УДК 519.6:55.516

Определение расчётного уровня максимального расхода дождевых паводков

В.Ю. Дубницкий[1], И.Г. Скорикова[1], И.А. Черепнев[2] , С.В. Нестеренко[3]

[1] *Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ «Университет банковского дела»,*
[2]*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко*
[3]*Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова (г. Харьков, Украина)*

Предложено использовать распределение Джонсона при определении расчётного уровня дождевых паводков. Для определения доверительных интервалов оценок параметров распределения Джонсона , получаемых методом максимального правдоподобия, предложена последовательность действий, состоящая из следующих этапов: составление системы уравнений метода максимума правдоподобия; выбор способа решения системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение начального приближения системы уравнений метода максимума правдоподобия; решение системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение элементов информационной матрицы; определение границ доверительных интервалов для полученных оценок параметров. Для решения систем уравнений метода максимума правдоподобия выбран метод Ньютона. Приведены выражения, необходимые для вычисления значений якобианов, входящих в процедуру решения полученной системы. Приведён способ получения информационной матрицы, необходимой для вычисления доверительных интервалов оценок параметров распределения Джонсона. Получены выражения, необходимые для вычисления значений гессианов, входящих в процедуру вычисления дисперсий полученных оценок параметров распределения Джонсона. Описана методика получения расчетных значений максимального уровня дождевых паводков.

Ключевые слова: *Дождевые паводки, распределение Джонсона, метод максимума правдоподобия, оценки параметров распределения Джонсона, доверительные интервалы оценок параметров распределения Джонсона, расчетный уровень дождевых паводков*

Постановка проблемы. На протяжении последних лет наблюдается устойчивый рост доли продукции агропромышленного комплекса (АПК) в общем экспорте Украины. Ранее Украина была известна прежде всего, как экспортер продукции горно-металлургического комплекса (ГМК: руда, черные металлы). На ГМК приходился каждый третий доллар валютной выручки, поступавший в Украину. Теперь же соотношение изменилось. Каждый третий доллар валютной выручки дает агропромышленный комплекс (АПК: сельское хозяйство и пищевая промышленность). На рис.1 представлены данные (в млрд долл. США) по соотношению экспорта продукции АПК и ГМК, за период с 2008 по 2015 гг. В первом полугодии 2017 г. доля аграрной продукции в украинском экспорте составила уже 43 % [1, 2].

Традиционно большинство украинской агропродукции – товары растениеводства. На рис. 2 показано соотношение валовой продукции растениеводства и животноводства [3].

Данное соотношение объясняется в частности структурой земельного фонда Украины. По данным работы [4] на начало 2013 года: «Земельний фонд України становить 5,7 % території Європи. При цьому на загальноєвропейському фоні його вирізняє висока питома вага сільськогосподарських угідь, особливо ріллі, що пов’язано з високою природною якістю українських земель, великою питомою вагою в їхньому складі чорноземів. Так, за даними Державного агентства земельних ресурсів України, на початок 2013 р. сільськогосподарські угіддя України становили 18,9 % загальноєвропейських, а рілля, відповідно, – 26,9 %. Відносно території нашої країни сільськогосподарські угіддя займають 41,84 млн га, або 69,3 % території, зокрема 33,19 млн га ріллі (55 %), 7,03 млн га природних кормових угідь сіножатей і пасовищ (12,6 %). Незважаючи на такі показники, доводиться констатувати, що ефективність використання земельного фонду України значно нижча, ніж у середньому в Європі, і структура земельного фонду потребує її оптимізації». Уникальность украинского чернозема можно проилюстрировать и тем, что в период немецко-фашистской оккупации его вывозили железнодорожными эшелонами в третий рейх [5].

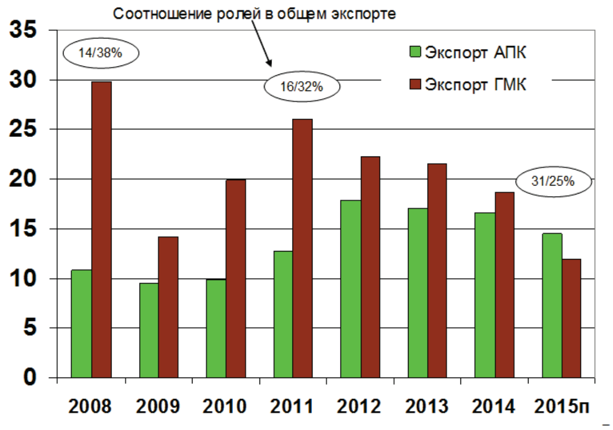

Рис. 1. Экспорт продукции АПК и ГМК, млрд долл. США, по данным работы [1]

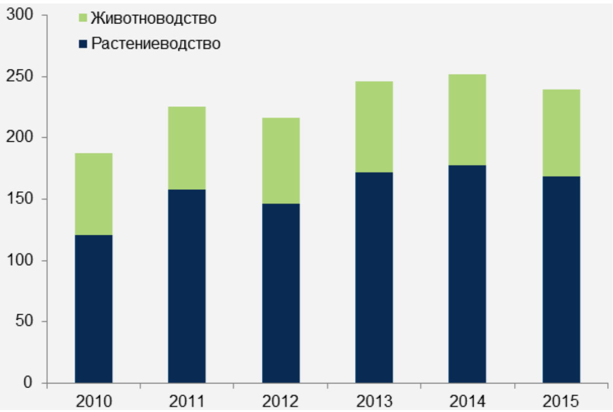

Рис. 2. Соотношение валовой продукции расениеводства и животноводства в млрд. гривен, по данным работы [3]

Подобная структура земельного фонда Украины с одной стороны позволяет обеспечить эффективное развитие аграрного сектора экономики, но с другой – очень уязвимы к воздействию поражающих факторов чрезвычайных ситуаций (ЧС) различного характера. В работе [6] отмечено следующее: «З урахуванням сильної залежності сільського господарства України від природно-кліматичних умов, стану навколишнього середовища, а також його детермінованості соціально-економічними чинниками, екобезпека даної галузі стає визначальною проблемою розвитку суспільства, що робить актуальними дослідження сільського господарства з позицій екобезпеки, виявлення основних джерел небезпеки, рівня загроз та розробку способів їх запобігання чи усунення».

Среди ЧС природного характера в мире в целом, и на территории Украины в частности, с точки зрения повторяемости, площади распространения и среднегодовым материальным ущербом первое место занимают наводнения. Кроме того, в последние десятилетия, их число неуклонно возрастает. Например, в 2010 г. От наводнений пострадало 178 миллионов человек, а ущерб превысил 40 млрд. долларов. На рис. 3 приведены общемировые данные по засухам, наводнениям и бурям за период с 1980 по 2010 гг. [7].

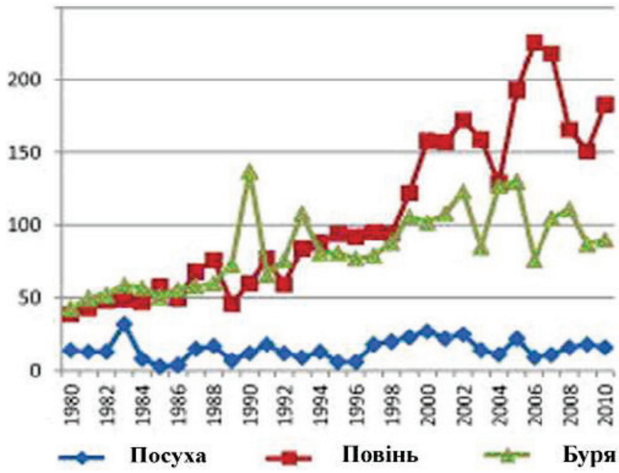

Рис. 3. Общемировые данные по засухам, наводнениям и бурям за период с 1980 по 2010 гг., по данным работы [7]

Что касается Украины, то негативные последствия наводнений ощущаются на территории около 165 тыс. кв. км и затрагивает примерно 30% населения. По данным, приведенным в работе [8]: «Найбільшої шкоди зазнають райони Карпат. На 70 % гірських водозборів у Закарпатській, Івано-Франківській, Львівській, Чернівецькій областях розвиваються селеві явища. За останні 15 років значні паводки були у 1995, 1997, 1998, 2001, 2008 рр. та паводок 2010 року. Отже, кожен третій рік характеризується високим підняттям рівнів води у меживий період». Наиболее катастрофические последствия наводнений на территории Украины были в Закарпатской области. В ноябре 1998 года было подтоплено более 120 населенных пунктов, погибло 17 человек, а общий ущерб составил 800 миллионов гривен. Через 10 лет в западных регионах Украины во время наводнения погибло уже 34 человека. Убытки нанесенные наводнениями оцениваются в 6,5 млрд гривен [9]. Избежать человеческих жертв и снизить экономический ущерб от наводнений можно при прогнозировании этих ЧС и проектировании гидротехничнических защитных сооружений, обеспечивающих защиту при их возникновении.

Анализ результатов последних исследований и публикаций. Нормативные требования к защитным гидротехническим сооружениям изложены в документе [10]. В этом и других аналогичных документах, например, в работе [11] принято, что расчет максимальных значений уровня паводков выполнен в предположении, что величины дождевых стоков распределены по закону Крицкого – Менкеля. Свойства этого распределения и правила его применения в гидрологических расчётах подробно рассмотрены в работах [12, 13]. Распределение Крицкого – Менкеля, по своей сути, видоизменённое трёхпараметрическое гамма – распределение. В работе [14] отмечено, что более удобным является семейство распределений, позже получившее название по имени одного из авторов этой работы – распределения Джонсона. В работе [15] описано применение одного из распределений этого семейства для аппроксимации ряда максимальных расходов дождевых паводков. В частности, для этого использовано распределение вида (1):

$$f(x)=\frac{b-a}{\lambda\sqrt{2\pi}\cdot(x-a)(x-b)}\times \times\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}\left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)-\mu\right]^2\right\}; \quad (1)$$

при условии, что $a<x<b$. Распределение вида (1), в отличие от распределения Крицкого – Менкеля, четырёхпараметрическое. В него входят параметры цензурирования a и b, параметр масштаба λ и параметр положения μ. В указанной работе [15] описан приближенный метод определения этих параметров, отсутствует способ определения их доверительных интервалов. Это обстоятельство существенно снижает точность получаемых оценок, понижает достоверность выводов о значении расчётного уровня максимального расхода дождевых паводков и может привести к большим финансовым потерям вследствие затопления земельных участков. Получить доверительные интервалы этого и других распределений можно используя метод максимума правдоподобия, теоретические основы которого изложены в работах [16, 17].

Цель работы. Разработка рекомендаций по определению параметров распределения Джонсона методом максимального правдоподобия и расчёту с заданной обеспеченностью максимального расхода дождевых паводков.

Изложение основного материала. Последовательность этапов решения поставленной задачи в соответствии с работой [16] принята следующей:

– составление системы уравнений метода максимума правдоподобия;

– решение системы уравнений метода максимума правдоподобия;

– определение доверительных интервалов для полученных оценок параметров распределения Джонсона;

– расчёт с заданной обеспеченностью максимального расхода дождевых паводков.

Составление системы уравнений метода максимума правдоподобия. Для плотности распределения вида (1) функция правдоподобия примет вид:

$$L=\frac{(b-a)^n}{\lambda^n(2\pi)^{n/2}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)(b-x_i)}\times \times\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)-\mu\right]^2\right\} \quad (2)$$

Логарифм функции правдоподобия L примет вид:

$$\Lambda=\ln L=n\ln(b-a)- -\left[n\ln\lambda+\frac{n}{2}\ln 2\pi+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-a)(b-x_i)\right]- -\frac{1}{2\lambda^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)-\mu\right]^2. \quad (3)$$

Система уравнений метода максимума правдоподобия примет вид:

$$U=\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda^3}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)^2- -2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)-n\lambda^2+\mu^2\right]=0; \quad (4)$$

$$V=\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}=\frac{1}{\lambda^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)-\mu\right]=0; \quad (5)$$

$$W=\frac{\partial\Lambda}{\partial a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)-\mu}{\lambda^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)}+ +\frac{(a-b)\sum_{i=1}^{n}x_i-ab+b^2-n}{(b-a)}=0; \quad (6)$$

$$Z=\frac{\partial\Lambda}{\partial b}=\Pi+\Phi=0\ . \quad (7)$$

В условии (7) принято, что:

$$\Pi = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right)}{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}(b - x_i)} + \frac{\mu}{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - b)}. \qquad (8)$$

Решение системы уравнений метода максимума правдоподобия. Для решения системы уравнений (4) - (7) выбран метод Ньютона, реализованный в виде, изложенном в работе [18]. Подобный выбор обусловлен тем, что для его реализации метода Ньютона необходимо вычисление якобиана, а для определения доверительных интервалов вычисление гессиана. Для решения системы уравнений (4) - (7) вычислительный процесс примет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ a \\ b \end{pmatrix}^{(p+1)} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ a \\ b \end{pmatrix}^{(p)} - \\ -\left[J\left(\lambda^{(p)}, \mu^{(p)}, a^{(p)}, b^{(p)}\right)\right]^{-1} \times . \qquad (9) \\ \times \begin{pmatrix} U(\lambda^p, \mu^p, a^{(p)}, b^{(p)}) \\ W(\lambda^p, \mu^p, a^{(p)}, b^{(p)}) \\ W(\lambda^p, \mu^p, a^{(p)}, b^{(p)}) \\ Z(\lambda^p, \mu^p, a^{(p)}, b^{(p)}) \end{pmatrix}$$

Якобиан рассматриваемой системы функций примет вид:

$$J(\lambda^{(p)}, \mu^{(p)}, a^{(p)}, b^{(p)}) = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \lambda} & \frac{\partial U}{\partial \mu} & \frac{\partial U}{\partial a} & \frac{\partial U}{\partial b} \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} & \frac{\partial V}{\partial \mu} & \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial b} \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda} & \frac{\partial W}{\partial \mu} & \frac{\partial W}{\partial a} & \frac{\partial W}{\partial b} \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \mu} & \frac{\partial Z}{\partial a} & \frac{\partial Z}{\partial b} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Верхний индекс в условии (10) обозначает номер соответствующей итерации. Выражения для частных производных, входящих в якобиан (10) приведены ниже. Для функции $U(\lambda, \mu, a, b)$:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^4}\left[n\lambda^2 - 3\mu^2 + \right. \\ \left. + 6\mu \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right) - 3\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right)^2\right]; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} = \frac{1}{\lambda^3}\left[2\mu - 2\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right)\right]; \qquad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{2}{\lambda^3 \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = \left[\lambda^3 \sum_{i=1}^{n}(x_i - b)\right]^{-1} \times \\ \times \left[2\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right) - \mu\right)\right]; \qquad (14)$$

Для функции $V(\lambda, \mu, a, b)$:

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^4}\left[n\lambda^2 - 3\mu^2 + 6\mu \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right) - \right. \\ \left. -3\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right)^2\right]; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{2\left[\mu - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right)\right]}{\lambda^3}; \qquad (16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right)}{\lambda^3 \sum_{i=1}^{n}(a - x_i)} + \frac{2\mu}{\lambda^3 \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}; \qquad (17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{2\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right) - \mu\right]}{\lambda^3 \sum_{i=1}^{n}(x_i - b)}. \qquad (18)$$

Для функции $W(\lambda, \mu, a, b)$:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right)}{\lambda^3 \sum_{i=1}^{n}(a - x_i)} + \frac{2\mu}{\lambda^3 \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}; \qquad (19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \left[\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}(a - x_i)\right]^{-1}; \qquad (20)$$

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{A - B}{\lambda^2 (a - b)^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}. \qquad (21)$$

В условии (21) принято, что:

$$A = (a - b)^2 \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right) - n\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2an\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad (22)$$

$$B = a^2\left(n\lambda^2 + \mu + 1\right) - 2ab(\mu + 1)^2 + b^2(\mu + 1). \qquad (23)$$

Величина:

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 1 + \frac{n}{(a - b)^2} + \\ + \frac{(a - b)^2}{\lambda^2 (a - b)^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)(x_i - b)}. \qquad (24)$$

Для функции $Z(\lambda, \mu, a, b)$:

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda}=\frac{2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)-\mu\right)}{\lambda^3\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-b\right)}; \quad (25)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu}=\left[\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-b\right)\right]^{-1}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a}=1+\frac{n}{\left(a-b\right)^2}+\frac{\left(a-b\right)^2}{\lambda^2\left(a-b\right)^2}; \quad (27)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a}=1+\frac{n}{\left(a-b\right)^2}+\frac{\left(a-b\right)^2}{\lambda^2\left(a-b\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)\left(x_i-b\right)}; \quad (28)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b}=-\frac{C+D}{\lambda^2\left(a-b\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-b\right)^2}. \quad (29)$$

В условии (29) принято, что:

$$C=\left(a-b\right)^2\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)+ \\ +n\lambda^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2bn\lambda^2\sum_{i=1}^{n}x_i; \quad (30)$$

$$D=a^2\left(1-\mu\right)+2ab\left(\mu-1\right)+ \\ +b^2\left(n\lambda^2-\mu+1\right). \quad (31)$$

Для полноценного решения поставленной задачи обоснование выбора величин $\lambda^{(0)}$, $\mu^{(0)}$, $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ должно стать темой самостоятельного исследования. В рамках данной работы, при решении численного примера, эти величины принимали равными значениям, приведенным в работе [15].

Определение доверительных интервалов для полученных оценок параметров распределения Джонсона. Теоретические основы решения задачи определения доверительных интервалов оценок параметров распределений, полученных методом максимума правдоподобия, изложены в работе [16]. Примеры решения этой задачи для основных типов распределений рассмотрены в работе [17]. Поэтому ход дальнейшего решения задачи будет таким, каким он изложен в работе [17] с учетом рассматриваемого в данном сообщении распределения. Нижняя и верхняя граница полученных оценок параметров, определённые с доверительной вероятностью *α* можно определить, используя условие:

$$\begin{aligned} \lambda-t_\alpha\sqrt{\sigma^2(\lambda)} &\le \lambda \le \lambda+t_\alpha\sqrt{\sigma^2(\lambda)}; \\ \mu-t_\alpha\sqrt{\sigma^2(\mu)} &\le \mu \le \mu+t_\alpha\sqrt{\sigma^2(\mu)}; \\ a-t_\alpha\sqrt{\sigma^2(a)} &\le a \le a+t_\alpha\sqrt{\sigma^2(a)}; \\ b-t_\alpha\sqrt{\sigma^2(b)} &\le b \le b+t_\alpha\sqrt{\sigma^2(b)}. \end{aligned} \quad (32)$$

В этом условии принято, что $\lambda=\hat{\lambda}$, $\mu=\hat{\mu}$, $a=\hat{a}$, $b=\hat{b}$, при том, что $(\hat{\lambda},\hat{\mu},\hat{a},\hat{b})$ и есть оценки, полученные по методу максимума правдоподобия, в результате решения системы уравнений (4) - (7), t_α – квантиль двусторонней доверительной вероятности уровня α, $\sigma^2(\alpha)$, $\sigma^2(b)$, $\sigma^2(g)$ – дисперсии соответствующих оценок. Эти дисперсии получают, используя выражение:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(\lambda) & \mathrm{cov}(\lambda,\mu) & \mathrm{cov}(\lambda,a) & \mathrm{cov}(\lambda,b) \\ \mathrm{cov}(\lambda,\mu) & \sigma^2(\mu) & \mathrm{cov}(\mu,a) & \mathrm{cov}(a,b) \\ \mathrm{cov}(\lambda,a) & \mathrm{cov}(\mu,a) & \sigma^2(a) & \mathrm{cov}(a,b) \\ \mathrm{cov}(\lambda,b) & \mathrm{cov}(\mu,b) & \mathrm{cov}(a,b) & \sigma^2(b) \end{pmatrix}=\left(-H\right)^{-1}. \quad (33)$$

В условии (33) также принято, что значение гессиана H вычислено при условии, что $\lambda=\hat{\lambda}$, $\mu=\hat{\mu}$, $a=\hat{a}$, $b=\hat{b}$. Гессиан H для функции Λ примет вид:

$$H=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial\mu} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial a} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial b} \\ \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial\mu} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\mu\partial a} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\mu\partial b} \\ \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial a} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\mu\partial a} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial a\partial b} \\ \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial b} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\mu\partial b} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial b^2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Элементы этого гессиана заданы условиями (33) и (34).

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^4}\left[\frac{n}{2}+6\mu\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)- \right. \\ \left. -3\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)^2-3\mu^2\right]; \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial\mu}=\frac{2}{\lambda^3}\left[\mu-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)\right]; \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial a}=\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)}{\lambda^3\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a-x_i\right)}+\frac{2\mu}{\lambda^3\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)}; \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial b}=\frac{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i-a}{b-x_i}\right)-\mu\right]}{\lambda^3\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-b\right)}; \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\mu^2}=-\frac{1}{\mu^2}; \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\mu\partial a}=\left[\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\left(a-x_i\right)\right]^{-1}; \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \mu \partial b} = \left[\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - b) \right]^{-1}; \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 a^2} = \frac{E - T}{\lambda^2 (a-b)^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)} . \quad (42)$$

В условии (43) принято, что

$$E = (a-b)^2 \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right) - n\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2an\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i ; \quad (43)$$

$$T = a^2 (n\lambda^2 + \mu + 1) + 2ab\ (\mu + 1) - b^2 (\mu + 1). \quad (44)$$

Далее получим, что:

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial a \partial b} = 1 + \frac{n}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{\lambda^2 (a-b)^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)(x_i - b)}; \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial b^2} = -\frac{H - N}{(a-b)^2 \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - b)^2} . \quad (47)$$

В условии (47) принято, что:

$$H = (a-b)^2 \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i - a}{b - x_i}\right) + n\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2bn\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i ; \quad (48)$$

$$N = a^2 (1 - \mu) + 2ab(\mu - 1) + b^2 (n\lambda^2 - \mu + 1). \quad (49)$$

Расчёт с заданной обеспеченностью максимального расхода дождевых паводков. В общем случае методика расчёта с заданной обеспеченностью максимального расхода дождевых паводков, в случае справедливости гипотезы о том, что их распределение может быть описано распределением Джонсона, изложена в работе [15]. Исходными данными в этом случае будут величины $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b})$. В рассмотренном далее примере среднеквадратические отклонения оценок параметров, определённые по условию (32), следующие: $\sigma_\lambda = 0,12$; $\sigma_\mu = 0,29$; $\sigma_a = 1,26$; $\sigma_b = 150,1$. Следует отметить, что в работе использовали оценки, показанные в табл. 2, то есть без учета ширины доверительного интервала. Это вызвано тем, что решение поставленной задачи с учётом величин доверительных интервалов оценок параметров распределений можно считать совершенно самостоятельной задачей, подходы к решению которой описаны в работе [20].

Непосредственно расчёт выполняют в такой последовательности. В начале расчёта выбирают уровень обеспеченности α с учётом ответственности лица, принимающего решение (ЛПР) за принятое решение. Эта процедура подробно описана в работе [19]. После этого вычисляют величину:

$$\rho_\alpha = \hat{\lambda} t_\alpha + \hat{\mu} . \quad (50)$$

Искомое значение максимального расхода дождевых паводков x_α определяют по условию:

$$x_\alpha = \frac{\hat{b} \exp(\rho_\alpha) + \hat{a}}{\exp(\rho_\alpha) + 1} . \quad (51)$$

Рассмотрим особенности применения описанной методики, используя пример, приведенный в работе [15]. Исходные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1. Максимальные расходы воды (м^3/с)

№	Рас-ход	№	Рас-ход	№	Рас-ход	№	Рас-ход
1	71,4	9	121,0	17	84,5	25	130,0
2	22,1	10	25,0	18	37,5	26	22,0
3	32,7	11	31,4	19	24,0	27	54,0
4	145,0	12	17,3	20	22,1	28	100,0
5	46,0	13	54,8	21	130,0	29	78,1
6	29,9	14	29,9	22	21,3	30	39,2
7	28,4	15	104,0	23	58,2	31	66,0
8	73,8	16	27,5	24	58,7	32	84,4

Результаты определения параметров распределения Джонсона для данных, приведенных в табл. 1 даны в табл. 2.

Таблица 2. Оценки параметров распределения Джонсона

Численные значения полученных оценок	Параметры распределения Джонсона			
	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
Приближенным методом	0,95	–2,54	11,0	490,0
Методом ММП	0,93	–2,67	11,32	497

В табл. 2 принято, что оценки полученные приближенным методом приведены в работе [15]. Способ получения оценок методом максимума правдоподобия (ММП) изложен в данном сообщении. Результаты расчётов по описанной методике приведены в табл. 3.

Таблица 3. Расчётный уровень максимального расхода дождевых паводков(м^3/с)

$p = 1 - \alpha$	$X_{ммп}$	$X_{п}$	$\dfrac{X_{ммп}}{X_{п}}$
0,05	127,07	142,0	0,89
0,01	191,16	211,33	0,90
0,005	218	239,4	0,91
0,001	274,7	297,7	0,92

В этой таблице приведена величина *p*, вероятность того, что фактический максимальный расхода дождевых паводков превысит расчётные величины $X_{ммп}$,определённые по методу ММП и величины X_n , определённые по приближенному методу [15]. Относительное различие полученных результатов показано в третьем столбце табл. 3. Следует отметить, что окончательное решение об уровне расчётной величины из разряда вычислительной задачи переходит в разряд технико-экономической. Подобное происходит потому, что при использовании результатов решения поставленной задачи необходимо учитывать экологические и социальные последствия принимаемых инженерных решений.

Выводы.

1. Для определения доверительных интервалов оценок параметров распределения Джонсона , получаемых методом максимального правдоподобия, предложена последовательность действий, состоящая из следующих этапов: составление системы уравнений метода максимума правдоподобия; выбор способа решения системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение начального приближения системы уравнений метода максимума правдоподобия; решение системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение элементов информационной матрицы; определение границ доверительных интервалов для полученных оценок параметров.
2. Для решения систем уравнений метода максимума правдоподобия выбран метод Ньютона. Приведены выражения, необходимые для вычисления значений якобианов, входящих в процедуру решения полученной системы.
3. Приведен способ получения информационной матрицы, необходимой для вычисления доверительных интервалов оценок параметров распределения Джонсона. Получены выражения, необходимые для вычисления значений гессианов, входящих в процедуру вычисления дисперсий полученных оценок параметров распределения Джонсона.
4. Описана методика получения расчетных значений максимального уровня дождевых паводков.
5. Приведен численный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Литература

1. Агропромышленный комплекс наращивает вес [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: https://daily.rbc.ua/rus/show/agropromyshlennyy-kompleks-narashchivaet-1444805874.html – 26.12.2017 – Загл. с экрана.
2. Доля аграрной продукции в украинском экспорте составила 43% – Минагропрод [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: https://economics.unian.net/agro/2050116-dolya-agrarnoy- produktsii- v-ukrainskom-eksporte-sostavila-43-minagroprod.html. – 26.12.2017 – Загл. с экрана.
3. Агробизнес Украины в графиках и картах [Электронный ресурс]. – Режим доступа к русурсу: http://businessviews.com.ua/ru/economy/id/20-grafikov-i-kart-kotorye-dostupno-objasnjajut-agrobiznes-ukrainy-328/. – 26.12.2017 – Загл. с экрана.
4. Лесько Н.В. Земельний фонд України: сутність поняття та структура / Н.В. Лесько // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Юридичні науки. – 2015. – № 824. – С. 174 -178.
5. Социальная и экономическая история Украины: методические рекомендации к самостоятельной работе для иностранных студентов всех специальностей первого (бакалаврского) уровня [Электронный ресурс] / сост. Н.А. Свинаренко. – Режим доступа к ресурсу: http://repository. hneu. edu. ua/jspui/bitstream/123456789/17813/ 1/2017-%D0%A1%D0%B2%D0%B8%D0%BD%. – 26.12.2017 – Загл. с экрана.
6. Нагірна В.П. Можливі загрози сільському господарству України з позицій екобезпеки / В.П. Нагірна, І.Г. Савчук // Економіка України. – 2014. – № 2. – С.71 - 83.
7. Бабаджанова О.Ф. Небезпека розвитку і поширення повеней / О.Ф. Бабаджанова, Н.М. Гринчишин, Ю.Г. Сукач // Науковий вісник НЛТУ України. – 2013. – Вип. 23.8. – С. 90 - 95.
8. Повені та протипаводковий захист в Україні [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://www.kpi.kharkov.ua/archive/conferences/Харківщина,%20студенство,%20екологія/2013/Повені %20та%20протипаводковий%20захист%20в%20Україні.pdf. – 26.12.2017 – Загол. з екрану.
9. Долженкова О.В. Прогнозування економічного збитку від надзвичайних ситуацій природного характеру / О.В. Долженкова, К.В. Уварова // Молодий вчений. – 2016. – № 1 (3). – С. 107 -111.
10. ДБН В.2.4-3:2010. Гідротехнічні споруди. Основні положення [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://profidom.com.ua/v-2/v-2-4/1704-dbn-v-2-4-32010-gidrotehnichni-sporudi-osnovni-polozhenna. – 26.12.2017 – Загол. з екрану.
11. ДБН В.2.4-8:2014. Визначення розрахункових гідрологічних характеристик [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://cons.parus.ua/ map/doc/097G6F9552/Pro-zatverdzhennya- DBN- V2482014- Viznachennya- rozrakhunkovikh-gidrologichnikh-kharakteristik.html. – 26.12.2017 – Загол. з екрану.
12. Рождественский А.В. Статистические методы в гидрологии / А.В. Рождественский, А.И. Чеботарёв. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1974. – 424 с.

13. Блохинов Е.Г. Распределение вероятностей речного стока / Е.Г. Блохинов. – Москва: Наука, 1974. – 169 с.
14. Джонсон Н.Л. Одномерные непрерывные распределения. В 2 ч. Ч.1. / Н.Л. Джонсон, С. Коц, Н. Балакришнан. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010-2012. – 703 с.
15. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации / А.В. Сикан. – Санкт-Петербург: Изд. РГГМУ, 2007. – 279 с.
16. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – Москва: Наука, 1973. – 809 с.
17. Life Data Analysis Reference Book [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http: //reliawiki.org/index.php/Life_Data_Analysis_Reference_Book.
18. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – Москва: Высшая школа, 2008. – 480 с.
19. Цейтлин Н.А. Из опыта аналитического статистика / Н.А. Цейтлин. – Харьков: Константа, 2005. – 472 с.
20. Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели / В.П. Кузнецов. – Москва: Радио и связь, 1991. – 352 с.

References

1. Agropromyshlennyy kompleks narashchiayet ves [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa k resursu: https://daily.rbc.ua/rus/show/agropromyshlennyy- kompleks- narashchivaet-1444805874.html. – 26.12.2017 – Zagl. s ekrana.
2. Dolya agrarnoy produktsii v ukrainskom eksporte sostavila 43% – Minagroprod [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa k resursu: https://economics.unian.net/agro/2050116-dolya-agrarnoy-produktsii-v-ukrainskom-eksporte-sostavila-43-minagroprod.html. – 26.12.2017 – Zagl. s ekrana.
3. Agrobiznes Ukrainy v grafikakh i kartakh [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa k rusursu: http://businessviews.com.ua/ru/economy/id/20-grafikov- i- kart- kotorye-dostupno-objasnjajut-agrobiznes-ukrainy-328/. – 26.12.2017 – Zagl. s ekrana.
4. Lesko N.V. Zemelniy fond Ukraïni: sutnist ponyattya ta struktura / N.V. Lesko // Visnik Natsionalnogo universitetu «Lvivska politekhnika». Yuridichni nauki. – 2015. – № 824. – S. 174 - 178.
5. Sotsialnaya i ekonomicheskaya istoriya Ukrainy: metodicheskiye rekomendatsii k samostoyatelnoy rabote dlya inostrannykh studentov vsekh spetsialnostey pervogo (bakalavrskogo) urovnya [Elektronnyy resurs] / sost. N.A. Svinarenko. – Rezhim dostupa k re-sursu: http://repository.hneu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/17813/1/2017-%D0%A1%D0%B2%D0%B8%D0%BD% – 26.12.2017 – Zagl. s ekrana.
6. Nahirna V.P. Mozhlyvi zahrozy silskomu hospodarstvu Ukrainy z pozytsii ekobezpeky / V.P. Nahirna, I.H. Savchuk // Ekonomika Ukrainy. – 2014. – № 2. – S.71 - 83.
7. Babadzhanova O.F. Nebezpeka rozvytku i poshyrennia povenei / O.F. Babadzhanova, N.M. Hrynchyshyn, Yu.H. Sukach // Naukovyi visnyk NLTU Ukrainy. – 2013. – Vyp. 23.8. – С. 90 - 95.
8. Poveni ta protypavodkovyi zakhyst v Ukraini [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu do resursu: http: //www.kpi.kharkov.ua/archive/conferences/Kharkivshchyna,% 20studenstvo,%20ekolohiia/2013/Poveni% 20ta%20protypavodkovyi%20zakhyst%20v%20Ukraini.pdf. – 26.12.2017 – Zahol. z ekranu.
9. Dolzhenkova O.V. Prohnozuvannia ekonomichnoho zbytku vid nadzvychainykh sytuatsii pryrodnoho kharakteru / O.V. Dolzhenkova, K.V. Uvarova // Molodyi vchenyi. – 2016. – № 1 (3). – S. 107 -111.
10. DBN V.2.4-3:2010. Hidrotekhnichni sporudy. Osnovni polozhennia [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu do resursu: http://profidom.com.ua/v-2/v- 2- 4/1704-dbn-v-2-4-32010-gidrotehnichni-sporudi-osnovni-polozhenna. – 26.12.2017 – Zahol. z ekranu.
11. DBN V.2.4-8:2014. Vyznachennia rozrakhunkovykh hidrolohichnykh kharakterystyk [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu do resursu: http: //cons. parus. ua/map/doc/097G6F9552/Pro-zatverdzhennya- DBN- V2482014-Viznachennya-rozrakhunkovikh-gidrologichnikh-kharakteristik.html. – 26.12.2017 – Zahol. z ekranu.
12. Rozhdestvenskiy A.V. Statisticheskiye metody v gidrologii / A.V. Rozhdestvenskiy. A.I. Chebotarev. – Leningrad: Gidrometeoizdat. 1974. – 424 s.
13. Blokhinov E.G. Raspredeleniye veroyatnostey rechnogo stoka / E.G. Blokhinov. – Moskva: Nauka. 1974. – 169 s.
14. Dzhonson N.L. Odnomernyye nepreryvnyye raspredeleniya. V 2 ch. Ch.1. / N.L. Dzhonson. S. Kots. N. Balakrishnan. – Moskva: BINOM. Laboratoriya znaniy. 2010-2012. – 703 s.
15. Sikan A.V. Metody statisticheskoy obrabotki gidrometeorologicheskoy informatsii / A.V. Sikan. – Sankt-Peterburg: Izd. RGGMU. 2007. – 279 s.
16. Kendall M. Statisticheskiye vyvody i svyazi / M. Kendall. A. Styuart. – Moskva: Nauka. 1973. – 809 s.
17. Life Data Analysis Reference Book [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa k resursu: http: //reliawiki.org/index.php/Life_Data_Analysis_Reference_Book.
18. Kireev V.I. CHislennye metody v prime-rah i zadachah / V.I. Kireev, A.V. Panteleev. – Moskva: Vysshaya shkola, 2008. – 480 s.
19. Cejtlin N.A. Iz opyta analiticheskogo statistika / N.A. Cejtlin. – Har'kov: Konstanta, 2005. – 472 s.
20. Kuznecov V.P. Interval'nye statisticheskie modeli / V.P. Kuznecov. – Moskva: Radio i svyaz', 1991. – 352 s.

Анотація

Визначення розрахункового рівня максимальної витрати дощових паводків

В.Ю. Дубницький, І.Г. Скорікова, І.А. Черепньов, С.В. Нестеренко

Запропоновано використовувати розподіл Джонсона при визначенні розрахункового рівня дощових паводків. Для визначення довірчих інтервалів оцінок параметрів розподілу Джонсона, одержуваних методом максимальної правдоподібності, запропонована послідовність дій, яка складається з таких етапів: складання системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; вибір способу розв'язання системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; визначення початкового наближення системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; розв'язання системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; визначення елементів інформаційної матриці; визначення меж довірчих інтервалів для отриманих оцінок параметрів. Для розв'язання систем рівнянь методу максимуму правдоподібності обраний метод Ньютона. Наведено вирази, необхідні для обчислення значень якобіанів, що входять в процедуру розв'язання отриманої системи. Наведено спосіб одержання інформаційної матриці, необхідної для обчислення довірчих інтервалів оцінок параметрів розподілу Джонсона. Отримано вирази, необхідні для обчислення значень гессіанів, що входять в процедуру обчислення дисперсій отриманих оцінок параметрів розподілу Джонсона. Описана методика отримання розрахункових значень максимального рівня дощових паводків.

Ключові слова: *Дощові паводки, розподіл Джонсона, метод максимуму правдоподібності, оцінки параметрів розподілу Джонсона, довірчі інтервали оцінок параметрів розподілу Джонсона, розрахунковий рівень дощових паводків*

Abstract

Determination of the calculated level for the rain floods maximum flow

V.Ju. Dubnytsky, I.G. Skorikova, I.A. Cherepnev, S.V. Nesterenko

It is proposed to use the Johnson distribution in determining the calculated level for rain floods. To determine the confidence intervals for estimating the Johnson distribution parameters obtained by the maximum likelihood method, authors propose the following sequence of actions: the construction of a system of equations for the maximum likelihood method; choice of the method of solving the system of equations for the maximum likelihood method; determination of the initial approximation of the system of equations for the maximum likelihood method; the solution of the system of equations for the maximum likelihood method; definition of elements for the information matrix; the determination of the limits of confidence intervals for the obtained parameter estimates. To solve the systems of equations for the maximum likelihood method, Newton's method is chosen. The expressions necessary to calculate the values of Jacobians entering the procedure for solving the resulting system are given. A method is given for obtaining an information matrix necessary for calculating the confidence intervals for estimates of the Johnson distribution parameters. Expressions for calculating the values of the Hessians involved in the procedure for calculating the variances of the obtained estimates for the Johnson distribution parameters are obtained. The technique for obtaining the calculated values of the rain floods maximum level is described.

Keywords*: rain floods, Johnson distribution, maximum likelihood method, Johnson distribution parameter estimates, confidence intervals of Johnson distribution parameters estimation, calculated level of rain floods*.

Представлено від редакції: В.І. Мельник / Presented on editorial: V.I. Melnyk
Рецензент: В.В. Безпалько / Reviewer: V.V. Bezpal'ko
Подано до редакції / Received: 01.02.2018