

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПИТАНИЯ И ТОРГОВЛИ

Н. С. Синекон, Л. С. Лобанова, Л. А. Пархоменко

**МЕТОД R-ФУНКЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Монография

Харьков
ХГУПТ
2015

УДК 531.3 (082.2)
ББК 22.3
С 38

Рецензенты:

д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной академии наук Украины Б. Ф. Зайцев,
д-р техн. наук, профессор Харьковского государственного университета питания и торговли В. А. Потапов

Рекомендовано к изданию ученым советом ХГУПТ
протокол № 7 от 26.03.2015 г.

У монографії викладено алгоритми методу R-функцій для розв'язання динамічних задач теорії пружності для тіл скінченних розмірів, деформація яких відбувається у пружній області.

Для спеціалістів, що цікавляться механікою деформованого твердого тіла, математичною фізикою, прикладною математикою.

Синекоп Н. С.

С 38 Метод R-функций в динамических задачах теории упругости : монография / Н. С. Синекоп, Л. С. Лобанова, Л. А. Пархоменко. – Х. : ХГУПТ, 2015.– 95 с.

ISBN

В монографии изложены алгоритмы метода R-функций для решения динамических задач теории упругости для тел конечных размеров, деформация которых происходит в упругой области.

Для специалистов, интересующихся механикой деформируемого твердого тела, математической физикой, прикладной математикой.

УДК 531.3 (082.2)
ББК 22.3

© Синекоп Н. С., Лобанова Л. С.,
Пархоменко Л. А., 2015

© Харьковский государственный
университет питания и торговли, 2015

ISBN

Содержание

Предисловие	4
Глава 1. Развитие метода R -функций в начально-краевых задачах.	
Структура решения динамических задач.....	6
1.1. Конструктивные средства теории R -функций.	8
1.2. Структуры решений основных начально-краевых задач теории упругости.....	19
1.3. Структура решения динамической задачи для кусочно-однородного тела конечных размеров	26
1.4. Структуры решений основных осесимметричных динамических задач для цилиндрически ортотропных тел	29
Глава 2. Нестационарные динамические задачи термоупругости в двухмерных областях.....	40
2.1. Плоские динамические задачи термоупругости	40
2.2. Неустановившиеся температурные напряжения в цилиндре конечной длины при тепловом ударе на его торцах	44
2.3. Термическое возмущение упругого цилиндра при мгновенном приложении поверхностных сил на его торцах	49
Глава 3. Численное решение некоторых динамических задач для цилиндра конечной длины.....	56
3.1. Нестационарное деформирование цилиндра конечной длины	56
3.2. Неустановившиеся колебания цилиндра, контактирующего со штампами	65
Глава 4. Собственные колебания упругих тел.....	76
4.1. Метод R -функций в проблеме собственных колебаний упругих тел	76
4.2. Собственные колебания упругого цилиндра заданной высоты	80
4.3. Собственные колебания неоднородного цилиндра	84
Список литературы	91

Посвящается светлой памяти учителя
Владимира Логвиновича Рвачева

Предисловие

Монография подготовлена учениками академика НАН Украины Владимира Логвиновича Рвачева – создателя теории R-функций и неархимедова исчисления. Работа подытоживает труд авторов, направленный на развитие метода R-функций применительно к динамическим задачам теории упругости. Построенные с помощью R-функций структурные формулы являются существенным расширением имеющихся форм решений, полученных методами динамической теории упругости. С помощью теории R-функций конструктивно решена проблема построения координатных (пробных) функций, что открыло широкие возможности для практического использования вариационных и проекционных методов.

В первой главе монографии изложен материал, необходимый для ознакомления с основами метода R-функций и алгоритмами его практического использования. Представлены конструктивные средства метода в виде операторов продолжения граничных значений функций и их производных внутрь области, позволяющие строить структурные формулы, точно учитывающие граничные условия начально-краевых задач независимо от выбора некоторых неопределенных компонент. Изложены основные этапы построения левой части уравнения границы (или ее участка) области практически произвольной формы. Для этой цели используются введенные В.Л. Рвачевым R-операции, по своим свойствам сходные с функциями алгебры логики. Изложена методика получения структурных формул для основных динамических задач теории упругости. Эта же методика распространена на случай упругих сред с усложненными физико-механическими свойствами: кусочно-однородные и анизотропные.

Во второй главе дано обобщение предложенного метода на начально-краевые задачи термоупругости. Для поиска неопределенных компонент структур предлагается использовать вариационный и разностный методы (вариационный по координатам и разностный по времени). Такое сочетание вариационного и разностного методов сводит начально-краевую задачу к последовательности краевых задач на временных слоях.

В отдельной (третьей) главе представлены результаты решения конкретных нестационарных динамических задач. Численно исследованы задачи для цилиндра конечной высоты (сплошного и ослабленного эллипсоидальной полостью) с учетом ударных нагрузок на торцах. Установлено оптимальное число координатных функций и толщины временного слоя, позволяющие получать приемлемую точность вычислений основных динамических характеристик.

В четвертой главе рассмотрены задачи собственных колебаний тел вращений ограниченных размеров. Показано влияние закрепленных торцов цилиндра заданной высоты на его собственные частоты и собственные формы.

Предложен алгоритм решения задач данного класса в случае составных цилиндров.

В работе представлен универсальный математический инструментарий, который может быть использован студентами, аспирантами, научными работниками для решения не только задач механики деформируемого твердого тела и математической физики, но и задач разработки новых технологий, исследования разнообразных процессов, изменяющихся в пространстве и во времени.

Глава 1. Развитие метода R -функций в начально-краевых задачах. Структура решения динамических задач

Появлению R -функций предшествовали следующие обстоятельства. При поиске решения контактной задачи теории упругости В. Л. Рвачев установил необходимость в решении новой задачи, а именно: построения уравнения $\omega(x) = 0$ (точнее, его левой части) границы плоского штампа, который может иметь самую произвольную форму в плане. Например, в случае треугольного плоского штампа, вдавливаемого в упругое полупространство, необходимо располагать уравнением треугольника. Эта новая задача на интуитивном уровне решена В. Л. Рвачевым к 1959 году. Сама проблема построения уравнений границ геометрических объектов (известная со времен Рене Декарта как обратная задача аналитической геометрии) привела к необходимости выделения из множества непрерывных функций такого подмножества, на элементы которого распространяются свойства функций алгебры логики. Функции такого подмножества были названы В. Л. Рвачевым R -функциями.

Согласно [22] под R -функциями будем понимать такие функции действительных аргументов, знак которых вполне однозначно определяется заданием знаков аргументов. Примерами таких функций являются

$$f_1 = x_1 x_2 x_3; \quad f_2 = x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_1^2 + x_3^2} - \sqrt{x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Ниже приведена зависимость знаков функций f_1, f_2 от знаков аргументов.

x_1	-	-	-	-	+	+	+	+
x_2	-	-	+	+	-	-	+	+
x_3	-	+	-	+	-	+	-	+
f_1	-	+	+	-	+	-	-	+
f_2	-	-	-	-	-	-	-	+

«Положительность» и «отрицательность» рассматриваются как некоторые качества, которыми может обладать действительная переменная величина. Задание качеств аргументов вполне однозначно определяет и качество R -функций, т.е. эти качества передаются от аргументов к функциям как бы «по наследству». Таким образом, одновременно с R -функцией оказывается заданной и некоторая функция алгебры логики (того же числа аргументов, что и рассматриваемая R -функция). Это обстоятельство открыло существование глубокой связи между R -функциями и функциями алгебры логики, что позволило привнести в непрерывный анализ методы алгебры логики. Это и составило идейную основу теории R -функций [23]. При указанных выше двух качествах («положительность» и «отрицательность») оказалось возможным ограничиться булевой алгеброй. Для определенности число «0» будем относить к положительным числам.

Идея метода координат, положенная Рене Декартом в основу аналитической геометрии, расширена и обобщена В. Л. Рвачевым на случай линий и поверхностей, а известное определение (например, кривых второго

порядка) «геометрическое место точек ...» формализовалось в правило построения «сопровождающей функции алгебры логики» [22, 23].

Успехи в построении уравнений границ геометрических объектов практически произвольной формы стимулировали создание и разработку методов аналитической геометрии в высшем анализе, основу которых составили обобщения классических формул Лагранжа, Эрмита и основной формулы дифференциального исчисления – формулы Тейлора на случай линий и поверхностей [24]. В этой связи отметим монографии О. Н. Литвина, В. Л. Рвачева [10], В. Л. Рвачева, Л. В. Курпы, Н. Г. Склепуса, Л. А. Учишвили [25], В. Л. Рвачева [23] и статьи В. Л. Рвачева, О. Н. Бобылевой [38], В. Л. Рвачева, В. С. Проценко [39]. В монографии В. Л. Рвачева, В. А. Рвачева [26] изложен новый класс финитных, бесконечное число раз дифференцируемых функций (так называемых атомарных функций), имеющих важное значение для решения задач теории упругости и математической физики.

Теория R -функций нашла широкие приложения для решения многочисленных задач математической физики. Развитию теории R -функций посвящены монографии: В. Л. Рвачева, А. П. Слесаренко [27, 28] – в задачах теплопроводности; В. Л. Рвачева, В. С. Проценко [29] – в контактных задачах теории упругости для неклассических областей; В. Л. Рвачева, Л. В. Курпы [30] – в задачах теории пластин; В. Л. Рвачева, Н. С. Синекоса [31] – в задачах теории упругости и пластичности.

Решению нестационарных динамических задач теории упругости предшествовали исследования, направленные на разработку алгоритмов решения статических задач методом R -функций. Эти алгоритмы были использованы при построении расчетных схем динамических задач. В этой связи отметим статьи: В. Л. Рвачева, Н. И. Синекоса [32], в которой впервые изложен подход к построению структур решения задач теории упругости для анизотропного тела; В. Л. Рвачева, Н. С. Синекоса, Л. К. Кравченко [34], в которой получена структура решения осесимметричной задачи для составного полого цилиндра; В. Л. Рвачева, Н. С. Синекоса, Н. И. Синекоса [35], в которой приведен расчет напряженно-деформированного состояния вращающихся криволинейно-ортотропных цилиндров; В. Л. Рвачева, Н. С. Синекоса [40], в которой изложен математический инструментальный метод R -функций. Решению динамических задач посвящены работы [11–15, 36, 37, 43].

Решению задач дифракции упругих и термоупругих волн на телах неклассической формы посвящена работа Н. Д. Сизовой [42]. Решение проблемы учета особенностей решений, присущих линейным моделям физико-механических полей, отражено в работе Т. И. Шейко [47].

В монографии изложены методы решения линейных динамических задач теории упругости. Интересные перспективы в решении нелинейных задач можно ожидать при использовании предложенного в 1989 г. В. Л. Рвачевым нового алгебраически изоморфного классическому исчислению, названного неархимедовым, так как в нем аксиома Архимеда, сформулированная для отрезков, на котором базируется весь математический аппарат, была заменена аксиомой о существовании наибольшего числа.

1.1. Конструктивные средства теории R -функций.

Для общности рассуждений будем говорить о начально-краевой задаче для уравнения

$$Au + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \text{ в } \Omega \times \Omega_t, \quad (1.1)$$

при начальных

$$G_\alpha u = q_\alpha \text{ в } \Omega \text{ при } t = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.2)$$

и краевых условиях

$$L_i u = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (1.3)$$

Здесь $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_m$ – участки границы, часть из которых может совпадать друг с другом, а также с $\partial\Omega$ – границей тела Ω , $\Omega_t = \{0 \leq t \leq T\}$, $x = (x_1, x_2)$. В такой записи постановки задачи $u(x, t)$ может быть функцией, вектор-функцией или тензором. В дальнейшем, когда это не принципиально, будем употреблять просто термин «функция».

В приведенной достаточно общей постановке задачи можно выделить два типа информации – аналитическую и геометрическую. К аналитической информации можно отнести функции $u(x, t)$, $q_\alpha(x)$, $\varphi_i(x, t)$, $f(x, t)$ и операторы A , $G_1 = 1$, $G_2 = \frac{\partial}{\partial t}$, L_i , а к геометрической – область Ω , ее границу $\partial\Omega$ и участки $\partial\Omega_i$. Далее будем полагать, что компоненты краевой задачи удовлетворяют необходимым и достаточным условиям для существования единственного её решения.

Формула [24]

$$u = B(\Phi) \quad (1.4)$$

называется структурой решения начально-краевой задачи (1.1) – (1.3), если равенство (1.3) удовлетворяется точно независимо от выбора неопределенной компоненты $\Phi \in M_0$. В приведенной формуле B - оператор, отображающий множество геометрических компонент на некоторое функциональное пространство M_0 .

Из вышеприведенной постановки задачи следует, что картина деформационного поля зависит не только от характера физических законов, которые учитываются соответствующими уравнениями, но и от формы тел, их взаимного расположения, конфигурации площадок контактного взаимодействия и других факторов. Все это является серьезным препятствием на пути создания методов решения начально-краевых задач, так как любой метод должен учитывать как аналитическую, так и геометрическую информацию, что приводит к необходимости преобразования последней к аналитическому виду. Для частных случаев геометрических форм областей (как правило, классических) этот вопрос решается автоматически известными аналитическими методами, например, разделения переменных, интегральных преобразований, конформных отображений и др.

Потребности практики повысили интерес к приближенным методам (сеточным, вариационным и др.), а бурное развитие вычислительной техники ускорило создание их математического обеспечения. В частности, интенсивно развиваемый в настоящее время метод конечных элементов и возник в связи с необходимостью решения задач в областях сложной геометрии. Излагаемый в работе метод R -функций указывает пути учета геометрической информации на аналитическом уровне и позволяет строить такие обширные пучки функций, которые точно удовлетворяют заданным краевым условиям и содержат точное решение или, по крайней мере, достаточно хорошее его приближение. Представление о таком пучке функций формализуется с помощью структуры решения начально-краевой задачи (1.4).

Поскольку структура $u = B(\Phi)$ должна представлять некоторое аналитическое выражение, имеющее смысл везде в рассматриваемой области Ω , то при ее построении необходимо уметь учитывать наряду с известными функциями, входящими в постановку начально-краевой задачи, и форму области, и форму участков ее границы (в задачах со смешанными краевыми условиями), на которых краевые условия заданы.

После того как вид структурной формулы определен, ставится задача выбора неопределенной компоненты. Основным подходом к отысканию неопределенной компоненты Φ является построение приближения

$$\Phi(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) P_j(x), \quad (1.5)$$

где $\{P_j\}$ – выбранная последовательность полиномов или сплайнов. При этом практические соображения подсказывают, что необходимо стремиться к тому, чтобы множество M_0 было более узким. Подставив выражение (1.5) в формулу (1.4), получим приближенное решение задачи (1.1) – (1.3)

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{j=1}^n c_j(t) u_j(x), \quad (1.6)$$

где $u_0(x, t)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям (1.3), а $u_j(x)$ – соответствующим однородным независимо от выбора коэффициентов $c_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Тем самым удается преодолеть главное препятствие, которое стояло на пути практического применения проекционного метода Бубнова–Галеркина и вариационного метода Ритца. Отметим, что проекционный метод сводит исходную начально-краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а вариационный совместно с конечно-разностной дискретизацией временной составляющей – к квазистатическим задачам на временных слоях, а, следовательно, к последовательности систем линейных алгебраических уравнений.

Построение оператора B структурной формулы (1.4), а соответственно функций $u_0(x, t), u_j(x)$ в формуле (1.6) – основная задача метода R -функций. На первом этапе реализации метода R -функций осуществляется

преобразование геометрической информации в (1.1) – (1.3) к аналитическому виду путем построения левых частей уравнений участков $\partial\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) границы $\partial\Omega$ области Ω и уравнения самой границы $\partial\Omega$. Для этого используются полные системы R -функций, например [24]

$$\begin{aligned} x \wedge_0 y &= x + y - \sqrt{x^2 + y^2} - R\text{-конъюнкция,} \\ x \vee_0 y &= x + y + \sqrt{x^2 + y^2} - R\text{-дизъюнкция,} \\ \bar{x} &= -x - R\text{-отрицание.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Указанные R -операции обладают следующими свойствами относительно знаков аргументов $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$:

x	y	$x \wedge_0 y$	$x \vee_0 y$	\bar{x}
+	+	+	+	-
+	-	-	+	-
-	+	-	+	+
-	-	-	-	+

Отмеченная закономерность совпадает со свойствами системы булевых функций (X, Y – булевы переменные):

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	\bar{X}
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Известно, что система булевых функций является полной, обладает рядом удобных свойств (коммутативность, ассоциативность, удовлетворяет формуле де Моргана и т.д.) и допускает простую геометрическую интерпретацию. Пусть Ω есть область в \mathfrak{R}^n . Введем функцию $\Omega: \mathfrak{R}^n \rightarrow B_2 = \{0;1\}$

$$\Omega = \Omega(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in \bar{\Omega} \\ 1 & \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

которую назовем характеристической функцией или двузначным предикатом области Ω . (Для простоты характеристическую функцию обозначим той же буквой, что и соответствующую ей область). Пусть Ω_i ($i = 1, \dots, m$) – характеристические функции областей Ω_i , а $Y = F(X_1, \dots, X_m)$ – булева функция. Так как $\Omega_i \in B_2$, то имеет смысл выражение $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m) \in B_2$, которое в одних точках \mathfrak{R}^n может равняться нулю, а в других – единице.

Множество $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ с характеристической функцией $\Omega = F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ вполне определяется булевой функцией F и областями $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Области $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ будем называть опорными для области Ω . Формула $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ определяет логику формирования области Ω из областей Ω_i .

Предположим, что области $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ расположены на плоскости \mathfrak{R}^2 . Тогда, если Ω, Ω_1 и Ω_2 есть предикаты для соответствующих областей, то область $\bar{\Omega}$ называется дополнением до Ω , предикат $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ определяет пересечение областей Ω_1 и Ω_2 , а предикат $\Omega_1 \vee \Omega_2$ – их объединение (рис. 1.1). На рисунке заштрихованы те части, на которых предикат $\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2)$ принимает значение, равное 1.

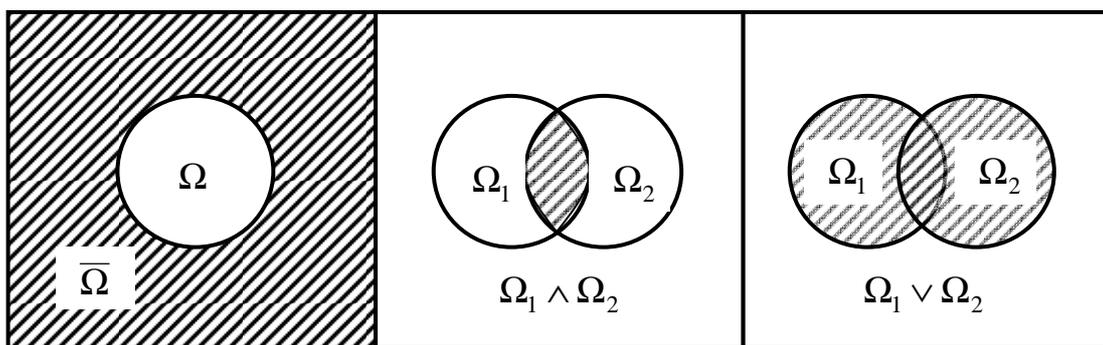


Рис. 1.1

В дальнейшем будем широко использовать задание точечных множеств (геометрических объектов) в \mathfrak{R}^n средствами аналитической геометрии, т.е. с помощью уравнений, неравенств и т.д. Условимся предикаты, соответствующие точечным множествам, задавать в виде условий, заключенных в скобки [$\Omega = (\omega(x) \geq 0)$ или $\Omega = (\omega(x) = 0)$]. Например, $\Omega_1 = (1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$ будет рассматриваться как характеристическая функция круга единичного радиуса на плоскости $x_1 O x_2$; $\Omega_2 = (x_1^2 / a^2 + x_2^2 / b^2 - 1 \geq 0)$ характеристическая функция внешности эллипса с полуосями a, b ; $\Omega_3 = (l^2 - x_2^2 \geq 0)$ – характеристическая функция полосы шириной $2l$ со сторонами, параллельными оси Ox_1 . С помощью функций алгебры логики можно, располагая некоторой системой предикатов вида $\Omega_i = (\omega_i(x) \geq 0)$ или $\Omega_i = (\omega_i(x) = 0)$ (или теми и другими), строить предикаты для новых геометрических объектов (условно называемых «сложными»).

Пусть $\Omega = F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$, где $\Omega_i = \Omega_i(x)$ – двузначные предикаты областей Ω_i . Уравнение

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_m) = A, \quad (1.8)$$

где $A \in B_2$ – булева константа, называется предикатным уравнением. (При $A = 1$ уравнение (1.8) называется предикатным уравнением области Ω).

Проиллюстрируем сказанное выше построением предиката области, изображенной на рис. 1.2.

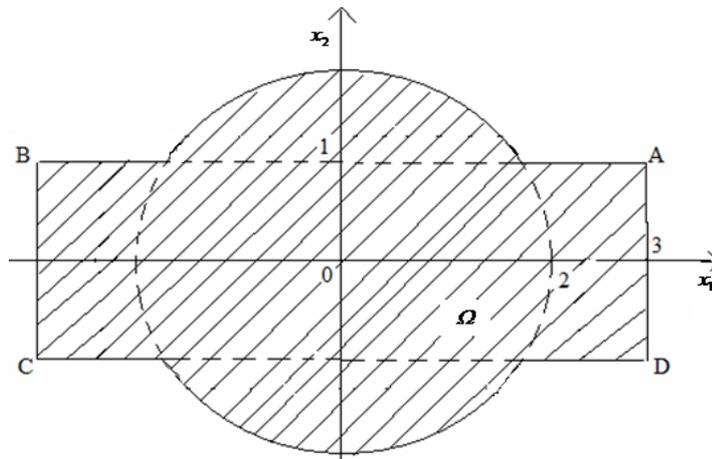


Рис. 1.2

Эту область можно задать формулой

$$\Omega = \Omega_1 \wedge (\Omega_2 \vee \Omega_3) = (9 - x_1^2 \geq 0) \wedge [(4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0) \vee (1 - x_2^2 \geq 0)].$$

Здесь в качестве опорных выбраны области $\Omega_1 = (9 - x_1^2 \geq 0)$ – внутренность полосы, заключенной между прямыми $x_1 = \pm 3$, включая эти прямые; $\Omega_2 = (4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$ – круг радиуса 2 с центром в точке $(0, 0)$; $\Omega_3 = (1 - x_2^2 \geq 0)$ – внутренность полосы, заключенной между прямыми $x_2 = \pm 1$.

Построение предикатного уравнения, определяющего заданный геометрический объект, связано с анализом формирования этого объекта из других, более простых (опорных) объектов. Иными словами, функция алгебры логики, которая ранее предполагалась данной вместе с опорными областями $\Sigma_i = [\sigma_i(x) \geq 0]$, чаще всего бывает не заданной и должна быть построена по виду данного геометрического объекта. При этом обычно не возникает сколь-нибудь существенных затруднений. Прежде всего, сам вид объекта подсказывает, какие объекты следует выбрать в качестве опорных. Например, для описания области, ограниченной дугами окружностей и отрезками прямых, естественно выбрать в качестве опорных областей круги и полуплоскости, для многоугольных областей достаточно полуплоскостей.

После того, как функция $\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$ построена, и опорные области $\Sigma_1 = (\sigma_1 \geq 0), \dots, \Sigma_m = (\sigma_m \geq 0)$ уже определены, легко построить функцию $\omega = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, для которой $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ является сопровождающей. Для этого достаточно заменить символы X_i на x_i , \vee на \vee_0 , \wedge на \wedge_0 , \bar{x}_i на $-x_i$. Если теперь написано неравенство $\omega(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \geq 0$, то оно определяет область Ω . При этом, как правило, уравнение $\omega(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) = 0$ определяет границу $\partial\Omega$ области Ω . Например, для прямоугольника $ABCD$ с вершинами в

точках $A(a, b), B(-a, b), C(-a, -b), D(a, -b)$ (рис. 1.2) в качестве опорных областей возьмем две полосы (вертикальную Σ_1 и горизонтальную Σ_2):

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= (\sigma_1 \equiv a^2 - x_1^2 \geq 0), \\ \Sigma_2 &= (\sigma_2 \equiv b^2 - x_2^2 \geq 0).\end{aligned}$$

Область Ω , ограниченную прямоугольником на плоскости $x_1 O x_2$, можно представить предикатом $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ и, если использовать R -конъюнкцию $x_1 \wedge_0 x_2$, написать уравнение её границы в виде

$$\begin{aligned}\omega &\equiv (a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2) \equiv \\ &\equiv a^2 - x_1^2 + b^2 - x_2^2 - \sqrt{(a^2 - x_1^2)^2 + (b^2 - x_2^2)^2} = 0.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Уравнением рассматриваемого прямоугольника будет также следующее выражение:

$$(a^2 - x_1^2)(b^2 - x_2^2) = 0. \quad (1.10)$$

Однако уравнению (1.10) удовлетворяют не только точки рассматриваемого прямоугольника, но и те, которые принадлежат продолжениям его сторон. Таким образом, (1.10) представляет собой уравнение двух пар параллельных прямых.

Обратим внимание на частный случай уравнения (1.9), когда прямоугольник $ABCD$ вырождается в отрезок $[-a, a]$ оси Ox_1 . Полагая в (1.9) $b = 0$, получаем уравнение этого отрезка в виде

$$a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \sqrt{(a^2 - x_1^2)^2 + x_2^4} = 0.$$

В дальнейшем при написании уравнений мы, как правило, не будем раскрывать символы R -операций, а использовать их наряду с арифметическими операциями. Это дает возможность получать уравнения границ геометрических объектов практически произвольного вида в сжатой и обозримой форме.

В дальнейшем нам понадобится функция $\omega(x)$, которая, кроме свойств $\omega(x) = 0$ на $\partial\Omega$ и $\omega(x) > 0$ в Ω , является и нормализованной:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1 \quad (|\nabla\omega| = 1) \text{ на } \partial\Omega. \quad (1.11)$$

В формуле (1.11) ν – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$.

Отметим, что система R -операций (1.7) обладает этим дифференциальным свойством на $\partial\Omega$, если исходные опорные области

удовлетворяют условиям (1.11). Так, если в точке x^0 функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1$ удовлетворяют условиям $\varphi_1(x^0) = 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x^0) = 1$ и $\varphi_2(x^0) > 0$, то справедливо равенство $\frac{\partial}{\partial \nu}(\varphi_1 \wedge \varphi_2)|_{x=x^0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x^0) = 1$.

Таким образом, нам нужно заранее обеспечить нормализованность левых частей уравнений границ опорных областей (например, для прямой – $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, для окружности – $(R^2 - x_1^2 - x_2^2) / (2R)$, границы полосы – $(a^2 - x_1^2) / (2a)$ и т.д.), поэтому нормализованное уравнение прямоугольника имеет вид

$$\frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b}(b^2 - x_2^2) = 0$$

и отличается от (1.9) только лишь положительными множителями перед круглыми скобками.

До сих пор при изложении метода R -функций шла речь о том, как преобразуется геометрическая информация, присутствующая в постановке начально-краевой задачи, к аналитическому виду. Что же касается самих краевых условий (1.3), то здесь возникают определенные трудности, связанные с тем, что краевые условия представляют соотношения, имеющие смысл на границе $\partial\Omega$ области Ω , а структура решения (1.4), учитывающая эти условия, должна быть определена везде в $\Omega \cup \partial\Omega$. В связи с этим граничные операторы L_i и правые части φ_i в краевых условиях (1.3) должны быть продолжены непрерывным образом в Ω . Займемся сначала правой частью условий (1.3). Пусть $\omega_i(x) = 0$ – уравнения участков $\partial\Omega_i$ и $\omega_i(x) > 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega_i$. Тогда правую часть (1.3) запишем единым аналитическим выражением с помощью формулы «склейки»

$$\varphi_0(x, t) = \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i(x, t) \omega_i^{-1}(x) \right) / \sum_{i=1}^m \omega_i^{-1}(x) \quad (1.12)$$

Функция $\varphi_0(x, t)$ имеет смысл везде в $\Omega \cup \partial\Omega$, за исключением, быть может, конечных элементов $\partial\Omega_i$ ($i = \overline{1, m}$) и удовлетворяет условию $\varphi_0|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i$.

Составными граничных операторов L_i в (1.3), как правило, являются производные $\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \tau}$ (ν, τ – нормаль и касательная к $\partial\Omega$). Для их продолжения в Ω в методе R -функций введены специальные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от формы области Ω , и превращающиеся в операторы дифференцирования по нормали и касательной на границе области (или некоторых ее участков). Эти операторы определены в $\Omega \cup \partial\Omega$ и имеют вид [24]

$$\begin{aligned}
D_1 u &= \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}, \\
T_1 u &= -\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2},
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

а на $\partial\Omega$: $D_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $T_1 u = \frac{\partial u}{\partial \tau}$.

Отметим, что коэффициенты введенных операторов удовлетворяют равенству $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 = 1$ на $\partial\Omega$, что обеспечивается свойством нормализованности уравнения $\omega(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Следует также отметить, что объединение продолжений операторов L_i может быть осуществлено с помощью формулы (1.12).

Располагая введенными конструктивными средствами метода R -функций, можно приступить к изложению методики построения структур решений, которую проиллюстрируем для типов простейших краевых условий: Дирихле, Неймана, а также условий сопряжения вдоль внутренних границ контакта однородных сред.

1. Краевое условие задачи Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Структура решения:

$$u = \omega\Phi + \varphi^0.$$

Здесь φ^0 – продолжение φ в Ω , Φ – неопределенная компонента структуры.

2. Краевое условие задачи Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Это краевое условие продолжим в область Ω с помощью оператора D_1 из (1.13). Получим

$$D_1 u = \varphi^0 + \omega\psi \text{ в } \Omega, \tag{1.15}$$

где ψ – неопределенная функция.

Решение будем искать в виде

$$u = \Phi + \omega\Phi_1, \tag{1.16}$$

где Φ, Φ_1 – произвольные функции.

Подставим (1.16) в (1.15). Получим с учетом линейности оператора D_1

$$D_1\Phi + D_1\omega\Phi_1 + \omega D_1\Phi_1 = \varphi^0 + \omega\Psi_1.$$

Учитывая, что $D_1\omega = 1$ на $\partial\Omega$, и объединяя слагаемые, содержащие множитель ω , из последнего равенства определим Φ_1 :

$$\Phi_1 = -D_1\Phi + \varphi^0 + \omega\Psi_1.$$

Подставляя полученное выражение для Φ_1 в (1.16), получим

$$u = \omega\varphi^0 + \Phi - \omega D_1\Phi + \omega^2\Psi_1.$$

Это и есть структура решения задачи Неймана с неопределенными компонентами Φ и Ψ_1 .

3. Задача сопряжения разнородных сред.

Ранее построенные простейшие структурные формулы учитывают как краевые условия на $\partial\Omega$, так и однородность среды, заполняющей область Ω . Усложним задачу и будем полагать, что область Ω имеет включение Ω_1 , заполненное средой, характеризуемой параметром ε_1 . Полагаем, что граница $\partial\Omega_1$ области Ω_1 – это граница ее контакта с областью Ω . Отметим также, что среда Ω характеризуется параметром ε_0 . Вводя безразмерный параметр $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$,

запишем условия сопряжения сред в такой форме:

$$u|_{(\partial\Omega_1)_+} = u|_{(\partial\Omega_1)_-}, \tag{1.17}$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{(\partial\Omega_1)_+} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{(\partial\Omega_1)_-}.$$

Здесь $(\partial\Omega_1)_+$ – окрестность границы $\partial\Omega_1$ со стороны области Ω_1 ; $(\partial\Omega_1)_-$ – окрестность границы $\partial\Omega_1$ со стороны области Ω ; ν – нормаль к $\partial\Omega_1$ (например, внешняя по отношению к области Ω); $u(x_1, x_2, t)$ – функция, удовлетворяющая краевым условиям на внешнем контуре $\partial\Omega$ (т.е. одна из двух ранее построенных структурных формул). Заменяем в функции $u(x_1, x_2, t)$ текущие переменные x_1 и x_2 новыми переменными таким образом, чтобы

выполнялись условия сопряжения (1.17). С учетом первого равенства из (1.17) указанную замену целесообразно выбрать в виде

$$v_i = x_i + |\omega_1| \beta_i \quad (i=1,2),$$

где β_i – пока произвольная функция, а функция $\omega_1(x_1, x_2)$ является левой частью нормализованного до первого порядка уравнения $\partial\Omega_1$, т.е.

$$\omega_1 = 0, \quad |\nabla \omega_1| = 1 \quad \text{на } \partial\Omega_1;$$

$$\omega_1 > 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \omega_1 < 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Функции β_i определяем, удовлетворяя второе равенство (1.17), которое можно представить в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\frac{\partial u(v_1, v_2, t)}{\partial x_1} \cos(v, x_1) + \frac{\partial u(v_1, v_2, t)}{\partial x_2} \cos(v, x_2) \right] \Big|_{(\partial\Omega_1)_+} &= \\ &= \left[\frac{\partial u(v_1, v_2, t)}{\partial x_1} \cos(v, x_1) + \frac{\partial u(v_1, v_2, t)}{\partial x_2} \cos(v, x_2) \right] \Big|_{(\partial\Omega_1)_-}. \end{aligned}$$

В силу нормализованности функции ω_1 на $\partial\Omega_1$ имеем

$$\cos(v, x_1) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \quad \cos(v, x_2) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2},$$

поэтому предыдущее условие принимает вид

$$\begin{aligned} &\left\{ \varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial v_1} \left(1 + \beta_1 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u}{\partial v_2} \beta_2 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \right. \\ &+ \left. \varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial v_1} \beta_1 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial v_2} \left(1 + \beta_2 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) \right] \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right\} \Big|_{(\partial\Omega_1)_+} = \\ &= \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial v_1} \left(1 + \beta_1 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u}{\partial v_2} \beta_2 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial v_1} \beta_1 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial v_2} \left(1 + \beta_2 \text{sign}(\omega_1) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) \right] \left. \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right|_{(\partial \Omega_1)_-}.$$

Так как в левой части этого равенства $\text{sign}(\omega_1) = 1$, в правой части – $\text{sign}(\omega_1) = -1$, а на $\partial \Omega_1$

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right)^2 = 1$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} (\varepsilon - 1) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial v_1} (\varepsilon + 1) + \frac{\partial u}{\partial v_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} (\varepsilon - 1) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial v_2} (\varepsilon + 1) = 0.$$

Это равенство выполняется, если положить

$$\frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} (\varepsilon - 1) + \beta_i \frac{\partial u}{\partial v_i} (\varepsilon + 1) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

откуда

$$\beta_i = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}.$$

Тогда функции v_i запишем в виде

$$v_i = x_i - |\omega_1| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2).$$

Осуществив замену переменных x_i на v_i ($i = 1, 2$) в структурных формулах $u = u(x_1, x_2, t)$, мы тем самым обеспечим выполнение условий (1.17). Остается теперь обеспечить сохранение свойств структуры на внешнем контуре $\partial \Omega \equiv (\omega = 0)$. Для этого достаточно во второе слагаемое выражения для v_i

ввести множитель $\frac{\omega^2}{\omega_1^2 + \omega^2}$. Имеем:

$$v_i = x_i - |\omega_1| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\omega^2}{\omega_1^2 + \omega^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i},$$

а структура решения $u^*(x_1, x_2, t) = u(v_1, v_2, t)$ будет удовлетворять условиям на внешнем $\partial \Omega$ и на внутреннем $\partial \Omega_1$ контурах.

1.2. Структуры решений основных начально-краевых задач теории упругости

Рассматриваются двумерные начально-краевые задачи, описывающие напряженно-деформированное состояние цилиндрических тел и тел вращений. Для общности рассуждений будем пользоваться системой координат $Ox_1x_2x_3$. Через x_3 обозначено направление, вдоль которого характеристики напряженно-деформированного состояния не меняются. Это направление совпадает с осью бесконечного цилиндрического тела или окружной координатой тела вращения. Сечение тел плоскостью x_1Ox_2 имеет форму области Ω с границей $\partial\Omega$. Для бесконечного цилиндрического тела Ω – нормальное сечение, для тела вращения – меридианное. Ввиду аналогии математических постановок плоских и осесимметричных задач вопросы построения структур их решений рассматриваются совместно.

Пусть некоторое изотропное упругое тело занимает в плоскости x_1Ox_2 область Ω (возможно, многосвязную) с границей $\partial\Omega$. Для плоской задачи, как было отмечено выше, Ω – нормальное сечение тела, для осесимметричной – меридианное. В области Ω имеем систему уравнений движения [20]

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 - \kappa \mu \frac{u_1}{x_1^2} + F_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 + F_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (1.18)$$

и начальные условия при $t = 0$:

$$\begin{aligned}u_1(x,0) &= \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) &= \psi_1(x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x).\end{aligned}\quad (1.19)$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ – компоненты вектора смещений, ρ – плотность упругой среды, $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$ – компоненты вектора массовых сил, параметр $\kappa = 1$ для осесимметричной задачи и $\kappa = 0$ для плоской.

Из бесчисленного множества решений исходных уравнений движения единственное решение может быть выделено с помощью краевых (граничных) условий, задаваемых на границе $\partial\Omega$ области Ω или отдельных ее участках. Построим структуры решений, отвечающие основным динамическим задачам теории упругости.

Краевое условие первой основной задачи теории упругости

$$\sigma_\nu \equiv (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu} l_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \nu} l_2 \right) - \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial \tau} l_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \tau} l_2 + \kappa \frac{u_1}{x_1} \right) = f_1^0,$$

$$\tau_\nu \equiv \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu} l_2 - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} l_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} l_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \tau} l_2 \right) = f_2^0, \quad (1.20)$$

где l_1, l_2 – направляющие косинусы внешней нормали. С помощью операторов (1.13) краевые условия (1.20) продолжим внутрь области Ω :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left[D_1(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + D_1(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] + \lambda \left[T_1(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \kappa \frac{u_1}{x_1} \right] &= f_1 + \omega S_{11}, \\ \mu \left[D_1(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - D_1(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] &= f_2 + \omega S_{21}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь S_{11}, S_{21} – некоторые неопределенные функции, f_i – продолжения функций f_i^0 внутрь области Ω . Структуру решения первой основной задачи представим разложениями

$$u_1 = \Phi_{11} + \omega \Phi_{12}^0, \quad u_2 = \Phi_{21} + \omega \Phi_{22}^0. \quad (1.22)$$

После подстановки выражений (1.22) в соотношения (1.21) и проведения некоторых преобразований, основанных на свойствах линейности операторов D_1 и T_1 , получим систему уравнений относительно Φ_{12}^0 и Φ_{22}^0

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Phi_{12}^0 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \Phi_{22}^0 &= \Theta_1 + \omega S_{12}, \\ \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \Phi_{12}^0 - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Phi_{22}^0 &= \Theta_2 + \omega S_{22}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где S_{12}, S_{22} – новые неопределенные функции,

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= f_1 - (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} D_1(\Phi_{11}) + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} D_1(\Phi_{21}) \right] - \lambda \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} T_1(\Phi_{21}) - \frac{\partial \omega}{\partial x_2} T_1(\Phi_{11}) + \kappa \frac{u_1}{x_1} \right], \\ \Theta_2 &= f_2 - \mu \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_2} D_1(\Phi_{11}) - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} D_1(\Phi_{21}) - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} T_1(\Phi_{11}) - \frac{\partial \omega}{\partial x_2} T_1(\Phi_{21}) \right]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Из системы (1.23) получим

$$\Phi_{12}^0 = \frac{\Theta_1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\Theta_2}{\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \omega \Phi_{12},$$

$$\Phi_{22}^0 = \frac{\Theta_1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \frac{\Theta_2}{\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \omega \Phi_{22}, \quad (1.25)$$

где Φ_{12} , Φ_{22} – произвольные достаточно гладкие функции. Подставляя выражения (1.25) в разложения (1.22) с учетом (1.24), получим структуру решения в виде

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{1}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_1 + \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} f_2 + \Phi_{11} - \omega D_1 \Phi_{11} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} T_1 \Phi_{11} + \\ & + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} T_1 \Phi_{11} - \kappa \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\Phi_{11}}{x_1} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 T_1 \Phi_{21} + \\ & + \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 T_1 \Phi_{21} + \omega^2 \Phi_{12}; \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} u_2 = & \frac{1}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} f_1 - \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_2 + \Phi_{21} - \omega D_1 \Phi_{21} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} T_1 \Phi_{21} - \\ & - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} T_1 \Phi_{21} - \kappa \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\Phi_{11}}{x_1} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 T_1 \Phi_{11} - \\ & - \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 T_1 \Phi_{11} + \omega^2 \Phi_{22}. \end{aligned}$$

Формулы (1.26) определяют структуру решения первой основной задачи теории упругости с неопределенными компонентами $\Phi_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, 2$).

Условия на границе $\partial\Omega$ в случае второй основной задачи имеют вид

$$u_i = g_i^0 \quad (i = 1, 2). \quad (1.27)$$

Пусть g_i – продолжение функции g_i^0 внутрь области Ω . Тогда структуру решения этой задачи можно записать так:

$$u_i = g_i + \omega \Phi_i, \quad (1.28)$$

где $\omega = 0$ на $\partial\Omega$ и $\omega > 0$ внутри Ω ; $\Phi_i(x, t)$ – неопределенные компоненты, при любом выборе которых точно выполняются условия (1.27).

В случае смешанных задач на части $\partial\Omega_1$ границы $\partial\Omega$ заданы условия (1.27), а на оставшейся части $\partial\Omega_2$ – условия (1.20). Условия для смещений на $\partial\Omega_1$ удовлетворяются, если представить u_i разложениями

$$u_i = g_i + \omega_1 \Phi_{i1} + \omega \Phi_{i2}^0 \quad (i=1,2), \quad (1.29)$$

где g_i – продолжение функции g_i^0 в $\Omega \cup \partial\Omega_2$; $\omega=0$ – нормализованное до первого порядка уравнение $\partial\Omega$; $\omega_1=0$ – уравнение участка $\partial\Omega_1$; $\Phi_{i1}(x,t)$, $\Phi_{i2}^0(x,t)$ – неопределенные функции. Обозначая через $\omega_2=0$ нормализованное до первого порядка уравнение участка $\partial\Omega_2$, граничные условия (1.20) продолжим в $\Omega \cup \partial\Omega_1$:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left[D_1^{(2)}(u_1) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + D_1^{(2)}(u_2) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right] + \\ + \lambda \left[T_1^{(2)}(u_2) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - T_1^{(2)}(u_1) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \kappa \frac{u_1}{x_1} \right] = f_1 + \omega_2 \varphi_{11}; \\ \mu \left[D_1^{(2)}(u_1) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - D_1^{(2)}(u_2) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - T_1^{(2)}(u_1) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - T_1^{(2)}(u_2) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right] = f_2 + \omega_2 \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Здесь φ_{11} , φ_{21} – произвольные функции. В формулах (1.30) и далее индекс (2) означает, что операторы D_1 и T_1 берутся по функции ω_2 . Подставляя выражения для u_1 и u_2 из (1.29) в (1.30), а также учитывая, что на $\partial\Omega$

$$D_1^{(2)}(\omega) = 1 + \omega_2 \eta_1,$$

$$T_1^{(2)}(\omega) = \omega_2 \eta_2,$$

где η_1 , η_2 – некоторые функции, имеем

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(\Phi_{12}^0 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \Phi_{22}^0 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) = \psi_1 + \omega_2 \varphi_{12}, \\ \mu \left(\Phi_{12}^0 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \Phi_{22}^0 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) = \psi_2 + \omega_2 \varphi_{22}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Здесь

$$\psi_1 = f_1 - (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} D_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} D_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) \right] -$$

$$- \lambda \left[\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} T_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} T_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) + \kappa \frac{\Phi_{11}^0}{x_1} \right];$$

$$\psi_2 = f_2 - \mu \left[\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} D_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} D_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} T_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} T_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) \right];$$

$$\Phi_{i1}^0 = g_i + \omega_1 \Phi_{i1} \quad (i=1,2);$$

$\varphi_{12}, \varphi_{21}$ – произвольные функции.

Из (1.31) получим выражения для Φ_{12}^0, Φ_{22}^0 :

$$\Phi_{12}^0 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \psi_2 + \omega_2 \Phi_{12},$$

$$\Phi_{22}^0 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \psi_2 + \omega_2 \Phi_{22},$$
(1.32)

где Φ_{12}, Φ_{22} – произвольные достаточно гладкие функции, в которые вошли все слагаемые, содержащие множитель ω_2 .

С учетом полученных выражений (1.32) и представлений (1.29) структуру решения запишем в виде

$$u_1 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} f_2 + \Phi_{11}^0 - \omega D_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) + \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} T_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} T_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) - \kappa \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \frac{\Phi_{11}^0}{x_1} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right)^2 T_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) +$$

$$+ \omega \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right)^2 T_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) + \omega_2 \omega \Phi_{12};$$

$$u_2 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} f_1 - \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} f_2 + \Phi_{21}^0 - \omega D_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) - \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} T_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) -$$

$$- \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} T_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) - \omega \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right)^2 T_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right)^2 T_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) -$$

$$-\kappa \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \frac{\Phi_{11}^0}{x_1} + \omega_2 \omega \Phi_{22};$$

$$\Phi_{i0}^0 = g_i + \omega_1 \Phi_{i1} \quad (i=1,2). \quad (1.33)$$

Здесь, как и ранее, $\Phi_{ij}(x,t)$ ($i, j=1,2$) – неопределенные компоненты, которые не влияют на выполнение граничных условий смешанной задачи.

К числу наиболее сложных и, в то же время, часто встречающихся на практике смешанных задач относятся контактные задачи. Эти задачи описывают взаимодействие двух тел. Будем считать одно из тел упругим, другое – абсолютно твердым (штампом) и рассматривать случай, когда в области контакта отсутствуют силы трения.

Обозначим через $\partial\Omega_1$ область контакта упругого тела и штампа, а через $\partial\Omega_2$ – остальную часть поверхности $\partial\Omega$ тела Ω , на которой могут быть заданы динамические нагрузки. Граничные условия контактной задачи запишем в виде

$$U_n = h^0(x,t), \quad \tau_n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_1, \quad (1.34)$$

$$\sigma_n = f_1^0(x,t), \quad \tau_n = f_2^0(x,t) \quad \text{на } \partial\Omega_2. \quad (1.35)$$

Заданное функцией h^0 нормальное смещение в области контакта определяется формой подошвы штампа и его осадкой; f_1^0, f_2^0 – известные функции []. Применим описанный выше подход для нахождения структуры решения контактной задачи. Краевые условия (1.34), (1.35), представленные через смещения и продолженные внутрь области Ω с помощью операторов D_1, T_1 , определенных в (1.13), и оператора

$$D_1^{(2)} = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} D_1,$$

запишем в виде

$$-u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = h + \omega_1 \psi_0; \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[D_1^{(2)}(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + D_1^{(2)}(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] + \\ & + \lambda \left[T_1(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \kappa \frac{u_1}{x_1} \right] = f_1 + \omega \varphi_{11}, \end{aligned}$$

(1.37)

$$\mu \left[D_1(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - D_1(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(u_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(u_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] = f_2 + \omega \varphi_{21}.$$

Здесь h , f_1 , f_2 – продолжение в Ω функций h^0 , f_1^0 , f_2^0 ; $\omega=0$ – нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial\Omega$, а $\omega_1=0$, $\omega_2=0$ – уравнения участков $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, соответственно; ψ_0 , φ_{11} , φ_{12} – произвольные функции.

Структуру решения задачи находим в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_{11}^0 + \omega \Phi_{12}^0; \\ u_2 &= \Phi_{21}^0 + \omega \Phi_{22}^0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Удовлетворяя условию (1.36), функции Φ_{11}^0 и Φ_{21}^0 определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^0 &= -h \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \psi \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \omega_1 \Phi_{11}, \\ \Phi_{21}^0 &= -h \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \psi \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \omega_1 \Phi_{21}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

В формулах (1.38), (1.39) ψ , Φ_{i2}^0 , Φ_{i1} – произвольные функции.

Подставим выражения для смещений (1.38) в соотношения (1.37). После ряда преобразований, проводимых при выводе структур решений основных задач, получим

$$(\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Phi_{12}^0 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \Phi_{22}^0 \right] = \psi_1 + \omega \varphi_{12}; \quad (1.40)$$

$$\mu \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \Phi_{12}^0 + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Phi_{22}^0 \right] = \psi_2 + \omega \varphi_{22}.$$

Функции φ_{12} , φ_{22} – произвольные, а функции ψ_1 и ψ_2 определяются формулами

$$\psi_1 = f_1 - (\lambda + 2\mu) \left[D_1^{(2)}(\Phi_{11}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + D_1^{(2)}(\Phi_{21}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] - \lambda \left[T_1(\Phi_{21}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(\Phi_{11}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \kappa \frac{\Phi_{11}^0}{x_1} \right];$$

$$\psi_2 = f_2 - \mu \left[D_1(\Phi_{11}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - D_1(\Phi_{21}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(\Phi_{11}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - T_1(\Phi_{21}^0) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right]. \quad (1.41)$$

В результате решения системы (1.40) получим

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^0 &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \psi_2 + \omega \Phi_{12}; \\ \Phi_{22}^0 &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \psi_2 + \omega \Phi_{22}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где Φ_{12} , Φ_{22} – неопределенные функции. Последовательно подставляя формулы (1.41) в (1.42), а затем полученные выражения (1.42) в разложения (1.38), получим структурные формулы для смещений u_1 и u_2 контактной задачи с неопределенными компонентами $\Phi_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, 2$).

1.3. Структура решения динамической задачи для кусочно-однородного тела конечных размеров

Пусть конечная область Ω является объединением областей Ω_0 , Ω_i ($i = \overline{1, m}$). Обозначим через $\partial\Omega_0$ внешний контур области Ω_0 , а через $\partial\Omega_i$ ($i = \overline{1, m}$) – границы раздела областей Ω_i и Ω_0 . Рассмотрим упругое кусочно-однородное изотропное тело, которое занимает область Ω ; предполагаем, что его упругие характеристики λ_i , μ_i ($i = \overline{0, m}$) постоянны в пределах соответствующей области Ω_i . Кроме того, будем полагать, что на границах раздела $\partial\Omega_i$ выполняются условия жесткого сцепления упругих сред, а на внешний контур $\partial\Omega_0$ тела действует некоторая нагрузка. Решение задачи о колебаниях такого тела сводится к нахождению в каждой из областей Ω_i ($i = \overline{0, m}$) вектора смещений $U_i(x, t) = \{u_{1,i}(x, t), u_{2,i}(x, t)\}$, который удовлетворяет уравнениям [12, 20]

$$(\alpha_i + \beta_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial x_1} + \beta_i \Delta u_{1,i} - \kappa \beta_i \frac{u_{1,i}}{x_1^2} + F_{1,i} = \gamma_i \frac{\partial^2 u_{1,i}}{\partial t^2}, \quad (1.43)$$

$$(\alpha_i + \beta_i) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \beta_i \Delta u_{2,i} + F_{2,i} = \gamma_i \frac{\partial^2 u_{2,i}}{\partial t^2}, \quad i = \overline{0, m},$$

краевым условиям

$$\sigma_{v,0} = f_1^0(x, t), \quad \tau_{v,0} = f_2^0(x, t), \quad x \in \partial\Omega_0; \quad (1.44)$$

или

$$\begin{aligned}
u_{1,0} &= g_1^0(x,t), \quad u_{2,0} = g_2^0(x,t), \quad x \in \partial\Omega_{01}; \\
\sigma_{v,0} &= f_1^0(x,t), \quad \tau_{v,0} = g_2^0(x,t), \quad x \in \partial\Omega_{02}, \\
&(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega_0)
\end{aligned} \tag{1.45}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned}
u_{1,0}(x,t) &= u_{1,j}(x,t), \quad u_{2,0}(x,t) = u_{2,j}(x,t), \quad x \in \partial\Omega_j; \\
\sigma_{v_j,0}(x,t) - \sigma_{v_j,j}(x,t) &= 0, \quad \tau_{v_j,0}(x,t) - \tau_{v_j,j}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega_j.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Здесь $\sigma_{v_j,i}$, $\tau_{v_j,i}$ – нормальная и касательная составляющие напряжения на границе $\partial\Omega_j$ с нормалью v_j , которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{v_j,i} &= (\alpha_i + 2\beta_i) \left(\frac{\partial u_{1,i}}{\partial v_j} l_j + \frac{\partial u_{2,i}}{\partial v_j} m_j \right) + \alpha_i \left(\kappa \frac{u_{1,i}}{x_1} + \frac{\partial u_{2,i}}{\partial \tau_j} l_j - \frac{\partial u_{1,i}}{\partial \tau_j} m_j \right); \\
\tau_{v_j,i} &= \beta_i \left(\frac{\partial u_{2,i}}{\partial v_j} l_j - \frac{\partial u_{1,i}}{\partial v_j} m_j + \frac{\partial u_{1,i}}{\partial \tau_j} l_j + \frac{\partial u_{2,i}}{\partial \tau_j} m_j \right);
\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$l_j = \cos(v_j, x_1), \quad m_j = \cos(v_j, x_2).$$

Динамическое состояние тела в начальный момент времени полностью определяется заданием смещений и скоростей его точек:

$$u_{k,i} \Big|_{t=0} = \varphi_{k,i}(x), \quad \frac{\partial u_{k,i}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_{k,i}(x), \quad k = 1, 2, \quad i = \overline{0, m}. \tag{1.48}$$

Соотношения (1.43)–(1.48) записаны в приведенных величинах

$$x_i = \frac{\bar{x}_i}{R}, \quad t = \frac{\bar{t}}{R} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\mu_0}, \quad \beta_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}, \quad \gamma_i = \frac{\rho_i}{\rho_0};$$

компоненты тензора напряжений и вектора смещений отнесены соответственно к σ_0 и $\frac{R\sigma_0}{\mu_0}$; R и σ_0 – некоторые постоянные, имеющие размерности длины и напряжения; $x = (x_1, x_2)$; $t \in [0; T]$; Δ , θ – оператор

Лапласа и объемная деформация; κ – параметр, равный 1 для осесимметричной задачи и 0 для плоской.

Построим структуру решения поставленной задачи, т.е. определим такие выражения для компонент векторов смещений U_j , которые определены внутри областей Ω_j , содержат некоторые произвольные функции и удовлетворяют (тождественно относительно этих функций) граничным условиям (1.44) или (1.45), а также условиям сопряжения (1.46).

Применяя разработанную в предыдущем разделе методику построения структур решений для структуры, учитывающей внешние граничные условия (1.44), получим выражения

$$\begin{aligned}
u_{1,0} = & \frac{1}{\alpha_0 + 2\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_1} f_1 - \frac{1}{\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_2} f_2 + \Phi_{11}^0 - \omega_0^* D_1^0 \Phi_{11}^0 + \\
& + \frac{2(\alpha_0 + \beta_0)}{\alpha_0 + 2\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_2} T_1^0 \Phi_{11}^0 - \kappa \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 2\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_1} \frac{\Phi_{11}^0}{x_1} + \\
& + \omega_0^* \left[\left(\frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 2\beta_0} \left(\frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1^0 \Phi_{21}^0 - \omega_0^2 \eta \phi'_{12};
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
u_{2,0} = & \frac{1}{\alpha_0 + 2\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_2} f_1 + \frac{1}{\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_1} f_2 + \Phi_{21}^0 - \omega_0^* D_1^0 \Phi_{21}^0 - \\
& - \frac{2(\alpha_0 + \beta_0)}{\alpha_0 + 2\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_2} T_1^0 \Phi_{21}^0 - \kappa \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 2\beta_0} \omega_0^* \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_2} \frac{\Phi_{11}^0}{x_1} + \\
& + \omega_0^* \left[\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 2\beta_0} \left(\frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega_0^*}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1^0 \Phi_{11}^0 - \omega_0^2 \eta \phi'_{22}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\eta = \prod_{j=1}^m \omega_j^2; \quad \omega_0^* = \omega_0 \wedge_0 \eta;$$

f_1, f_2 – продолжения функций f_1^0, f_2^0 в Ω_0 .

Аналогично для структур смещений $u_{1,j}, u_{2,j}$, определенных в областях Ω_j , имеем

$$u_{1,j} = (1 - A_j)(1 - C_j) \Phi_{11} + \omega_j \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_1} \Psi_1^{(j)} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_2} \Psi_2^{(j)} \right) + \omega^2 \Phi_{12}^{(j)};$$

$$u_{2,j} = (1 - A_j)(1 - C_j)\Phi_{21} + \omega_j \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_2} \Psi_1^{(j)} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_1} \Psi_2^{(j)} \right) + \omega^2 \Phi_{22}^{(j)}, \quad (1.50)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(j)} = & 2(1 - C_j) \left[A_j \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_1} D_1^{(j)} \Phi_{11} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_2} D_1^{(j)} \Phi_{21} \right) + \right. \\ & \left. + B_j \left(\kappa \frac{\Phi_{11}}{x_1} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_1} T_1^{(j)} \Phi_{21} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_2} T_1^{(j)} \Phi_{11} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\Psi_2^{(j)} = 2C_j(1 - A_j) \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_2} D_1^{(j)} \Phi_{11} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_1} D_1^{(j)} \Phi_{21} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_1} T_1^{(j)} \Phi_{11} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_2} T_1^{(j)} \Phi_{21} \right);$$

где

$$A_j = \frac{\alpha_0 + 2\beta_0 - \alpha_j - 2\beta_j}{\alpha_0 + 2\beta_0 + \alpha_j + 2\beta_j}, \quad B_j = \frac{\alpha_0 - \alpha_j}{\alpha_0 + 2\beta_0 + \alpha_j + 2\beta_j}, \quad C_j = \frac{\beta_0 - \beta_j}{\beta_0 + \beta_j}.$$

Поскольку на границе раздела сред $\partial\Omega_j$ должно выполняться условие

$$u_{1,0}(x) = u_{1,j}(x), \quad u_{2,0}(x) = u_{2,j}(x),$$

произвольные функции Φ_{11}^0 , Φ_{21}^0 в формулах (1.49) достаточно выбрать так:

$$\Phi_{11}^0 = (1 - a)(1 - c)\Phi_{11}, \quad \Phi_{21}^0 = (1 - a)(1 - c)\Phi_{21}, \quad (1.52)$$

где

$$a = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \xi_j^2} \sum_{j=1}^m A_j \xi_j^2, \quad c = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \xi_j^2} \sum_{j=1}^m C_j \xi_j^2, \quad \xi_j = \omega_j^{-1}.$$

Таким образом, представленная формулами (1.49)–(1.52) структура решения первой основной динамической задачи для тела, содержащего включения, точно удовлетворяет внешним граничным условиям (1.44) и условиям сопряжения (1.46) при произвольном выборе неопределенных функций $\Phi_{k1}(x, t)$, $\Phi_{k2}^{(i)}(x, t)$ ($k = 1, 2$; $i = \overline{1, m}$).

1.4. Структуры решений основных осесимметричных динамических задач для цилиндрически ортотропных тел

Широко применяемые в современной технике конструкционные материалы, как правило, обладают каким-либо типом упругой симметрии.

Среди них можно выделить ортотропные, имеющие три взаимно ортогональные криволинейные поверхности упругой симметрии.

Пусть упругое тело является симметричным относительно оси Oz цилиндрической системы координат $Or\theta z$, а его главные направления упругости совпадают с осями координат. В плоскости rOz изотропное тело имеет форму области Ω с границей $\partial\Omega$. Формулы обобщенного закона Гука для ортотропного тела (ось Oz не пересекает тело) запишем так [9]:

$$\sigma_r = A_{11}\varepsilon_r + A_{12}\varepsilon_\theta + A_{13}\varepsilon_z;$$

$$\sigma_\theta = A_{12}\varepsilon_r + A_{22}\varepsilon_\theta + A_{23}\varepsilon_z;$$

$$\sigma_z = A_{13}\varepsilon_r + A_{23}\varepsilon_\theta + A_{33}\varepsilon_z;$$

$$\tau_{\theta z} = A_{44}\gamma_{\theta z}; \quad \tau_{rz} = A_{55}\gamma_{rz}; \quad \tau_{r\theta} = A_{66}\gamma_{r\theta},$$

причем для осесимметричной задачи $\gamma_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = 0$ и $u_\theta = 0$. Если же ось анизотропии пересекает тело, то выполняется еще и равенство коэффициентов

$$A_{11} = A_{22}, \quad A_{23} = A_{13}, \quad A_{44} = A_{55}.$$

Система уравнений движения, описывающая осесимметричную деформацию цилиндрически ортотропного тела Ω записывается в виде

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - A_{22} \frac{u_r}{r^2} + A_{55} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \\ & + (A_{13} + A_{55}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + (A_{13} - A_{23}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + F_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned} & A_{55} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + A_{33} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \\ & + (A_{13} + A_{55}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + (A_{55} + A_{23}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + F_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

где A_{ij} ($A_{ij} = A_{ji}$) – коэффициенты, характеризующие механические свойства материала, из которого изготовлено тело; $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ – компоненты вектора смещений; ρ – плотность среды; $F_r(r, z, t)$, $F_z(r, z, t)$ – компоненты вектора массовых сил; $t \in [0; T]$.

Пусть заданные на границе $\partial\Omega$ условия соответствуют основным задачам, рассмотренным в разделе 1.2 для изотропного тела. Построим структуры решения этих динамических задач. Для этого рассмотрим записанные в смещениях условия первой основной задачи:

$$\begin{aligned} G_{11}^0 \frac{\partial u_r}{\partial \nu} + G_{12}^0 \frac{\partial u_z}{\partial \nu} - G_{13}^0 \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + G_{14}^0 \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + G_{15}^0 \frac{u_r}{r} &= f_1^0; \\ -G_{21}^0 \frac{\partial u_r}{\partial \nu} + G_{22}^0 \frac{\partial u_z}{\partial \nu} + G_{23}^0 \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + G_{24}^0 \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + G_{25}^0 \frac{u_r}{r} &= f_2^0, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где

$$\begin{aligned} G_{11}^0 &= [A_{11}l_r^2 + (A_{13} + 2A_{55})l_z^2]l_r; \\ G_{12}^0 &= [(A_{13} + 2A_{55})l_r^2 + A_{33}l_z^2]l_z; \\ G_{13}^0 &= [(A_{11} - 2A_{55})l_r^2 + A_{13}l_z^2]l_z; \\ G_{14}^0 &= [A_{13}l_r^2 + (A_{33} - 2A_{55})l_z^2]l_r; \\ G_{15}^0 &= A_{12}l_r^2 + A_{23}l_z^2; \\ G_{21}^0 &= [(A_{11} - A_{13} - A_{55})l_r^2 + A_{55}l_z^2]l_z; \\ G_{22}^0 &= [A_{55}l_r^2 + (A_{33} - A_{13} - A_{55})l_z^2]l_r; \\ G_{23}^0 &= [A_{55}l_r^2 + (A_{11} - A_{13} - A_{55})l_z^2]l_r; \\ G_{24}^0 &= [(A_{33} - A_{13} - A_{55})l_r^2 + A_{55}l_z^2]l_z; \\ G_{25}^0 &= (A_{23} - A_{12})l_rl_z; \\ l_r &= \cos(\nu, r), \quad l_z = \cos(\nu, z), \end{aligned} \quad (1.55)$$

ν – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Смещения u_r, u_z представим в форме

$$\begin{aligned} u_r &= \Phi_{11} + \omega\Phi_{12}^0; \\ u_z &= \Phi_{21} + \omega\Phi_{22}^0, \end{aligned} \quad (1.56)$$

где $\Phi_{11}, \Phi_{12}^0, \Phi_{21}, \Phi_{22}^0$ – некоторые произвольные функции.

Продолжив внутрь области производные по нормали и касательной в (1.54) с помощью операторов (1.13), а направляющие косинусы нормали в (1.55) по формулам

$$l_r = -\frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad l_z = -\frac{\partial \omega}{\partial z},$$

получим [35]

$$\begin{aligned} G_{11}D_1u_r + G_{12}D_1u_z - G_{13}T_1u_r + G_{14}T_1u_z + G_{15}\frac{u_r}{r} &= f_1 + \omega\varphi_1; \\ -G_{21}D_1u_r + G_{22}D_1u_z + G_{23}T_1u_r + G_{24}T_1u_z + G_{25}\frac{u_r}{r} &= f_2 + \omega\varphi_2; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= \left[A_{11}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + (A_{13} + 2A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r}; \\ G_{12} &= \left[(A_{13} + 2A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + A_{33}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z}; \\ G_{13} &= \left[(A_{11} - 2A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + A_{13}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z}; \\ G_{14} &= \left[A_{13}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + (A_{33} - 2A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r}; \\ G_{15} &= A_{12}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + A_{23}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2; \\ G_{21} &= \left[(A_{11} - A_{13} - A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + A_{55}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z}; \\ G_{22} &= \left[A_{55}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + (A_{33} - A_{13} - A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r}; \\ G_{23} &= \left[A_{55}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + (A_{11} - A_{13} - A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r}; \\ G_{24} &= \left[(A_{33} - A_{13} - A_{55})\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + A_{55}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z}; \\ G_{25} &= (A_{23} - A_{12})\frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Здесь $f_1(r, z, t)$, $f_2(r, z, t)$ – продолженные в Ω функции $f_1^0(r, z, t)$ и $f_2^0(r, z, t)$; φ_1 , φ_2 – произвольные функции.

Структуру решения задачи находим в виде

$$u_i = \Phi_{i1} + \omega \Phi_{i2}^0 \quad (i=1,2), \quad (1.59)$$

где Φ_{i1} , Φ_{i2}^0 ($i=1,2$) – неопределенные дважды дифференцируемые функции.

Подставив выражения (1.59) в равенства (1.57), с учетом свойств операторов (1.13) получим систему относительно Φ_{12}^0 и Φ_{22}^0 :

$$\begin{aligned} G_{11}\Phi_{12}^0 + G_{12}\Phi_{22}^0 + F_1 + \omega\varphi_{12}; \\ -G_{12}\Phi_{12}^0 + G_{22}\Phi_{22}^0 + F_2 + \omega\varphi_{22}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

правые части которой определяются выражениями

$$\begin{aligned} F_1 = f_1 - G_{11}D_1\Phi_{11} - G_{12}D_1\Phi_{21} + G_{13}T_1\Phi_{11} - G_{14}T_1\Phi_{21} - G_{15}\frac{\Phi_{11}}{r}; \\ F_2 = f_2 + G_{21}D_1\Phi_{11} - G_{22}D_1\Phi_{21} - G_{23}T_1\Phi_{11} - G_{24}T_1\Phi_{21} - G_{25}\frac{\Phi_{11}}{r}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^0 = \frac{1}{\beta}(F_1G_{22} - F_2G_{12}) + \omega\psi_1; \\ \Phi_{22}^0 = \frac{1}{\beta}(F_1G_{21} + F_2G_{11}) + \omega\psi_2, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где

$$\begin{aligned} \beta = A_{55}(A_{13} + 2A_{55}) + A_{55} \left[d_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^4 + d_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^4 \right] + d_3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2; \\ d_1 = A_{11} - A_{13} - 2A_{55}; \\ d_2 = A_{33} - A_{13} - 2A_{55}; \\ d_3 = A_{11}A_{33} - A_{13}^2 - 4A_{55}(A_{13} + A_{55}). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Произвольные функции ψ_1 и ψ_2 включают в себя все слагаемые, имеющие множитель ω . С учетом (1.58), (1.59) и (1.61) запишем структуру решения первой основной динамической задачи для цилиндрически ортотропного тела:

$$u_r = \Phi_{11} - \omega D_1 \Phi_{11} + \frac{\omega}{\beta} \left[A_{55}(A_{11} + A_{13}) + d_4 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_{11} +$$

$$\begin{aligned}
& + A_{55} \left[A_{33} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - A_{13} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{21} - \\
& - \left[A_{12} A_{55} + (A_{12} A_{33} - A_{12} A_{55} - A_{13} A_{23} - A_{23} A_{55}) \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\Phi_{11}}{r} + \\
& + \left[A_{55} + d_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} f_1 - \left[A_{33} - d_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z} f_2 \Big\} + \omega^2 \Phi_{12};
\end{aligned} \tag{1.63}$$

$$\begin{aligned}
u_z = & \Phi_{21} - \omega D_1 \Phi_{21} - \frac{\omega}{\beta} \left\{ \left[A_{55} (A_{33} + A_{13}) + d_4 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_{21} + \right. \\
& + A_{55} \left[A_{11} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 - A_{13} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{11} + \\
& + \left[A_{23} A_{55} + (A_{11} A_{23} - A_{12} A_{13} - A_{12} A_{55} - A_{23} A_{55}) \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\Phi_{11}}{r} - \\
& \left. - \left[A_{55} + d_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z} f_1 - \left[A_{11} - d_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} f_2 \right\} + \omega^2 \Phi_{22},
\end{aligned}$$

где

$$d_4 = A_{11} A_{33} - A_{13}^2 - A_{55} (A_{11} + A_{33} + 2A_{13}).$$

Тут β , d_1 , d_2 определяются формулами (1.62), а $\Phi_{ij}(r, z, t)$ ($i, j=1,2$) – неопределенные компоненты структуры.

Структура решения второй основной динамической задачи имеет тот же вид, что и для изотропного тела, и записывается формулами

$$\begin{aligned}
u_r &= g_1 + \omega \Phi_{11}; \\
u_z &= g_2 + \omega \Phi_{21}.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Для смешанной задачи структуру решения представим в виде

$$\begin{aligned}
u_r &= g_1 + \omega_1 \Phi_{11} + \omega \Phi_{12}^0; \\
u_z &= g_2 + \omega_1 \Phi_{21} + \omega \Phi_{22}^0
\end{aligned} \tag{1.65}$$

и, таким образом, удовлетворим условиям (1.28) для смещений на $\partial\Omega_1$ ($\omega_1 = 0$) независимо от выбора произвольных функций Φ_{11} , Φ_{12}^0 , Φ_{21} , Φ_{22}^0 .

При удовлетворении условиям (1.54) на участке $\partial\Omega_2$ ($\partial\Omega_2 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$), где заданы напряжения, функции Φ_{12}^0 и Φ_{22}^0 соответствующим образом выразятся через Φ_{11} , Φ_{21} . Для этого, как и при построении структуры решения первой основной динамической задачи, подставим представления (1.65) в продолженные внутрь $\Omega \cup \partial\Omega_1$ граничные условия (1.57) на $\partial\Omega_2$ и получим систему относительно Φ_{12}^0 , Φ_{22}^0 . Разрешив ее, структуру решения осесимметричной смешанной динамической задачи для цилиндрически ортотропного тела запишем в виде

$$\begin{aligned}
u_r = & \Phi_{11}^0 - \omega D_1^{(2)} \Phi_{11}^0 + \frac{\omega}{\beta^{(2)}} \left\{ \left[A_{55}(A_{11} + A_{13}) + d_4 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1^{(2)} \Phi_{11}^0 + \right. \\
& + A_{55} \left[A_{33} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 - A_{13} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \right] T_1^{(2)} \Phi_{21}^0 - \\
& - \left[A_{12} A_{55} + (A_{12} A_{33} - A_{12} A_{55} - A_{13} A_{23} - A_{23} A_{55}) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\Phi_{11}^0}{r} + \\
& \left. + \left[A_{55} + d_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial r} f_1 - \left[A_{33} - d_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial z} f_2 \right\} + \omega \omega_2 \Phi_{12};
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}
u_z = & \Phi_{21}^0 - \omega D_1^{(2)} \Phi_{21}^0 - \frac{\omega}{\beta^{(2)}} \left\{ \left[A_{55}(A_{33} + A_{13}) + d_4 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1^{(2)} \Phi_{21}^0 + \right. \\
& + A_{55} \left[A_{11} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 - A_{13} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \right] T_1^{(2)} \Phi_{11}^0 + \\
& + \left[A_{23} A_{55} + (A_{11} A_{23} - A_{12} A_{13} - A_{12} A_{55} - A_{23} A_{55}) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\Phi_{11}^0}{r} - \\
& \left. - \left[A_{55} + d_1 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial z} f_1 - \left[A_{11} - d_1 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_2}{\partial r} f_2 \right\} + \omega \omega_2 \Phi_{22},
\end{aligned}$$

$$\beta^{(2)} = A_{55}(A_{13} + 2A_{55}) + A_{55} \left[d_1 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^4 + d_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^4 \right] + d_3 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2;$$

$$\Phi_{11}^0 = g_1 + \omega_1 \Phi_{11};$$

$$\Phi_{21}^0 = g_2 + \omega_1 \Phi_{21};$$

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z};$$

$$T_1^{(2)} = -\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Постоянные d_1, d_2, d_3, d_4 определены формулами из (1.62), (1.63).

Остановимся теперь на построении структуры решения динамической контактной задачи без учета сил трения:

$$u_\nu = h(r, z, t) \text{ на } \partial\Omega_1; \quad (1.67)$$

$$\sigma_\nu = f_1^0(r, z, t) \text{ на } \partial\Omega_2; \quad (1.68)$$

$$\tau_\nu = f_2^0(r, z, t) \text{ на } \partial\Omega, \quad (1.69)$$

$$f_2^0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1, \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2.$$

Записанные через смещения условия (1.68), (1.69) имеют вид (1.57). Обозначив через $\omega, \omega_1, \omega_2$ левые части нормализованных уравнений границы $\partial\Omega$ и ее участков $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, продолжим условия (1.57) внутрь области с

помощью операторов $D_1, T_1, D_1^{(2)}$ ($D_1^{(2)} = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} D_1$) следующим образом:

$$G_{11}D_1^{(2)}u_r + G_{12}D_1^{(2)}u_z - G_{13}T_1 u_r + G_{14}T_1 u_z + G_{15}\frac{u_r}{r} = f_1 + \omega\varphi_1;$$

$$G_{21}D_1^{(2)}u_r + G_{12}D_1^{(2)}u_z + G_{23}T_1 u_r + G_{24}T_1 u_z + G_{25}\frac{u_r}{r} = f_2 + \omega\varphi_2, \quad (1.70)$$

где $f_1(r, z, t), f_2(r, z, t)$ – продолжения функций $f_1^0(r, z, t), f_2^0(r, z, t)$ внутрь области Ω ; G_{ij} ($i=1,2; j=\overline{1,5}$) определяются формулами (1.58); φ_1, φ_2 – произвольные функции.

Для удовлетворения условию (1.67) функции u_r, u_z достаточно представить в виде

$$u_r = h \frac{\partial \omega}{\partial r} - \psi \frac{\partial \omega}{\partial z} + \omega_1 \Phi_{11} + \omega \Phi_{12}^0;$$

$$u_z = h \frac{\partial \omega}{\partial z} + \psi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega_1 \Phi_{21} + \omega \Phi_{22}^0, \quad (1.71)$$

где $\psi, \Phi_{11}, \Phi_{12}^0, \Phi_{21}, \Phi_{22}^0$ – неопределенные функции, причем Φ_{12}^0 и Φ_{22}^0 можно выразить через $\psi, \Phi_{11}, \Phi_{21}$ путем реализации условий (1.70). В результате подстановки (1.71) в (1.70) получаем систему уравнений относительно Φ_{12}^0, Φ_{22}^0 :

$$G_{11}\Phi_{12}^0 + G_{12}\Phi_{22}^0 = F_1 + \omega\varphi_3; \quad (1.72)$$

$$-G_{21}\Phi_{12}^0 + G_{22}\Phi_{22}^0 = F_2 + \omega\varphi_4,$$

где

$$F_1 = f_1 - G_{11}D_1^{(2)}\Phi_{11}^0 - G_{12}D_1^{(2)}\Phi_{21}^0 + G_{13}T_1\Phi_{11}^0 - G_{14}T_1\Phi_{21}^0 - G_{15}\frac{\Phi_{11}^0}{r};$$

$$F_2 = f_2 + G_{21}D_1\Phi_{11}^0 - G_{22}D_1\Phi_{21}^0 - G_{23}T_1\Phi_{11}^0 - G_{24}T_1\Phi_{21}^0 - G_{25}\frac{\Phi_{11}^0}{r}; \quad (1.73)$$

$$\Phi_{11}^0 = h\frac{\partial\omega}{\partial r} - \psi\frac{\partial\omega}{\partial z} + \omega_1\Phi_{11} + \omega_1\Phi_{11};$$

$$\Phi_{21}^0 = h\frac{\partial\omega}{\partial z} + \psi\frac{\partial\omega}{\partial r} + \omega_1\Phi_{11} + \omega_1\Phi_{21}, \quad (1.74)$$

а φ_3, φ_4 – произвольные функции.

Решение системы (1.52) дает выражения для Φ_{12}^0, Φ_{22}^0 :

$$\Phi_{12}^0 = \frac{1}{\beta}(F_1G_{22} - F_2G_{12}) + \omega\psi_1;$$

$$\Phi_{22}^0 = \frac{1}{\beta}(F_1G_{21} + F_2G_{11}) + \omega\psi_2, \quad (1.75)$$

где β, d_1, d_2, d_3 определяются равенствами (1.62). Тогда на основании формул (1.71), (1.75), (1.73) и (1.58) структуру решения контактной динамической задачи запишем так:

$$u_r = \Phi_{11}^0 - \left(\eta_1 \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} + \eta_2 \right) D_1 \Phi_{11}^0 + \eta_3 \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} D_1 \Phi_{21}^0 +$$

$$+ \frac{\omega}{\beta} \left\{ \left[A_{55}(A_{11} + A_{13}) + d_4 \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial\omega}{\partial r} \frac{\partial\omega}{\partial z} T_1 \Phi_{11}^0 + A_{55} \left[A_{33} \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 - A_{13} \left(\frac{\partial\omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{21}^0 - \right.$$

$$\left. - \left[A_{12}A_{55} + (A_{12}A_{33} - A_{12}A_{55} - A_{13}A_{23} - A_{23}A_{55}) \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial\omega}{\partial r} \frac{\Phi_{11}^0}{r} + \right.$$

$$\left. + \left[A_{55} + d_2 \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial\omega}{\partial r} f_1 - \left[A_{33} - d_2 \left(\frac{\partial\omega}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial\omega}{\partial z} f_2 \right\} + \omega^2 \Phi_{12}; \quad (1.76)$$

$$u_z = \Phi_{21}^0 - \left(\eta_1 + \eta_2 \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \right) D_1 \Phi_{21}^0 + \eta_4 \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} D_1 \Phi_{11}^0 -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\omega}{\beta} \left\{ \left[A_{55}(A_{33} + A_{13}) + d_4 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_{21}^0 + A_{55} \left[A_{11} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 - A_{13} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{11}^0 + \right. \\
& \quad + \left[A_{23}A_{55} + (A_{11}A_{23} - A_{12}A_{13} - A_{12}A_{55} - A_{23}A_{55}) \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\Phi_{11}^0}{r} - \\
& \quad \left. - \left[A_{55} + d_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial z} f_1 - \left[A_{11} - d_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} f_2 \right\} + \omega^2 \Phi_{22}.
\end{aligned}$$

В структурах решения (1.76) функция β и коэффициенты d_1, d_2 определяются равенствами (1.62), коэффициент d_4 – из формул (1.63). Через Φ_{11}^0, Φ_{21}^0 обозначены выражения (1.74), а функции η_i ($i = \overline{1,4}$) записываются в виде

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \left[A_{11} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + a_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \left[A_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2; \\
\eta_2 &= \left[a_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + A_{33} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \left[a_3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2; \\
\eta_3 &= \left[a_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + A_{33} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \left[A_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z}; \\
\eta_4 &= \left[A_{11} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + a_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \left[a_3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= A_{13} + 2A_{55}; \\
a_2 &= A_{33} - A_{13} - A_{55}; \\
a_3 &= A_{11} - A_{13} - A_{55}.
\end{aligned}$$

Учтено также, что

$$D_1^{(2)} = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} D_1.$$

Неопределенными компонентами структуры (1.76) являются функции $\Phi_{ij}(r, z, t)$ ($i, j = \overline{1,2}$).

Построенными структурами решения основных осесимметричных динамических задач для цилиндрически ортотропного тела можно пользоваться и в случае трансверсальной изотропии (как прямолинейной, так и криволинейной). При трансверсальной изотропии относительно оси Oz выполняется равенство коэффициентов

$$A_{11} = A_{22} = A_{12} + 2A_{66}; \quad A_{13} = A_{23}; \quad A_{44} = A_{55}.$$

Если существует трансверсальная изотропия относительно радиуса, то

$$A_{12} = A_{13}; \quad A_{55} = A_{66}; \quad A_{22} = A_{33} = A_{23} + 2A_{44}.$$

Глава 2. Нестационарные динамические задачи термоупругости в двумерных областях

Возросшие температуры и скорости протекания термодинамических процессов в различных установках современной техники не позволяют ограничиваться рассмотрением стационарных тепловых процессов при исследовании тепловых напряжений. Во многих современных областях энергетики, машиностроения и др. необходимо учитывать напряжения, возникающие при внезапных изменениях температуры. Кратковременные, но достаточно большие значения этих напряжений могут стать причиной распространения уже имеющихся трещин даже при отсутствии внешних механических воздействий. Естественно, что наиболее опасны резкие перепады температур. В этом случае возникает необходимость в учете инерционных эффектов.

Основные фундаментальные результаты по этой проблематике обобщены в монографиях [1, 3, 18, 19, 38]. Задача о тепловом ударе на поверхности полупространства впервые исследована В. И. Даниловской [7] методами операционного исчисления; были установлены особенности распространения динамических тепловых напряжений, характерные для рассматриваемого типа задач. Позднее в работах [50, 51] было приведено точное решение задачи при линейном законе повышения температуры границы до определенного значения за определенный промежуток времени.

Для исследования динамических задач термоупругости, описывающих нестационарные процессы в упругих телах, предлагается метод, основанный на совместном применении теории R -функций, конечно-разностной аппроксимации по времени и вариационных методов [17, 24, 31, 37]. Приближенное решение представляется в виде разложения по элементам некоторых полных систем функций, которое точно учитывает граничные условия и форму тела. Эти системы функций строятся с помощью левых частей нормализованных до первого порядка уравнений границ областей и классических полиномов.

2.1. Плоские динамические задачи термоупругости

Рассмотрим упругое тело, которое занимает в плоскости x_1Ox_2 область Ω с границей $\partial\Omega$. Напряженно-деформированное состояние тела, обусловленное зависящим от времени внешним силовым воздействием и температурным полем, описывается в Ω уравнениями движения [13]

$$\begin{aligned} \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \frac{\partial e}{\partial x_1} + \Delta U_1 + F_1 - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \frac{\partial e}{\partial x_2} + \Delta U_2 + F_2 - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

уравнением теплопроводности

$$\Delta T = \frac{1}{b_0} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.2)$$

начальными условиями

$$U_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial U_i(x, 0)}{\partial t} = \Psi_i(x) \quad (i = 1, 2), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad (2.3)$$

а на поверхности $\partial\Omega$ – механическими граничными условиями

$$\sigma_v = f_1(x, t), \quad \tau_v = f_2(x, t), \quad x \in \partial\Omega \quad (2.4)$$

(первая основная задача)

$$U_1 = g_1(x, t), \quad U_2 = g_2(x, t), \quad x \in \partial\Omega_u,$$

$$\sigma_v = f_1(x, t), \quad \tau_v = f_2(x, t), \quad x \in \partial\Omega_\sigma, \quad (2.5)$$

$$(\partial\Omega = \partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u);$$

(смешанная задача)

и тепловыми условиями

$$T(x, t) = T_1(x, t), \quad x \in \partial\Omega_T, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} + hT(x, t) = q_1(x, t), \quad x \in \partial\Omega_n. \quad (2.7)$$

Равенства (2.1)–(2.7) записаны в безразмерных величинах

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\bar{x}_i}{R}, \quad t = \frac{\bar{t}}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad F_i = \frac{R}{\sigma_0} \bar{F}_i \quad (i = 1, 2), \\ T &= \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\sigma_0} \bar{T}, \quad b_0 = \frac{a}{R} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad h = \frac{\alpha_0}{K_0}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned}$$

Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений отнесены соответственно к $R\sigma_0/\mu$ и σ_0 ; R – постоянная, имеющая размерность длины; чертой обозначены соответствующие размерные переменные, λ , μ – коэффициенты Ламе при изотермической деформации; α_T – коэффициент

линейного теплового расширения; a , K_0 , α_0 – соответственно коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и теплоотдачи; ρ – плотность материала тела; $U_i(x, t)$, $F_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) – компоненты соответственно вектора перемещений и вектора массовых сил; $T(x, t)$ – прирост температуры; Δ , e – оператор Лапласа и объемная деформация, $x = (x_1, x_2)$, $t \in [0, t_0]$.

Применим в сформулированной начально-краевой задаче непосредственно дискретизацию по времени путем замены неизвестных перемещений, температуры и напряжений и их производных соответствующими дискретными аналогами. Применяя метод Рунге, редуцируем рассматриваемую динамическую задачу к последовательности стационарных граничных задач; при этом правые части уравнений будут содержать решения на предыдущих временных слоях.

Введем разбиение временного промежутка $[0, t_0]$ на N частей с шагом $h_t = t_0/N$ и аппроксимируем на нем производные по времени с помощью таких конечных разностей:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) \approx \frac{u(x, t_k) - u(x, t_{k-1})}{h_t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t_k) \approx \frac{u(x, t_k) - 2u(x, t_{k-1}) + u(x, t_{k-2})}{h_t^2}.$$

Получаем последовательность стационарных граничных задач (значения всех величин в момент времени t_k будем обозначать верхним индексом « k »)

$$\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \frac{\partial e^{(k)}}{\partial x_1} + \Delta U_1^{(k)} - \frac{U_1^{(k)}}{h_t^2} + G_1^{(k)} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \frac{\partial e^{(k)}}{\partial x_2} + \Delta U_2^{(k)} - \frac{U_2^{(k)}}{h_t^2} + G_2^{(k)} = 0,$$

$$\Delta T^{(k)} - \frac{1}{b_0 h_t} T^{(k)} = -\frac{1}{b_0 h_t} T^{(k-1)}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_v^{(k)} = f_1^{(k)}, \quad \tau_v^{(k)} = f_2^{(k)}, \quad x \in \partial\Omega; \quad (2.10)$$

$$U_i^{(k)} = g_i^{(k)}, \quad (i = 1, 2), \quad x \in \partial\Omega_u;$$

$$\sigma_v^{(k)} = f_1^{(k)}, \quad \tau_v^{(k)} = f_2^{(k)}, \quad x \in \partial\Omega_\sigma; \quad (2.11)$$

$$T^{(k)} = T_1^{(k)}, \quad x \in \partial\Omega_T; \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial T^{(k)}}{\partial \nu} + h T^{(k)} = q_1^{(k)}, \quad x \in \partial\Omega_n. \quad (2.13)$$

Здесь введены обозначения

$$U_i^{(k)}(x) = U_i(x, kh_t); \quad f_i^{(k)}(x) = f_i(x, kh_t); \quad g_i^{(k)}(x) = g_i(x, kh_t);$$

$$T^{(k)}(x) = T(x, kh_t); \quad q^{(k)}(x) = q(x, kh_t);$$

$$G_i^{(k)}(x) = F_i(x, kh_t) + \frac{1}{h_t^2} (2U_i^{(k-1)} - U_i^{(k-2)}) - \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x_i};$$

$$U_i^{(0)}(x) = \varphi_i(x); \quad U_i^{(-1)}(x) = \varphi_i(x) - h_t \psi_i(x); \quad (i = 1, 2); \quad T^{(0)}(x) = T_0(x).$$

Следуя [31], структуру решения задачи теплопроводности (2.9), (2.12) запишем в виде

$$T^{(k)} = T_1^{(k)} + \varpi \Phi_0^{(k)}$$

или

$$T^{(k)} = \Phi_0^{(k)} - \varpi D_1 \Phi_0^{(k)} - \varpi h_0 \Phi_0^{(k)} - \varpi q_0$$

для задачи (2.9), (2.13).

Для первой основной задачи (2.8), (2.10) структуру решения представим формулами

$$U_1^{(k)} = \beta^2 \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} (f_1^{(k)} + T^{(k)}) - \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial x_2} f_2^{(k)} + \Phi_1^{(k)} - \varpi D_1 \Phi_1^{(k)} + \\ + 2(1 - \beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} \frac{\partial \varpi}{\partial x_2} T_1 \Phi_1^{(k)} + \varpi \left[\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_2} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1 \Phi_2^{(k)},$$

$$U_2^{(k)} = \beta^2 \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial x_2} (f_1^{(k)} + T^{(k)}) + \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} f_2^{(k)} + \Phi_2^{(k)} - \varpi D_1 \Phi_2^{(k)} - \\ - 2(1 - \beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} \frac{\partial \varpi}{\partial x_2} T_1 \Phi_2^{(k)} + \varpi \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1 \Phi_1^{(k)}.$$

Структура решения смешанной задачи (2.8), (2.11) имеет вид

$$U_1^{(k)} = \Phi_3^{(k)} + \beta^2 \varpi \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} (f_1^{(k)} + T^{(k)}) - \varpi \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} f_2^{(k)} - \varpi D_1^{(2)} \Phi_3^{(k)} + \\ + 2(1 - \beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} T_1^{(2)} \Phi_3^{(k)} + \varpi \left[\left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1^{(2)} \Phi_4^{(k)},$$

$$U_2^{(k)} = \Phi_4^{(k)} + \beta^2 \varpi \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} (f_1^{(k)} + T^{(k)}) + \varpi \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} f_2^{(k)} - \varpi D_1^{(2)} \Phi_4^{(k)} - \\ - 2(1 - \beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} T_1^{(2)} \Phi_4^{(k)} + \varpi \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1^{(2)} \Phi_3^{(k)},$$

$$\Phi_3^{(k)} = g_1^{(k)} + \varpi_1 \Phi_1^{(k)}, \quad \Phi_4^{(k)} = g_2^{(k)} + \varpi_1 \Phi_2^{(k)}.$$

Здесь $\Phi_i^{(k)}$ ($i = 0, 1, 2$) – произвольные функции; независимо от их выбора краевые условия выполняются точно, а их наличие в структурах позволяет удовлетворить определяющим уравнениям задачи; $\varpi = 0$, $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$ – нормализованные до первого порядка уравнения участков $\partial\Omega$, $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_\sigma$ поверхности тела; в задаче теплопроводности $\varpi = 0$ отвечает $\partial\Omega_T$ или $\partial\Omega_n$; D_1 , T_1 , $D_1^{(2)}$, $T_1^{(2)}$, – операторы продолжения операторов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ в соответствующие области [24]:

$$D_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \varpi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad T_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial \varpi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad T_1^{(2)} = \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial \varpi_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\Phi_0^{(k)} = \sum_i c_{i0}^{(k)} \xi_i(x), \quad \Phi_1^{(k)} = \sum_i c_i^{(k)} \eta_i(x), \quad \Phi_2^{(k)} = \sum_i d_i^{(k)} \zeta_i(x), \quad (2.14)$$

где ξ_i , η_i , ζ_i – элементы некоторых полных систем функций; коэффициенты разложения находятся из условия минимума соответствующих функционалов [13]:

$$J_1(T^{(k)}) = \int_{\Omega} \left\{ \left(\text{grad} T^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{b_0 h_t} \left[\left(T^{(k)} \right)^2 - 2T^{(k)} T^{(k-1)} \right] \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_n} \left[h \left(T^{(k)} \right)^2 - 2T^{(k)} q_1^{(k)} \right] d\partial\Omega$$

и

$$J_2(U^{(k)}) = \int_{\Omega} \left[2W(U_1^{(k)}, U_2^{(k)}) + \frac{1}{h_t^2} \left[\left(U_1^{(k)} \right)^2 + \left(U_2^{(k)} \right)^2 \right] - 2 \left(G_1^{(k)} U_1^{(k)} + G_2^{(k)} U_2^{(k)} \right) \right] d\Omega -$$

$$- \int_{\partial\Omega_\sigma} \left[f_1^{(k)} \left(U_1^{(k)} l + U_2^{(k)} m \right) + f_2^{(k)} \left(U_2^{(k)} l - U_1^{(k)} m \right) \right] d\partial\Omega;$$

$$(l = \cos(\nu, x_1), \quad m = \cos(\nu, x_2)),$$

что приводит поставленную задачу на каждом временном слое к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (2.14).

2.2. Неустановившиеся температурные напряжения в цилиндре конечной длины при тепловом ударе на его торцах

Рассмотрим динамическое состояние упругого цилиндра $r \leq 1$, $|z| \leq h$, предполагая что температура на его торцах внезапно принимает значение T_c , а боковая поверхность поддерживается при температуре T_0 , совпадающей с начальной температурой цилиндра. Считаем, что поверхность цилиндра свободна от нагружения, внутренние источники тепла отсутствуют.

В силу симметрии относительно оси Oz и без учета связанности полей деформаций и температур изменение во времени термоупругого состояния цилиндра определяется решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \beta^2 \Delta u_r + (1 - \beta^2) \frac{\partial e}{\partial r} - \beta^2 \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{b_0^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \beta^2 \Delta u_z + (1 - \beta^2) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{b_0^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

при граничных

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0, & \sigma_{rz} &= 0 & (r=1) \\ \sigma_z &= 0, & \sigma_{rz} &= 0 & (z=\pm h) \end{aligned} \quad (2.16)$$

и начальных

$$u_r = u_z = \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \quad (t=0) \quad (2.17)$$

условиях;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

При этом безразмерные компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - T, \\ \sigma_\theta &= \frac{u_r}{r} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - T, \\ \sigma_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - T, \\ \sigma_{rz} &= \beta^2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Температурное поле определяется уравнением теплопроводности

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

при соответствующих граничных и начальных условиях:

$$T = H(t) \quad (z = \pm h); \quad T = 0 \quad (r = 1); \quad T = 0 \quad (t = 0). \quad (2.19)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

В задаче использованы безразмерные величины, введенные в первом пункте, а компоненты вектора перемещений и тензора напряжений отнесены соответственно к $\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T R(T_c - T_0)}{\lambda + 2\mu}$ и $(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)$. Упругие и термические коэффициенты и удельные теплоемкости считаем постоянными.

Аналогично предыдущему введем разбиение временного промежутка, на котором рассматривается процесс, и аппроксимируем на нем производные по времени с помощью конечных разностей

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, z, t_k) \approx \frac{u(r, z, t_k) - u(r, z, t_{k-1})}{h_t}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u(r, z, t_k) - 2u(r, z, t_{k-1}) + u(r, z, t_{k-2})}{h_t^2}, \quad (2.21)$$

$$h_t = t_0/N, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Использование формул (2.20)–(2.21) позволяет привести задачу (2.15)–(2.19) к следующей последовательности стационарных на каждом временном интервале длительности h_t граничных задач:

$$\Delta T^{(k)} - \frac{1}{h_t} T^{(k)} = -\frac{1}{h_t} T^{(k-1)}, \quad (2.22)$$

$$T^{(k)} = 1 \quad (z = \pm h); \quad T^{(k)} = 0 \quad (r = 1); \quad T^{(0)} = 0$$

($T^{(k)} = T(r, z, kh_t)$; h_t – шаг дискретизации по времени)

и

$$\beta^2 \Delta u_r^{(k)} + (1 - \beta^2) \frac{\partial e^{(k)}}{\partial r} - \beta^2 \frac{u_r^{(k)}}{r^2} - \frac{u_r^{(k)}}{b_0^2 h_t^2} = G_1^{(k)},$$

$$\beta^2 \Delta u_z^{(k)} + (1 - \beta^2) \frac{\partial e^{(k)}}{\partial z} - \frac{u_z^{(k)}}{b_0^2 h_t^2} = G_2^{(k)}, \quad (2.23)$$

$$\sigma_r^{(k)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(k)} = 0 \quad (r = 1) \quad \sigma_z^{(k)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(k)} = 0 \quad (z = \pm h).$$

Здесь $G_1^{(k)} = \frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{b_0^2 h_t^2} (2u_r^{(k-1)} - u_r^{(k-2)})$, $G_2^{(k)} = \frac{\partial T^{(k)}}{\partial z} - \frac{1}{b_0^2 h_t^2} (2u_z^{(k-1)} - u_z^{(k-2)})$,

$$u_r^{(0)} = u_r^{(-1)} = u_z^{(0)} = u_z^{(-1)} = 0.$$

Пусть $\omega = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ – уравнения соответственно полной поверхности цилиндра, его торцов и боковой поверхности, при этом

$$\omega_1 = h^2 - z^2, \quad \omega_2 = 1 - r^2, \quad \omega = \frac{1-r^2}{2} \wedge_0 \frac{h^2 - z^2}{2h}.$$

Запишем структуру решения задачи (2.22) в виде

$$T^{(k)} = T_\omega + \omega \Phi_0^{(k)},$$

где $T_\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$, а $\Phi_0^{(k)}$ – произвольная компонента структуры, при любом выборе которой граничные условия задачи (2.22) удовлетворяются точно; представим ее в виде разложения по элементам некоторой полной системы функций (например, полиномов Чебышева):

$$\Phi_0^{(k)}(r, z) = \sum_i C_{i0}^{(k)} \xi_i(r, z).$$

Поскольку оператор задачи (2.22) положительно определенный, то она эквивалентна вариационной задаче для функционала [13]

$$J_1(T^{(k)}) = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{h_t} \left[(T^{(k)})^2 - 2T^{(k)}T^{(k-1)} \right] \right\} d\Omega,$$

из условия минимума которого и находим коэффициенты $C_{i0}^{(k)}$, получая для них систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} C_{i0}^{(k)} = b_j^{(k)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$a_{ji} = \int_{\Omega} \left[\left(\omega \frac{\partial \xi_i}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \xi_i \right) \left(\omega \frac{\partial \xi_j}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \xi_j \right) + \left(\omega \frac{\partial \xi_i}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \xi_i \right) \left(\omega \frac{\partial \xi_j}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \xi_j \right) + \frac{1}{h_t} \omega^2 \xi_i \xi_j \right] d\Omega,$$

$$b_j^{(k)} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{h_t} \omega (T^{(k-1)} - T_\omega) \xi_j - \frac{\partial T_\omega}{\partial r} \left(\omega \frac{\partial \xi_j}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \xi_j \right) - \frac{\partial T_\omega}{\partial z} \left(\omega \frac{\partial \xi_j}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \xi_j \right) \right] d\Omega,$$

$$\Omega = \{(r, z) : 0 \leq r \leq 1; 0 \leq z \leq h\}.$$

Структуру решения задачи (2.23) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= \Phi_{11}^{(k)} + \omega \Phi_{12}^{(k)}, \\ u_z^{(k)} &= \Phi_{21}^{(k)} + \omega \Phi_{22}^{(k)}. \end{aligned}$$

Продолжив граничные условия задачи в середину области Ω с помощью операторов D_1 и T_1 [24] и определив функции $\Phi_{i2}^{(k)}$ ($i = 1, 2$) таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям, после ряда преобразований получаем

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} T^{(k)} + \Phi_{11}^{(k)} - \omega D_1 \Phi_{11}^{(k)} + 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_{11}^{(k)} - \\ &\quad - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\Phi_{11}^{(k)}}{r} + \omega \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{21}^{(k)}, \\ u_z^{(k)} &= \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} T^{(k)} + \Phi_{21}^{(k)} - \omega D_1 \Phi_{21}^{(k)} - 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_{21}^{(k)} - \\ &\quad - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\Phi_{11}^{(k)}}{r} + \omega \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{11}^{(k)}. \end{aligned}$$

В дальнейшем неопределенные компоненты структуры $\Phi_{1i}^{(k)}$ ($i = 1, 2$) представляем в виде разложения по элементам некоторых полных систем функций, находя коэффициенты разложения из условия эквивалентности задачи (2.23) задаче о минимуме соответствующего функционала, благодаря чему получаем для их определения систему линейных алгебраических уравнений.

Заметим, что в обеих задачах (2.22) и (2.23) основная матрица системы не зависит от времени, то есть на всех временных слоях одна и та же, а требуют пересчета лишь правые части системы, что упрощает вычисление термоупругих динамических характеристик.

Следует отметить, что предложенный алгоритм без значительных изменений можно применить для решения многих других задач о термоупругих динамических напряжениях в телах вращения.

2.3. Термическое возмущение упругого цилиндра при мгновенном приложении поверхностных сил на его торцах

Предлагается развитие метода R -функций совместно с методом малого параметра применительно к задачам связанной термоупругости. Получено структурное решение задачи о распределении температур и напряжений в конечном цилиндре, боковая поверхность которого теплоизолирована, а к торцам внезапно прикладывается некоторая нагрузка.

Пусть к торцам $z = \pm h_0$ упругого цилиндра $r \leq R$, $|z| \leq h_0$ с начальной температурой T_0 и теплоизолированной поверхностью мгновенно прикладываются сжимающие силы интенсивности p_0 .

Если принять за основные переменные температуру T и перемещения u_r , u_z , то задача определения термического возмущения внутри цилиндра при условии отсутствия внутренних источников тепла и с учетом осевой симметрии в системе координат (r, φ, z) сводится к интегрированию в области Ω , что содержит тело, системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} &= \frac{1}{B_0^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= \frac{1}{B_0^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.24)$$

при следующих краевых и начальных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -p_1 H(t), \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_1, \\ \sigma_r &= 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_2, \\ T &= 0, \quad u_r = u_z = \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В (2.24)–(2.25) использованы обозначения

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{r}}{R}, \quad z = \frac{\bar{z}}{R}, \quad t = \frac{a\bar{t}}{R^2}, \quad T = \frac{\bar{T} - T_0}{T_0}, \quad h = \frac{h_0}{R}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \\ B_0^2 &= \frac{(\lambda + 2\mu)R^2}{\rho a^2}, \quad p_1 = \frac{p_0}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0}, \quad \varepsilon = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 a T_0}{(\lambda + 2\mu)\lambda q}; \end{aligned}$$

компоненты вектора перемещений и тензора напряжений отнесены соответственно к $(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0 R / (\lambda + 2\mu)$ и $(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0$; λ_q – коэффициент теплопроводности [8]; $\partial\Omega_1$ – часть поверхности цилиндра $\partial\Omega$, совпадающая с торцами, $\partial\Omega_2$ – боковая поверхность цилиндра.

Параметр связанности ε , входящий в первое уравнение системы (2.24), представляет собой величину, что характеризует взаимодействие полей деформаций и температуры. Его значение для большинства металлов лежит в пределах 0,01–0,03 [8]. Учитывая это, применим для решения задачи метод малого параметра.

Используя разностную аппроксимацию производных по времени

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t}(r, z, t_k) &\approx \frac{T(r, z, t_k) - T(r, z, t_{k-1})}{h_t} \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}(r, z, t_k) &\approx \frac{u_r(r, z, t_k) - 2u_r(r, z, t_{k-1}) + u_r(r, z, t_{k-2})}{h_t^2}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}(r, z, t_k) &\approx \frac{u_z(r, z, t_k) - 2u_z(r, z, t_{k-1}) + u_z(r, z, t_{k-2})}{h_t^2}, \\ t \in [0, t_0], \quad h_t = t_0/N, \quad k = 1, 2, \dots, N,\end{aligned}$$

получаем такую последовательность стационарных краевых задач:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial z^2} - \frac{T^{(k)}}{h_t} = \\ &= -\frac{T^{(k-1)}}{h_t} + \frac{\varepsilon}{h_t} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(k)}}{r} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} - \frac{\partial u_r^{(k-1)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(k-1)}}{r} - \frac{\partial u_z^{(k-1)}}{\partial z} \right),\end{aligned}\tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(k)}}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial z^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial z} - \frac{u_r^{(k)}}{B_0^2 h_t^2} = \\ &= \frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{B_0^2 h_t^2} (u_r^{(k-2)} - 2u_r^{(k-1)}), \\ &\frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) - \frac{u_z^{(k)}}{B_0^2 h_t^2} = \\ &= \frac{\partial T^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{B_0^2 h_t^2} (u_z^{(k-2)} - 2u_z^{(k-1)}),\end{aligned}\tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(k)} = -p_1, \quad \sigma_{rz}^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial T^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (z = \pm h), \\
\sigma_r^{(k)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} = 0 \quad (r = 1), \\
T^{(0)} = 0, \quad u_r^{(0)} = u_r^{(-1)} = u_z^{(0)} = u_z^{(-1)} = 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Индекс « k » указывает, что соответствующая величина исчисляется в момент времени $t = kh_t$.

В соответствии с методом малого параметра решение задачи на k -м временном слое ($k = 1, 2, \dots, N$) будем искать в виде степенных рядов по параметру ε

$$T^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m T_m^{(k)}, \quad u_r^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_{r,m}^{(k)}, \quad u_z^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_{z,m}^{(k)}. \tag{2.29}$$

Заметим, что коэффициенты разложения $T_m^{(k)}$, $u_{r,m}^{(k)}$, $u_{z,m}^{(k)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) не зависят от ε , а $T_0^{(k)}$, $u_{r,0}^{(k)}$, $u_{z,0}^{(k)}$ – решение при $\varepsilon = 0$. Путем подстановки (2.29) в (2.26)–(2.28) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях ε , получаем: для определения нулевого приближения $T_0^{(k)}$, $u_{r,0}^{(k)}$, $u_{z,0}^{(k)}$ задачи

$$\frac{\partial^2 T_0^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_0^{(k)}}{\partial z^2} - \frac{T_0^{(k)}}{h_t} = -\frac{T^{(k-1)}}{h_t}, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_1; \quad \frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial r} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_2 \tag{2.31}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{r,0}^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r,0}^{(k)}}{\partial r} - \frac{u_{r,0}^{(k)}}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u_{r,0}^{(k)}}{\partial z^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_{z,0}^{(k)}}{\partial r \partial z} - \frac{u_{r,0}^{(k)}}{B_0^2 h_t^2} = \\
= \frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{B_0^2 h_t^2} (2u_r^{(k-1)} - u_r^{(k-2)}),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial^2 u_{z,0}^{(k)}}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_{z,0}^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z,0}^{(k)}}{\partial r} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u_{r,0}^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r,0}^{(k)}}{\partial z} \right) -$$

$$-\frac{u_{z,0}^{(k)}}{B_0^2 h_t^2} = \frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial z} - \frac{1}{B_0^2 h_t^2} (2u_z^{(k-1)} - u_z^{(k-2)}),$$

$$\frac{\partial u_{z,0}^{(k)}}{\partial z} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_{r,0}^{(k)}}{\partial r} + \frac{u_{r,0}^{(k)}}{r} \right) - T_0^{(k)} = -p_1, \quad (r, z) \in \partial\Omega_1,$$

$$\frac{\partial u_{r,0}^{(k)}}{\partial r} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_{z,0}^{(k)}}{\partial z} + \frac{u_{r,0}^{(k)}}{r} \right) - T_0^{(k)} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_2,$$

$$\frac{\partial u_{r,0}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z,0}^{(k)}}{\partial r} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2,$$

$$T_0^{(0)} = 0, \quad u_{r,0}^{(0)} = u_{r,0}^{(-1)} = u_{z,0}^{(0)} = u_{z,0}^{(-1)} = 0, \quad (2.33)$$

а для дальнейших приближений $T_m^{(k)}$, $u_{r,m}^{(k)}$, $u_{z,m}^{(k)}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) следующие:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T_m^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_m^{(k)}}{\partial z^2} - \frac{T_m^{(k)}}{h_t} = \\ & = \frac{1}{h_t} \left(\frac{\partial u_{r,m-1}^{(k)}}{\partial r} + \frac{u_{r,m-1}^{(k)}}{r} + \frac{\partial u_{z,m-1}^{(k)}}{\partial z} - \gamma_m \left(\frac{\partial u_r^{(k-1)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(k-1)}}{r} + \frac{\partial u_z^{(k-1)}}{\partial z} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_1; \quad \frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial r} = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_2 \quad (2.35)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{r,m}^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial r} - \frac{u_{r,m}^{(k)}}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u_{r,m}^{(k)}}{\partial z^2} + \\ & + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_{z,m}^{(k)}}{\partial r \partial z} - \frac{u_{r,m}^{(k)}}{B_0^2 h_t^2} = \frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{z,m}^{(k)}}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_{z,m}^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z,m}^{(k)}}{\partial r} \right) + \\ & + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u_{r,m}^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial z} \right) - \frac{u_{z,m}^{(k)}}{B_0^2 h_t^2} = \frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{z,m}^{(k)}}{\partial z} + (1-2\beta^2) \left(\frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial r} + \frac{u_{r,m}^{(k)}}{r} \right) - T_m^{(k)} &= 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial r} + (1-2\beta^2) \left(\frac{\partial u_{z,m}^{(k)}}{\partial z} + \frac{u_{r,m}^{(k)}}{r} \right) - T_m^{(k)} &= 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_2, \quad (2.37) \\ \frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z,m}^{(k)}}{\partial r} &= 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \end{aligned}$$

$$T_m^{(0)} = 0, \quad u_{r,m}^{(0)} = u_{r,m}^{(-1)} = u_{z,m}^{(0)} = u_{z,m}^{(-1)} = 0.$$

Здесь $\gamma_m = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 0, & m > 1. \end{cases}$

Заметим, что верхним индексом « k » обозначается соответствие рассматриваемых величин k -му временному слою, а нижним индексом « m » – место тех же величин в разложениях в ряды по степеням ε температуры и компонент вектора перемещений.

Сформулированные задачи эквивалентны задаче о поиске минимума квадратичного функционала

$$J_1(T_m^{(k)}) = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{h_t} \left[(T_m^{(k)})^2 - 2T_m^{(k)} F_m^{(k)} \right] \right\} r dr dz,$$

$$F_m^{(k)} = \begin{cases} \frac{T_m^{(k-1)}}{h_t}, & m = 0 \\ -\frac{1}{h_t} \left(\frac{\partial u_{r,m-1}^{(k)}}{\partial r} + \frac{u_{r,m-1}^{(k)}}{r} + \frac{\partial u_{z,m-1}^{(k)}}{\partial z} - \gamma_m \left(\frac{\partial u_r^{(k-1)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(k-1)}}{r} + \frac{\partial u_z^{(k-1)}}{\partial z} \right) \right), & m > 0 \end{cases}$$

(для задач (2.30)–(2.31), (2.34)–(2.35)) и

$$J_2(u_{r,m}^{(k)}, u_{z,m}^{(k)}) = \iint_D \left[(1-2\beta^2) \left(\frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{z,m}^{(k)}}{\partial z} + \frac{u_{r,m}^{(k)}}{r} \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2\beta^2 \left(\left(\frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{z,m}^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u_{r,m}^{(k)}}{r} \right)^2 \right) + \\
& + \beta^2 \left(\frac{\partial u_{z,m}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{r,m}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{B_0^2 h_t^2} \left((u_{r,m}^{(k)})^2 + (u_{z,m}^{(k)})^2 \right) - 2 \left(G_{1,m}^{(k)} u_{r,m}^{(k)} + G_{2,m}^{(k)} u_{z,m}^{(k)} \right) \Big] r dr dz - \\
& - 2p_1 \int_0^1 u_{z,m}^{(k)}(r, h) r dr.
\end{aligned}$$

$$\Omega = \{(r, z) : 0 \leq r \leq 1; -h \leq z \leq h\}.$$

$$G_{1,m}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{B_0^2 h_t^2} (2u_r^{(k-1)} - u_r^{(k-2)}) - \frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial r}, & m = 0 \\ -\frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial r}, & m > 0 \end{cases};$$

$$G_{2,m}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{B_0^2 h_t^2} (2u_z^{(k-1)} - u_z^{(k-2)}) - \frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial z}, & m = 0 \\ -\frac{\partial T_m^{(k)}}{\partial z}, & m > 0 \end{cases}$$

(для задач (2.32)–(2.33), (2.36)–(2.37)) на множестве функций, которые удовлетворяют соответствующим краевым условиям.

Для построения координатных последовательностей используем аппарат R -функций, а именно, найдем выражения для коэффициентов разложения температуры $T_m^{(k)}$ и компонент вектора перемещений $u_{r,m}^{(k)}$, $u_{z,m}^{(k)}$ в таком виде, чтобы соответствующие граничные условия удовлетворялись точно. Используя операторы D_1 , T_1 [24] и известную процедуру построения структур решения краевых задач на основе теории R -функций, структуру решения задач (2.30)–(2.31) и (2.34)–(2.35) запишем как

$$T_m^{(k)} = \Phi_{0,m}^{(k)} - \omega D_1 \Phi_{0,m}^{(k)}, \quad m \geq 0,$$

где $\Phi_{0,m}^{(k)}$ – произвольная компонента структуры, при любом выборе которой граничные условия задачи удовлетворяются точно.

На основе того же метода для задач (2.32)–(2.33) и (2.36)–(2.37) структуры решений получаем в виде ($m \geq 0$)

$$u_{r,m}^{(k)} = \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \left(T_m^{(k)} - \delta_m p_1 \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right) + \Phi_{11,m}^{(k)} - \omega D_1 \Phi_{11,m}^{(k)} + 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_{11,m}^{(k)} -$$

$$(1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\Phi_{11,m}^{(k)}}{r} + \omega \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{21,m}^{(k)},$$

$$u_{z,m}^{(k)} = \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \left(T_m^{(k)} - \delta_m p_1 \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right) + \Phi_{21,m}^{(k)} - \omega D_1 \Phi_{21,m}^{(k)} - 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_{21,m}^{(k)} -$$

$$-(1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\Phi_{11,m}^{(k)}}{r} + \omega \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_{11,m}^{(k)},$$

где $\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \geq 1. \end{cases}$

Здесь, как и ранее, $\Phi_{ij,m}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2$) – неопределенные компоненты, которые не влияют на выполнение граничных условий задачи; $\omega_1 = \frac{h^2 - z^2}{2h}$, $\omega_2 = \frac{1 - r^2}{2}$, $\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2$ – нормализованные до первого порядка уравнения торцов цилиндра, его боковой и полной поверхностей.

Указанные неопределенные компоненты есть необходимыми элементами структуры решения, наличие которых позволяет удовлетворить систему уравнений рассматриваемой задачи. Раскладывая их по элементам некоторых полных систем функций (полиномы степенные, тригонометрические, Чебышева, сплайны и т. д.) и пользуясь эквивалентностью сформулированных задач соответствующим вариационным задачам, получаем систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов аппроксимационных разложений, которые являются функциями лишь времени, то есть постоянными на каждом временном слое.

Глава 3. Численное решение некоторых динамических задач для цилиндра конечной длины

Цилиндр конечной длины является одной из самых распространенных деталей в машиностроении, а также часто встречается в конструкциях авиационной, горнодобывающей, нефтяной, газовой промышленности и т.д. [2, 4, 5, 21]. Наиболее сложная и недостаточно разработанная часть расчетов таких деталей – исследование возникающих в них динамических напряжений. Волновые процессы в цилиндрических телах рассматривались в работах [20, 44–46, 48, 49] и др. В данной главе предложен метод расчета и приведен анализ динамических напряжений в цилиндрах конечной длины в зависимости от характера приложения нагрузки на торцах и соотношения геометрических размеров.

3.1. Нестационарное деформирование цилиндра конечной длины

Пусть Ω – конечное тело вращения, отнесенное к цилиндрической системе координат Orz (ось Oz направлена по оси вращения), а $\partial\Omega$ – его граница. Массовые силы отсутствуют, а поверхностные таковы, что перемещения, деформации и напряжения не зависят от угла φ . Тогда колебания тела описываются уравнениями [43]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} &= \beta^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= \beta^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

В начальный момент объект будем считать недеформированным и пребывающим в состоянии покоя:

$$u_r = u_z = \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \quad (t = 0). \quad (3.2)$$

Выражения (3.1)–(3.2) записаны в безразмерных величинах. В качестве масштаба длины используется некоторая характерная величина R , а в качестве масштаба времени – R/c_2 ; компоненты вектора смещений и тензора напряжений отнесены соответственно к $R\sigma_0/\mu$ и σ_0 (σ_0 – некоторая постоянная, имеющая размерность напряжения); λ, μ – постоянные Ляме, c_2 – скорость волн сдвига, β является отношением скорости распространения поперечных волн к скорости распространения продольных волн в бесконечной упругой среде, ρ – плотность материала:

$$\beta = \frac{c_2}{c_1}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

При этом компоненты тензора напряжений определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{u_r}{r} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \\ \sigma_z &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned}$$

а для нормальной и касательной составляющих напряжения на границе области с нормалью $\nu = (l_1; l_2)$ получаем равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= \frac{1}{\beta^2} \left[l_1^2 + (1 - 2\beta^2) l_2^2 \right] \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{\beta^2} \left[(1 - 2\beta^2) l_1^2 + l_2^2 \right] \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{\beta^2} (1 - 2\beta^2) \frac{u_r}{r} + 2l_1 l_2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \tau_\nu &= 2l_1 l_2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + (l_1^2 - l_2^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Полагаем, что на границе тела $\partial\Omega$ заданы нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения

$$\sigma_\nu = f_1(r, z), \quad \tau_\nu = f_2(r, z), \quad (r, z) \in \partial\Omega \quad (3.4)$$

Определение колебаний такого тела сводится к интегрированию системы уравнений (3.1) с учетом начальных (3.2) и краевых (3.4) условий.

Осуществим дискретизацию по времени поставленной начально-краевой задачи заменой дифференциального оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ соответствующим

разностным оператором, используя при этом равномерную сетку на отрезке $[0; T]$. Тогда на k -ом временном слое получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\beta^2}{\tau^2} \right) u_r^{(k)} + \beta^2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial z^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial z} = \\ & = \frac{\beta^2}{\tau^2} (u_r^{(k-2)} - 2u_r^{(k-1)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r^2} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{\beta^2}{\tau^2} u_z^{(k)} = \frac{\beta^2}{\tau^2} (u_z^{(k-2)} - 2u_z^{(k-1)}), \end{aligned}$$

$$\sigma_v = f_1^{(k)}, \quad \tau_v = f_2^{(k)}, \quad (r, z) \in \partial\Omega \quad (k=1, 2, \dots, N; \quad \tau = T/N),$$

$$u_r^{(0)} = u_z^{(0)} = 0, \quad u_r^{(-1)} = u_z^{(-1)} = 0 \quad (f_i^{(k)}(r, z) = f_i(r, z, k\tau), \quad i=1, 2).$$

Для решения рассматриваемой задачи применим метод R-функций. Приближенное решение задачи согласно этому методу представим в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= \beta^2 \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial r} f_1^{(k)} - \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial z} f_2^{(k)} + \Phi_1^{(k)} - \varpi D_1 \Phi_1^{(k)} + \\ &+ 2(1 - \beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial r} \frac{\partial \varpi}{\partial z} T_1 \Phi_1^{(k)} - (1 - 2\beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial r} \frac{\Phi_1^{(k)}}{r} + \\ &+ \varpi \left[\left(\frac{\partial \varpi}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_2^{(k)}, \\ u_z^{(k)} &= \beta^2 \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial r} f_1^{(k)} + \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial r} f_2^{(k)} + \Phi_2^{(k)} - \varpi D_1 \Phi_2^{(k)} - \\ &- 2(1 - \beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial r} \frac{\partial \varpi}{\partial z} T_1 \Phi_2^{(k)} - (1 - 2\beta^2) \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial z} \frac{\Phi_1^{(k)}}{r} + \\ &+ \varpi \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varpi}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_1^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь: а) функция $\varpi(r, z) \in C^2(\Omega)$ обладает свойствами:

$$\varpi(r, z) > 0, \quad (r, z) \in \Omega$$

$$\varpi(r,z) = 0, \quad l_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial r}, \quad l_2 = \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \quad (r,z) \in \partial\Omega;$$

б) операторы D_1 и T_1 определяются равенствами

$$D_1 g = \frac{\partial \varpi}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \varpi}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z},$$

$$T_1 g = -\frac{\partial \varpi}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \varpi}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial z},$$

в) функции $\Phi_i^{(k)}$ ($i=1,2$) – произвольные, при любом выборе их краевые условия выполняются точно. При численной реализации структуры решения (3.5) компоненты $\Phi_i^{(k)}$ представляются в виде разложения по некоторой полной системе функций. Коэффициенты аппроксимационных разложений на основе метода Ритца определяем, минимизируя функционал энергии.

Исследуем нестационарное деформирование прямого кругового цилиндра радиуса R_0 и высоты $2h_0$, находящегося под действием нормальной нагрузки интенсивности σ_0 , внезапно приложенной на его торцах. Граничные и начальные условия запишем в виде

$$\sigma_r(r,z,t) = 0, \quad \tau_{rz}(r,z,t) = 0 \quad \text{при } r = 1,$$

$$\sigma_z(r,z,t) = -H(t), \quad \tau_{rz}(r,z,t) = 0 \quad \text{при } z = \pm h \quad (h = h_0/R_0),$$

$$u_r = u_z = \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Тут $H(t)$ – функция Хевисайда.

Решая задачу по описанной схеме путем совместного применения методов R-функций и вариационного, будем минимизировать функционал энергии, который для рассматриваемой задачи принимает вид

$$I(u_r^{(k)}, u_z^{(k)}) = \iint_D \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{u_r^{(k)}}{r} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u_r^{(k)}}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\tau^2} \left[(u_r^{(k)})^2 + (u_z^{(k)})^2 \right] - 2(F_1^{(k)} u_r^{(k)} + F_2^{(k)} u_z^{(k)}) \right\} r \partial r \partial z +$$

$$+ 2 \int_0^1 f_1^{(k)} \left(u_r^{(k)} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} + u_z^{(k)} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) r \partial r, \quad (3.6)$$

где

$$F_1^{(k)} = \frac{1}{\tau^2} \left(2u_r^{(k-1)} - u_r^{(k-2)} \right),$$

$$F_2^{(k)} = \frac{1}{\tau^2} \left(2u_z^{(k-1)} - u_z^{(k-2)} \right),$$

$$D = \{ (r, z): 0 \leq r \leq 1, -h \leq z \leq h \}.$$

Минимизацию производим на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи и определяемых формулами (3.5). Функции $\bar{\omega}$, f_1 , f_2 , входящие в (3.5), определяются равенствами:

$$\bar{\omega} = \frac{1-r^2}{2} \Lambda_0 \frac{h^2 - z^2}{2h}, \quad f_1 = -\frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}, \quad f_2 = 0,$$

$$\bar{\omega}_1 = h^2 - z^2, \quad \bar{\omega}_2 = 1 - r^2.$$

Функции $\Phi_1^{(k)}$ и $\Phi_2^{(k)}$ раскладываем по полной системе масштабированных полиномов Чебышева ($T_i(r)$):

$$\Phi_1^{(k)} = \sum_{m=1}^{n_1} C_{1,m}^{(k)} \varphi_m^{(1)}, \quad \Phi_2^{(k)} = \sum_{m=1}^{n_2} C_{2,m}^{(k)} \varphi_m^{(2)}$$

$$\varphi_m^{(1)} = T_{2i+1}(r) T_{2j}\left(\frac{z}{h}\right), \quad \varphi_m^{(2)} = T_{2i}(r) T_{2j+1}\left(\frac{z}{h}\right), \quad (3.7)$$

$$m = (i + j + 1)(i + j + 2) / 2 - i, \quad i + j = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя (3.7) в формулы (3.5), получаем систему координатных функций

$$u_{rn}^{(k)} = u_{r0}^{(k)} + \sum_{i=1}^n C_i^{(k)} \Psi_{ri}, \quad u_{zn}^{(k)} = u_{z0}^{(k)} + \sum_{i=1}^n C_i^{(k)} \Psi_{zi},$$

в которой

$$n = n_1 + n_2,$$

$$C_i^{(k)} = \begin{cases} C_{1,i}^{(k)}, & i \leq n_1 \\ C_{2,i-n_1}^{(k)}, & n_1 < i \leq n_2 \end{cases}.$$

Коэффициенты $C_i^{(k)}$ находим из условия минимума функционала (3.6), что приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} C_j^{(k)} = b_i^{(k)} \quad (i=1,2,\dots,n).$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{ij} = \iint_D & \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} + \frac{\Psi_{ri}}{r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} + \frac{\Psi_{rj}}{r} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \Psi_{ri} \Psi_{rj} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\tau^2} (\Psi_{ri} \Psi_{rj} + \Psi_{zi} \Psi_{zj}) \right\} r dr dz, \\ b_i^{(k)} = \iint_D & (F_1^{(k)} \Psi_{ri} + F_2^{(k)} \Psi_{zi}) r dr dz - \int_0^1 f_1^{(k)} \left(\Psi_{ri} \frac{\partial \varpi}{\partial r} + \Psi_{zi} \frac{\partial \varpi}{\partial z} \right) r dr. \end{aligned}$$

Анализ напряженно-деформированного состояния цилиндра проведен при $h_0 = R_0$, коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$; при этом $\beta = 0,5$. При вычислении коэффициентов a_{ij} и $b_i^{(k)}$ учитывалась симметрия задачи и интегрирование проводилось по области $D_1 = \{(r, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ с использованием квадратурных формул Гаусса.

Для оценки достоверности полученных результатов вычисления проводились при различных величинах шага по времени τ и различном числе координатных функций n . В таблице 3.1 приведены значения модуля вектора перемещений, полученные при $n = 28$ и двух значениях τ : $\tau = 0,01$ (верхняя строка) и $\tau = 0,005$ (нижняя строка), а в таблице 3.2 представлены значения модуля вектора перемещений, полученные при 21 (верхняя строка) и 28 (нижняя строка) координатных функциях при шаге дискретизации по времени $\tau = 0,01$. Сравнение результатов расчетов напряжений при различных значениях шага по времени ($\tau = 0,01; 0,005$), а также различном числе координатных функций ($n = 21; 28$) показало тот же уровень точности. Приведенные

результаты получены с использованием квадратурных формул Гаусса не выше 16 порядка ($m \leq 16$).

Таблица 3.1

Значения модуля вектора перемещений при $n = 28$ и $\tau = 0,01$
(верхняя строка), $\tau = 0.005$ (нижняя строка)

z	u		
	r = 0,1	r = 0,5	r = 0,9
0,3	0,1190	0,2146	0,3008
	0,1126	0,2152	0,3034
0,6	0,2949	0,3785	0,4534
	0,2920	0,3771	0,4551
0,9	0,4734	0,5473	0,6175
	0,4742	0,5528	0,6194

Учитывая результаты сопоставления данных при варьировании числа координатных функций и шага дискретизации по времени, при проведении расчетов было принято $\tau = 0,01$; $n = 21$; $m = 12$.

Таблица 3.2

Значения модуля вектора перемещений при $\tau = 0,01$ и $n = 21$
(верхняя строка), $n = 28$ (нижняя строка)

z	u		
	r = 0,2	r = 0,6	r = 0,8
0,3	0,1343	0,2413	0,2835
	0,1339	0,2288	0,2847
0,6	0,3053	0,4048	0,4439
	0,3078	0,4045	0,4436
0,9	0,4880	0,5652	0,6007
	0,4872	0,5654	0,5989

На рис. 3.1 представлена зависимость от времени радиальных напряжений σ_r , вычисленных в точке $r = 0$, $z = 1$. Амплитуда их колебаний не превышает по абсолютной величине единицы.

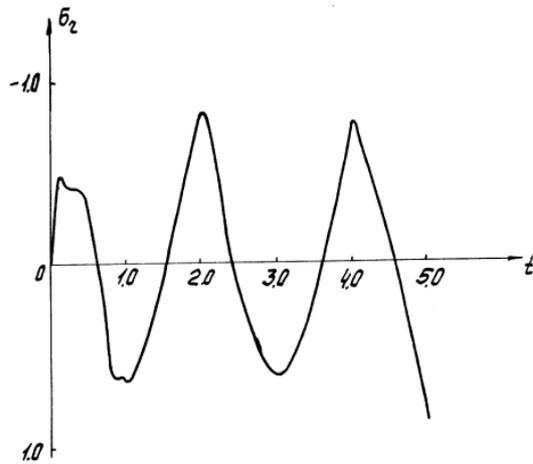


Рис. 3.1. Распределение напряжения $\sigma_r(0,1,t)$

На рис. 3.2 показано распределение напряжений σ_r на оси симметрии цилиндра для моментов времени $t = 0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0$.

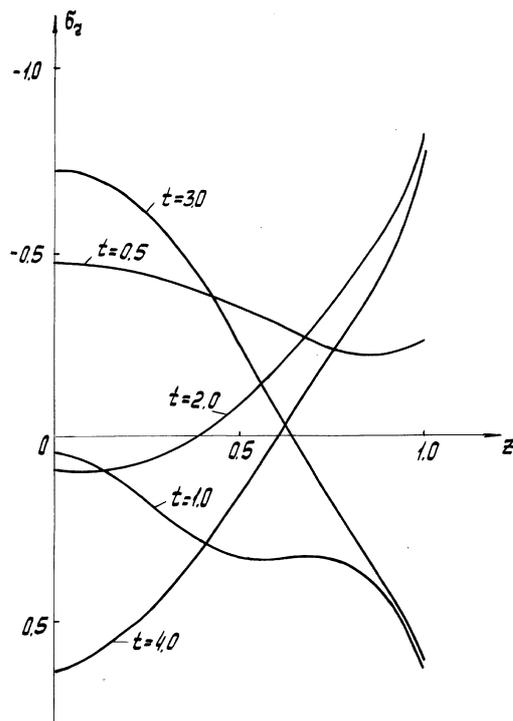


Рис. 3.2. Распределение напряжения $\sigma_r(0,z,t)$

Распределение во времени напряжений σ_z в центре симметрии цилиндра ($r = 0, z = 0$) представлено на рис. 3.3.

Горизонтальной линией отмечено значение σ_z в той же точке при статическом нагружении. Анализ показывает, что максимальные осевые напряжения превышают статические в 2,8 раза. В промежутке времени от $t = 2,3$ до $t = 3,0$ в центральной части цилиндра появляются растягивающие

осевые напряжения. Исследование показало, что зона растягивающих напряжений достигает максимальных размеров при $t = 2,5$ и представляет собой эллипсоид с полуосями $0,4 ; 0,5$. Наибольшие растягивающие напряжения в этот момент времени достигаются в точке $r = 0, z = 0$ и равны $0,37 \sigma_0$.

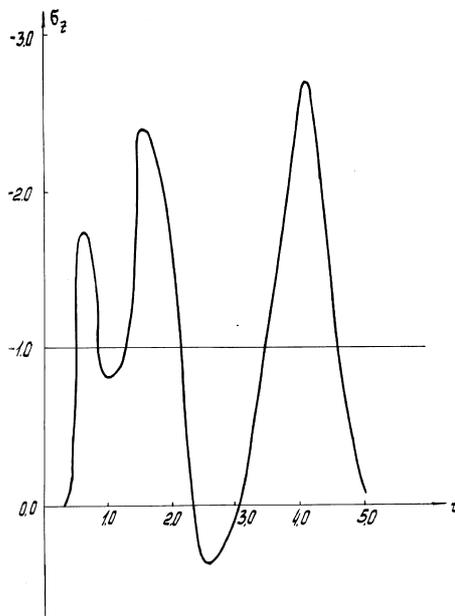


Рис. 3.3. Распределение напряжения $\sigma_z(0,0,t)$

Исследуем влияние характера нагружения торца цилиндра на распределение напряжений в нем. Полагаем, что торец цилиндра нагружен лишь по части, ограниченной окружностью радиуса r_0 , concentрической с окружностью, ограничивающей торец. Вычисления осуществим по той же схеме, что и в случае полного нагружения торца. В структуре решения (3.5) следует принять

$$\bar{\omega}_1 = (h^2 - z^2) \vee_0 (r^2 - r_0^2) \quad ,$$

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega} \vee_0 (r^2 - r_0^2) \quad ,$$

$$\bar{\omega} = \frac{1-r^2}{2} \wedge_0 \frac{h^2 - z^2}{2h} .$$

Численные расчеты проводились при том же числе координатных функций и при тех же значениях шага дискретизации по времени. Данные приводятся для случая $r_0 = 0,5$.

На рис. 3.4 приведены кривые распределения осевых напряжений в центре цилиндра (кривая 1 соответствует $h = 1$, а кривая 2 – $h = 0,5$). В начальный период у цилиндра с меньшей высотой осевые напряжения более чем в два раза

превышают их значения в цилиндре с единичной высотой. С уменьшением высоты цилиндра частота колебаний увеличивается.

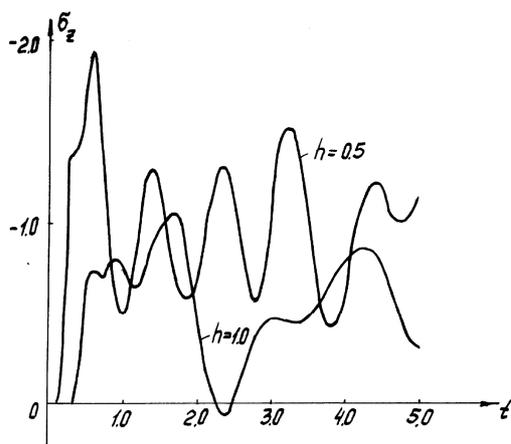


Рис. 3.4. Зависимость осевого напряжения от времени

Изменение во времени радиального напряжения σ_r в точке $r = 0, z = 1$ представлено на рис. 3.5.

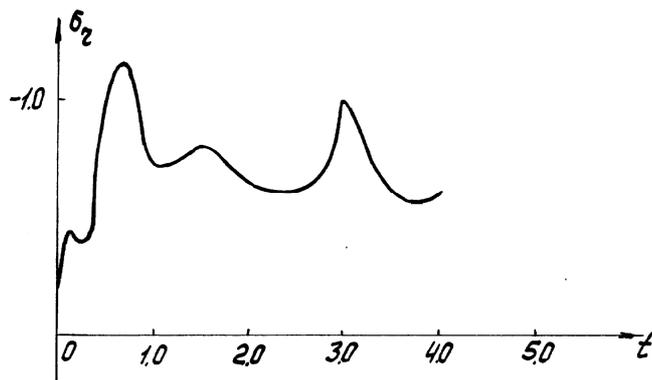


Рис. 3.5. Зависимость радиального напряжения от времени

Во все моменты времени это напряжение оказывается сжимающим и существенно отличается от радиальных напряжений, наблюдаемых в случае полного нагружения торца (рис. 3.1).

3.2. Неустановившиеся колебания цилиндра, контактирующего со штампами

В инженерной практике и научных исследованиях часто возникает необходимость изучения полей деформаций и напряжений, возникающих при контактном взаимодействии двух или нескольких упругодеформируемых тел. Динамические контактные задачи являются практически важными частными случаями пространственных задач теории упругости. Их математическая постановка включает уравнения движения в частных производных и краевые

условия смешанного типа, что ставит их в ряд наиболее сложных краевых задач; кроме того, контактные задачи имеют, например, электростатические аналогии, что расширяет возможность использования полученных решений в физически совершенно других ситуациях. Все это, по-видимому, и объясняет неослабевающий интерес к контактным задачам вообще и динамическим контактным задачам в частности [20, 41].

Предлагаемый раздел посвящен исследованию нестационарных колебаний цилиндра, контактирующего со штампами, на основе метода R-функций, который соединил в себе алгебрологические методы, используемые в математике и кибернетике, с классическими методами математической физики и вычислительной математики.

Изотропный упругий цилиндр радиуса a и высоты $2b_0$ контактирует по торцам с круглыми жесткими штампами такого же радиуса и высоты H , нагруженными силой $P(t)$. Боковая поверхность цилиндра свободна от нагружения. Требуется определить напряжения в области контакта тел, а также зависимость от времени поля напряжений и деформаций внутри цилиндра. Трение между цилиндром и штампами не учитывается [43].

Введя величины

$$r = \frac{\bar{r}}{a}, \quad z = \frac{\bar{z}}{a}, \quad t = \frac{\bar{t}}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu},$$

(чертой обозначены действительные переменные), уравнения колебаний цилиндра запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \Delta u_z &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

и дополним уравнением движения штампа

$$m_0 \frac{d^2 h_0}{dt^2} = P_1(t) - R(t), \quad (3.9)$$

где $m_0 = \frac{\pi \rho H}{\rho_0 a}$, $P_1(t) = \frac{P(t)}{a^2 \sigma_0}$, ρ и ρ_0 – плотность материала штампа

соответственно и цилиндра; λ , μ – коэффициенты Ламе; Δ , θ – оператор Лапласа и объемная деформация; $h_0 = h_0(t)$ – заглубление штампа, $R(t)$ – равнодействующая нормальных контактных напряжений, σ_0 – параметр, имеющий размерность напряжения; компоненты вектора перемещений и тензора напряжений отнесены соответственно к $a\sigma_0/\mu$ и σ_0 .

Решение уравнений (3.8)–(3.9) подчиним условиям

$$\begin{aligned} u_z(r, \pm b, t) = \mp h_0(t), \quad \sigma_{rz}(r, \pm b, t) = 0; \\ \sigma_r(1, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(1, z, t) = 0; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} u_r(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = \frac{\partial u_r(r, z, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u_z(r, z, 0)}{\partial t} = 0; \\ (b = b_0/a). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Дискретизацию по времени начально-краевой задачи (3.8)–(3.11) осуществим согласно процедуре Рунге разностным методом. В результате рассматриваемая динамическая задача сводится к квазистатической на временных слоях:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial r} + \Delta u_r^{(k)} - \frac{u_r^{(k)}}{r^2} - \frac{u_r^{(k)}}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2} (u_r^{(k-2)} - 2u_r^{(k-1)}), \\ \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial r} + \Delta u_z^{(k)} - \frac{u_z^{(k)}}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2} (u_z^{(k-2)} - 2u_z^{(k-1)}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(k)} = \mp h_0^{(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(k)} = 0 \quad (z = \pm b); \\ \sigma_r^{(k)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(k)} = 0 \quad (r = 1); \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$u_r^{(0)} = u_z^{(0)} = 0; \quad u_r^{(-1)} = u_z^{(-1)} = 0. \quad (3.14)$$

Для построения приближенного решения задачи воспользуемся приведенной в главе 1 методикой построения структур решения. Структуру решения, удовлетворяющую граничным условиям, кроме первого условия (3.13), запишем в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} = \Phi_1^{(k)} - \\ - \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} D_1^2 \Phi_1^{(k)} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} D_1 \Phi_1^{(k)} - \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} (T_1 \Phi_1^{(k)} + (1 - 2\beta^2) T_1^2 \Phi_1^{(k)}) \right] + \\ + \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} (D_1 \Phi_2^{(k)} - D_1^2 \Phi_2^{(k)}) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1 \Phi_2^{(k)} - (1 - 2\beta^2) \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} T_1^2 \Phi_2^{(k)} \right] - \\ - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\Phi_1^{(k)}}{r}, \\ u_z^{(k)} = \Phi_2^{(k)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} (D_1 \Phi_1^{(k)} - D_1^2 \Phi_1^{(k)}) - \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1 \Phi_1^{(k)} + (1 - 2\beta^2) \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1^2 \Phi_1^{(k)} \right] - \\
& - \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} D_1 \Phi_2^{(k)} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} D_1^2 \Phi_2^{(k)} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} (T_1 \Phi_2^{(k)} + (1 - 2\beta^2) T_1^2 \Phi_2^{(k)}) \right] - \\
& - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega \Phi_1^{(k)}}{\partial z r}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить первое из условий (3.13), необходимо положить $\Phi_2^{(k)} = h^{(k)}(r, z) + \overline{\omega}_1 Q_2^{(k)}(r, z)$, где $h^{(k)}(r, z)$ – продолжение в Ω функции $h_0^{(k)}$, которое в дальнейшем представим в виде произведения компоненты, зависящей только от времени, и компоненты, зависящей от пространственных координат $h^{(k)}(r, z) = h_0^{(k)} h_1(r, z)$ ($\Phi_1^{(k)}$ обозначим, для удобства, через $Q_1^{(k)}(r, z)$).

Искомые смещения $u_r^{(k)}$ и $u_z^{(k)}$ для k -го временного слоя представим в виде суммы однородной и неоднородной составляющей

$$u_r^{(k)} = u_{r,0}^{(k)} + u_{r,1}^{(k)}, \quad u_z^{(k)} = u_{z,0}^{(k)} + u_{z,1}^{(k)}, \tag{3.16}$$

причем

$$u_{r,1}^{(k)} = h_0^{(k)} u_{r,1}, \quad u_{z,1}^{(k)} = h_0^{(k)} u_{z,1}. \tag{3.17}$$

Поставленная задача эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала

$$\begin{aligned}
& J(u_r^{(k)}, u_z^{(k)}) = \\
& = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1 - 2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{u_r^{(k)}}{r} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u_r^{(k)}}{r} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\tau^2} \left[(u_{r,0}^{(k)})^2 + (u_{z,0}^{(k)})^2 \right] - 2(F_1^{(k)} u_r^{(k)} + F_2^{(k)} u_z^{(k)}) \right\} r dr dz, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

в котором, с учетом (3.12),

$$F_1^{(k)} = \frac{1}{\tau^2} (2u_r^{(k-1)} - u_r^{(k-2)} - u_{r,1}^{(k)}), \quad F_2^{(k)} = \frac{1}{\tau^2} (2u_z^{(k-1)} - u_z^{(k-2)} - u_{z,1}^{(k)})$$

на множестве функций, определяемых структурными формулами (3.15).

Численно реализуя построенную структуру, раскладываем ее неопределенные компоненты $Q_j(r, z)$ ($j = 1, 2$) по полной системе нормированных полиномов Чебышева

$$Q_j^{(k)}(r, z) = \sum_{i=1}^{n_j} C_{i,j}^{(k)} \varphi_i^{(j)}$$

и, учитывая (3.16)–(3.17), получаем

$$u_{r,n}^{(k)} = h_0^{(k)} u_{r,1} + \sum_{i=1}^{n_1} C_i^{(k)} \Psi_{r,i}, u_{z,n}^{(k)} = h_0^{(k)} u_{z,1} + \sum_{i=1}^{n_2} C_i^{(k)} \Psi_{z,i}, \quad (3.19)$$

где

$$u_{r,1} = \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} (D_1 h_1 - D_1^2 h_1) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1 h_1 - (1 - 2\beta^2) \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} T_1^2 h_1 \right],$$

$$u_{z,1} = h_1 - \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} D_1 h_1 + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} D_1^2 h_1 + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} (T_1 h_1 + (1 - 2\beta^2) T_1^2 h_1) \right],$$

$$\Psi_{r,i} = \varphi_i^{(1)} -$$

$$- \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} D_1^2 \varphi_i^{(1)} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} D_1 \varphi_i^{(1)} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} (T_1 \varphi_i^{(1)} + (1 - 2\beta^2) T_1^2 \varphi_i^{(1)}) -$$

$$- (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \varphi_i^{(1)} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} (D_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) - D_1^2(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)})) + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) -$$

$$- (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} T_1^2(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}),$$

$$\Psi_{z,i} = \omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)} -$$

$$- \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} D_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) - \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} D_1^2(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) -$$

$$- \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} [T_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) + (1 - 2\beta^2) T_1^2(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)})] + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} (D_1 \varphi_i^{(1)} - D_1^2 \varphi_i^{(1)}) -$$

$$- \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} T_1 \varphi_i^{(1)} + (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1^2 \varphi_i^{(1)} - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \varphi_i^{(1)},$$

$$C_i^{(k)} = \begin{cases} C_{i,1}^{(k)}, & i \leq n_1 \\ C_{i-n_1,2}^{(k)}, & n_1 < i \leq n, \end{cases} \quad n = n_1 + n_2. \quad (3.20)$$

$$\varphi_\alpha^{(k)} = 0 \quad \forall \alpha \leq 0, \quad k = 1, 2; \quad \varphi_\alpha^{(1)} = 0, \quad n_1 < \alpha \leq n.$$

Используя условия минимума функционала (3.18), для определения коэффициентов $C_i^{(k)}$ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} C_i^{(k)} = b_j^{(k)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.21)$$

коэффициенты которой определяются равенствами

$$\begin{aligned} a_{ji} = & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} + \frac{\Psi_{ri}}{r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} + \frac{\Psi_{rj}}{r} \right) + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \Psi_{ri} \Psi_{rj} \right) + \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\tau^2} (\Psi_{ri} \Psi_{rj} + \Psi_{zi} \Psi_{zj}) \right\} r dr dz, \\ b_j^{(k)} = & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\tau^2} \left[(2u_r^{(k-1)} - u_r^{(k-2)} - h_0^{(k)} u_{r,1}) \Psi_{rj} + (2u_z^{(k-1)} - u_z^{(k-2)} - h_0^{(k)} u_{z,1}) \Psi_{zj} \right] - \right. \\ & - \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} h_0^{(k)} \left(\frac{\partial u_{r,1}}{\partial r} + \frac{\partial u_{z,1}}{\partial z} + \frac{u_{r,1}}{r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} + \frac{\Psi_{rj}}{r} \right) - \\ & - 2h_0^{(k)} \left(\frac{\partial u_{r,1}}{\partial r} \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\partial u_{z,1}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} u_{r,1} \Psi_{rj} \right) - \\ & \left. - h_0^{(k)} \left(\frac{\partial u_{r,1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z,1}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} \right) \right\} r dr dz. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Для проведения численных расчетов, как следует из формул (3.19), следует знать заглублиение штампа $h_0^{(k)}$. Воспользуемся для этого дифференциальным уравнением движения штампа (3.9). Применив дискретизацию по времени, получим

$$m_0 \frac{h_0^{(k)} - 2h_0^{(k-1)} + h_0^{(k-2)}}{\tau^2} = P_1(t) + 2\pi \int_0^1 (h_0^{(k)} \sigma_{z1} + \sigma_{z0}^{(k)}) r dr.$$

Отсюда

$$h_0^{(k)} = \frac{P_1(t) + 2\pi \int_0^1 \sigma_{z0}^{(k)} r dr + \frac{m_0}{\tau^2} (2h_0^{(k-1)} - h_0^{(k-2)})}{\frac{m_0}{\tau^2} - 2\pi \int_0^1 \sigma_{z1} r dr}. \quad (3.23)$$

Формулы (3.19)–(3.23) и составляют алгоритм решения поставленной задачи.

Численные результаты проведены для следующих значений параметров: $a=1$, $b=1$, $\beta=0.5$, $m_0=1$.

Для того, чтобы определить оптимальное число координатных функций и значения шага дискретизации по времени, которые позволят получить численные результаты с необходимой степенью точности, были проведены расчеты при различных значениях числа координатных функций n и шага дискретизации по времени τ . В таблице 3.3 приведены значения осевых напряжений при $t = 1,0$, полученные при 21 (верхняя строка) и 28 (нижняя строка) координатных функциях, а в табл. 3.4 – значения осевых напряжений при $t = 0,8$, вычисленные при $\tau = 0,005$ (верхняя строка) и $\tau = 0,01$ (нижняя строка). Рассчитывался случай сплошного цилиндра. Анализ полученных данных показал, что для численных результатов с достаточной степенью точности можно принять $\tau = 0,01$ и проводить расчеты по квадратурным формулам Гаусса 12-го порядка при 21 координатной функции.

Таблица 3.3
Осевые напряжения в цилиндре

z	σ_z		
	$r = 0,2$	$r = 0,6$	$r = 1,0$
0	-0,3038	-0,4080	-0,4916
	-0,3066	-0,4091	-0,4921
0,5	-0,4151	-0,4005	-0,4062
	-0,4124	-0,4009	-0,4096
1,0	-0,4185	-0,3371	-0,3402
	-0,4219	-0,3409	-0,3433

Таблица 3.4
Осевые напряжения в цилиндре

z	σ_z		
	$r = 0,0$	$r = 0,6$	$r = 1,0$
0	-0,3980	-0,3299	-0,4237
	-0,3859	-0,3300	-0,4153
0,5	-0,2867	-0,3265	-0,2742
	-0,2929	-0,3230	-0,2790
1,0	-0,3667	-0,2892	-0,3230
	-0,3622	-0,2900	-0,3151

В результате проведенных расчетов установлено влияние параметра m_0 на перемещения штампов, влияние наличия полости и ее формы на распределение давления под штампом, а также исследовано распределение вдоль радиуса осевого напряжения σ_z в центральном сечении цилиндра для различных моментов времени.

Изменение в зависимости от времени перемещения верхнего штампа, отнесенного к статическому перемещению, при $m_0 = 0,5; 1,0; 2,0$ показано на рис. 3.6. Во всех случаях принято $\beta = 0,5$.

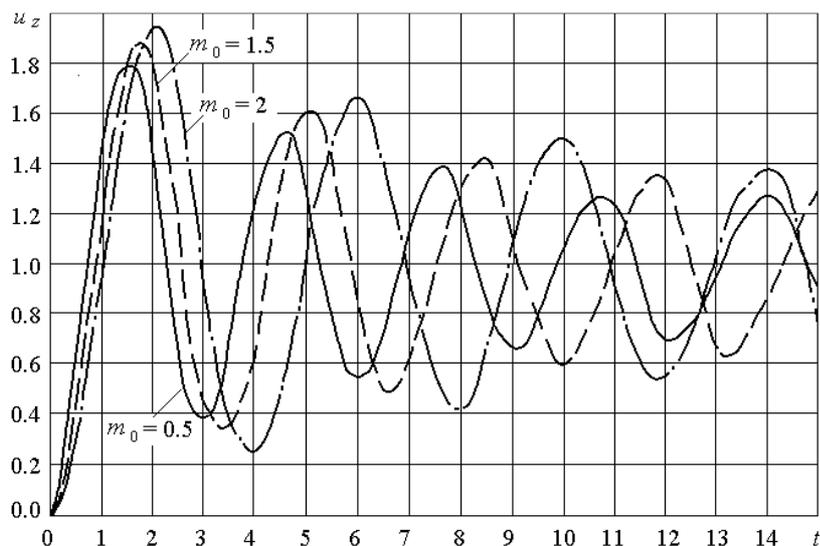


Рис. 3.6. Зависимость от времени осевого перемещения штампа

Приведенные кривые показывают, что в начальный период характер распределения осевых перемещений тот же, что и в контактной задаче для полупространства, рассмотренной В. М. Сеймовым [41]. Отметим, что с уменьшением массы штампа сокращается длительность переходного периода.

На рис. 3.7 для $m_0 = 2,0$ представлены кривые распределения давления под верхним штампом в моменты времени, кратные времени прохождения продольной волны полувысоты цилиндра ($t = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0$), а также при $t = 0,1$. В начальный период колебаний ($t \leq 1$) распределение давления под штампом мало зависит от расстояния до центра штампа. До некоторого момента времени ($t \leq 2$) наблюдается рост давления под штампом по всему его радиусу.

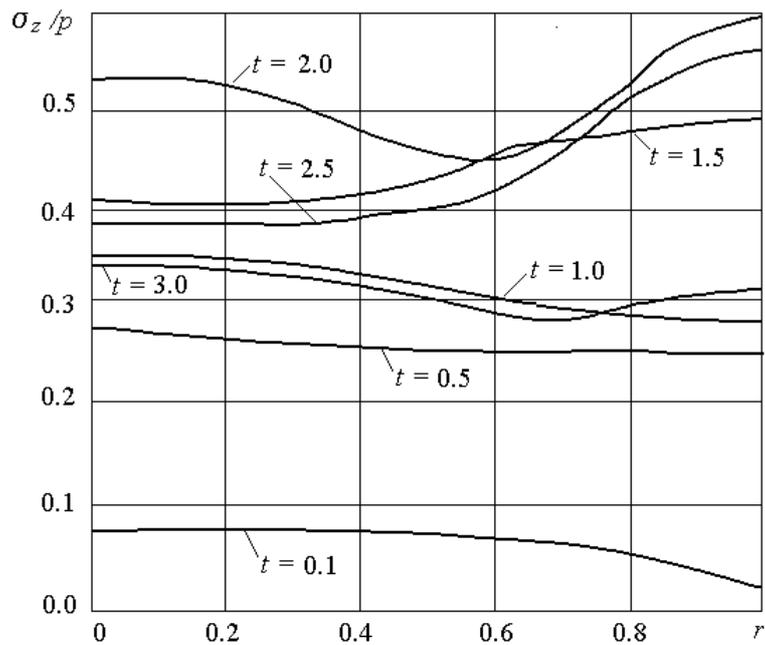


Рис. 3.7. Распределение давления под верхним штампом

На рис. 3.8 показано распределение напряжения σ_z в центральном сечении цилиндра, которое в силу симметрии задачи можно рассматривать как давление под нижним торцом полуцилиндра, опирающегося на гладкое жесткое основание. Сравнение кривых, представленных на рис. 9 и рис. 10, показывает, что если значение давления под штампом по мере развития колебательного процесса существенно зависит от расстояния точки от оси цилиндра, то распределение осевых напряжений в центральном сечении цилиндра в эти же моменты времени незначительно отличается от равномерного.

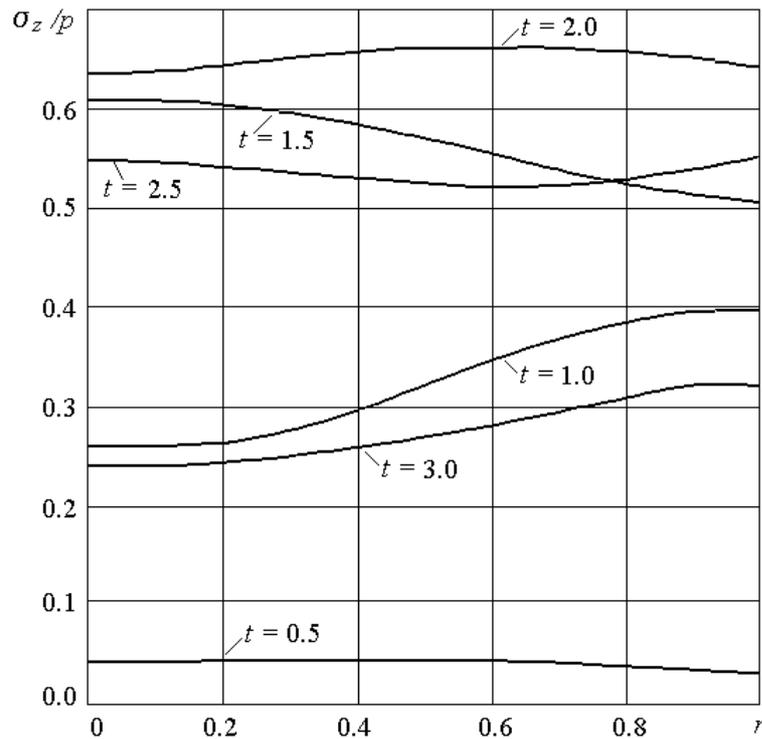


Рис. 3.8. Распределение осевого напряжения в центральном сечении цилиндра

Рассмотрим влияние наличия центральной эллипсоидальной полости в цилиндре на распределение давления под штампом. В этом случае

$$\omega = \left(\frac{b^2 - z^2}{2b} \Lambda_0 \frac{1-r^2}{2} \right) \Lambda_0 \frac{\frac{r^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{b_0^2} - 1}{\sqrt{\omega_3^2 + |\nabla \omega_3|^2}}, \quad \omega_1 = \frac{b^2 - z^2}{2b},$$

$$\omega_2 = \frac{1-r^2}{2} \Lambda_0 \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_3^2 + |\nabla \omega_3|^2}}, \quad \omega_3 = \frac{r^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{b_0^2} - 1,$$

где a_0, b_0 – полуоси эллипсоида. На основе численного эксперимента для получения результатов с достаточной степенью точности было принято: число координатных функций $n = 36$, шаг дискретизации по времени $\tau = 0,01$. Рассматривались следующие геометрические параметры: а) $a_0 = b_0 = 0,3$; б) $a_0 = 0,3$; $b_0 = 0,5$.

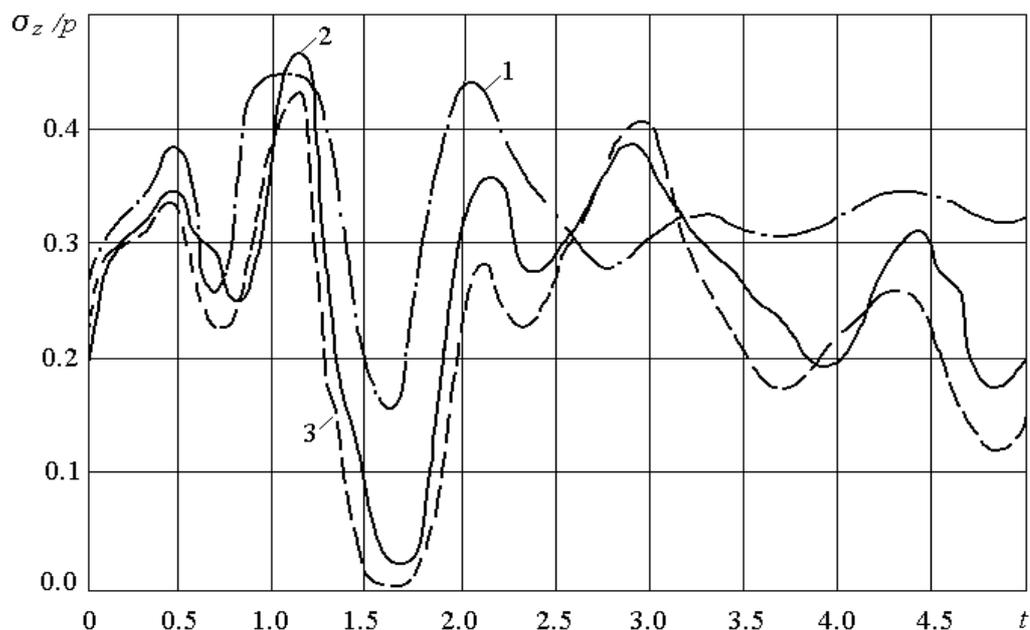


Рис. 3.9. Распределение во времени давления под штампом в цилиндре с полостью

Вычисления показали, что наличие полости вызывает незначительное изменение амплитуды колебаний перемещения штампа по сравнению со случаем сплошного цилиндра. В то же время наличие полости оказывает значительное влияние на распределение контактных напряжений, как следует из сравнения данных, представленных на рис. 3.9, где показана зависимость от времени давления под штампом в его центре ($r = 0, z = 1$); кривая 1 соответствует сплошному цилиндру, кривая 2 – цилиндру со сферической полостью радиуса 0,3, кривая 3 – цилиндру с эллипсоидальной полостью с полуосями 0,3, 0,5. В случае сплошного цилиндра минимальное значение контактного давления наблюдается в момент времени $t \approx 1,7$. Для цилиндра со сферической полостью этот минимум значительно меньше, а для цилиндра с эллипсоидальной полостью уже близок к нулю.

Глава 4. Собственные колебания упругих тел

Предлагается приближенный метод расчета установившихся колебаний цилиндра конечной длины с использованием метода R -функций и вариационного. Такой подход позволяет рассматривать цилиндры произвольной боковой формы и строить структуры решения, в которых на аналитическом уровне учитывается геометрическая информация. Рассмотрены случаи прямого кругового цилиндра со свободной от нагрузки поверхностью и прямого кругового цилиндра с закрепленными торцами.

4.1. Метод R -функций в проблеме собственных колебаний упругих тел

Пусть Ω – конечное тело вращения с границей $\partial\Omega$, которое рассматривается в цилиндрической системе координат Orz (ось Oz направлена вдоль оси вращения). Исследуется случай отсутствия массовых и поверхностных сил. Движение упругого тела определяется векторным уравнением [6]

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } U - \mu \text{rot rot } U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

где $U(t, r, z)$ – вектор смещений; λ , μ – постоянные Ламе; ρ – плотность материала.

Предполагаем периодичность процессов колебания во времени и считаем, что

$$U(t, r, z) = e^{-i\gamma t} \cdot u(r, z); \quad u(r, z) = \begin{pmatrix} u_r(r, z) \\ u_z(r, z) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

де γ – круговая частота процесса.

Обозначим через β отношение скорости распространения поперечных волн c_2 к скорости распространения продольных волн c_1 в бесконечной упругой среде, то есть $\beta = c_2 / c_1$, при этом $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$; $c_2^2 = \mu / \rho$.

Примем за масштаб длины некоторую характерную величину R , за масштаб времени – величину $\frac{R}{c_2}$. Компоненты вектора смещений и тензора

напряжений считаем отнесенными соответственно к $\frac{R\sigma_0}{\mu}$ и σ_0 (σ_0 – некоторая постоянная, имеющая размерность напряжения). Учитывая соотношения (4.2), уравнение (4.1) в безразмерных величинах принимает вид

$$\frac{1}{\beta^2} \text{grad div } u - \text{rot rot } u = -\gamma^2 u. \quad (4.3)$$

Рассмотрим два случая.

1. На границе тела $\partial\Omega$ с внешней нормалью ν заданы нулевые нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения:

$$\sigma_\nu = 0; \tau_\nu = 0, (r, z) \in \partial\Omega. \quad (4.4)$$

2. Пусть $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, где $\partial\Omega_1$ – торцы цилиндра, которые являются закрепленными, а на участке $\partial\Omega_2$ заданы нулевое нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения:

$$u = 0, (r, z) \in \partial\Omega_1;$$

$$\sigma_\nu = 0; \tau_\nu = 0, (r, z) \in \partial\Omega_2. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.3) можно переписать в операторном виде как

$$Au = ku, \quad (4.6)$$

где

$$k = \gamma^2; Au = -\left(\frac{1}{\beta^2} \text{grad div } u - \text{rot rot } u\right). \quad (4.7)$$

Таким образом, исследование колебаний рассматриваемого тела сводится к задаче на собственные значения (4.6) при условиях (4.4) или (4.5).

Для решения полученной задачи воспользуемся вариационным методом. Нахождение минимального собственного значения оператора A , определенного равенством (4.7), эквивалентно задаче нахождения минимума функционала энергии

$$E(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\} d\Omega \quad (4.8)$$

при условии

$$\int_{\Omega} (u_r^2 + u_z^2) d\Omega = 1. \quad (4.9)$$

В соответствии с методом R-функций приближенное решение задачи (4.8)–(4.9) с краевыми условиями (4.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_r &= \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_1 - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\Phi_1}{r} + \\
&\quad + \omega \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_2; \\
u_z &= \Phi_2 - \omega D_1 \Phi_2 - 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_2 - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\Phi_1}{r} + \\
&\quad + \omega \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_1.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Приближенное решение задачи (4.8)–(4.9) с краевыми условиями (4.5) ищем в виде

$$\begin{aligned}
u_r &= \omega_1 \Phi_1 - \omega D_1(\omega_1 \Phi_1) + 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1(\omega_1 \Phi_1) - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\omega_1 \Phi_1}{r} + \\
&\quad + \omega \left[\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \right] T_1(\omega_1 \Phi_2); \\
u_z &= \omega_1 \Phi_2 - \omega D_1(\omega_1 \Phi_2) - 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} T_1(\omega_1 \Phi_2) - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\omega_1 \Phi_1}{r} + \\
&\quad + \omega \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 \right] T_1(\omega_1 \Phi_1).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь:

1. Функции $\omega_1(r, z)$, $\omega_2(r, z)$, $\omega(r, z) \in C^1(\Omega)$, построенные с помощью аппарата R-функций, являются левыми частями нормализованных до первого порядка уравнений границ $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ та $\partial\Omega$ соответствующих областей и обладают следующими свойствами:

а) $\omega_1, \omega_2, \omega > 0$, $(r, z) \in \Omega$;

б) $\omega_1|_{\partial\Omega_1} = 0$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}|_{\partial\Omega_1} = -1$; $\omega_2|_{\partial\Omega_2} = 0$, $\frac{\partial \omega_2}{\partial \nu}|_{\partial\Omega_2} = -1$; $\omega|_{\partial\Omega} = 0$; $\frac{\partial \omega}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = -1$.

2. Операторы D_1 и T_1 определяются равенствами

$$D_1 g = \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z}; \quad T_1 g = -\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial z}. \tag{4.12}$$

3. Функции $\Phi_i(r, z)$ ($i=1,2$) являются произвольными. При любом их выборе краевые условия (4.4) выполняются точно. При численной реализации структур решения (4.9) функции Φ_i представляются разложениями по элементам некоторой полной системы функций (полиномов Чебышева, сплайнов и др.):

$$\Phi_1(r, z) = \sum_{m=1}^{n_1} C_{1,m} \varphi_m^{(1)}(r, z); \quad \Phi_2(r, z) = \sum_{m=1}^{n_2} C_{2,m} \varphi_m^{(2)}(r, z). \quad (4.13)$$

Подставив (4.13) в формулы (4.10) и (4.11), представим приближенное решение задачи (4.8)–(4.9) в виде

$$u_{rn}(r, z) = \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{ri}(r, z); \quad u_{zn}(r, z) = \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{zi}(r, z), \quad (4.14)$$

где $n = n_1 + n_2$; $C_i = \begin{cases} C_{1,i}, & i \leq n_1 \\ C_{2,i}, & n_1 < i \leq n \end{cases}$; $\Psi_{ri}(r, z), \Psi_{zi}(r, z)$ ($i = \overline{1, n}$) – некоторые функции, определяющиеся структурами (4.10) или (4.11).

Минимизируя функционал (4.8) на множестве функций (4.14), получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n C_i [a_{ij} - k \cdot b_{ij}] = 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (4.15)$$

где

$$a_{ij} = \iint_D \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{rj}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri} \Psi_{rj}}{r^2} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} \right) \right\} r dr dz, \\ b_{ij} = \iint_D (\Psi_{ri} \Psi_{rj} + \Psi_{zi} \Psi_{zj}) r dr dz; \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (4.16)$$

Здесь D – проекция области Ω на плоскость Orz .

Первые n собственных значений $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ задачи (4.6) определяются уравнением, следующим из системы (4.15):

$$\det(A - kB) = 0,$$

где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Коэффициенты C_i аппроксимирующих разложений (4.14) определяются для каждого собственного значения $k = k_i$ ($i = \overline{1, n}$) как решения системы линейных уравнений (4.15) при условии (4.9). Они определяют собственные формы задачи (4.8)–(4.9).

4.2. Собственные колебания упругого цилиндра заданной высоты

Для апробации метода численно рассмотрим:

- 1) задачу 1 о собственных радиальных колебаниях прямого кругового упругого цилиндра радиуса R и высоты h , расположенного симметрично относительно плоскости $z = 0$ (ось Oz направлена вдоль оси вращения). Решение этой задачи приведено в [16] (метод 1).
- 2) задачу 2 о собственных радиальных колебаниях прямого кругового упругого цилиндра радиуса R и высоты h со сферической полостью радиуса R_0 , учитывая граничные условия (4.4) и (4.5).

Задача 1. Получим приближенное решение задачи о собственных колебаниях цилиндра методом, предложенным выше (метод 2). Для построения приближенного решения с помощью структур (4.10) введем функцию

$$\omega(r, z) = \left(\frac{1}{2R} (R^2 - r^2) \right) \wedge_0 \left[\frac{1}{h} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] \right],$$

определяющую уравнение границы цилиндра $\omega(r, z) = 0$, $(r, z) \in \partial\Omega$. Тут символом « \wedge_0 » обозначено операцию R_0 -конъюнкции:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Заметим, что при построении приближенного решения вектор смещений должен удовлетворять условиям

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0; \quad \int_{\Omega} r \times u \, d\Omega = 0, \quad (4.17)$$

где r – радиус-вектор произвольной точки.

В разложениях (4.13) полагаем

$$\{\varphi_m^{(1)}(r, z)\}_{m=1}^{\infty} = \{r^{2k+1} z^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty},$$

$$\{\varphi_m^{(2)}(r, z)\}_{m=1}^{\infty} = \{z^{2k+1}r^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty}.$$

Выбранные таким образом системы функций за счет симметрии обеспечивают выполнение условий (4.17).

Интегралы (4.16) вычислялись приближенно с помощью квадратурных формул Гаусса, порядок которых согласовывался со степенями аппроксимирующих полиномов. Учитывая симметрию, вычисления проводились по 1/4 части меридианного сечения цилиндра. С целью оценки точности результатов расчеты проводились при разных числах координатных функций.

В таблице 4.1 представлены первые четыре собственных значения, найденные методами 1 и 2. В приведенных результатах степень аппроксимирующего полинома $n = 6$. Для вычислений полагаем $R = 2$, $h = 4$, $\beta^2 = 1/4$.

Таблица 4.1

Решение задачи собственных значений для кругового цилиндра

Собственное значение	k_1	k_2	k_3	k_4
Метод 1	1,35584	2,47290	4,38968	6,73395
Метод 2	1,35955	2,49528	4,40530	6,75028

На рис. 4.1 изображены собственные формы, соответствующие первым четырем собственным значениям.

Задача 2. Получим приближенные решения задачи о собственных колебаниях упругого кругового цилиндра со сферической полостью при краевых условиях (4.4) или (4.5). Для построения приближенных решений с использованием структур (4.10) и (4.11) введем функции

$$\omega_1(r, z) = \frac{1}{h} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right); \quad \omega_2(r, z) = \frac{1}{2R} (R^2 - r^2);$$

$$\omega_3(r, z) = \frac{1}{2R_0} (r^2 + z^2 - R_0^2); \quad \omega(r, z) = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 \omega_3,$$

где функция $\omega(r, z)$ определяет уравнение границы цилиндра $\omega(r, z) = 0$, $(r, z) \in \partial\Omega$. Здесь, как и ранее, символом « \wedge_0 » обозначена операция R_0 -конъюнкции.

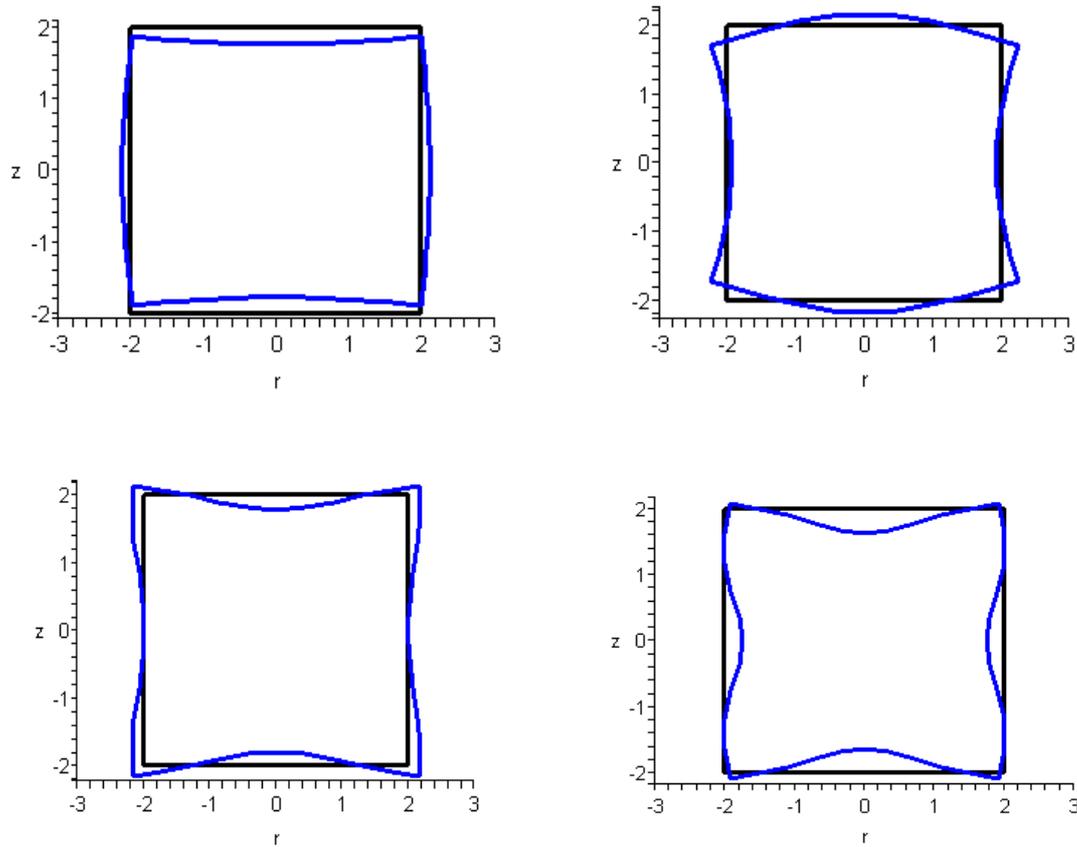


Рис. 4.1. Собственные формы колебаний прямого кругового цилиндра

Заметим, что при построении приближенного решения задачи при условии (4.5) вектор смещений должен удовлетворять условиям (4.17).

В разложениях (4.13) полагаем

$$\{\varphi_m^{(1)}(r, z)\}_{m=1}^{\infty} = \{r^{2k+1} z^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty},$$

$$\{\varphi_m^{(2)}(r, z)\}_{m=1}^{\infty} = \{z^{2k+1} r^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty}.$$

Выбранные таким образом системы функций за счет симметрии обеспечивают выполнение условий (4.17).

В таблице 4.2 представлены первые четыре собственных значения, вычисленных для цилиндра со свободными и закрепленными торцами. В приведенных результатах степень аппроксимирующего полинома $n=8$. Для вычислений полагаем $R=2$, $h=4$, $R_0=1$, $\beta^2=1/4$.

Таблица 4.2

Собственные значения для кругового цилиндра со сферической полостью

Собственное значение	k_1	k_2	k_3	k_4
Торцы свободны	0,76554	2,13672	3,23125	5,52944
Торцы закреплены	2,71836	5,08690	8,37666	10,87972

На рис. 4.2 изображены собственные формы, соответствующие первым четырем собственным значениям, полученным для цилиндра со свободными и закрепленными торцами.

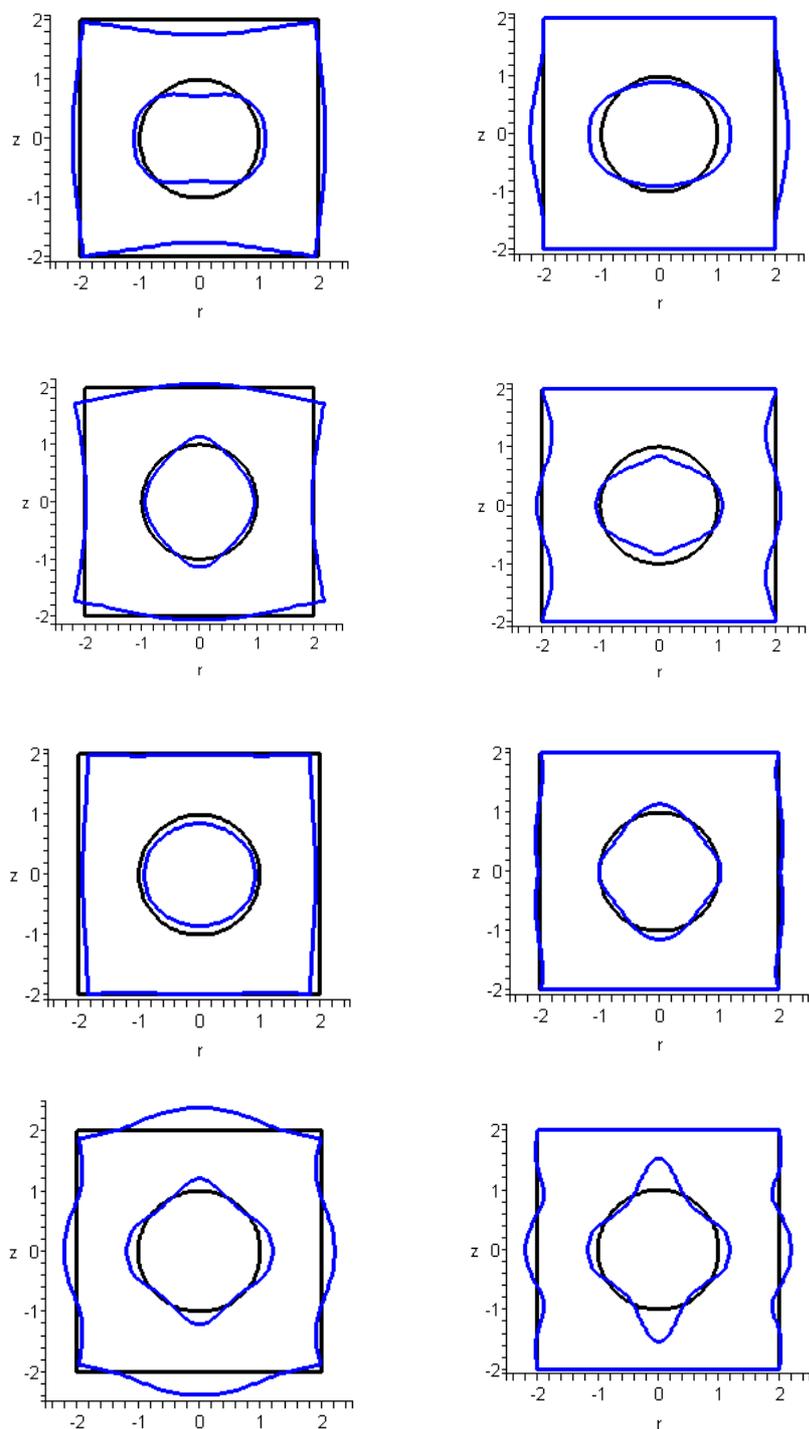


Рис. 4.2. Собственные формы колебаний прямого кругового цилиндра со сферической полостью со свободными и закрепленными торцами

Интегралы (4.16) вычислялись приближенно с помощью квадратурных формул Гаусса. С целью оценки точности результатов расчеты проводились при разном числе координатных функций.

4.3. Собственные колебания неоднородного цилиндра

Предлагается приближенный метод расчета установившихся колебаний цилиндра конечной длины, состоящего из двух различных материалов, с использованием метода R-функций и вариационного, что позволяет рассматривать цилиндры произвольной боковой формы.

Пусть Ω – конечное тело вращения с границей $\partial\Omega$, которое рассматривается в цилиндрической системе координат Orz (ось Oz направлена вдоль оси вращения). Исследуется случай отсутствия массовых и поверхностных сил.

Пусть тело вращения высоты h состоит из двух выполненных из различных материалов частей Ω_1 и Ω_2 , которые жестко закреплены по плоскости раздела $z=h_0$ и характеризуются постоянными Ламе λ_1, μ_1 та λ_2, μ_2 соответственно. Движение упругого тела определяется векторным уравнением

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } U - \mu \text{rot rot } U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

где
$$U(t, r, z) = \begin{cases} U_1(t, r, z), (r, z) \in \Omega_1 \\ U_2(t, r, z), (r, z) \in \Omega_2 \end{cases} \text{ – вектор смещений; } \lambda = \begin{cases} \lambda_1, (r, z) \in \Omega_1 \\ \lambda_2, (r, z) \in \Omega_2 \end{cases},$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_1, (r, z) \in \Omega_1 \\ \mu_2, (r, z) \in \Omega_2 \end{cases}, \rho = \begin{cases} \rho_1, (r, z) \in \Omega_1 \\ \rho_2, (r, z) \in \Omega_2 \end{cases} \text{ – плотность материала.}$$

Предполагаем периодичность колебательных процессов во времени и полагаем, что

$$U(t, r, z) = e^{-i\gamma t} u(r, z); u = \begin{cases} u_1, (r, z) \in \Omega_1 \\ u_2, (r, z) \in \Omega_2 \end{cases}; u_i(r, z) = \begin{pmatrix} u_{ir}(r, z) \\ u_{iz}(r, z) \end{pmatrix}, (i = 1, 2), \quad (4.18)$$

где γ – круговая частота колебательного процесса.

Обозначим через β отношение скорости распространения поперечных волн c_2 к скорости распространения продольных волн c_1 в бесконечной упругой среде, то есть $\beta = c_2 / c_1$, при этом $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$; $c_2^2 = \mu / \rho$.

Примем за масштаб длины некоторую характерную величину R , за масштаб времени – величину $\frac{R}{c_2}$. Компоненты вектора смещений и тензора

напряжений считаем соотнесенными соответственно к $\frac{R\sigma_0}{\mu}$ и σ_0 (σ_0 – некоторая постоянная, имеющая размерность напряжения). Учитывая соотношения (4.18), уравнение (4.1) в безразмерных величинах принимает вид

$$\frac{1}{\beta^2} \text{grad div } u - \text{rot rot } u = -\gamma^2 u, \quad (4.19)$$

где $\beta = \begin{cases} \beta_1, & (r, z) \in \Omega_1 \\ \beta_2, & (r, z) \in \Omega_2 \end{cases}$.

Считаем, что участок $\partial\Omega_{01}$ границы тела $\partial\Omega$, соответствующий плоскости $z = 0$, является закрепленным, а на участке $\partial\Omega_{02} = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{01}$ заданы нулевые нормальное $\sigma_\nu = \begin{cases} \sigma_{1\nu}, & (r, z) \in \partial\Omega_1 \\ \sigma_{2\nu}, & (r, z) \in \partial\Omega_2 \end{cases}$ и касательное $\tau_\nu = \begin{cases} \tau_{1\nu}, & (r, z) \in \partial\Omega_1 \\ \tau_{2\nu}, & (r, z) \in \partial\Omega_2 \end{cases}$ напряжения:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_{01}; \\ \sigma_\nu &= 0; \quad \tau_\nu = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_{02}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где ν – внешняя нормаль к границе области.

На границе раздела $z = h_0$ должны выполняться следующие условия:

$$u_1 = u_2, \quad \sigma_{1\nu} = \sigma_{2\nu}, \quad \tau_{1\nu} = \tau_{2\nu}. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.19) можно переписать в операторном виде (4.6)–(4.7). Таким образом, исследование колебаний рассматриваемого тела сводится к задаче (4.6)–(4.7) при условиях (4.20)–(4.21).

Для решения сформулированной задачи применим вариационный метод. Нахождение минимального собственного значения оператора A , определенного равенством (4.6), эквивалентно задаче о нахождении минимума функционала энергии

$$E(u) = E(u_1) + E(u_2), \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} E(u_i) &= \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{1 - 2\beta_i^2}{\beta_2^2} \left(\frac{\partial u_{ir}}{\partial r} + \frac{u_{ir}}{r} + \frac{\partial u_{iz}}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u_{ir}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_{ir}}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{iz}}{\partial z} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u_{ir}}{\partial z} + \frac{\partial u_{iz}}{\partial r} \right)^2 \right\} d\Omega_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

при условии

$$\int_{\Omega_1} (u_{1r}^2 + u_{1z}^2) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} (u_{2r}^2 + u_{2z}^2) d\Omega_2 = 1. \quad (4.23)$$

В соответствии с методом R-функций приближенное решение задачи (4.22)–(4.23) будем искать в виде

$$u_{1r} = \omega_{01}\Phi_1 - \omega \left\{ D_1(\omega_{01}\Phi_1) - 2(1 - \beta_1^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} T_1(\omega_{01}\Phi_1) + \right. \\ \left. + (1 - 2\beta_1^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \frac{\omega_{01}\Phi_1}{r} - \left[\left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta_1^2) \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \right)^2 \right] T_1(\omega_{01}\Phi_2) \right\};$$

$$u_{1z} = \omega_{01}\Phi_2 - \omega \left\{ D_1(\omega_{01}\Phi_2) + 2(1 - \beta_1^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} T_1(\omega_{01}\Phi_2) + \right. \\ \left. + (1 - 2\beta_1^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \frac{\omega_{01}\Phi_1}{r} - \left[(1 - 2\beta_1^2) \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \right)^2 \right] T_1(\omega_{01}\Phi_1) \right\};$$

$$u_{2r} = \omega_{01}\Phi_1 - \omega_2 \left\{ \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} - 1 \right) \frac{\omega_{02}}{\omega_{02} + \omega_0} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \frac{\left(\frac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial r} + \frac{\omega_{01}\Phi_1}{r} + \frac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial z} \right)}{1 - (1 - 2\beta_2^2) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 + \omega_2^2} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0}{\omega_{02} + \omega_0} \left[D_1(\omega_{01}\Phi_1) - 2(1 - \beta_2^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} T_1(\omega_{01}\Phi_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - 2\beta_2^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \frac{\omega_{01}\Phi_1}{r} - \left[\left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta_2^2) \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \right)^2 \right] T_1(\omega_{01}\Phi_2) \right] \right\};$$

$$u_{2z} = \omega_{01}\Phi_1 + \omega_2 \left\{ \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} - 1 \right) \frac{\omega_{02}}{\omega_{02} + \omega_0} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\left(\frac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial r} + \frac{\omega_{01}\Phi_1}{r} + \frac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial z} \right)}{1 - (1 - 2\beta_2^2) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 + \omega_2^2} - \right. \\ \left. - \frac{\omega_0}{\omega_{02} + \omega_0} \left[D_1(\omega_{01}\Phi_2) + 2(1 - \beta_2^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} T_1(\omega_{01}\Phi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - 2\beta_2^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \frac{\omega_{01}\Phi_1}{r} - \left[(1 - 2\beta_2^2) \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \right)^2 \right] T_1(\omega_{01}\Phi_1) \right] \right\};$$

$$+ (1 - 2\beta_2^2) \frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \frac{\omega_{01} \Phi_1}{r} - \left[(1 - 2\beta_2^2) \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega_{02}}{\partial r} \right)^2 \right] T_1(\omega_{01} \Phi_1) \Bigg\}. \quad (4.24)$$

Здесь:

1. Функции $\omega_i(r, z)$, $\omega_{0i}(r, z)$, $\omega(r, z) \in C^1(\Omega)$ ($i=1,2$), построенные с помощью аппарата R-функций, являются левыми частями нормализованных до первого порядка уравнений границ $\partial\Omega_i$, $\partial\Omega_{0i}$ ($i=1,2$) и $\partial\Omega \wedge \{z=h_0\}$ соответствующих областей [24] и обладают следующими свойствами:

а) $\omega_i, \omega_{0i}, \omega > 0$ внутри соответствующих областей;

$$\text{б) } \omega_i|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial \nu}|_{\partial\Omega_i} = -1; \quad \omega_{0i}|_{\partial\Omega_{0i}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_{0i}}{\partial \nu}|_{\partial\Omega_{0i}} = -1 \quad (i=1,2);$$

$$\omega|_{\partial\Omega \wedge \{z=h_0\}} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = -1; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \nu}|_{z=h_0} = 0.$$

2. Операторы D_1 и T_1 определяются равенствами (4.12).

3. Функции $\Phi_i(r, z)$ ($i=1,2$) являются произвольными. При любом их выборе условия (4.20)–(4.21) выполняются точно. При численной реализации структур решения (4.24) функции Φ_i представляются разложениями по элементам некоторой полной системы функций (4.13).

Подставив (4.13) в формулы (4.24), представим приближенное решение задачи (4.22)–(4.23) в виде

$$\begin{aligned} u_{1rn}(r, z) &= \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{11,i}(r, z); & u_{1zn}(r, z) &= \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{12,i}(r, z), \\ u_{2rn}(r, z) &= \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{21,i}(r, z); & u_{2zn}(r, z) &= \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{22,i}(r, z), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $n = n_1 + n_2$; $C_i = \begin{cases} C_{1,i}, & i \leq n_1 \\ C_{2,i}, & n_1 < i \leq n \end{cases}$; $\Psi_{kl,i}(r, z)$ ($i = \overline{1, n}$; $k, l = 1, 2$) – некоторые

функции, определяющиеся структурами (4.24).

Минимизируя функционал (4.22) на множестве функций (4.25), приходим к системе алгебраических уравнений (4.15), где

$$a_{ij} = a_{1,ij} + a_{2,ij};$$

$$\begin{aligned}
a_{k,i,j} = \int_{\Omega_k} & \left\{ \frac{1-2\beta_k^2}{\beta_k^2} \left(\frac{\partial \Psi_{k1,i}}{\partial r} + \frac{\Psi_{k1,i}}{r} + \frac{\partial \Psi_{k2,i}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{k1,j}}{\partial r} + \frac{\Psi_{k1,j}}{r} + \frac{\partial \Psi_{k2,j}}{\partial z} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{\partial \Psi_{k1,i}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi_{k1,j}}{\partial r} + \frac{\Psi_{k1,i} \Psi_{k1,j}}{r^2} + \frac{\partial \Psi_{k2,i}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{k2,j}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \Psi_{k1,ii}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{k2j}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{k1,j}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{k2,j}}{\partial r} \right) \right\} d\Omega_k,; \\
b_{ij} = \int_{\Omega_1} & (\Psi_{11i} \Psi_{11,j} + \Psi_{12i} \Psi_{12,j}) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} (\Psi_{21i} \Psi_{21,j} + \Psi_{22i} \Psi_{22,j}) d\Omega_2; \quad (4.26) \\
& (k = 1,2; i, j = \overline{1,n}).
\end{aligned}$$

Первые n собственных значений $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ задачи (4.6)–(4.7) определяются уравнением

$$\det(A - kB) = 0,$$

где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Коэффициенты C_i аппроксимирующих разложений (4.25) определяются для каждого собственного значения $k = k_i$ ($i = \overline{1,n}$) как решения системы линейных уравнений (4.13) при условии (4.23). Они определяют собственные формы задачи (4.22)–(4.23).

В качестве численного примера рассмотрим одномерную задачу о собственных колебаниях составного стержня длины l , расположенного в декартовой системе координат Oxy вдоль оси абсцисс. Считаем левый конец стержня закрепленным в начале координат. Пусть точка $x = l_0$ разбивает стержень на две части, изготовленные из различных материалов, характеризующихся параметрами β_1 и β_2 . Имеем следующую задачу:

$$-\frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 u}{dx^2} = \mu; \quad (4.27)$$

$$u_1|_{x=0} = 0; \quad \frac{du_2}{dx}|_{x=l} = 0;$$

$$u_1|_{x=l_0-0} = u_2|_{x=l_0+0}; \quad \frac{du_1}{dx}|_{x=l_0-0} = \frac{du_2}{dx}|_{x=l_0+0}, \quad (4.28)$$

где $u = \begin{cases} u_1(x), & x \in [0; l_0) \\ u_2(x), & x \in (l_0; l] \end{cases}$, $\beta = \begin{cases} \beta_1, & x \in [0; l_0) \\ \beta_2, & x \in (l_0; l] \end{cases}$, γ – круговая частота колебательного процесса.

Точное решение задачи (4.27)–(4.28) легко получить с помощью метода Фурье разделения переменных.

Получим приближенное решение задачи о собственных колебаниях составного стержня с помощью метода, предложенного выше. Структура (4.24) приближенного решения упрощается и принимает вид

$$u_1 = \omega_1 \Phi, \quad x \in [0; l_0);$$

$$u_2 = \omega_1 \Phi - \omega_2 \frac{d\omega_2}{dx} \frac{d(\omega_1 \Phi)}{dx} \left(1 - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \frac{l-x}{l-l_0} \right), \quad x \in (l_0; l],$$

где $\omega_1 = x$, $\omega_2 = \frac{(l-x)(x-l_0)}{l-l_0}$. При этом при построении разложений типа (4.13)

в качестве полной системы функций $\{\varphi_m(r, z)\}_{m=1}^{\infty}$ берется система степенных полиномов.

В таблице 4.3 представлены первые четыре собственных значения в сравнении с точным решением. В приведенных результатах степень аппроксимирующего полинома $n = 6$. Для вычислений полагаем $l = 10$; $l_0 = 4$; $\beta_1 = 0,4844$; $\beta_2 = 0,5521$.

Таблица 4.3

Собственные значения составного стержня

Собственное значение	k_1	k_2	k_3	k_4
Точное решение	0,09641	0,79804	2,22046	4,43636
Приближенное решение	0,09676	0,80180	2,24767	4,59434

На рис. 4.3 изображены собственные формы f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , соответствующие первым четырем собственным значениям, а также стержень в состоянии покоя f_0 .

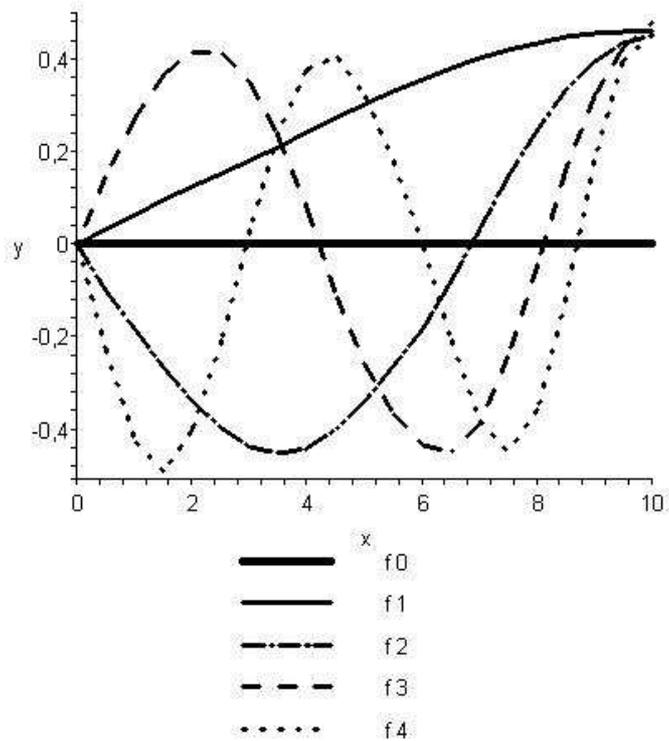


Рис. 4.3. Собственные формы колебания составного стержня

При численной реализации интегралы (4.26) вычислялись приближенно с помощью квадратурных формул Гаусса, порядок которых согласовывался со степенями аппроксимирующих полиномов.

Список литературы

1. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964. – 518 с.
2. Головчан В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 6 т. Т. 5. Динамика упругих тел / Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н, Гринченко В.Т. – Киев: Наук. думка, 1986 – 288 с.
3. Грилицкий Д. И. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости / Д. И. Грилицкий, Я. М. Кизыма. – Львов: Вища шк., 1981. – 136 с.
4. Гринченко В. Т. Нестационарное деформирование цилиндра конечной длины / В. Т Гринченко, Г. Л. Комиссарова // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21.– 8. – С. 3 – 10.
5. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
6. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев: Наук. думка, 1981. – 24 с.
7. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы / В. И. Даниловская // Прикл. математика и механика.– 1950. – 14, вып. 3. – С. 316–318.
8. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко.– Киев: Высш. шк., 1975. – 216 с.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М: Наука, 1977. – 416 с.
10. Литвин О. М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О. М. Литвин, В. Л. Рвачов. – Київ: Наук. думка, 1973. – 124 с.
11. Лобанова Л. С. Осесимметрична динамічна контактна задача для тіла обертання скінченної довжини / Л. С. Лобанова, М. С. Синєкоп // Доп. АН України. – 1994. – 10. – С. 51–53.
12. Лобанова Л. С. Розв'язання динамічних задач для кусково-однорідних тіл скінченних розмірів методом R-функцій / Л. С. Лобанова // Доп. НАН України. – 2000. – 11. – с.76-80.
13. Лобанова Л. С. Нестационарные динамические задачи термоупругости в двухмерных областях / Л. С. Лобанова, Н. С. Синєкоп // Проблемы машиностроения. – 2001. – т.4. – №1–2. – с. 108–120.
14. Лобанова Л. С. Неустановившиеся колебания цилиндра, контактирующего со штампами / Л. С. Лобанова // УИПА. – Харьков, 1995. – 20 с. – Деп. в ГНТБ Украины 02.10.95, № 2224. – Ук 95.
15. Лобанова Л.С. Структурный метод в задаче о неустановившихся колебаниях цилиндра, контактирующего со штампами // Проблемы машиностроения. - 2000. - т.3. - №3-4. - с. 99-106.

16. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
17. Михлин С. Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий. – М.: Наука, 1965. – 384 с.
18. Новацкий В. В. Вопросы термоупругости / В. В. Новацкий. – М.: Мир, 1962. – 363 с.
19. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
20. Поручиков В. В. Методы динамической теории упругости / В. В. Поручиков. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
21. Прокопов В. К. Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра / В. К. Прокопов // Прикл. математика и механика. – 1949. – Т. 13, № 2. – С. 135-144.
22. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. – Киев: Техніка, 1967. – 212 с.
23. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1974. – 259 с.
24. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 566 с.
25. Рвачев В. Л. Метод R -функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы / В. Л. Рвачев, Л. В. Курпа, Н. Г. Склепус, Л. А. Учишвили. – Киев: Наук. думка, 1973. – 121 с.
26. Рвачев В. Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В. Л. Рвачев, В. А. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1979. – 196 с.
27. Рвачев В. Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1976. – 287 с.
28. Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 140 с.
29. Рвачев В. Л. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей / В. Л. Рвачев, В. С. Проценко. – Киев: Наук. думка, 1977. – 235 с.
30. Рвачев В. Л. Метод R -функций в задачах теории упругости и пластичности / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекон. – Киев: Наук. думка, 1990. – 212 с.
31. Рвачев В. Л. R -функции в задачах теории пластин / В. Л. Рвачев, Л. В. Курпа. – Киев: Наук. думка, 1987. – 175 с.
32. Рвачев В. Л. Приближенное решение плоской задачи теории упругости для ортотропного тела методом R -функций / В. Л. Рвачев, Н. И. Синекон // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – №10. С. 61–64.
33. Рвачев В. Л. Множество простых замыкающих функций трехзначной логики / В. Л. Рвачев, В. С. Тоница, Л. И. Шкляр // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1979. – №2. – С. 90–94.

- 34.Рвачев В.Л. Приближенное решение осесимметричной задачи для полого составного цилиндра / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекон, Л. К. Кравченко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – №9. С. 37–42.
- 35.Рвачев В.Л. Расчет напряженно-деформированного состояния вращающихся криволинейно-ортотропных цилиндров / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекон, Н. И. Синекон // Пробл. прочности. – 1987. – №7. С. 76–81.
- 36.Рвачев В. Л. Метод R -функций в динамических задачах теории упругости / В. Л. Рвачев, Л. С. Лобанова, Н. С. Синекон // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1988. – 5.– С. 35–38.
- 37.Рвачев В. Л. Метод R -функций в динамических задачах термоупругости для тел конечных размеров / В. Л. Рвачев, Л. С. Лобанова, Н. С. Синекон // Докл. НАН Украины. – 1999. – № 5. – С. 64–68.
- 38.Рвачев В. Л. О построении обобщенной формулы Тейлора разностного типа / В. Л. Рвачев, О. Н. Бобылева // Укр. мат. журн. – 1978. – т. 30. – №6. – С. 768–778.
- 39.Рвачев В. Л. Метод квазифункций Грина / В. Л. Рвачев, В. С. Проценко // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. – Днепропетровск: изд-во Днепропетровского университета. – 1979. С.188–196.
- 40.Рвачев В.Л. Математическое обеспечение краевых задач математической физики, основанное на теории R -функций / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекон // Математическая физика и нелинейная механика. – 1988. – № 9. – С. 63–74.
- 41.Сеймов В. М. Динамические контактные задачи / В. М. Сеймов. – Киев: Наук. думка, 1976. – 284 с.
- 42.Сизова Н. Д. Исследование дифракции нестационарных и термоупругих волн на объектах неклассической геометрической формы / Н. Д. Сизова // Проблемы машиностроения. – 2001. – т. 4. – №1–2. – С. 100–108
- 43.Синекон Н.С. Нестационарное деформирование цилиндра конечной длины / Н. С. Синекон, Л. С. Лобанова // Проблемы машиностроения. –1998.– т. 1. – №2. – С. 41–47.
- 44.Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1967. – 444 с.
- 45.Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер – М.: Наука, 1975. – 576 с.
- 46.Филиппов А. П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А. П. Филиппов, С. С. Кохманюк, Е. Г. Янютин. – К.: Наук. думка, 1978. – 184 с.
- 47.Шейко Т. И. Об учете особенностей в угловых точках и точках стыка граничных условий в методе R -функций / Т. И. Шейко // Прикл. механика. – 1982. – №4. – С. 95–102.
- 48.Шупиков А. Н. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с.

49. Янютин Е. Г. Математическое моделирование нестационарных колебаний элементов конструкций / Е. Г. Янютин, Н. И. Воропай, Г. А. Гнатенко, А. С. Шарапата. – Харьков: изд-во «Лидер», 2014. – 297 с.
50. Parcus H. Instacionare Warmespannungen / H. Parcus. – Wien: Springer Verlag, 1959. – 507 p.
51. Sternberg E. On inertia effects in a transient thermoelastic problem / E. Sternber, I. Chakravorthy // J. of Appl. Mech. – 1959. – 26. – № 4. – P. 503–509.

Наукове видання

СИНЄКОП Микола Сергійович
ЛОБАНОВА Людмила Семенівна
ПАРХОМЕНКО Лариса Олександрівна

МЕТОД R-ФУНКЦІЙ У ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Монографія
(російською мовою)

Відповідальний за випуск
зав. кафедри вищої математики ХДУХТ
канд. фіз.-мат. наук, доц. Д. О. Торяник

В авторській редакції

Підп. до друку	2015.	Формат 60×84 1/16	Папір газет.	Друк. офс.
Умов. друк. арк.	Наклад	прим. Зам.№	.	

Видавець і виготівник

Харківський державний університет харчування та торгівлі.
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №4417 від 10.10.2012 р.