення функції в цих точках $f(\xi_i)$. Тоді наближене значення шуканої площі дорівнює

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

Точне значення цієї площі одержимо, якщо перейдемо до границі

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

<u>Означення</u>. Визначеним інтегралом функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ називається границя суми

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (1)$$

знайдена за умови, що довжина найбільшого з інтервалів розбиття $\max \Delta x_i$ прямує до нуля.

<u>Зауваження.</u>

1. Величина визначеного інтеграла (1) залежить від підінтегральної функції, меж інтегрування a, b і не залежить від змінної інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt .$$

2. Очевидно, що

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

<u>Геометричний зміст</u>: якщо $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ – це площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями: $y = f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.

<u>Економічний зміст</u>. Нехай $f(t)$ – продуктивність праці робітника як функція часу. Тоді обсяг продукції, виробленої робітником за четверту годину робочого дня, складає

$$Q = \int_3^4 f(t)dt .$$

Фізичний зміст. Нехай $V(t)$ – швидкість точки як функція часу. Тоді шлях, пройдений точкою за інтервал часу [2,5]. тобто від другої до п’ятої хвилини, складає

$$\int_{2}^{5} V(t)dt.$$

Властивості визначених інтегралів

1. $\int_{a}^{b} Af(x)dx = A\int_{a}^{b} f(x)dx$,

де A – незмінний множник.

2. $\int_{a}^{b}\left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int_{a}^{b} f_1(x)dx + \int_{a}^{b} f_2(x)dx$

3. Для будь-яких дійсних a, b, c справедлива рівність (рис. 2)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

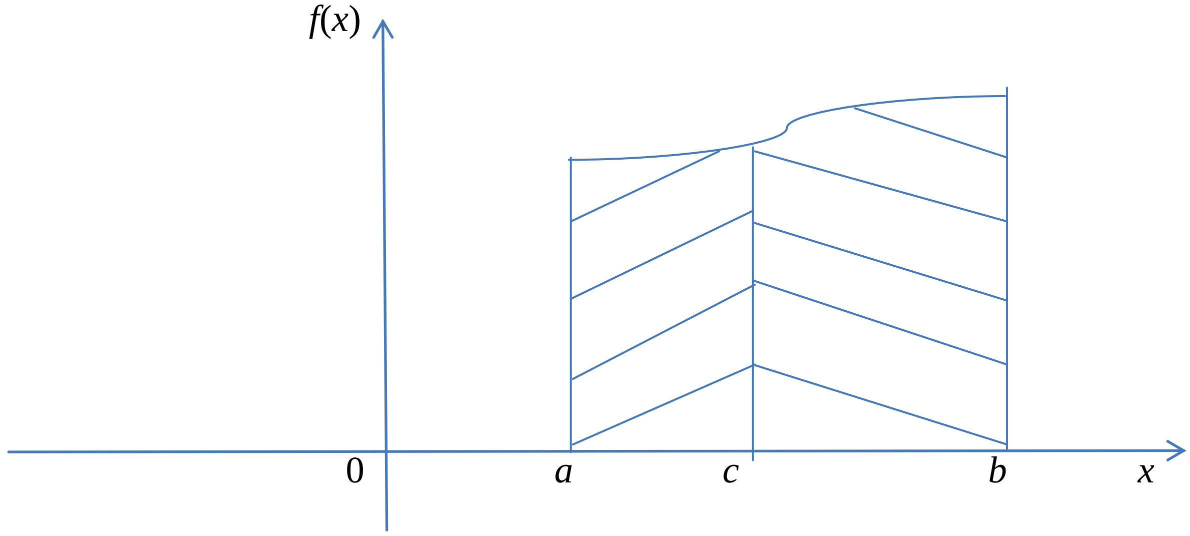

Рис. 2

4. Якщо $f(x) \le \varphi(x)$ на $[a,b]$, то справедлива нерівність

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} \varphi(x)dx.$$

5. Нехай m, M — відповідно, найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на $[a,b]$. Тоді справедлива подвійна нерівність

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

6. Теорема про середнє значення функції. Нехай $f(x)$ – функція неперервна на $[a,b]$. Тоді на цьому інтервалі існує хоча б одна точка $x=c$ ($a \le c \le b$), така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Формула Ньютона-Лейбниця

Теорема. Нехай $F(x)$ є первісною функції $y = f(x)$ на $[a,b]$. Тоді справедливе співвідношення

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Приклади.

1. $\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 0) = 9$.

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Розглянемо інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Введемо функцію $x=\varphi(t)$, тобто зробимо заміну змінних. Нехай виконуються умови:

1. $\varphi(\alpha)=a, \ \ \varphi(\beta)=b$;

2. Функції $\varphi(t), \ \varphi'(t), \ f(\varphi(t))$ неперервні на $[\alpha,\beta]$. Тоді справедливе співвідношення

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi_t' dt.$$

<u>Приклад.</u>

$$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\begin{bmatrix} \sqrt{1+x}=t \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \\ \alpha=\sqrt{1+3}=2 \\ \beta=\sqrt{1+8}=3 \end{bmatrix}=\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int\limits_2^3 (t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=2\left[\left(\frac{3^3}{3}-3\right)-\left(\frac{2^3}{3}-2\right)\right]=2\left[9-3-\frac{8}{3}+2\right]=\frac{32}{3}$$

<u>Інтегрування частинами</u>

Нехай функції $u(x)$, $v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на $[a,b]$. Запишемо співвідношення

$$(uv)'=u'v+v'u.$$

Проінтегруємо на $[a,b]$

$$\int\limits_a^b (uv)'dx=\int\limits_a^b v\underbrace{u'dx}_{du}+\int\limits_a^b u\underbrace{v'dx}_{dv}.$$

У результаті маємо

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Це формула інтегрування частинами.

<u>Приклад.</u>

$$\int_0^1 xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{bmatrix} = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

Л Е К Ц І Я № 2. ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ. ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

План

1. Геометричні застосування визначених інтегралів:
   – обчислення площі фігури на площині;
   – обчислення об'єму тіла обертання;
   – обчислення довжини дуги кривої.
2. Застосування інтегралів до задач економіки.
3. Механічні застосування визначених інтегралів:
   – обчислення роботи;
   – обчислення координат центра ваги.
4. Поняття про невласні інтеграли з нескінченними межами.

Геометричні застосування визначених інтегралів $y=0$

Обчислення площ фігур

Вище розглядалась задача обчислення площі фігури, обмеженої лініями: $y=f(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$,; $f(x)\geq 0$ на $[a,b]$. Площа такої криволінійної трапеції знаходилась за формулою

$$Q=\int_a^b f(x)dx.$$

Розглянемо випадок, коли функція $y=f(x)$ змінює знак на інтервалі $[a,b]$ (рис. 1).

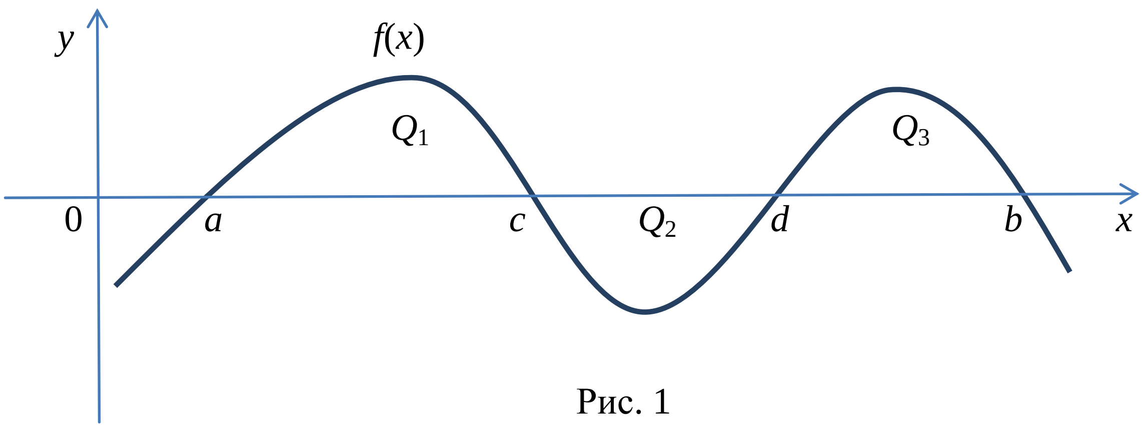

Рис. 1

У цьому випадку $Q=Q_1+Q_2+Q_3$.

$$Q_1 = \int_a^c f(x)dx,\ Q_2 = -\int_c^d f(x)dx == \int_c^d |f(x)|dx,\ Q_3 = \int_d^b f(x)dx.$$

Тоді площу фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, можна знайти за формулою

$$Q = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Площа фігури, обмеженої двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ (рис.2), знаходиться за формулою

$$Q = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$$

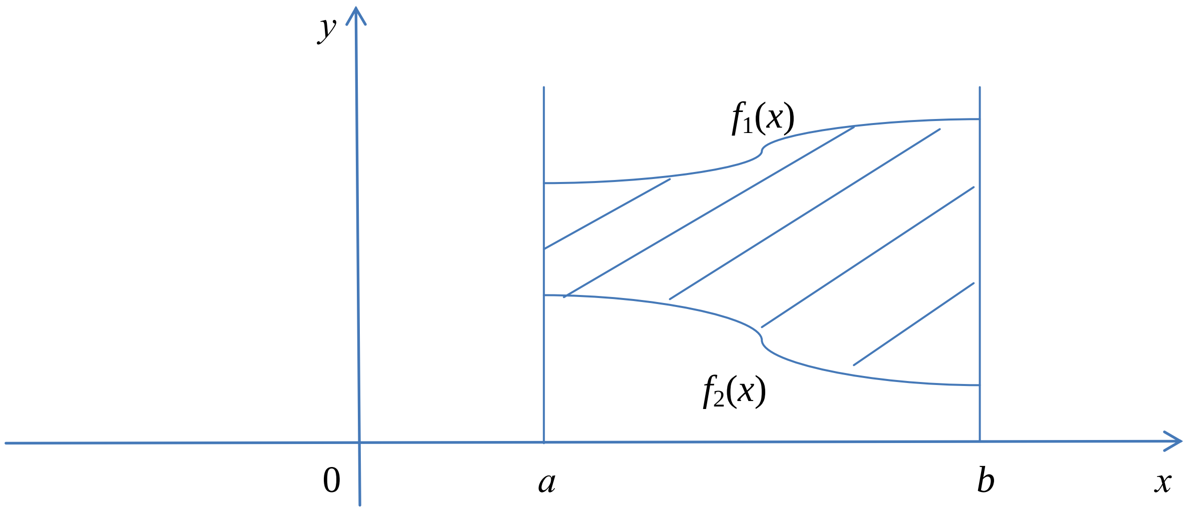

Рис. 2

<u>Приклад</u>. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 3x$, $y = x^2$ (рис.3)

Знайдемо абсциси точок перетину двох ліній

$$\begin{cases} y = 3x, & 3x = x^2,\ \ x^2 - 3x = 0,\ \ x(x-3) = 0, \\ y = x^2, & x_1 = 0,\ \ \ x_2 = 3. \end{cases}$$

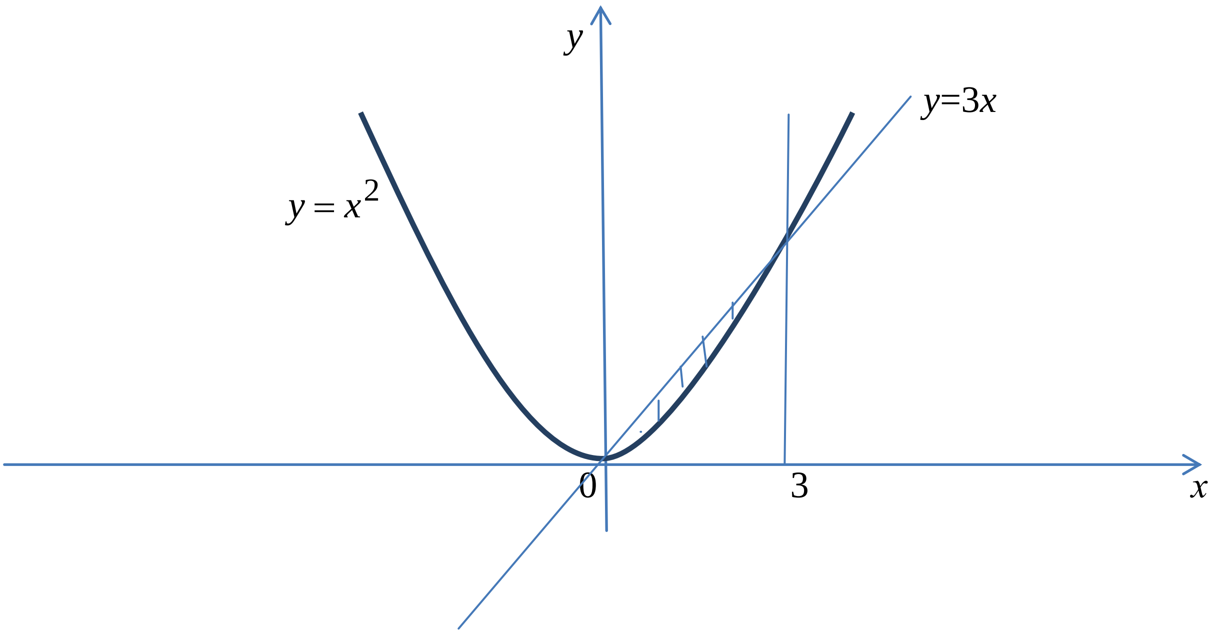

Рис. 3

Тоді $Q=\int\limits_0^3(3x-x^2)dx=3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{27\cdot 1}{6}=\frac{9}{2}$ (кв. од.).

Обчислення об’ємів тіл обертання

Розглянемо фігуру, обмежену лініями: $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$. Припустимо, що ця фігура обертається навколо осі OX. У результаті одержимо тіло обертання (рис. 4). Необхідно знайти об’єм цього тіла.

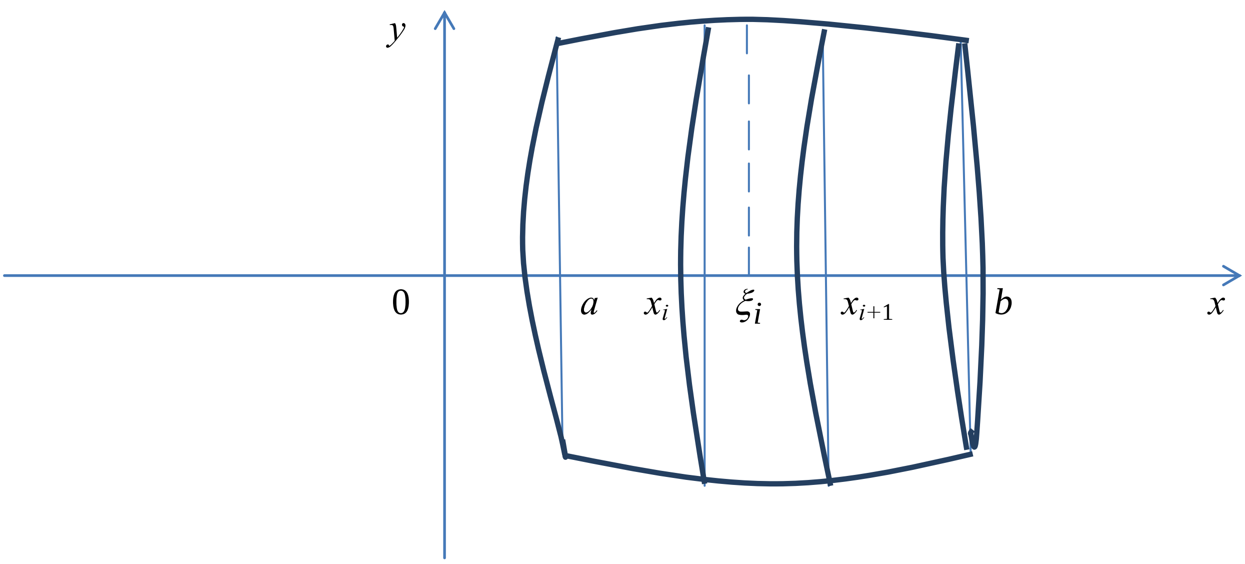

Рис. 4

Тіло обертання перетнемо площинами, перпендикулярними осі OX, так, щоб інтервал $[a,b]$ був розбитий на n інтервалів довільної довжини. На i-му інтервалі довжиною $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ виберемо довільну точку ξ_i. Припустимо, що на цьому інтервалі функція $f(x)$ є сталою і дорівнює $f(\xi_i)$.

Тим самим замінимо тіло обертання сумою n циліндрів.

Об’єм i-го циліндра дорівнює

$$V_i = \pi \cdot f^2(\xi_i)\Delta x_i .$$

Наближене значення шуканого об'єму складає

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f^2(\xi_i)\Delta x_i .$$

Точне значення V дорівнює

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Таким чином, об'єм тіла, одержаного обертанням фігури навколо осі OX, дорівнює

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Аналогічно, об’єм тіла, одержаного обертанням фігури, обмеженої лініями $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ навколо осі OY, визначається за формулою

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy .$$

<u>Приклади</u>. Знайти об'єми тіл, одержаних у результаті обертання фігури, обмеженої лінією $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ навколо осі: *а*) OX , *б*) OY.

а) На рис. 5 зображено тіло обертання навколо осі OX.

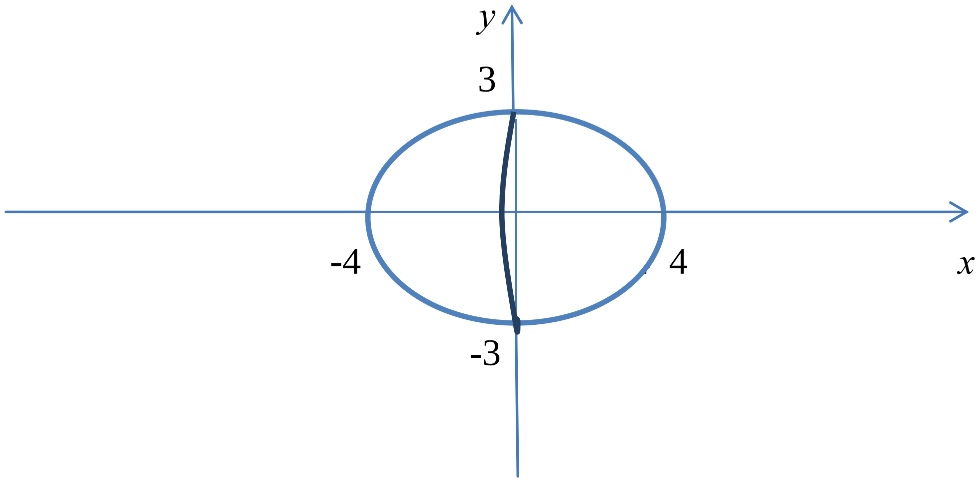

Рис. 5

Об'єм тіла дорівнює

$$V_1 = \pi \int_{-4}^{4} f^2(x)dx = \pi \int_{-4}^{4} 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)dx = 9\pi\left(x - \frac{x^3}{48}\right)\Bigg|_{-4}^{4} = 18\pi\left(4 - \frac{64}{48}\right) =$$

$$= 18 \cdot \frac{8}{3}\pi = 48\pi(куб.од.).$$

б) Об'єм тіла обертання навколо осі OY складає

$$V_2 = \pi \int_{-3}^{3} \varphi^2(y)dy = \pi \int_{-3}^{3} 16\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)dy = 16\pi\left(y - \frac{y^3}{27}\right)\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= 32\pi\left(3 - \frac{27}{27}\right) = 64\pi(куб.од.).$$

<u>Визначення довжини дуги</u>

Розглянемо криву лінію $y = f(x)$ (рис.6). Необхідно визначити довжину дуги MN.

Розіб'ємо дугу на n частин і замінимо ламаною. Довжина i-ої частини ламаної дорівнює

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\ .$$

Тоді наближене значення довжини дуги як довжини ламаної складає

$$l \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\,.$$

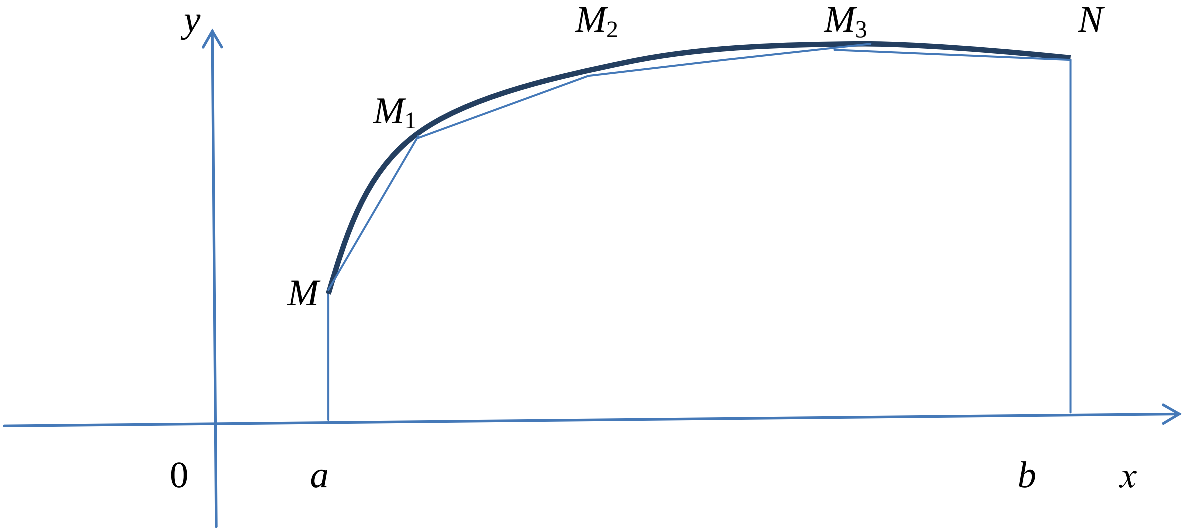

Рис. 6

Точне значення одержимо, якщо перейдемо до границі

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

<u>Приклад</u>. Знайти довжину дуги кривої

$$x^2 + y^2 = R^2;\ \ y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}\ \ (\text{рис }.7).$$

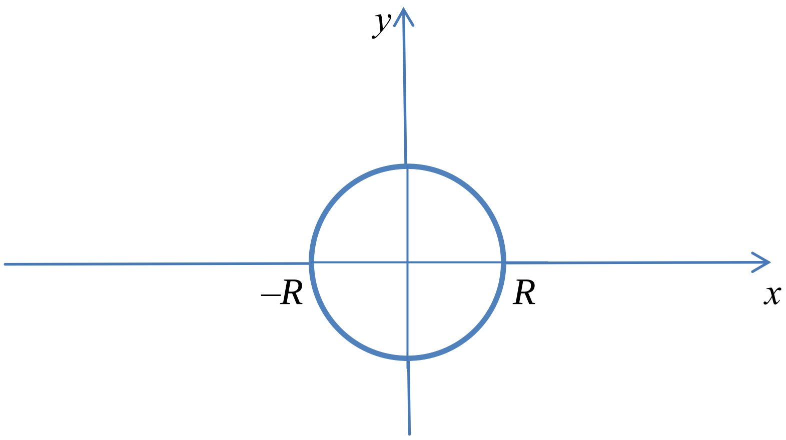

Рис. 7

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\ ,\ y'_x=\frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{R^2-x^2}}\ .$$

$$l=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_0^R=4R(\arcsin 1-\arcsin 0)=$$
$$=4R(\pi-0)=2\pi R.$$

Застосування інтегралів до задач економіки

Приклад 1. Нехай задана продуктивність праці робітника як функція часу $y=2t-\frac{t^2}{3}$. Необхідно обчислити об'єм продукції, яка вироблена робітником за третю та четверту години робочого дня.

Вище було показано, що об'єм продукції знаходиться за формулою

$$Q=\int_a^b f(t)dt\ ,$$

де $f(t)$ – продуктивність праці.

У випадку, що розглядається,

$$Q=\int_2^4\left(2t-\frac{t^2}{3}\right)dt=\left(2\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{9}\right)\bigg|_2^4=\left(4^2-\frac{4^3}{9}\right)-\left(2^2-\frac{2^3}{9}\right)=16-4-\frac{64}{9}+\frac{8}{9}=\frac{52}{9}.$$

.

Приклад 2. Припустимо, що на склад безперервно надходять товари. $K(t)$ – функція, яка показує кількість товару (наприклад, у грн.), що надходить у момент t. Тоді кількість товару, який надходить за інтервал $[t_1, t_2]$ складає

$$\int_{t_1}^{t_2}K(t)dt\ .$$

Механічні застосування визначених інтегралів

Обчислення роботи

Нехай матеріальна точка рухається по прямій лінії під дією сили (рис. 8). Рух відбувається від т. A до т. B.

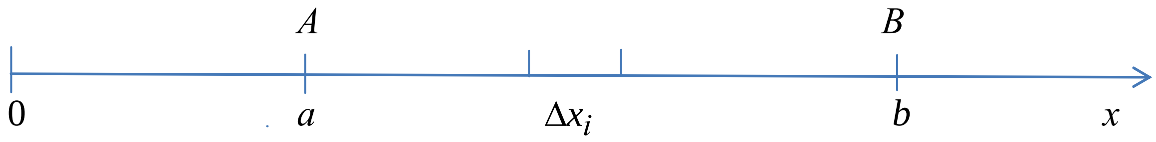

Рис. 8

Якщо сила F, що діє на матеріальну точку, є незмінною, то робота, виконана цією силою на інтервалі $[a,b]$, дорівнює

$$A=F(b-a).$$

Тепер розглянемо випадок, коли сила – змінна величина, тобто є функцією координати. Як обчислити роботу сили F на інтервалі $[a,b]$?

Уявно розіб'ємо інтервал $[a,b]$ на n відрізків довільної довжини. На i-му відрізку довжиною Δx_i виберемо довільну точку ξ_i. Припустимо, що діюча сила на цьому відрізку не змінюється і дорівнює $F(\xi_i)$.

Тоді елементарна робота, тобто робота сили на i-му відрізку наближено дорівнює

$$A_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Наближене значення роботи сили на інтервалі $[a,b]$ складає

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Точне значення роботи знайдемо, коли перейдемо до границі

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx .$$

Приклад. Обчислити роботу, яку необхідно витратити, щоб викачати воду з резервуара (рис. 9) висотою H і радіусом R.

Уявно розіб’ємо висоту бака на n відрізків. На i-му відрізку довжиною Δz_i виберемо довільну точку ξ_i.

Робота, яку необхідно витратити, щоб викачати i-й шар води товщиною Δz_i складає

$$A_i \approx \gamma \pi R^2 \Delta z_i (H - \xi_i), \qquad (12)$$

де γ – питома вага води.

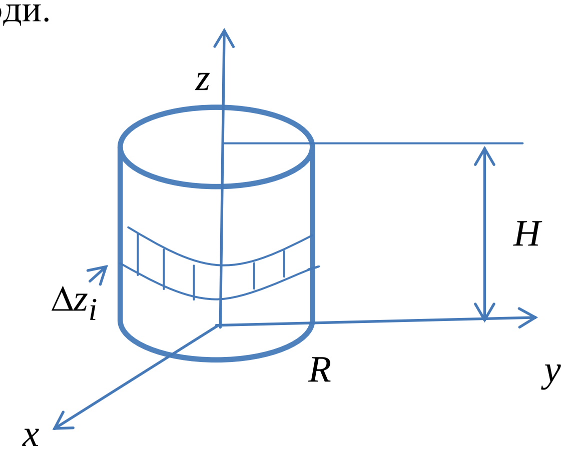

Рис. 9

Наближене значення всієї роботи дорівнює

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma \pi R^2 (H - \xi_i) \Delta z_i .$$

Точне значення роботи одержимо, якщо перейдемо до границі

$$A = \lim_{\max \Delta z \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma \pi R^2 (H - \xi_i) \Delta z_i = \pi R^2 \gamma \int_0^H (H - z) dz =$$

$$= \pi R^2 \gamma (Hz - \frac{z^2}{2}) \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2 \gamma}{2}.$$

Обчислення координат центра ваги

Розглянемо систему n матеріальних точок, координати яких, відповідно, (x_1,y_1), (x_2,y_2), …., (x_n,y_n), і маса яких m_1, m_2, …, m_n. Із механіки відомо, що координати центра ваги цієї системи знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Тепер розглянемо матеріальну плоску фігуру (рис. 10), обмежену $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$.

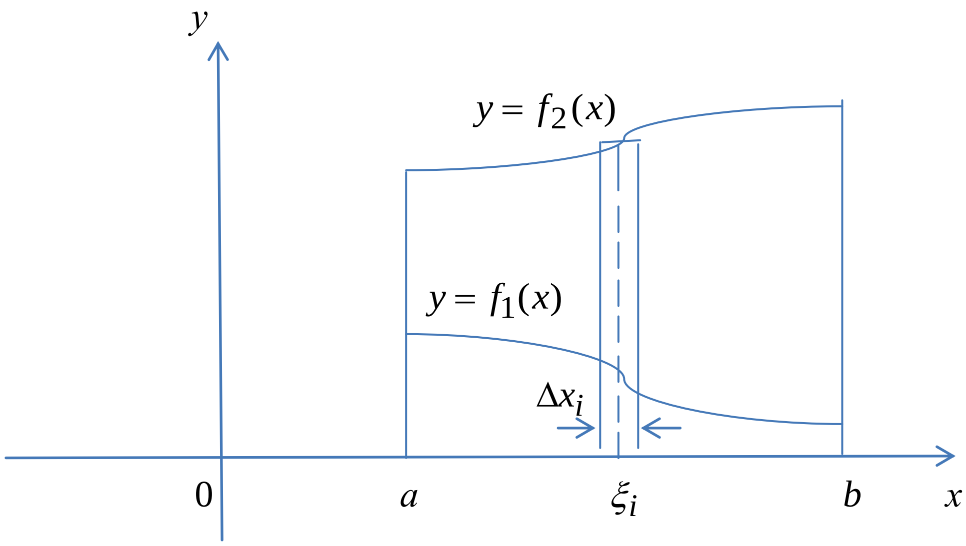

Рис. 10

Поверхневу густину, тобто масу одиниці площі поверхні, будемо вважати незмінною величиною δ.

Уявно розіб'ємо плоску фігуру, що розглядається, на n смужок довільної ширини Δx_1, Δx_2, …, Δx_n. Кожну смужку замінимо прямокутником з основою Δx_i і висотою $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$, де $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Координати центра ваги i-ї смужки дорівнюють

$$(x_i)_c = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \xi_i, \qquad (y_i)_c = \frac{f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)}{2}.$$

Маса i-ї смужки дорівнює добутку площі прямокутника $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ на поверхневу густину δ.

Припустимо, що маса смужки зосереджена в її центрі ваги. Уявно замінимо плоску матеріальну фігуру системою точок – центрів ваги кожної смужки. Тоді координати центра ваги фігури наближено дорівнюють координатам центра ваги цієї системи точок і, відповідно, складають

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \delta [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)][f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}.$$

Точні значення координат центра ваги плоскої фігури знайдемо, якщо перейдемо до границі. У результаті одержимо

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx},$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)][f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}.$$

<u>Приклад</u>. Визначити координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями (рис. 11)

$$y^2 = 4x,\ x = 4.$$

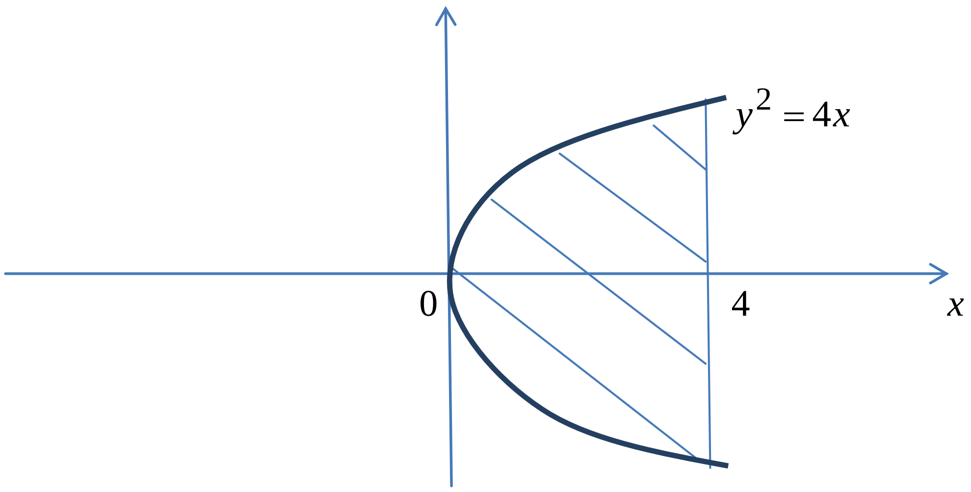

Рис. 11

$$f_2(x) = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x},\ \ f_1(x) = -\sqrt{4x} = -2\sqrt{x},$$

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_0^4 \left[2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})\right]dx = 4\int_0^4 \sqrt{x}dx = 4 \cdot \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^4 = \frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{64}{3}.$$

$$\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_0^4 x\left[2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})\right]dx = 4 \cdot \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^4 = \frac{8}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} = \frac{8 \cdot 32}{5}.$$

$$x_c = \frac{\frac{8 \cdot 32}{5}}{\frac{64}{3}} = \frac{12}{5}, \quad y_c = 0,$$

оскільки фігура симетрична відносно осі OX.

<u>Невласні інтеграли з нескінченними межами</u>

<u>Означення</u>. Невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею називається границя

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

<u>Означення</u>. Невласним інтегралом з нескінченною нижньою межею називається границя

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

<u>Приклад</u>.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left.\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Л Е К Ц І Я № 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

План

1. Означення, звичайні диференціальні рівняння, порядок рівняння.
2. Диференціальні рівняння першого порядку:
   – загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння, загальний та частинний інтеграли, інтегральні криві;
   – теорема існування розв'язку;
   – диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваним змінними;
   – лінійні рівняння першого порядку.
3. Диференціальні рівняння другого порядку:
   – загальний розв'язок та загальний інтеграл. Частинний розв'язок та частинний інтеграл;
   – лінійні диференціальні рівняння другого порядку:
   – – неоднорідні та однорідні лінійні рівняння другого порядку;
   – – лінійно незалежні та лінійно залежні частинні розв'язки;
   – – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння;
   – – лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Означення. Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, функцію y та похідні $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Позначається диференціальне рівняння так:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Означення. Порядком диференціального рівняння (1) називається порядок найвищої похідної, що входить до рівняння.

Приклади.

$xy'' + yy' + x = 0$ – рівняння 2-го порядку;

$y' - x^2 y = 0$ – рівняння 1-го порядку.

Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

або

$$y' = f(x, y). \tag{3}$$

Теорема: *Якщо у рівнянні (3) функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервні у деякій-області D на площині Oxy, що містить деяку точку $M_0(x_0,y_0)$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння, що розглядається, який задовольняє умові: при $x=x_0$, $y=y_0$.*

Геометричний зміст теореми: існує єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$.

Означення 1. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C) \tag{4}$$

де C – довільна стала, яка задовольняє таким умовам:

а) вона задовольняє рівнянню при будь-якому конкретному значенні сталої C;

б) для будь-якої початкової умови

$$y\Big|_{x = x_0} = y_0 \tag{5}$$

(з області існування розв'язку) можемо знайти таке значення C_0, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ буде розв'язком рівняння, який задовольняє умові (5).

Зауваження. Часто в процесі розв'язання диференціального рівняння не вдається одержати розв'язок у явному вигляді $y = \varphi(x, C)$, а одержують деяке співвідношення

$$\Phi(x,y,C) = 0, \tag{6}$$

яке неявно визначає загальний розв'язок рівняння, що розглядається.

Співвідношення (6) називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2) або (3).

Означення 2. Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C_0),$$

яка одержана із (4) і задовольняє початковій умові (5).

Співвідношення

$$\Phi(x,y,C_0) = 0,$$

яке одержано із (6) і задовольняє умові (5), називається частинним інтегралом рівняння, що розглядається.

Приклад. Для рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

загальним розв'язком буде сімейство функцій

$$y = \frac{C}{x}.$$

У цьому легко переконатись шляхом підстановки.

Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початковій умові:

$$y\Big|_{x=1} = 2.$$

$\frac{C_0}{1} = 2$, $C_0 = 2$, $y = \frac{2}{x}$ – шуканий частинний розв’язок.

Геометрична інтерпретація: загальний розв’язок (загальний інтеграл), являє сімейство кривих (інтегральних кривих) на площині *Oxy*, частинний розв'язок (частинний інтеграл) – це крива, що проходить через задану точку (x_0,y_0) .

Рівняння з відокремленими змінними

Рівняння з відокремленими змінними має вигляд

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

або

$$N(y)dy = -M(x)dx. \tag{7}$$

Права і ліва частини рівняння (7) є диференціалами деяких функцій

$$d\Phi_1(y) = d\Phi_2(x).$$

Після інтегрування одержимо:

$$\int d\Phi_1(y) = \int d\Phi_2(x),$$

$$\Phi_1(y) = \Phi_2(x) + C. \tag{8}$$

Співвідношення (8) – загальний інтеграл рівняння (2).

Приклад. Проінтегрувати (розв'язати) рівняння

$$x^2dx + y^3dy = 0,$$

$$y^3dy = -x^2dx,$$

$$\int y^3dy = -\int x^2dx,$$

$$\frac{y^4}{4} = -\frac{x^3}{3} + C$$

– це загальний інтеграл рівняння, що розглядається.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд

$$M_1(x)N_1(y)dy + M_2(x)N_2(y)dx = 0$$

Розділимо на $M_1(x)N_2(y)$. У результаті маємо

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy + \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx = 0$$

або

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx. \qquad (9)$$

Рівняння (9) – рівнянням з відокремленими змінними. Після інтегрування одержимо загальний інтеграл.

Приклад. Дано рівняння $(x+3)y^2dy + x(y^2+1)dx = 0$

Після відокремлення змінних маємо

$$\frac{y^2}{y^2+1}dy = -\frac{x}{x+3}dx.$$

У результаті інтегрування одержимо загальний інтеграл:

$$\int\frac{\left(y^2+1\right)-1}{y^2+1}dy = -\int\frac{(x+3)-3}{x+3}dx,$$

$$y - arctgy = -x + 3\ln|x+3| + C.$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Лінійними рівняннями першого порядку називаються рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (10)$$

де $p(x), q(x)$ – деякі функції.

Розв’язок рівняння (10) будемо шукати у вигляді

$$y = u(x)v(x). \qquad (11)$$

Підставимо (11) у (10)

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

або

$$v\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + p(x)v\right] = q(x) \qquad (12)$$

Функцію $v(x)$ знайдемо з умови

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0.$$

Тоді

$$\frac{dv}{v}=-p(x)dx,$$

$$\ln|v|=-\int p(x)dx$$

або

$$v=e^{-\int p(x)dx}\ . \qquad (13)$$

Підставимо (13) у (12). У результаті одержимо

$$v(x)\frac{du}{dx}=q(x),$$

$$du=\frac{q(x)}{v(x)}dx,$$

$$u=\int\frac{q(x)}{v(x)}dx+C. \qquad (14)$$

Загальний розв'язок рівняння (10) одержимо після підстановки (13) і (14) у (11).

<u>Приклад</u>. Розв'язати рівняння

$$y'+2xy=xe^{-x^2},\ y(0)=5. \qquad (15)$$

$$y=u(x)v(x),\ y'=u'v+v'u. \qquad (16)$$

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+2xv\right]=xe^{-x^2}, \qquad (17)$$

$$\frac{dv}{dx}+2xv=0,$$

$$\frac{dv}{v}=-2xdx,\ \int\frac{dv}{v}=-2\int xdx,\ \ln|v|=-x^2,$$

$$v=e^{-x^2}. \qquad (18)$$

Підставимо (18) у (17), одержимо

$$e^{-x^2}\frac{du}{dx}=xe^{-x^2}.$$

Тоді

$$\frac{du}{dx} = x\,,\ du = xdx\,,\ \int du = \int xdx\,,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C\,. \tag{19}$$

Загальний розв’язок рівняння (15) одержимо після підстановки (18) і (19) у (16).

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Для знаходження частинного розв’язку скористаємось початковою умовою $y(0) = 5$. У результаті маємо

$$5 = e^0\left(0 + C\right),\ C=5.$$

Частинний розв'язок рівняння (15) має вигляд

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + 5\right).$$

Диференціальні рівняння другого порядку

Означення. Рівняння другого порядку – це рівняння типу

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{20}$$

або

$$y'' = f(x, y, y')\,. \tag{21}$$

Означення. Загальним розв’язком рівняння (20) або (21) називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)\,, \tag{22}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі величини, які задовольняють таким умовам:

а) після підстановки (22) в (20) або (21) ця функція перетворює відповідне рівняння на тотожність;

б) для будь-яких початкових умов (з області існування розв'язку) при

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0 \tag{23}$$

можна знайти такі C_1^0, C_2^0, що функція $\varphi(x, C_1, C_2)$ задовольняє початковим умовам (23).

Означення. Функція

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0),$$

називається частинним розв'язком рівняння (20) або (21), який задовольняє початковим умовам (23).

Рівняння

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

називається загальним інтегралом рівняння другого порядку, а рівняння

$$\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$$

є частинним інтегралом рівняння (20) або (21).

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Означення 1. Лінійними неоднорідними рівняннями другого порядку називаються рівняння виду

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

або

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

Означення 2. Лінійними однорідними рівняннями (або рівняннями без правої частини) називаються рівняння виду

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{24}$$

або

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{25}$$

Коефіцієнти $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – деякі неперервні функції на деякому інтервалі $[a, b]$.

Нехай $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – деякі частинні розв'язки рівняння (24) або (25).

<u>Означення 3</u>. Два частинні розв'язки лінійного рівняння називаються лінійно незалежними на інтервалі $[a,b]$, якщо для всіх значень x із інтервалу, що розглядається, відношення цих розв'язків не є сталою величиною, тобто

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$$

У протилежному випадку, коли

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda,$$

де λ – стала величина, частинні розв'язки називаються лінійно залежними.

<u>Приклади</u>. Розглянемо рівняння $y'' - 9y = 0$.

Частинними розв'язками цього рівняння є

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{-3x}, \quad y_3(x) = 5e^{3x}.$$

Розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{3x}}{e^{-3x}} = e^{6x} \neq const.$$

Розв'язки $y_1(x)$ та $y_3(x)$ – лінійно залежні, оскільки

$$\frac{y_1(x)}{y_3(x)} = \frac{e^{3x}}{5e^{3x}} = \frac{1}{5} = \lambda.$$

<u>Загальний розв'язок</u>
<u>лінійного однорідного рівняння другого порядку</u>

<u>Теорема 1</u>. Якщо $y_1(x)$ є розв'язком однорідного диференціального рівняння, C – стала, то $y = Cy_1(x)$ є також розв'язком цього рівняння.

Теорема 2. Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – два лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку. Тоді загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$y_{заг.одн.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі величини.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (26)$$

де p та q – незмінні коефіцієнти.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді

$$y = e^{kx}. \qquad (27)$$

Після підстановки (27) в (26) одержимо

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

або

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Вираз $e^{kx} \neq 0$, вираз (27) буде розв'язком рівняння (26) якщо виконується умова

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (28)$$

Рівняння (28) називається характеристичним. Його розв'язок

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Розглянемо різні види коренів характеристичного рівняння.

I. *Корені характеристичного рівняння дійсні, різні.*

Тобто $k_1 \neq k_2$, k_1, k_2 – дійсні числа. Тоді в результаті розв'язання характеристичного рівняння маємо два частинні розв'язки рівняння (26):

$$y_1(x) = e^{k_1 x}, \quad y_2(x) = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними, оскільки

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const.$$

Тоді загальний розв’язок рівняння (26) має вигляд

$$y_{заг.одн.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \tag{29}$$

а також частинний розв’язок його, який задовольняє умовам

$$y\Big|_{x=0} = 6, \quad y'\Big|_{x=0} = 16. \tag{30}$$

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 1.$$

Частинні лінійно незалежні розв’язки

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{x}.$$

Загальний розв’язок рівняння (29) має вигляд

$$y_{заг.одн.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку, який задовольняє умовам (30), знайдемо похідну

$$y'_{заг.одн.} = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{x},$$

потім скористаємось умовами (30)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ 2C_1 + C_2 = 16. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо $C_1 = 10,\ \ C_2 = -4.$ Шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$y_{част.} = 10e^{2x} - 4e^{x}.$$

II. *Корені характеристичного рівняння дійсні, рівні.*

Розглянемо випадок $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}.$

Маємо один частинний розв’язок рівняння (26):

$$y_1(x) = e^{k_1 x}. \tag{31}$$

Можно довести, що другий розв'язок, лінійно незалежний з (31), можна обрати у вигляді

$$y_2(x) = xe^{k_1 x}.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (26) має вигляд

$$y_{заг.одн.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \tag{32}$$

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 9 = 0,$$

$$k = 3 \pm \sqrt{9-9} = 0, \quad k_1 = k_2 = 3.$$

Загальний розв'язок рівняння (32) має вигляд

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

III. *Корені характеристичного рівняння комплексні.*

Нехай характеристичне рівняння (28) має комплексні корені

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i.$$

Тоді лінійно незалежні розв'язки мають вигляд

$$y_1(x)=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}e^{\beta xi},\quad y_2(x)=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}e^{-\beta xi}.$$

Скористаємось формулою Ейлера

$$e^{i\gamma}=\cos\gamma+i\sin\gamma.$$

У результаті запишемо

$$y_1(x)=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=u(x)+iv(x),$$

$$y_2(x)=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)=u(x)-iv(x),$$

де позначено $u(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad v(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x.$

Можна довести, що якщо розв'язком диференціального рівняння є вираз $u(x)+iv(x)$, то розв'язком також будуть

$$\tilde{y}_1(x)=u(x),\quad \tilde{y}_2(x)=v(x).$$

З урахуванням сказаного запишемо два лінійно незалежні розв'язки у вигляді

$$\tilde{y}_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \tilde{y}_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

$$\frac{\tilde{y}_1(x)}{\tilde{y}_2(x)}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=ctg\beta x\neq const.$$

Тоді загальній розв'язок рівняння має вигляд

$$y_{заг.одн.}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-6y'+13y=0.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2-6k+13=0.$$

$$k=3\pm\sqrt{9-13}=3\pm 2i,$$

$$k_1=3+2i,\quad k_2=3-2i.$$

$$y_{заг.одн.}=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Л Е К Ц І Я № 4. ЧИСЛОВІ РЯДИ. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ

План

1. Числова послідовність, числовий ряд, n-на частинна сума, сума ряду.
2. Теорема про відкидання скінченного числа членів ряду.
3. Необхідна ознака збіжності ряду.
4. Ряди з невід'ємними членами. Ознаки порівняння.
5. Ознаки збіжності числових рядів:
   - ознака Даламбера;
   - ознака Коші;
   - інтегральна ознака (Маклорена – Коші).
   - знакопереміжні ряди. Ознака Лейбниця.
   - знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжності.

Розглянемо числову послідовність

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Означення. Числовим рядом називається сума виду

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \qquad (1)$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Означення. n-ю частинною (частковою) сумою ряду (1) називається сума

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Означення. Числовий ряд (1) називається збіжним (збігається), якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

S називається сумою ряду.

Якщо не існує скінченної границі n-ї частинної суми ряду, то ряд розбіжний (розбігається).

Приклад. Розглянемо ряд

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \tag{2}$$

Це сума членів нескінченної геометричної прогресії

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Розглянемо декілька частинних випадків:

1) $|q|<1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}.$$

А значить, у цьому випадку ряд (2) збігається.

2) $|q|>1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}=\infty.$$

Ряд (2) розбігається.

3) $q=1$

$$S_n=a+a+\ldots+a=na.$$

Ряд розбігається

4) $q=-1$

$$S_n=a-a+a-a+\ldots=\begin{cases}0 & при\ \ n\ \ парному,\\ a & при\ \ n\ \ непарному.\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує. Ряд розбігається.

<u>Теорема 1</u>. Розглянемо ряд (1)

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

Якщо ряд, який одержано з ряду (1) у результаті відкидання скінченного числа членів ряду, збігається, то ряд (1) також збігається, і навпаки.

Стисло: відкидання скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність.

Необхідна умова збіжності числового ряду

Нехай ряд (1)

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

збігається. Тоді n-й член цього ряду наближається до нуля при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доведення.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_{n-1} + u_n. \qquad (3)$$

За умовою теореми ряд (1) збіжний. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. З іншого боку, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$ також дорівнює S, оскільки при $n \to \infty$, $n-1$ також прямує до нескінченності.

Із (3) запишемо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n-1} + u_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n$$

або

$$S = S + \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Звідси випливає $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Приклад. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ збігається як сума членів нескінченної геометричної прогресії з $q = \frac{1}{2}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{2^n} = 0.$

Зауваження. Доведена ознака є необхідною, але ж не є достатньою. Тож, якщо для числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то з цього не випливає, що ряд збіжний, тобто ряд може бути розбіжним.

Приклад. Розглянемо, так званий, гармонійний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Проте цей ряд є розбіжним .

<u>Ряди з невід’ємними членами. Ознаки порівняння</u>

Теорема 2. Розглянемо два ряди з невід'ємними членами

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{5}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{6}$$

Нехай члени рядів задовольняють умові

$$u_n \le v_n,\ n=1,2,\ldots.$$

Тоді:

а) якщо ряд (6) з більшими членами збігається, то ряд (5) з меншими членами також збігається;

б) якщо ряд (5) з меншими членами розбіжний, то ряд (6) з більшими членами також розбіжний.

<u>Приклади</u>. І. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-2}. \tag{7}$$

$$u_n=\frac{1}{5n-2},\quad 5n-2<5n,\quad \frac{1}{5n-2}>\frac{1}{5n},\quad v_n=\frac{1}{5n}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний. Ряд $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ також розбіжний. Тоді ряд (7) згідно з ознакою також розбіжний як ряд з більшими членами.

2. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n+7}. \tag{8}$$

$$u_n=\frac{5}{2^n+7},\quad 2^n+7>2^n,\quad \frac{1}{2^n+7}<\frac{1}{2^n},\quad \frac{5}{2^n+7}<\frac{5}{2^n},\quad v_n=\frac{5}{2^n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ збіжний як нескінченна геометрична прогресія з $q=\frac{1}{2}$.

Ряд $5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ також збіжний. Тоді ряд (8) як ряд з меншими членами також збіжний.

ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Ознака Даламбера

Теорема. Нехай ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{9}$$

– ряд з додатними членами.

Нехай відношення (n+1)-го члена ряду до n-го має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тоді

а) якщо l<1, то ряд (9) збігається;

б) якщо l>1, то ряд (9) розбіжний.

При l=1 ряд може бути або збіжним, або розбіжним.

Приклади: 1. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{5^n}$.

$$u_n=\frac{3n-2}{5^n},\quad u_{n+1}=\frac{3(n+1)-2}{5^{n+1}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{3n-2}=\frac{1}{5}<1.$$

Значить ряд збігається.

2. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n+5}$.

$$u_n=\frac{4^n}{2n+5},\quad u_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{2(n+1)+5},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{2n+7}\cdot\frac{2n+5}{4^n}=4>1.$$

Ряд розбіжний.

Ознака Коші

Теорема. Нехай ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{10}$$

є рядом з додатними членами. Нехай, крім того, виконуються умови: існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,\quad 0\le\rho\le+\infty.$$

Тоді

а) якщо $\rho<1$, то ряд (10) збігається;

б) якщо $\rho>1$, то ряд (10) розбіжний;

в) якщо $\rho=1$, то ряд може бути збіжним або розбіжним.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{n+3}\right)^n$.

$$u_n=\left(\frac{5n+1}{n+3}\right)^n,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+1}{n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n+3}=5>1.$$

Ряд збіжний.

Інтегральна ознака збіжності рядів

Теорема. Розглядається ряд з додатними членами

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{11}$$

Члени ряду задовільняють умові

$$u_1\ge u_2\ge u_3\succ\ldots$$

Введемо неперервну незростаючу функцію $f(x)$, яка задовольняє умові

$$f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ldots,f(n)=u_n,\ldots.$$

Тоді, якщо невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \tag{12}$$

збігається, то і ряд (11) збігається, якщо інтеграл (12) розбігається, то ряд (11) розбіжний.

<u>Приклад</u>. Дослідити на збіжність узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \tag{13}$$

Розглянемо функцію $\frac{1}{x^p}$. Тоді

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \int_{1}^{N} \frac{dx}{x^p},$$

$$\int_{1}^{N} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left. \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_{1}^{N} & при \quad p \neq 1, \\ \ln|x| \Big|_{1}^{N} & при \quad p = 1. \end{cases}$$

1) при $p>1$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \to +\infty} \left[\frac{N^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right] = \frac{1}{p-1},$$

2) при $p<1$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \to +\infty} \left[\frac{N^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right] = \infty,$$

3) при $p=1$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \to +\infty} \ln N = \infty.$$

Ряд (13) збіжний при $p>1$, при $p \leq 1$ – розбіжний.

Знакопереміжні ряди. Ознака Лейбниця

Знакопереміжним рядом називається ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, \qquad (14)$$

у якому члени $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – додатні.

Теорема. Нехай (14) знакопереміжний ряд, члени якого задовольняють умовам:

а) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots,$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Тоді ряд (14) збігається, і сума його не перевищує першого члена ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. А значить, ряд збігається.

Зауваження. Похибка заміни суми знакопереміжного ряду n-ою частковою сумою не перевищує за модулем першого із відкинутих членів ряду.

Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжності

Означення. Числовий ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ називається знакозмінним, якщо в ньому зустрічаються як додатні, так і від'ємні члени.

Приклад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}.$

Означення. Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, складений із абсолютних величин членів ряду, що розглядається.

Означення. Якщо знакозмінний ряд є збіжним, а ряд модулів цього ряду – розбіжним, то знакозмінний ряд, що розглядається, називається умовно (неабсолютно) збіжним.

Приклади. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди

1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2+2}. \qquad (15)$$

Розглянемо ряд модулів членів ряду (15)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2}.$$

Цей ряд збігається згідно з ознакою порівняння

$$3n^2+2>3n^2, \frac{1}{3n^2+2}<\frac{1}{3n^2},$$

оскільки ряд із загальним членом $v_n=\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}$ збігається. Значить ряд (15) збігається абсолютно.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \qquad (16)$$

Розглянемо ряд абсолютних величин членів ряду (16).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Цей ряд розбіжний, як було показано вище.

У той же час ряд (16) згідно з ознакою Лейбниця збігається. Отже, ряд (16) збігається умовно.

ЛЕКЦІЯ № 5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ.

РОЗКЛАД ФУНКЦІЙ В РЯДИ ТЕЙЛОРА ТА МАКЛОРЕНА. ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ

План

1. Степеневий ряд. Означення. Інтервал збіжності. Теорема Абеля.
2. Визначення інтервалів збіжності степеневих рядів.

   а) ряди по степенях x^n;

   б) ряди по степенях $(x-x_0)^n$.
3. Розклад функцій у ряди Тейлора і Маклорена.
4. Біноміальний ряд.
5. Приклади розкладу функцій у ряд Тейлора.
6. Застосування рядів у наближених обчисленнях.

Означення. Степеневим рядом називається ряд виду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{1}$$

де числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коефіцієнти ряду.

Сукупність значень x, при яких ряд (1) збігається, називається ділянкою збіжності степеневого ряду.

Теорема Абеля. Якщо ряд (1) збігається при деякому значенні x_0, то він збігається, причому абсолютно, при всіх значеннях x_0, які задовольняють умові $|x| < |x_0|$.

Якщо ряд (1) розбігається при деякому значенні x_1, то він розбігається при всіх значеннях x, які задовольняють умові $|x| > |x_1|$.

Означення. Інтервалом збіжності степеневого ряду (1) називається інтервал від $-R$ до R такий, що при всіх значеннях x, які лежать усередині інтервалу ряд збігається і при всіх значеннях x, що знаходяться за межами цього інтервалу, ряд розбігається. При $x=\pm R$ необхідне додаткове дослідження. R – радіус збіжності.

Для визначення інтервалів збіжності степеневих рядів скористаємося ознакою Даламбера для ряду абсолютних величин членів ряду (1)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

При $|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ряд (1) збігається.

При $|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ ряд (1) розбігається.

Або ряд (1) збіжний при

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

і розбіжний при

$$|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Отже,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Якщо скористатися ознакою Коші для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$, то одержимо:

якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}<1$ – ряд збіжний;

якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}>1$ – ряд розбіжний.

Або ряд (1) збігається абсолютно при $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ і розбігається при $|x| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Отже,

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Розглянемо приклади визначення інтервалів збіжності степеневих рядів.

<u>Приклади</u>.

1. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n^2}{(n+1)^2 x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = |x| \cdot 1.$$

Ряд (2) збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| > 1$.

При x=–1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ збігається згідно з ознакою Лейбниця.

При x=1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонійний (p=2>1). І, таким чином, інтервал збіжності ряду (2) $[-1;1]$.

2. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n+2)}{5^n}. \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}(n+3)}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{x^n (n+2)} \right| = \frac{|x|}{5}.$$

Ряд (3) збігається при $\frac{|x|}{5}<1$. Тобто $|x|<5$. Розбігається при $|x|>5$.

При x=–5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n(n+2)}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+2),$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+2)=\infty.$$

Ряд розбігається, оскільки не виконується необхідна ознака.

При x=5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+2)}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2),$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+2)=\infty.$$

Ряд розбігається, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності.

Таким чином, інтервал збіжності ряду (3) має вигляд $(-5;5)$.

3. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}3^n}. \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot 3^n}{\sqrt{n+1}\cdot 3^{n+1}\cdot x^n}\right|=\frac{|x|}{3}.$$

Ряд (4) збігається при $\frac{|x|}{3}<1$, тобто $|x|<3$; розбігається при $|x|>3$.

При x=–3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Ряд збігається згідно з ознакою Лейбниця.

При $x=3$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ряд розбігається як узагальнений гармонійний ряд при $p=\frac{1}{2}<1$.

Інтервал збіжності ряду (4) $[-3;3)$.

<u>Ряди по степенях</u> $(x-x_0)$

Це ряди виду

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots. \tag{5}$$

Позначимо $y=x-x_0$. Тоді

$$a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n+\ldots. \tag{6}$$

Нехай ряд (6) має інтервал збіжності $-R<y<R$. Тоді

$$-R<x-x_0<R\Rightarrow x_0-R<x<x_0+R$$

– це інтервал збіжності ряду (5).

<u>Приклад</u>. Визначити інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2 10^n}. \tag{7}$$

Позначимо $y=x-2$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2 10^n}. \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y^{n+1}\cdot n^2\cdot 10^n}{(n+1)^2\cdot 10^{n+1}\cdot y^n}\right|=\frac{|y|}{10}.$$

Ряд (8) збігається при $|y|<10$ і розбігається при $|y|>10$.

При $y=-10$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n^2 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

ряд збігається згідно з ознакою Лейбниця.

При y=10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^2 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ряд збігається як узагальнений гармонійний при p=2>1.

Інтервал збіжності ряду (8) $-10 \le y \le 10$,

Інтервал збіжності ряду (7) $-10 \le x - 2 \le 10$,

$$8 \le x \le 12.$$

Розклад функцій в ряди Тейлора і Маклорена

Теорема. Нехай функція $f(x)$ є сумою ряду

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{9}$$

який має певний інтервал збіжності. Тоді при будь-якому значенні x, що лежить всередині цього інтервалу можна почленно диференціювати ряд (9), тобто

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots, \tag{10}$$

Причому ряд (10) має той же інтервал збіжності, що й ряд (9).

Нехай функція $f(x)$ неперервна і має неперервні похідні до (n+1)-го порядку включно в околі точки x=0.

Розглянемо степеневий ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

сума якого – функція $f(x)$. Поставимо питання: чи можна виразити коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ через функцію $f(x)$ і її похідні?

Покладемо x=0. Тоді $f(0) = a_0$.

Продиференціюємо вираз (9). Одержимо

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots.$$

При x=0 маємо $f'(0)=a_1$.

Ще раз продиференціюємо.

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2\cdot a_3x+\ldots+n\cdot(n-1)\cdot a_nx^{n-2}+\ldots.$$

При x=0 маємо $f''(0)=2a_2$.

Аналогічно

$$f'''(x)=3!\cdot a_3+\ldots+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_nx^{n-3}+\ldots,$$

$$f^{(3)}(0)=3!\cdot a_3,\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ \ f^{(n)}(0)=n!\cdot a_n.$$

Тоді одержимо

$$a_0=f(0),\ \ a_1=\frac{f'(0)}{1!},\ \ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ \ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \qquad (11)$$

Після підстановки (11) у (9) маємо

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Це ряд Маклорена або розклад функції $f(x)$ в ряд Маклорена.

Тепер розглянемо функцію $f(x)$, яка неперервна разом з похідними до (n+1)-го порядку в околі точки $x=a$. В результаті аналогічних викладок одержимо розклад функції $f(x)$ в ряд по степенях $(x–a)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.$$

Це ряд Тейлора.

Зауважимо, що ряд Маклорена є частинним випадком ряду Тейлора.

Приклади розкладу в ряди Тейлора і Маклорена

1. $f(x)=\sin x,$ $\qquad f(0)=0,$

$f'(x)=\cos x,$ $\qquad f'(0)=1,$

$f''(x) = -\sin x,$ $\qquad f''(0) = 0,$

$f^{(3)}(x) = -\cos x,$ $\qquad f^{(3)}(0) = -1,$

$f^{(4)}(x) = \sin x,$ $\qquad f^{(4)}(0) = 0,$

$f^{(5)}(x) = \cos x,$ $\qquad f^{(5)}(0) = 1.$

Ряд Маклорена для функції $\sin x$ має вигляд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots.$$

Цей ряд збіжний при $|x| < \infty$.

2. $f(x) = \cos x,$ $\qquad f(0) = 1,$

$f'(x) = -\sin x,$ $\qquad f'(0) = 0,$

$f''(x) = -\cos x,$ $\qquad f''(0) = -1,$

$f^{(3)}(x) = \sin x,$ $\qquad f^{(3)}(0) = 0,$

$f^{(4)}(x) = \cos x,$ $\qquad f^{(4)}(0) = 1,$

$f^{(5)}(x) = -\sin x,$ $\qquad f^{(5)}(0) = 0.$

Ряд Маклорена для функції $\cos x$ має вигляд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \tag{12}$$

Інтервал збіжності ряду (12) $|x| < \infty$.

3. $f(x) = e^x,$ $\qquad f(0) = 1,$

$f'(x) = e^x,$ $\qquad f'(0) = 1,$

$f''(x) = e^x,$ $\qquad f''(0) = 1,$

$\ldots \ \ldots \ \ldots,$ $\qquad \ldots \ \ldots \ \ldots,$

$f^{(n)}(x) = e^x,$ $\qquad f^{(n)}(0) = 1.$

Ряд Маклорена для функції e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{13}$$

Інтервал збіжності ряду (13) $|x| < \infty$.

Біноміальний ряд

Розглянемо функцію $f(x) = (1+x)^{\mu}$, де μ – деяке дійсне число. Розкладемо її в ряд Маклорена.

$f(x) = (1+x)^{\mu}$, $\qquad f(0) = 1$,

$f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1}$, $\qquad f'(0) = \mu$,

$f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$, $\qquad f''(0) = \mu(\mu-1)$,

$f^{(3)}(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3}$, $\qquad f^{(3)}(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)$

… … …, $\qquad$ … … … .

Тоді

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \dots \qquad (14)$$

Ряд (14) називається біноміальним. Він збігається при $|x| < 1$.

Зауваження. При $\mu = n$, де n – ціле число, із (14) одержимо

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + C_n^m x^m + \dots + x^n. \qquad (15)$$

Формула (15) називається біномом Ньютона.

Приклад. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$ функцію

$$f(x) = \ln x.$$

$\qquad f(1) = 0$,

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $\qquad f'(1) = 1$,

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\qquad f''(1) = -1$,

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}, \qquad\qquad f^{(3)}(1)=2,$$

$$\dots\ \dots\ \dots, \qquad\qquad \dots\ \dots\ \dots,$$

$$\ln x = 1\cdot(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\dots.$$

<u>Застосування рядів у наближених обчисленнях</u>

Ряди застосовують у наближених обчисленнях при обчисленні функцій, інтегралів, при розв'язку диференціальних рівнянь. Процедура полягає в заміні функції рядом. При цьому виникає питання: скільки членів ряду треба взяти?

При обчисленнях виникають похибки двох видів:

а) похибка, зумовлена відкиданням членів ряду, починаючи з (n+1)-го, тобто похибка, яка обумовлена залишковим членом ряду;

б) похибка, зумовлена похибками в обчисленні членів n-ої частинної суми.

Число членів ряду необхідно вибрати із умови: залишковий член ряду повинен бути менше точності обчислення з деяким запасом. Ця різниця зумовлена похибкою обчислення членів n-ої частинної суми ряду. Як правило, члени n-ої частинної суми треба обчислювати на один або два порядки точніше, ніж допустима похибка обчислення.

<u>Приклад</u>. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

$$\sqrt[3]{30}=(27+3)^{\frac{1}{3}}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+\dots\right].$$

Ряд знакопереміжний. Похибка від заміни суми ряду n-ою частинною сумою за модулем не перевищує першого з відкинутих членів.

При n=1

$$\sqrt[3]{30} \approx 3, \qquad |\varepsilon| < 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

При n=2

$$\sqrt[3]{30} \approx 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = 3 + 0{,}111 = 3{,}111, \quad |\varepsilon| < \frac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2}{2!} = \frac{1}{243}.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}11$ з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Л Е К Ц І Я № 6. ПОДІЇ. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ОБЧИСЛЕННЯ ЇХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

План

1. Предмет теорії ймовірностей.
2. Приклади закономірностей в випадкових масових явищах.
3. Початкові поняття теорії ймовірностей: подія, достовірні, неможливі, несумісні, протилежні події.
4. Класичне означення ймовірності події.
5. Статистичне поняття ймовірності.
6. Безпосереднє обчислення ймовірностей подій з використанням понять комбінаторики:

   а) розміщення, приклад;

   б) перестановки, переставлення, приклад;

   в) сполучення, приклад.

Предмет теорії ймовірностей

Предметом теорії ймовірностей є дослідження закономірностей в випадкових масових явищах незалежно від їх конкретної природи.

Приклад 1. В посудині міститься газ. Кожна молекула рухається хаотично. Тиск на стінки посудини – це результат удару великої кількості молекул. Сила удару різних молекул різна. Але результат сумарної дії великої кількості молекул в різні моменти часу відрізняється дуже мало, що високоточні прилади цього не відчувають, тобто він являється стійким.

Приклад 2. Розмір взуття, необхідного будь-якому довільному покупцеві, є випадкова величина. Але, якщо розглянути велику кількість покупців, наприклад, 10^6, то доля (частка) покупців, яким необхідне взуття, наприклад, 42 розміру, складає, наприклад, 20% і являється майже сталою величиною. Тобто вона слабо змінюється при заміні одного мільйона покупців іншим мільйоном.

Названа закономірність має практичний інтерес.

Початкові поняття теорії ймовірностей

Означення. Подією в теорії ймовірностей (Т.Й.) називається результат експерименту, явища, спостереження тощо. Позначаються події літерами *A*, *B*, *C* ... .

Приклад. В ящику лежать браковані і небраковані (стандартні) деталі. Подія A полягає в тому, що взята навмання деталь буде стандартною.

Означення. Подія називається достовірною (вірогідною), якщо при виконанні певних умов вона не може не відбутися.

Приклад. В ящику лежить 100 стандартних банок. Подія A полягає в тому, що взята навмання банка являється стандартною. Ця подія достовірна.

Означення. Подія називається неможливою, якщо при виконанні певних умов вона не може відбутися.

Приклад. На складі знаходяться стандартні прилади. Подія B полягає в тому, що взятий навмання прилад буде нестандартним. Подія B – неможлива.

Означення. Події A та B називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає можливість появи іншої події.

Приклад. У студента один лотерейний білет. Подія A полягає в тому, що на цей білет припаде виграш – велосипед; подія B – виграш – одеколон. Ці події – несумісні.

Означення. Події A, B, C, ... , M називаються єдино можливими, якщо при виконанні певних умов не може відбутися подія, яка не належить даній сукупності.

Означення. Події A, B, C, ... , M утворюють повну групу подій, якщо вони являються єдино можливими і несумісними.

Приклад. Підкидається гральний кубик. A_1 – подія полягає в тому, що на верхній грані буде одиниця, ... , A_6 – на верхній грані буде шість точок. Події A_1, A_2, ... , A_6 утворюють повну групу подій.

Означення. Дві єдино можливі і несумісні події називаються протилежними.

Приклад. Підкидається монета. Подія A – герб на верхній стороні, $\overline{A}$ – не герб. Події A та $\overline{A}$ – протилежні.

Ймовірність подій

Класичне визначення. Ймовірністю події A називається відношення числа випадків, які сприяють появі цієї події, до загального числа єдино можливих несумісних рівноможливих випадків:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Приклад. В ящику 100 деталей, серед них 5 бракованих. Ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою:

$$P(A)=\frac{5}{100}.$$

Статистичне поняття ймовірностей

Припустимо, що проводиться деякий експеримент n разів. При цьому подія A відбулася μ разів. Тоді відношення $P^{*}(A)=\frac{\mu}{n}$ називається відносною частотою події A.

Якщо проводиться декілька серій з n експериментів (n досить велике), і відносна частота $P^{*}(A)$ коливається навколо числа p, то це число називається ймовірністю події A. Це визначення ймовірності називається статистичним.

Приклад. Гральний кубик підкинули 10 разів. Число “1” випало 3 рази. Відносна частота події A (вона полягає в тому, що на верхній грані буде число “1”) складає

$$P^{*}(A)=\frac{3}{10},$$

а ймовірність

$$P(A)=\frac{1}{6}.$$

Безпосереднє обчислення ймовірності

Приклад 1. Одночасно підкидають два гральні кубики. Необхідно знайти ймовірність того, що сума очок на верхній грані буде 9.

Подію, ймовірність якої треба знайти, позначимо через A.

Всі можливі випадки зображені в табл. І.

Таблиця 1

	1	2	3	4	5	6
1	1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6
2	2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
3	3;1	3;2	3;3	3;4	3;5	3;6
4	4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6
5	5;1	5;2	5;3	5;4	5;5	5;6
6	6;1	6;2	6;3	6;4	6;5	6;6

Загальне їх число дорівнює n=36. Число випадків, в яких подія A може відбутися, складає m=4. Це випадки: (3;6), (4;5), (5;4), (6;3). Ймовірність події A дорівнює: $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Безпосереднє обчислення ймовірностей подій з використанням понять комбінаторики

Задача 1. Таємний замок має 5 дисків. На кожному дискові 9 чисел: 1, 2, 3, ... , 9. Знайти ймовірність того, що замок відриється, якщо набрати навмання п'ятизначне число.

За формулою класичної ймовірності

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

маємо: m=1, $n=9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=9^5$.

Задача 2. В групі ПР-14 25 студентів. Викладач має намір навмання викликати до дошки чотирьох студентів. Знайти ймовірність того, що першим буде названий студент Зуб, другим – Шаповал, третім – Алексєєва. четвертим – Гусєва.

Означення. Розміщеннями із n елементів по m називаються комбінації по m елементів, які відрізняються складом елементів або їх розташуванням (порядком):

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)).$$

Тоді $P=\frac{1}{A_{25}^4}$ (див. рис. 1).

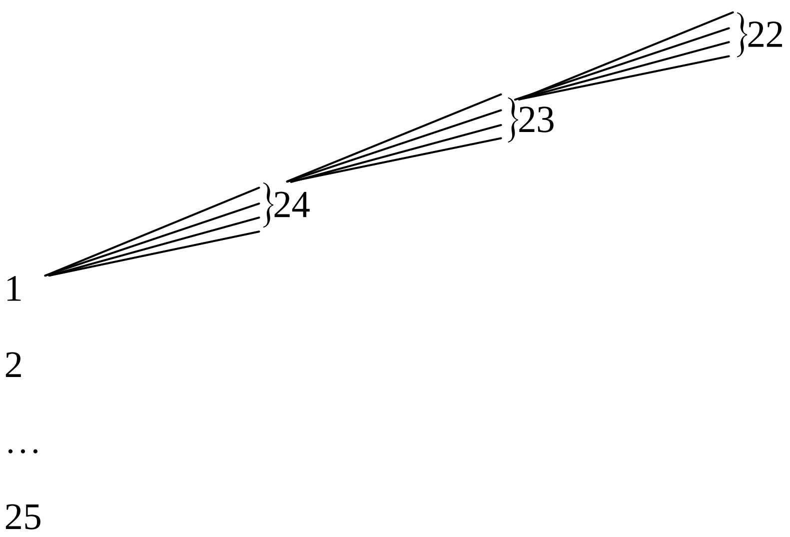

Рис. 1

$$P = \frac{1}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}.$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Задача 3. На однакових картках написані букви Т, С, 0, П, Р. Картки перегорнуті. Їх навмання виймають по одній та складають. Знайти ймовірність того, що буде складене слово "спорт".

Означення. Перестановками (переставленнями) з n елементів називаються комбінації з n елементів, які відрізняються тільки розташуванням елементів.

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1.$$

Число переставлень з n елементів складає

$$P_n = n!$$

Тоді $P(A) = \frac{1}{P_5}$.

Задача 4 . В групі ПР-14 25 студентів. Викладач має намір навмання викликати до дошки чотирьох студентів. Знайти ймовірність того, що викликаними до дошки будуть студенти: Зуб, Шаповал, Алексєєв, Гусєва.

В цій задачі порядок виходу до дошки значення не має.

Означення. Сполученнями з n елементів по m називаються такі комбінації по m елементів, які відрізняються тільки складом елементів.

Число комбінацій з n елементів по m позначається: C_n^m.

$$A_n^m = C_n^m P_m = C_n^m m!,$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Ймовірність шуканої події дорівнює: $P = \frac{1}{C_{25}^4} = \frac{4! \cdot 21!}{25!}$

Л Е К Ц І Я № 7. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

План

1. Ймовірність суми несумісних подій.
2. Залежні та незалежні події. Умовна ймовірність.
3. Ймовірність добутку залежних та незалежних подій.
4. Сума сумісних подій.
5. Ймовірність суми *n* сумісних подій.
6. Ймовірність суми певного числа сумісних подій.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Розглянемо задачу.

Задача. В ящику знаходяться яблука першого, другого та третього сортів. Першого сорту 40%, другого – 35%, третього – 25%. Навмання дістають із ящика одне яблуко. Знайти ймовірність того, що це яблуко буде або першого, або другого сорту.

Введемо події:

A – полягає в тому, що взяте навмання яблуко буде першого сорту;

B – полягає в тому, що взяте навмання яблуко буде другого сорту;

C – подія полягає в тому, що взяте навмання яблуко буде або першого, або другого сорту.

Означення. Сумою двох несумісних подій називається подія, яка полягає в тому, що відбудеться будь-яка з них.

$C = A + B$.

$\text{P}(C) = \text{P}(A + B) = \text{P}(A) + \text{P}(B) = 0{,}4 + 0{,}35 = 0{,}75$.

Теорема. Ймовірність суми певного числа несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Висновки:

1. Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

2. Якщо A та $\overline{A}$ – протилежні події, то має місце рівність

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Теорема множення ймовірностей подій

Означення 1. Події *A* та *B* називаються незалежними, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від того, відбудеться чи ні друга подія. В противному випадку події називаються залежними.

Означення 2. Події *A*, *B*, *C*, ... , *M* називаються незалежними у сукупності, якщо будь-яка з них і будь-яка комбінація решти подій (яка містить всю решту або декілька з них) являються незалежними.

Означення 3. Ймовірність події *B*, яка знайдена в припущенні, що подія *A* відбулася, називається умовною ймовірністю події *B*. Вона позначається так: $P_A(B)$.

Приклад. В ящику 10 куль: 7 білих і 3 чорних. Подія *A* полягає в тому, що перша, взята навмання куля – біла; подія *B* полягає в тому, що друга куля, взята навмання, являється білою.

Розглянемо схему без повернення кулі. Тоді

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P_A(B) = \frac{6}{9}.$$

При схемі з поверненням кулі

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P(B) = \frac{7}{10}$$

– це безумовна ймовірність.

Означення 4. Добутком подій *A*, *B*, *C*, ..., *M* називають подію, яка полягає в сумісній появі всіх цих подій.

Теорема. Ймовірність сумісної появи певного числа залежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ визначається за формулою:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Ймовірність сумісної появи певного числа незалежних подій дорівнює

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Приклад. В ящику 30 пар взуття. Серед них 5 пар бракованих. Навмання дістають по одній парі три пари. Знайти ймовірність того, що і перша, і друга, і третя пари виявляться бракованими.

Позначимо через A_i – подію, яка полягає в тому, що *i*-та пара взуття бракована, *i*=1,2,3.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$$

Події A_i, i=1,2,3 – залежні. Ймовірності складають:

$$P(A_1) = \frac{5}{30},\ P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{29},\ P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{3}{28}.$$

Тоді $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} \cdot \frac{3}{28} = \frac{2}{203}$.

Ймовірність суми сумісних подій

Означення. Сумою сумісних подій називається подія, яке полягає в тому, що відбудеться, принаймні, одна з цих подій.

Теорема. Ймовірність суми двох сумісних подій визначається за формулою:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Приклад. Ймовірність влучення в ціль при першому пострілі 0,7; при другому – 0,8. Для знищення цілі досить одного влучення. Визначити ймовірність того, що ціль буде знищена, якщо зроблено два постріли.

A_i, i=1,2 – подія, яка полягає в тому, що в ціль влучено при i-му пострілі.

$$C = A_1 + A_2,\ P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2),$$

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Ймовірність суми *n* сумісних подій

$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ або ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з цих подій, визначається за формулою:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \overline{A_n}).$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ сумісні, але незалежні, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}).$$

Припустимо, що проводиться n незалежних випробувань. Ймовірність того, що подія A відбудеться в будь-якому з них, дорівнює $P(A) = p$. Тоді ймовірність того, що подія A відбудеться принаймні один раз в n незалежних випробуваннях, складає

$$P(C) = 1 - (1-p)^n$$

або

$$P(C) = 1 - q^n, \text{ де } q=1-p.$$

<u>Приклад</u>. Ймовірність затримки водія в нетверезому стані на будь-якому з пунктів ДАІ складає p=0,5. Знайти ймовірність того, що водія буде затримано, якщо на маршруті 6 пунктів ДАІ.

$$P(C) = 1 - q^6 = 1 - (1-p)^6 = 1 - (1-0{,}5)^6 = 1 - (0{,}5)^6 \approx 1 - 0{,}016 = 0{,}984.$$

ЛЕКЦІЯ № 8. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

План

1. Формула повної ймовірності.
2. Формула Бейєса.
3. Повторення незалежних випробувань. Формула Бернуллі.
4. Випадкові величини (ВВ). Дискретні та неперервні.
5. Закони розподілу випадкових величин: ряд розподілу, функція розподілу.
6. Ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $[\alpha, \beta]$.

Формула повної ймовірності

Розглянемо задачу.

Задача. В збиральний цех поступають деталі однакові з трьох верстатів. З першого – 40% загальної кількості, з другого – 35%, з третього – 25%. Ймовірність браку складає: 0,05 для першого верстату, 0,1 – для другого, 0,04 – для третього Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь в збиральному цеху буде бракованою.

Позначимо через A подію, ймовірність якої знаходиться. Тоді $A = A_1 + A_2 + A_3$, де A_i – подія, яка полягає в тому, що деталь виготовлена на i-му верстаті і є бракованою. Введемо гіпотези (несумісні події, які складають повну групу подій):

$H_i, i = 1,2,3$ – взята навмання деталь, виготовлена на i-му верстаті.

Тоді $A_i = H_i A, i = 1,2,3.$

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$
$$= P(H_1 A) + P(H_2 A) + P(H_3 A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) +$$
$$+ P(H_3)P_{H_3}(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}04 = 0{,}65.$$

Теорема. Якщо подія A може відбутися лише при одній з несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу подій, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей гіпотез на ймовірності події при відповідних гіпотезах

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

Формула Бейєса

Позначимо: H_i – гіпотези, A – подія, яка відбувається при одній з гіпотез. Тоді

$$P(H_i A) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = P(A) \cdot P_A(H_i),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Звідси маємо:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}.$$

Це формула Бейєса. За її допомогою можна переоцінити ймовірність гіпотези після того, як подія A відбулася.

Приклад. У магазин надходять електричні лампи з трьох заводів, відповідно 30%, 50%, 20% загальної кількості. Ймовірність браку складає відповідно 0,1; 0,04; 0,05 для різних заводів.

Лампочка, взята в магазині навмання, виявилася бракованою. Чому дорівнює ймовірність того, що лампочка виготовлена на другому заводі?

Нехай A – поява бракованої лампочки, H_i – лампочка надійшла з i-го заводу, $i = 1,2,3$. Тоді

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,04}{0,3 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,05} = \frac{0,02}{0,06} = \frac{1}{3}.$$

Повторення незалежних випробувань. Формула Бернуллі

Розглянемо задачу.

Задача. В ящику 10 куль, серед них 7 білих, 3 чорних. Розглянемо схему з поверненням, тобто кулю, взяту навмання, роздивляються і повертають в ящик. Необхідно знайти ймовірність того, що в результаті 5 спроб куля білого кольору буде взята 3 рази.

Позначимо: A – подія, яка полягає в тому, що в результаті одного випробування взята біла куля; B – подія, ймовірність якої треба знайти.

$$B_1 = A \cdot A \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A},\ B_1 = A \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A,\ \ldots$$

$$B = \sum_i B_i,$$

$$P(B_i) = P^3(A) \cdot P^2(\overline{A}) = p^3 q^2,\ \text{де}\ q = 1 - p,\ p = P(A).$$

Всього подій B_i буде C_5^3. Тоді шукана ймовірність складає

$$P(B) = C_5^3 p^3 q^2.$$

Теорема Бернуллі. Нехай p – ймовірність деякої події в одному випробуванні. Тоді ймовірність того, що подія, що розглядається, відбудеться m разів у n незалежних випробуваннях, складає

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ де } q = 1 - p.$$

З використанням цієї формули можна розглядати задачі 4-х типів:

1. Знаходити ймовірність того, що подія відбудеться m разів у n незалежних випробуваннях.
2. Знаходити ймовірність того, що розглянута подія відбудеться не більше m_1 разів у n незалежних випробуваннях.

$$P_n(m \le m_1) = P_{0,n} + P_{1,n} + \ldots + P_{m_1,n}.$$

3. Знаходити ймовірність того, що подія відбудеться не менше, ніж m_2 разів в n незалежних випробуваннях.

$$P_n(m \ge m_2) = P_{m_2,n} + P_{m_2+1,n} + \ldots + P_{n,n}.$$

4. Знаходити ймовірність того, що розглянута подія відбудеться не менше, ніж m_1 разів, але не більше, ніж m_2 разів у n незалежних випробуваннях.

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_{m_1,n} + P_{m_1+1,n} + \ldots + P_{m_2,n}$$

Приклад. Ймовірність народження хлопчика – 0,51. Знайти ймовірність того, що з п’яти народжених буде не менше трьох хлопчиків.

$$P_5(m \ge 3) = P_{3,5} + P_{4,5} + .P_{5,5} =$$
$$= C_5^3 (0{,}51)^3 (0{,}49)^2 + C_5^4 (0{,}51)^4 0{,}49 + C_5^5 (0{,}51)^5.$$

Випадкові величини

Означення. Змінна величина, яка приймає різні значення випадково, називається випадковою величиною.

Приклад. Кількість студентів, які запізняться на наступну лекцію; кількість зіпсованих касових апаратів; тривалість життя людини; інтервал часу між двома суднами, які прибувають у порт тощо.

Випадкові величини (ВВ) бувають дискретні та неперервні. Якщо всі значення, які приймають ВВ, можна перерахувати, то величина називається дискретною.

Закон розподілу випадкових величин

Означення. Законом розподілу ВВ називається залежність між значеннями, які приймає ВВ X та їх ймовірностями.

Одним із законів розподілу є ряд розподілу. Це таблиця, в якій задані значення дискретної ВВ (в першому рядку) та їх ймовірності (в другому рядку).

Приклад.

x_i	2	5	7	8
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Графічно ряд розподілу зображають многокутником розподілу (рис. 1)

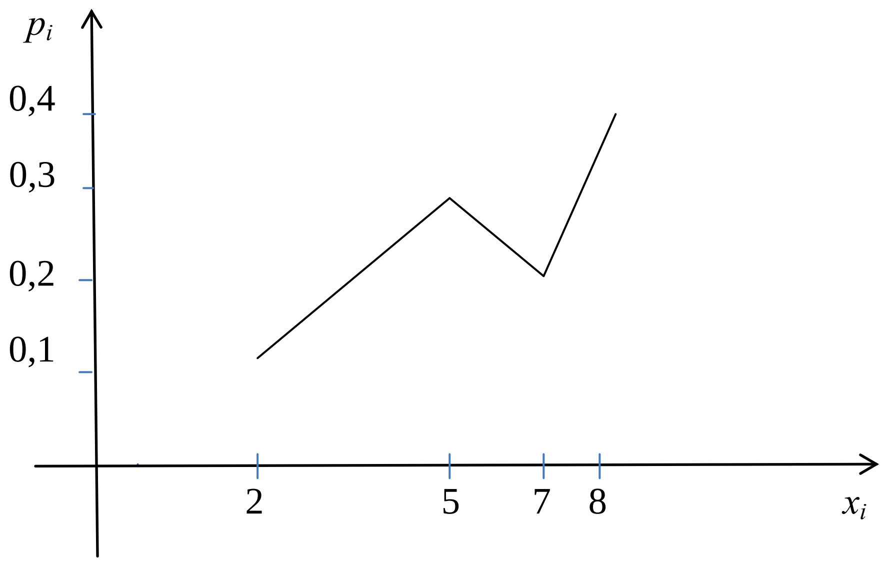

Рис. 1

Означення. Функцією розподілу ВВ X називається функція $F(x)$, яка виражає для кожного конкретного значення x ймовірність того, що X приймає будь-яке значення менш, ніж x.

$$F(x) = P(X < x).$$

Приклад. Записати функцію розподілу для ВВ X, заданої рядом розподілу в попередньому прикладі

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 2, \\ 0{,}1 \quad при \quad 2 < x \le 5, \\ 0{,}4 \quad при \quad 5 < x \le 7, \\ 0{,}6 \quad при \quad 7 < x \le 8, \\ 1 \quad при \quad x > 8. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 2.

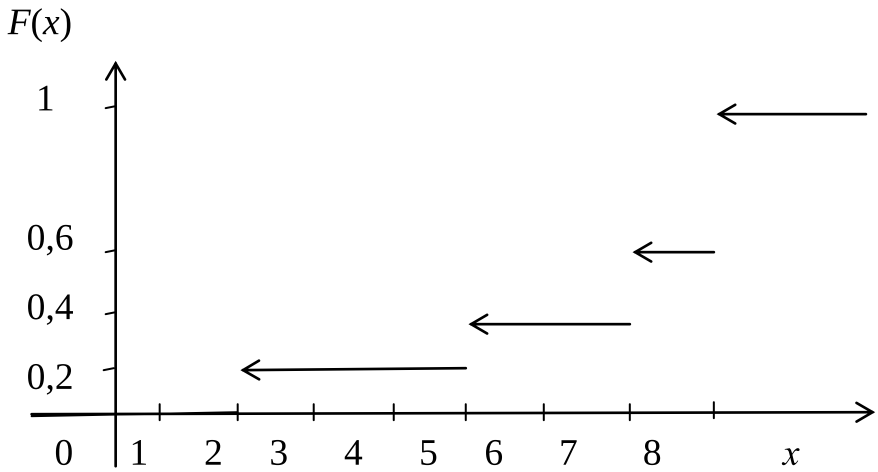

Рис. 2

Властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$, $\qquad F(-\infty)=0$, $\qquad F(+\infty)=1$.
2. $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$, тобто $F(x)$ – неспадна.
3. Ймовірність того, що ВВ X приймає значення на інтервалі $[\alpha,\beta)$ дорівнює

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Зауваження. Якщо ВВ неперервна, то $P(X=\alpha)=0$. Тоді

$$P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X < \beta).$$

Отже, для неперервних ВВ останню властивість можна переписати і так:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

ЛЕКЦІЯ № 9. ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

План

1. Щільність розподілу ймовірностей ВВ. Властивості.
2. Характеристики ВВ. Математичне сподівання ВВ. Властивості.
3. Дисперсія ВВ. Властивості. Середнє квадратичне відхилення.
4. Нормальний закон розподілу ВВ
5. Показниковий закон розподілу ВВ.
6. Закони розподілу дискретних ВВ: а) біноміальний; б) закон Пуассона. Характеристики ВВ, які мають ці закони розподілу.

<u>**Щільність розподілу ймовірностей**</u>

Нехай $F(x)$ – неперервна. Розглянемо $F(x) = P(X < x)$,

$$F(x + \Delta x) = P(X < x + \Delta x),$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P(x \le X < x + \Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

<u>Означення</u>. Похідна від функції розподілу називається щільністю розподілу ймовірностей і позначається

$$F'(x) = f(x).$$

Ймовірність того, що ВВ *X* приймає значення на інтервалі дорівнює

$$P(x \le X < x + \Delta x) = f(x)\Delta x.$$

Тоді ймовірність того, що ВВ X приймає значення на інтервалі $[\alpha, \beta]$ дорівнює

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Якщо задана $f(x)$, то $F(x)$ дорівнює

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Очевидні властивості щільності розподілу ймовірностей:

1. $f(x)\ge 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < +\infty)=1.$

Розглянемо випадок рівномірної щільності $f(x)=const$ на інтервалі $[\alpha,\beta]$.

Тоді

$$\int_{\alpha}^{\beta} Cdx=1, \qquad C(\beta-\alpha)=1, \qquad C=\frac{1}{\beta-\alpha},$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, x\in[\alpha,\beta],\\ 0, x\notin[\alpha,\beta].\end{cases}$$

<u>Приклад</u>. Випадкова величина X має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, |x|\ge \dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

а) знайти ймовірність того, що ВВ приймає значення на інтервалі $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

$$P(0\le X\le \frac{\pi}{3})=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\cos x dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4};$$

б) знайти функцію розподілу заданої ВВ:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

При $-\infty\le x\le -\dfrac{\pi}{2}$ $f(x)=0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

При $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos x dx = \frac{1}{2}\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2}\left[\sin x - \sin(-\frac{\pi}{2})\right] = \frac{1}{2}(\sin x + 1).$$

При $x > \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dx = 0 + \frac{1}{2}\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = 1.$$

Таким чином:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) \quad при \quad -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1 \quad при \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Числові характеристики випадкових величин

Головними числовими характеристиками ВВ являються: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення тощо.

Математичне сподівання

Означення. Математичним сподіванням ВВ *X* називається середнє очікуване значення ВВ. Математичне сподівання визначається за такими формулами:

– для дискретних ВВ

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,,$$

– для неперервних ВВ:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\,,$$

де x_i, p_i – різні значення і їх ймовірності для дискретних ВВ, i=1,2,…,n,

$f(x)$ – щільність розподілу ймовірностей неперервної ВВ.

Приклад. Дискретна ВВ задана таким рядом розподілу

x_i	2	3	4	5
p_i	0,2	0,6	0,1	0,1

Знайти її математичне сподівання

$$M(X)=2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}6+4\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}1=3{,}1.$$

Приклад. Знайти математичне сподівання ВВ, заданої такою щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\\ 0 \ \ при \ \ |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\frac{1}{2}\cos x dx=\begin{bmatrix} u=\frac{x}{2}, & du=\frac{dx}{2}\\ dv=\cos x dx, & v=\sin x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{x}{2}\sin x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\cdot 1-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-1)\right]-\frac{1}{2}(-\cos x)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

Властивості математичного сподівання

1. $M(C) = C \cdot 1$.

Можна вважати, що константа являється ВВ, яка приймає лише одне значення з ймовірністю p=1.

2. $M(kX) = kM(X)$.

3. Математичне сподівання суми певного числа ВВ дорівнює сумі математичних сподівань цих ВВ.

$$M(X+Y+Z) = M(X) + M(Y) + M(Z).$$

4. Математичне сподівання добутку незалежних ВВ дорівнює добутку математичних сподівань цих ВВ.

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Означення. ВВ *X* та *У* називаються незалежними, якщо події, які полягають у тому, що $X = x_i$ і $Y = y_j$ являються незалежними.

5. $M(X+C) = M(X) + C$.

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Означення. Дисперсією ВВ *X* називається математичне сподівання квадрата відхилення ВВ від її математичного сподівання

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсія ВВ характеризує розсіювання значень ВВ відносно центра групування.

Дисперсія ВВ *X* визначається за формулами:

– для дискретних ВВ

$$D(X) = \sum_i (x_i - \overline{X})^2 p_i ,$$

де $\overline{X} = M(X)$;

– для неперервних ВВ:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^2 f(x) dx.$$

Приклади.

1. Обчислити дисперсію ВВ, задану рядом розподілу:

x_i	–3	–2	0	2	3
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

$M(X) = \overline{X} = (-3)\cdot 0{,}1 + (-2)\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}1 = 0$

$D(X) = (-3-0)^2 \cdot 0{,}1 + (-2-0)^2 \cdot 0{,}2 + (0-0)^2 \cdot 0{,}4 + (2-0)^2 \cdot 0{,}2 +$

$+ (3-0)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}9 = 3{,}4$

2. Обчислити дисперсію ВВ, яка характеризується рівномірною щільністю на інтервалі $[a,b]$. Щільність розподілу ймовірності цієї ВВ дорівнює $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, математичне сподівання

$$\overline{X} = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D(X) = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Властивості дисперсії:

1. $D(C) = (C - C)^2 \cdot 1 = 0.$
2. $D(kX) = k^2 D(X).$
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, якщо X, Y – незалежні ВВ.
4. $D(X) = M(X^2) - M^2(X).$
5. $D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$,
   де X, $У$ – незалежні ВВ.
6. $D(X + C) = D(X) + D(C) = D(X).$

Середнім квадратичним відхиленням називається величина $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

<u>Закони розподілу дискретних ВВ</u>

<u>Біноміальний закон</u>

Нехай p – ймовірність появи деякої події A в будь-яких з n незалежних випробувань. Тоді число появ події A в n випробуваннях є випадкова величина X, яка приймає цілі значення 0,1,2, ... ,n з ймовірностями

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де q=1–p, m =0,I,2,...,n.

ВВ X, що розглядається, має біноміальний закон розподілу з характеристиками

$$M(X) = np,\ D(X) = npq,\ \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

<u>Закон Пуассона</u>

Якщо ВВ X приймає тільки цілі значення m =0,1,2,...,n, і ймовірність її визначається за формулою

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

де λ – параметр, то кажуть, що ця ВВ характеризується пуассонівським законом розподілу ймовірностей.

Можна довести, що для ВВ, що розглядається, числові характеристики відповідно дорівнюють:

$$M(X) = \lambda,\ D(X) = \lambda.$$

<u>Приклад.</u> Середня кількість звертань до АТС 120/год. Знайти ймовірність того, що протягом хвилини буде 4 звернення (виклики).

$$\lambda = \overline{X} = \frac{120}{60} = 2 \text{ за хв.}$$

$$P(X=4)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}.$$

Середнім квадратичним відхиленням ВВ називається величина

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Величина $\sigma(X)$ має розмірність ВВ X.

Існує багато ВВ, для яких досить знати розглянуті числові характеристики, щоб розв'язувати задачі теорії ймовірностей.

Нормальний закон розподілу неперервних ВВ

Означення. Неперервна ВВ X має нормальний закон розподілу, якщо щільність розподілу ймовірностей дорівнює

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1)$$

де a,σ – параметри.

Функція (1) при різних значеннях параметрів a та σ зображені на рис. 1 та 2.

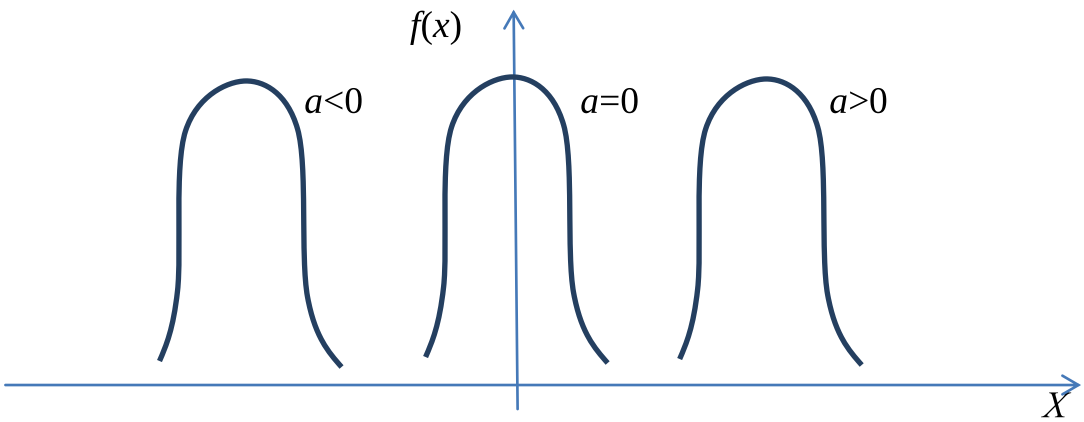

Рис. 1

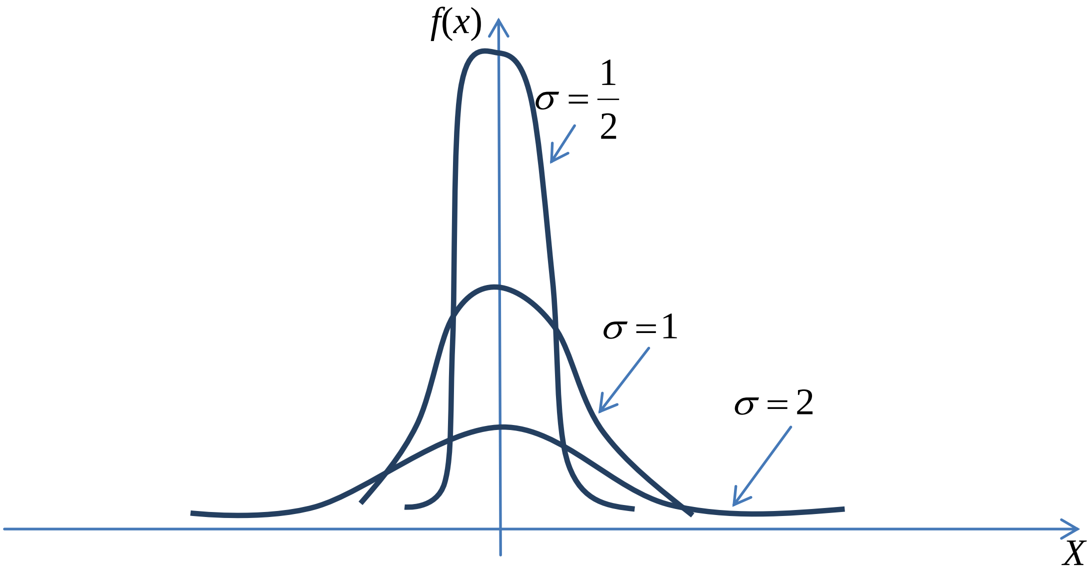

Рис. 2

Можна довести, що математичне сподівання та дисперсія ВВ, яка має нормальний закон розподілу, відповідно дорівнюють параметрам a та σ^2 цього закону. Тобто

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=a,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2.$$

Визначимо ймовірність того, що ВВ X, яка має нормальний закон розподілу, приймає значення на інтервалі $[x_1, x_2]$.

$$P(x_1\le X\le x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[\begin{matrix}\dfrac{x-a}{\sigma}=t, & t_1=\dfrac{x_1-a}{\sigma}\\ dt=\dfrac{dx}{\sigma}, & t_2=\dfrac{x_2-a}{\sigma}\end{matrix}\right]=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа, значення якої обчислюються за допомогою таблиці. Ця функція має вигляд, зображений на рис.3

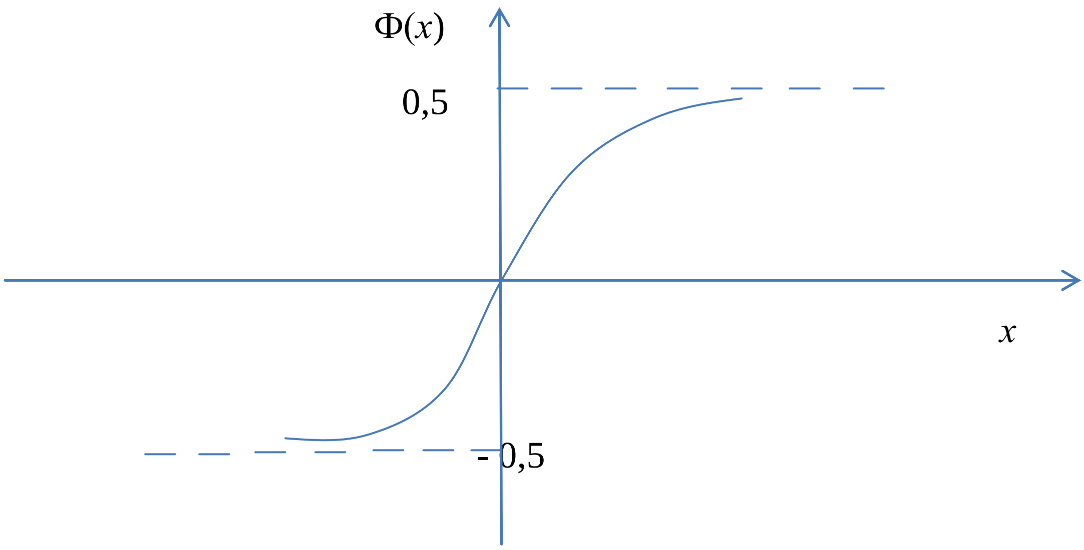

Рис. 3

Зауважимо, що Φ(*x*) – непарна функція, тобто Φ(–*x*)= –Φ(*x*). Розглянемо частинний випадок:

$$P([X-a]\le\varepsilon)=P(a-\varepsilon\le X\le a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Зокрема, при $\varepsilon=3\sigma$.

$$P([X-a]<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right).=0{,}9973.$$

Це, так зване, правило "трьох сигм": ймовірність того, що ВВ приймає значення, які відрізняються від її математичного сподівання по модулю менше, ніж на 3σ, дорівнює 0,9973.

<u>Приклад</u>. Маса виходу кулінарії (котлет) – випадкова величина, яка має нормальний закон розподілу з такими параметрами: *a*=1000 гр. (середня маса 10 котлет), $\sigma=50$гр. Знайти ймовірність того, що маса виходу наступної партії котлет буде в діапазоні від 900 до 1150 гр.

$$P(900 < X < 1150) = \left[\Phi\left(\frac{1150-1000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{900-1000}{50}\right) \right] =$$
$$= [\Phi(3) + \Phi(2)] = 0{,}499 + 0{,}477 = 0{,}976.$$

Показниковий закон розподілу неперервних ВВ

Означення. Неперервна ВВ має показниковий закон розподілу, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \mu \cdot e^{-\mu x},$$

де μ – параметр.

Можна довести, що для таких ВВ

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\mu}.$$

Приклад. Тривалість обслуговування в універсамі – ВВ, яка має показниковий закон розподілу.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крутовий Ж.А., Усіна Г.В. Вища математика. Тести: навчальний посібник, ч. I. – Харків, 2007. – 158 с.
2. Крутовий Ж.А., Усіна Г.В. Вища математика. Тести: навчальний посібник, ч. II. – Харків, 2009. – 164 с.
3. Софронова М.С., Жилюк Н.О. Методичні вказівки для організації самостійної роботи та підготовки до тестування з дисципліни «Вища математика. Модуль № 1» для студентів економічних спеціальностей прискореної форми навчання, ХДУХТ, 20011.
4. Софронова М.С., Жилюк Н.О. Методичні вказівки для організації самостійної роботи та підготовки до тестування з дисципліни «Вища математика. Модуль № 2» для студентів економічних спеціальностей прискореної форми навчання, ХДУХТ, 20011.
5. Вища математика: розв’язання задач та варіанти типових розрахунків: Навч. посібник./Гула В.Г., Корж О.П. Синєкоп М.С. та ін.; Харк. держ. універ. харчування та торгівлі. – Харків, 2007. – 302 с.
6. Вища математика: розв’язання типових задач: Навч. Посібник./ Синєкоп М.С., Жилюк Н.О., Янчев А.В.; Харк. держ. універ. харчування та торгівлі. – Харків, 2012. – 206 с.

7. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. Ч.1/ За ред. проф. Г.Л. Кулініча, – К.: Либідь, 2009.
8. Шипачев В.С. Курс высшей математики. Учебник для вузов. – М.: Оникс, 2009.
9. Рябушко А.П., Бархатов В.В. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [в 3-х ч.] – М.: Высш. шк., 2008.
10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. Высш. шк. 2008.
11. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман .— 11-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт, 2011 .— 405 с.
12. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учеб. пособие/ А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина и др. – М.:Выш. шк., 2005.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Стислий конспект лекцій

Частина 2

для студентів спеціальностей 6.051701, 6.05170108, 6.05170103, 6.05170104, 6.05170107, 6.05170112

Укладачі:

КРУТОВИЙ Жорж Андрійович
СОФРОНОВА Марина Сергіївна

Підп. до друку .2015 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Друк офсет.
Умов. друк. арк. . Тираж прим. Зам. № .

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 4417 від 10.10.2012 р.