УДК 629.017

# ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ АВТОМОБІЛЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

**Дюндик С.М., к.т.н., доц.**
*Національна академія Національної гвардії України*

**Кісь В.М., к.т.н., доц., Галич І.В., ст. викл.**
*Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка*

*В роботі обґрунтовано метод дослідження динаміки автомобіля спеціального призначення. Запропоновано рівняння, що описують динаміку автомобіля, як багатомасової системи. Наведено аналіз аналітичних рівнянь руху автомобільного колеса (шини).*

**Постановка проблеми.** Легковими автомобілями виконуються значна кількість тактичних завдань. При розробці нових, а також підвищення ефективності експлуатації існуючих автомобілів, необхідно проводити теоретичні дослідження оцінки його динаміки. Для цього необхідно формувати коректні математичні моделі, що дозволяють досліджувати та оптимізувати динаміку, керованість, стійкість тощо.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження широкого кола властивостей колісних машин наведено у роботах [1, 2]. Стійкість та керованість автомобіля досліджено у роботах [3, 4]. Моделювання поведінки підресорених та непідресорених мас під час зміни площини руху досліджено у роботі [5]. Питання коливання автомобіля, викликані нерівностями дороги, розглядались у роботах авторів [6, 7].

**Метою роботи** є обґрунтування методу дослідження динаміки автомобіля спеціального призначення, що є необхідною умовою для подальшої оцінки його властивостей.

**Виклад основного матеріалу.** Моделювання динаміки транспортних засобів, таких як автомобілі, як правило, виконується за рахунок представлення їх багатоелементними системами [8]. Як правило, загальна модель автомобіля поділяється на різні підсистеми [9]. На рис. 1 наведено основні компоненти моделі легкового автомобіля, що використовуються для дослідження динаміки автомобіля. Модель автомобіля складається з остову та інших підсистем.

Остов транспортного засобу являє собою ядро моделі. Це, принаймні, включає шасі модуля та модулі для систем підвіски коліс / осей. Остов автомобіля доповнюється модулями для навантаження, пружно приєднаними двигуном і моделями водія й пасажира. Модуль навантаження враховує масові і інерційні властивості автомобіля. Для опису впливу навантажень необхідні моделі динамічного навантаження. Підсистеми такі, як двигун, водій, пасажир та сидіння, а також модель кабіни можуть бути представлені загальною моделлю вільного тіла [10].


Рис. 1 - Основні компоненти моделі легкового автомобіля

Для стандартного аналізу динаміки автомобіля шасі можна моделювати одним твердим тілом [9]. Проте, у випадку вантажних автомобілів, відповідність рами і пружно підвішеної кабіни водія вимагатиме, принаймні, зосередженого підходу масової моделі або побудови розширеної структури кінцевих елементів. Більшість систем підвіски коліс та осей автомобіля можуть бути описані типовими елементами, такими як жорсткі тіла, ланки, з'єднання і силові елементи [10]. Завдяки своїй стійкості листові ресори все ще є популярним вибором для жорстких осей.

Система рульового керування, принаймні, складається з рульового колеса, гнучкого керованого валу і рульової рейки або редуктора.

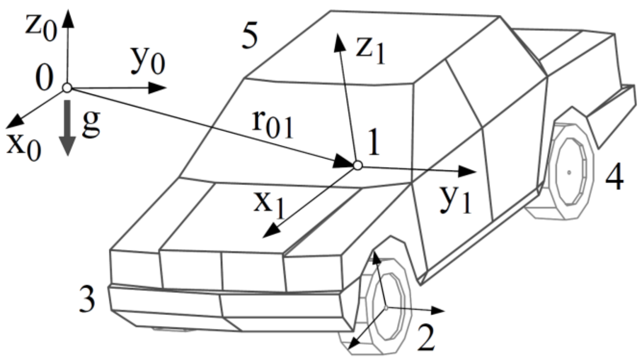
Сили і моменти, що діють на колеса домінують в динаміці автомобіля. Як правило, для аналізу роботи транспортних засобів використовуються напівемпіричні моделі шин. Вони поєднують в собі розумну продуктивність роботи комп'ютера з достатньою точністю моделі. Комплексні моделі шин дійсні навіть для високих частот та нерівних дорогах.

Модель шин «TMPT» надає інформацію про ефективність та проблеми моделювання і параметризацію шин, а також про інтеграцію в стандартні багатопрофільні програмні коди [21].

Модель трансмісії, що досліджена в [10] враховує блокування диференціалів, і вона дозволяє визначати динаміку автомобілів з переднім, заднім або повним приводом. Модель трансмісії доповнюється модулем, що описує крутний момент двигуна. Вона може бути змодельована, як це зроблено тут, досить просто за допомогою диференціального рівняння першого порядку або вдосконалених модулів крутного моменту двигуна.

Нерівності на дорозі та коливання коефіцієнта тертя впливають на транспортний засіб. Найбільше поширення отримав модельний підхід до генерування двовимірних випадкових профілів представлений в [9].

Тривимірна модель автомобіля складається з п'яти твердих тіл (рис. 2) [9]. Положення і орієнтація кожного тіла $i = 1, 2, ..., n$ моделі, описано відносно земної фіксованої системи координат $0x_0y_0z_0$, яка являється системою відліку. Вісь $z_0$ фіксованої системи координат Землі буде вказувати в протилежному напрямку від вектора сили тяжіння $g$.




1 – кузов (ходова частина); 2, 3, 4, 5 – колесо і підвіска (відповідно передні ліві, передні праві, задні ліві і задні праві)

Рис. 1. Тривимірна модель автомобіля

Рух кожного колеса і підвіски відносно кузова (шасі) обмежені ланками, шарнірами або іншими елементами. Результуючі сили і моменти можуть бути або виключені з рівнянь руху за допомогою відповідних алгоритмів, або враховані за допомогою множників Лагранжу. Перший метод є громіздким, але призведе до мінімізації числа звичайних диференціальних рівнянь, тоді як останній призведе до утворення системи диференціальних алгебраїчних рівнянь.

Права декартова система координат прикріплена до кожного тіла в його центрі. Положення і орієнтація тіла і по відношенню до інерційної системи відліку *0* визначається вектором положення:

$$r_{0i,0} = r_{0i,0}(y) \tag{1}$$

та матрицю обертання:

$$A_{0i} = A_{0i}(y) \tag{2}$$

де узагальнені координати $y_1, y_2, ..., y_f$, що необхідні для опису рухів багатомасової системи, збирають у векторі y, а розділений комою нижній індекс *0* вказує, що координати вектора положення $r_{0i}$ вимірюються в системі відліку *0*.

Стовпці матриці обертання $A_{0i}$ представляють собою ортогональні одиничні вектори, визначені в інерційній системі відліку *0* і вказують у напрямку осі нерухомої системи координат *i*. Для таких видів ортонормальних матриць:

$$A_{0i}^{T}A_{0i}=A_{0i}A_{0i}^{T}=I \ \text{або}\ A_{0i}^{-1}=A_{0i}^{T}, \qquad (3)$$

де: $I$ – позначає відповідну матрицю ідентичності.

Якщо компоненти вектору $r$ визначаються в тілі фіксованої системи координат *i*, то множення з матрицею обертання $A_{0i}$ перетворює цей вектор через:

$$r_{,0}=A_{0i}r_{,i}, \qquad (4)$$

до земної осі системи *0*, та:

$$r_{,i}=A_{0i}^{T}r_{,0}, \qquad (5)$$

досить просто визначає зворотне перетворення.

Швидкість, з якою тіло *i* рухається відносно інерційної системи *0*, визначається похідною часу вектору позиції, визначеної з (1):

$$\upsilon_{0i,0}=\frac{d}{dt}r_{0i,0}(y)=\dot{r}_{0i,0}(y)=\sum_{m=1}^{f}\frac{\partial r_{0i,0}(y)}{\partial y_m}\dot{y}_m=\upsilon_{0i,0}(y,\dot{y}), \qquad (6)$$

Часова похідна матриці обертання, помножена на її перенесені результати, призводить до кососиметричної матриці:

$$\tilde{\omega}_{0i,0}=\frac{d}{dt}\left(A_{0i,0}(y)\right)A_{0i,0}^{T}(y)=\sum_{m=1}^{f}\frac{\partial A_{0i,0}(y)}{\partial y_m}\dot{y}_m A_{0i,0}^{T}(y)=\tilde{\omega}_{0i,0}(y,\dot{y}), \qquad (7)$$

Основні компоненти:

$$\tilde{\omega}_{0i,0}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_{0i,0}(3) & \omega_{0i,0}(2)\\ \omega_{0i,0}(3) & 0 & -\omega_{0i,0}(1)\\ -\omega_{0i,0}(2) & \omega_{0i,0}(1) & 0\end{bmatrix},$$

визначають вектор кутової швидкості

$$\omega_{0i,0} = \left[\omega_{0i,0}(1), \omega_{0i,0}(2), \omega_{0i,0}(3)\right]^T,$$

з яким система фіксованого тіла і обертається відносно землі (системи відліку 0). Прямий розрахунок показує, що:

$$\omega_{0i,0} r_{,0} = \omega_{0i,0} \times r_{,0}, \tag{8}$$

для будь-якого вектора $r_{,0}$ означає, що множення кососиметричної матриці кутових швидкостей може бути замінено на відповідний вектор.

Залежно від виду обмежень, алгебраїчне представлення вектора швидкості $\upsilon_{0i,0} = \upsilon_{0i,0}(y, \dot{y})$ та вектора кутових швидкостей $\omega_{0i,0} = \omega_{0i,0}(y, \dot{y})$ може стати дуже складним. Однак можливі значні спрощення, якщо похідна часу вектора узагальнених координат $\dot{y}$ замінити на:

$$z = K(y)\dot{y}, \tag{9}$$

відповідним вектором узагальнених швидкостей $z = z(y, \dot{y})$. Тоді алгебраїчне представлення отриманих швидкостей і кутових швидкостей матиме вигляд:

$$\upsilon_{0i,0}(y, \dot{y}) \Rightarrow \upsilon_{0i,0}(y, z) \text{ та } \omega_{0i,0}(y, \dot{y}) \Rightarrow \omega_{0i,0}(y, z) \tag{10}$$

та буде менш складним. У багатьох випадках проста перевірка результуючих швидкості вже призводить до відповідних узагальнених швидкостей. Тривіальний вибір:

$$z = \dot{y}, \tag{11}$$

завжди можливий. Тут кінематична матриця $K = K(y)$ спрощується до відповідної матриці ідентичності.

Похідні швидкостей і кутових швидкостей по часу остаточно приводять до відповідних прискорень:

$$\begin{aligned} a_{0i,0} &= \frac{d}{dt}\upsilon_{0i,0}(y, z) = \sum_{m=1}^{f} \frac{\partial \upsilon_{0i,0}(y, z)}{\partial y_m}\dot{y}_m + \sum_{m=1}^{f} \frac{\partial \upsilon_{0i,0}(y, z)}{\partial z_m}\dot{z}_m, \\ \alpha_{0i,0} &= \frac{d}{dt}\omega_{0i,0}(y, z) = \sum_{m=1}^{f} \frac{\partial \omega_{0i,0}(y, z)}{\partial y_m}\dot{y}_m + \sum_{m=1}^{f} \frac{\partial \omega_{0i,0}(y, z)}{\partial z_m}\dot{z}_m, \end{aligned} \tag{12}$$

Рухи одного твердого тіла описується законом Ньютона:

$$m_i a_{0i,0} = F_{i,0} \tag{13}$$

та рівнянням Ейлера:

$$\Theta_{i,0}\alpha_{0i,0} + \omega_{0i,0} \times \Theta_{i,0}\omega_{0i,0} = T_{i,0} \tag{14}$$

де: $m_i$ - маса тіла *i*; Θ - тензор інерції тіла *i*, визначений по відношенню до його центру мас і виміряний в інерційній системі відліку.

Якщо тіло піддається впливу кінематичних обмежень, то сили і моменти, що діють на тіло і, можуть бути розділені на дві частини

$$F_{i,0} = F_{i,0}^c + F_{i,0}^a;\ T_{i,0} = T_{i,0}^c + T_{i,0}^a, \tag{15}$$

де: $F_{i,0}^c$ та $T_{i,0}^c$- представляють сили і моменти, що мають обмеження; $F_{i,0}^a$, $T_{i,0}^a$ - збирати всі інші сили і моменти, прикладені до тіла *i*.

Подібно до принципу віртуальної роботи D'Alembert, Jourdain постулював, що віртуальна сила всіх сил і моментів повинна зникати. Для системи з *k* жорсткими тілами ми отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\delta\upsilon_{0i,0}^T F_{i,0}^c + \delta\omega_{0i,0}^T T_{i,0}^c\right\}. \tag{16}$$

Віртуальну швидкість і віртуальну кутову швидкість тіла *i* визначають наступним чином:

$$\delta\upsilon_{0i,0} = \frac{\partial\upsilon_{0i,0}}{\partial z}\delta z;\ \delta\omega_{0i,0} = \frac{\partial\omega_{0i,0}}{\partial z}\delta z \tag{17}$$

де: *f* × 1 - вектор *δz* варіації узагальнених швидкостей $\delta z_1$, $\delta z_2$, …, $\delta z_f$ та часткові похідні названі частковими швидкостями і частковими кутовими швидкостями, представлені як 3 × *f* Якобіани перетворення та обертання:

$$\frac{\partial\upsilon_{0i,0}}{\partial z} = \left[\frac{\partial\upsilon_{0i,0}(y,z)}{\partial z_1}, \frac{\partial\upsilon_{0i,0}(y,z)}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial\upsilon_{0i,0}(y,z)}{\partial z_f}\right]; \tag{18}$$

$$\frac{\partial \omega_{0i,0}}{\partial z} = \left[ \frac{\partial \omega_{0i,0}(y,z)}{\partial z_1}, \frac{\partial \omega_{0i,0}(y,z)}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \omega_{0i,0}(y,z)}{\partial z_f} \right]. \tag{19}$$

Використовуючи матриці Якобіан, прискорення (12) можна записати як:

$$a_{0i,0} = \frac{\partial \upsilon_{0i,0}}{\partial z} \dot{z} + a_{0i,0}^R; \quad \alpha_{0i,0} = \frac{\partial \omega_{0i,0}}{\partial z} \dot{z} + \alpha_{0i,0}^R, \tag{20}$$

де: $\dot{z}$ – похідна вектора узагальнених швидкостей:

$$a_{0i,0}^R = \sum_{m=1}^{f} \frac{\partial \upsilon_{0i,0}(y,z)}{\partial y_m} \dot{y}_m; \quad \alpha_{0i,0}^R = \sum_{m=1}^{f} \frac{\partial \omega_{0i,0}(y,z)}{\partial y_m} \dot{y}_m, \tag{21}$$

скорочує залишкові члени в прискореннях. Поєднуючи рівняння (15) з рівняннями (13) і (14), здатний поєднати обмеження сил і моментів до динамічних складових й прикладених сил та крутних моментів.

Використовуючи позначення у рівняннях (20) і (21), рівняння Jourdain мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^{k} \left\{ \frac{\partial \upsilon_{0i,0}^T}{\partial z} \left[ m_i \frac{\partial \upsilon_{0i,0}}{\partial z} \dot{z} + m_i a_{0i}^R - F_{i,0}^a \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \omega_{0i,0}^T}{\partial z} \left[ \Theta_{i,0} \frac{\partial \omega_{0i,0}^T}{\partial z} \dot{z} + \Theta_{i,0} \alpha_{0i}^R + \omega_{0i,0} \times \Theta_{i,0} \omega_{0i,0} - T_{i,0}^a \right] \right\} \delta z = 0 \tag{22}$$

Зміни узагальнених швидкостей $\delta z$ довільні. Отже, вираз в фігурних дужках повинен зникнути. Отримане диференціальне рівняння першого порядку може бути записано так:

$$M(y)\dot{z} = q(y,z), \tag{23}$$

де: $f \times f$ – матриця мас, яка задана:

$$M(y) = \sum_{i=1}^{k} \left[ \frac{\partial \upsilon_{0i,0}^T}{\partial z} m_i \frac{\partial \upsilon_{0i,0}}{\partial z} + \frac{\partial \omega_{0i,0}^T}{\partial z} \Theta_{i,0} \frac{\partial \omega_{0i,0}^T}{\partial z} \right] \tag{24}$$

та вектор $f \times 1$ узагальнених сил:

$$q(y,z)=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial \upsilon_{0i,0}^{T}}{\partial z}\left(F_{i,0}^{T}-m_{i}a_{0i,0}^{R}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial \omega_{0i,0}^{T}}{\partial z}\left(T_{i,0}^{a}-\Theta_{i,0}\alpha_{0i}^{R}-\omega_{0i,0}\times\Theta_{i,0}\omega_{0i,0}\right)\right] \qquad (25)$$

поєднує в собі інерцію, гіроскопічні сили і крутні моменти з прикладеними силами й обертаючими моментами. Рівняння руху призводять до набору двох диференціальних рівнянь першого порядку. На відміну до наведеного методу, рівняння динаміки багатомасових сільськогосподарських машин та агрегатів при просторовому русі елементів рекомендовано досліджувати рівняннями Аппеля у роботі [12]. Однак, і ці рівняння вирішуються автоматично чисельними методами в MatLab.

**Висновки.**

1. В роботі наведено метод дослідження автомобіля спеціального призначення, що дозволяє оптимізувати динаміку та керованість враховуючи стійкість руху. Запропоновано метод складання рівнянь динаміки автомобіля, як багатомасової моделі.

2. Для стандартного аналізу динаміки автомобіля шасі можна моделювати одним твердим тілом. Систему рульового керування, пропонується досліджувати як окремі тіла: рульове колесо, гнучкий керований вал, рульова рейка. Сили і моменти, що діють на колеса домінують в динаміці автомобіля. Для дослідження динаміки шин пропонується використовувати модель шин «TMPT».

3. Тривимірну модель автомобіля пропонується складати з п'яти твердих тіл Рух кожного колеса і підвіски відносно кузова (шасі) обмежені ланками, шарнірами або іншими елементами.

**Список використаних джерел**


1. Безбородова Г. Б. Моделирование движения автомобиля / Г. Б. Безбородова, В. Г. Галушко. – К.: Высшая школа, 1978. – 168 с.
2. Чудаков Д. А. Основы теории и расчета трактора и автомобиля: Учебн. [для студ. высш. учебн. зав.] / Д. А. Чудаков. – М.: Колос, 1972. – 384 с.
3. Литвинов А. С. Управляемость и устойчивость автомобиля / А. С. Литвинов. – М. : Машиностроение, 1971. – 416 с.
4. Хачатуров А.А. Динамика системы “дорога – шина – автомобиль – водитель”. – М.: Машиностроение, 1976. – 535 с.
5. Башинський А. Л. Альтернативний підхід до оцінки поперечної стійкості автомобіля / А. Л. Башинський, С. А. Осташевський // Вестник

Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2015. – Вып. 71. – С. 151–155.
6. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. – М.: Машиностроение, 1981. – 271 с.
7. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. – М.: Машиностроение, 1972. – 392 с.
8. P. van der Jagt. The Road to Virtual Vehicle Prototyping; New CAEModels for Accelerated Vehicle Dynamics Development. ISBN 90-386-2552-9 NUGI 834, Tech. Univ. Eindhoven, 2000.
9. Rill, G. Road vehicle dynamics: Fundamentals and modeling / Boca Raton, FL: CRC Press. (2012) 331 p.
10. G. Rill. Vehicle modeling by subsystems. Journal of the Brazilian Societyof Mechanical Sciences& Engineering - ABCM, XXVIII(4):433, 2006.
11. P. Lugner and M. Plochl. Tire Model Performance Test (TMPT). Taylor & Francis, 2007.
12. Антощенков Р. В. Динаміка та енергетика руху багатоелементних машинно-тракторних агрегатів: монографія / Р. В. Антощенков. – Х.: ХНТУСГ, «Міськдрук», 2017. – 244 с.

**Аннотация**

**ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ АВТОМОБИЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

Дюндик С. М., Кись В. Н., Галич И. В.

*В работе обоснован метод исследования динамики автомобиля специального назначения. Предложены уравнения, описывающие динамику автомобиля, как многомассовую систему. Приведен анализ аналитических уравнений движения автомобильного колеса (шины).*

**Abstract**

**JUSTIFICATION OF THE METHOD OF STUDYING THE SPEAKLY SPECIAL DESTINATION OF THE DYNAMICS OF A CAR**

S. Dyundik, V. Kis, I. Galich

*The paper substantiates the method for studying the dynamics of a special-purpose vehicle. The equations describing the dynamics of the car as a multi-mass system are proposed. The analysis of the analytical equations for the movement of the automobile wheel (tires).*