УДК 519.6:001.5
DOI https://doi.org/10.32838/2663-5941/2021.1-1/16

***Левкін Д.А.***
Харківський національний технічний університет сільського господарства
імені Петра Василенка

***Бережна Н.Г.***
Харківський національний технічний університет сільського господарства
імені Петра Василенка

***Макаров О.А.***
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

***Кутья О.В.***
Харківський національний технічний університет сільського господарства
імені Петра Василенка

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

*У статті розглянуті питання математичного моделювання багатошарових систем, які містять джерела термічних навантажень. Мета досліджень – розробка математичних моделей таких систем, а також модифікація наявних чисельних методів у частині врахування специфіки модельованих систем і технічних параметрів випромінювачів. Як досліджуваний об'єкт автори розглядають багатошаровий кулястий матеріал під дією джерел термічних навантажень. Унікальність досліджень полягає в урахуванні багатошарової структури модельованих систем і технічних параметрів випромінювачів, що дозволяє зменшити витрати технічних ресурсів, а також знизити втрати досліджуваного матеріалу.*

*Авторами цієї роботи наведено один із можливих алгоритмів для розрахунку температурного поля кулястого матеріалу. Запропоновано дві розрахункові математичні моделі (крайові задачі) процесу термічної дії, визначено умови їх коректності та розв'язані крайові задачі. Оскільки в основі крайових задач лежать системи багатовимірних, неоднорідних, нестаціонарних диференціальних рівнянь теплопровідності у сферичній системі координат, то для доказу існування і єдиності розв'язків скористалися теорією псевдодиференціальних операторів у просторі узагальнених функцій. Це дозволило визначити умови коректності не тільки розглянутих у цій роботі крайових задач, але й низки розрахункових математичних моделей процесу термічної дії на багатошарові матеріали. Реалізація розглянутих розрахункових математичних моделей на комп'ютерах для конкретного досліджуваного об'єкта в перспективі дасть можливість забезпечити контроль за розподілом температурних полів і знизити втрати досліджуваного матеріалу. Отримані результати можуть бути використані для розв'язування багатьох прикладних задач розрахунку параметрів температурних полів у різних багатошарових системах.*

***Ключові слова:*** *математичні моделі, коректність, псевдодиференціальні оператори, узагальнені функції, прикладні задачі.*

**Постановка проблеми.** У зв'язку зі значними втратами досліджуваного матеріалу і витратами технічних ресурсів багатошарових систем, які містять джерела фізичних полів, збільшується роль математичного моделювання та оптимізації таких систем. Оскільки при цьому здебільшого доводиться розв'язувати прикладні задачі нелінійного математичного програмування, то не можна стверджувати про коректність крайових задач, що лежать в основі розрахункових математичних моделей.

Об'єктом дослідження є технічні системи, які містять джерела термічного навантаження. Зважаючи на те, що особливістю матеріалів, окрім багатошарової структури, є характеристики джерел впливу, то виникають труднощі в реалізації етапу математичного моделювання на комп'ютерах. Як приклад, до них зараховують збільшення часу і пам'яті при реалізації розрахункових математичних моделей. Це призводить до того, що модельовані системи розглядають без урахування багатошарової структури досліджуваних об'єктів з усередненими значеннями технічних параметрів випромінювачів, і сприяє отриманню досить грубих оцінок технічних параметрів випромінювачів, а також наближеного розв'язку диференціальних рівнянь.

У статті представлено один із можливих алгоритмів розрахунку температурних полів багатошарового кулястого матеріалу під впливом джерел термічного навантаження. Наведено приклади двох розрахункових математичних моделей процесу термічного впливу на багатошарові кулясті матеріали, в основі яких лежать крайові задачі систем багатовимірних, нестаціонарних, неоднорідних диференціальних рівнянь теплопровідності у сферичних координатах. Для доказу коректності крайових задач використано теорію псевдодиференціальних операторів у просторі узагальнених функцій, представлено схему для розв'язування крайових задач. Дослідження цієї роботи можна застосувати для розрахунку температурних полів довільних багатошарових технічних систем. При цьому зазнають зміни постановка і методи реалізації крайових задач, але алгоритм для їх чисельної реалізації залишиться майже без змін.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Універсальність і широке застосування тематики досліджень цієї роботи привертали увагу багатьох учених [1–5]. У монографіях [1; 2] наведено розрахунок і оптимізацію технічних систем, які містять джерела дії фізичних полів. У цих роботах здійснено формалізацію і систематизацію прикладних задач оптимізації, що дозволило запропонувати чисельні методи і програмно-апаратні засоби для автоматизації досліджень технічних систем. Для досліджень цієї статті важливість результатів монографій [1; 2] полягає в універсальності наведених методів розрахунку і оптимізації технічних систем. Водночас їх авторами не наведено розподіл температурних полів у технічних системах залежно від характеристик параметрів випромінювачів. Розв'язанню прикладних задач оптимізації біотехнологічних систем під дією лазерного променя присвячено результати публікацій [3–5]. Незважаючи на те, що в цих роботах вказується на важливість етапу математичного моделювання та оптимізації під час побудови програмно-апаратних засобів процесу впливу, автори не розглядають теплових режими впливу на ембріон, а технічні характеристики випромінювачів усереднені. Це призводить до додаткових похибок під час розрахунку значень функції мети і параметрів випромінювачів.

**Постановка завдання.** Запропонувати підхід до чисельної реалізації процесу моделювання технічних систем, які містять джерела термічного навантаження.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Розглянемо крайову задачу системи диференціальних рівнянь теплопровідності процесу термічної дії на кулястий двошаровий матеріал:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left( \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_1} \dfrac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0; \\ \rho_2 c_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left( \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_2} \dfrac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\rho_1, \rho_2$ – коефіцієнти густини зовнішнього та внутрішнього шарів матеріалу; $c_1, c_2$ – коефіцієнти теплоємкості зовнішнього та внутрішнього шарів матеріалу; $T_1 = T_1(r,t)$, $T_2 = T_2(r,t)$ – температурні поля шарів; $\vec{r}$ – просторова координата; $t$ – час термічної дії; $\lambda_1, \lambda_2$ – коефіцієнти теплопровідності шарів; $q_1, q_2$ – питомі густини потужності термічних навантажень у матеріалі.

Граничні умови Діріхле:

$$\begin{cases} T(r_0, t_0) = T_0; \\ T(r_n, t_n) = T_n, \end{cases} \quad (2)$$

де $T_0$ – температура зовнішнього шару матеріалу на початку термічної дії; $T_n$ – температура внутрішнього шару матеріалу наприкінці термічної дії.

Рівності розділу середовищ у матеріалі:

$$T_1(r_1, t_1) = T_2(r_2, t_2), \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}. \quad (3)$$

Рівності неперервності температурних полів:

$$\begin{cases} T(r_1, t_1 - 0) = T(r_1, t_1 + 0); \\ T(r_2, t_2 - 0) = T(r_2, t_2 + 0). \end{cases} \quad (4)$$

Граничні умови теплового обміну на границі розділу зовнішнього шару сферичного матеріалу та навколишнього середовища:

$$\left. \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - A(T_1 - T_{env}) \right) \right|_{r=0} = 0, \quad (5)$$

де $A$ – параметр тепловіддачі зовнішнього шару матеріалу;

$T_{env}$ – температура навколишнього середовища.

Розглянемо крайову задачу системи диференціальних рівнянь теплопровідності процесу термічної дії на кулястий багатошаровий матеріал:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left( \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_1} \dfrac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0; \\ \rho_2 c_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left( \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_2} \dfrac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \rho_N c_N \dfrac{\partial T_N}{\partial t} - \lambda_N \left( \dfrac{\partial^2 T_N}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_N} \dfrac{\partial T_N}{\partial r} \right) + q_N = 0, \end{cases} \tag{6}$$

де $T_e = T_e(r,t)$ – температурні поля багатошарового матеріалу; $r_e$ – просторова координата, в якій розраховано значення температурного поля; $t_e$ – часова координата.

Інші позначення залишаються такими ж, як у крайовій задачі (1) з урахуванням багатошарової структури матеріалу. Граничні умови Діріхле (2) встановлюють початок та кінець термічної дії на багатошаровий матеріал.

Рівності розділу середовищ застосовані для урахування багатошарової структури матеріалу:

$$\begin{cases} T_1(r_1,t_1) = T_2(r_2,t_2), \quad -\lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial r} = -\lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial r}; \\ T_2(r_2,t_2) = T_3(r_3,t_3), \quad -\lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial r} = -\lambda_3 \dfrac{\partial T_3}{\partial r}; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ T_{N-1}(r_{N-1},t_{N-1}) = T_N(r_N,t_N), \quad -\lambda_{N-1} \dfrac{\partial T_{N-1}}{\partial r} = -\lambda_N \dfrac{\partial T_N}{\partial r}. \end{cases} \tag{7}$$

Позначення такі ж, як у системі (6).

Рівності неперервності температурних полів:

$$\begin{cases} T(r_1;t_1 - 0) = T(r_1;t_1 + 0); \\ T(r_2;t_2 - 0) = T(r_2;t_2 + 0); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ T(r_N;t_N - 0) = T(r_N;t_N + 0). \end{cases} \tag{8}$$

Для врахування теплового обміну застосовано граничні умови (5).

Використовуючи результати публікацій [6; 7], перевіримо коректність розглянутих крайових задач. Для цього проведемо дослідження диференціального рівняння:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q = 0 . \tag{9}$$

Диференціальний символ рівняння:

$$P(r,\tau,\eta) = P_0(r,\tau,\eta) + P_1(r,\tau,\eta) = i\tau + \frac{\lambda}{\rho c}\eta^2 - \frac{2\lambda i \eta}{\rho c r} . \tag{10}$$

Поліном $P_0(r,\tau,\eta)$ за $\operatorname{Im}\tau < 0$ буде експоненціально-коректним та вдовольнятиме умову сталості сили. За $\operatorname{Im}\tau \to -\infty$ і $r > \delta$ псевдодиференціальний оператор $P_1(r,D)T$ є підлеглим оператору $P_0(r,D)T$ .

Отримані результати дозволяють стверджувати, що розглянуті в роботі крайові задачі будуть коректними в просторі узагальнених функцій гладко залежних від часу.

О.А. Макаровим і Д.А. Левкіним запропоновано універсальний алгоритм для розв'язування крайової задачі (6) – (8). Розглянемо в загальному випадку однорідну та неоднорідну крайові задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = P_1\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t); \\ \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = P_2\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = P_N\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t), \end{cases} \tag{11}$$

$$D_0\left( \frac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,0) + D_1\left( \frac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t_1) + \dots + \\ + D_N\left( \frac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t_N) = \varphi(x), \tag{12}$$

де $P_j\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right)$ і $D_j\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right)$ – псевдодиференціальні оператори із символами з простору нескінченно диференційованих функцій степеневого зростання, $j = 1,...,N$

і

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = P_1\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t) + f(x,t); \\ \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = P_2\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t) + f(x,t); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = P_N\left( \dfrac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t) + f(x,t). \end{cases} \tag{13}$$

$$D_0\left( \frac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,0) + D_1\left( \frac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t_1) + \dots + \\ + D_N\left( \frac{\partial}{i\partial x} \right) T(x,t_N) = 0. \tag{14}$$

Позначення залишаються такими ж, як у крайовій задачі (11) – (12).

Подіємо перетворенням Фур'є на рівняння з однорідної й неоднорідної крайових задач (11) – (12), (13) – (14) відповідно:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = P_1(s)\tilde{T}(s,t); \\ \frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = P_2(s)\tilde{T}(s,t); \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = P_N(s)\tilde{T}(s,t), \end{cases} \quad (15)$$

$$D_0(s)\tilde{T}(s,0) + D_1(s)\tilde{T}(s,t_1) + \dots + \\ + D_N(s)\tilde{T}(s,t_N) = \tilde{\varphi}(s), \quad (16)$$

де $\tilde{T}(s,t)$ – перетворення Фур’є функції $T(x,t)$; $\tilde{\varphi}(s)$ – перетворення Фур’є функції $\varphi(x)$.

Аналогічно, отримали:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = P_1(s)\tilde{T}(s,t) + \tilde{f}(s,t); \\ \frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = P_2(s)\tilde{T}(s,t) + \tilde{f}(s,t); \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = P_N(s)\tilde{T}(s,t) + \tilde{f}(s,t), \end{cases} \quad (17)$$

$$D_0(s)\tilde{T}(s,0) + D_1(s)\tilde{T}(s,t_1) + \dots + \\ + D_N(s)\tilde{T}(s,t_N) = 0, \quad (18)$$

де $\tilde{f}(s,t)$ – перетворення Фур’є функції $f(x,t)$.

З умови неперервності отримали:

$$\tilde{\varphi}_k(s) = \exp\Big(t_1 P_1(s) + (t_2 - t_1) P_2(s) + \dots + \\ + (t_{j-1} - t_{j-2}) P_{j-1}(s)\Big)\tilde{\varphi}_1(s). \quad (19)$$

Провівши низку алгебраїчних перетворень, знайшли розв’язок крайової задачі (15) – (16):

$$\tilde{T}(s,t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(s)\cdot \exp t P_1(s)/\Delta(s); \\ \tilde{\varphi}(s)\cdot \exp t P_2(s)/\Delta(s); \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \tilde{\varphi}(s)\cdot \exp\big(t_1 P_1(s) + \dots + (t - t_{N-1}) P_N(s)\big)/\Delta(s), \end{cases} \quad (20)$$

де $\Delta(s) = D_0(s) + \dots + D_N(s)\exp\big(t_1 P_1(s) + (t_2 - t_1) P_2(s) + \dots + (t_N - t_{N-1}) P_N(s)\big)$.

Отримані результати можуть бути використані для дослідження прикладних оптимізаційних математичних моделей, розглянутих, наприклад, в роботі [8]. На думку Д.А. Левкіна, для оптимізації технічних систем із метою підвищення якості технологічних процесів необхідна одночасна реалізація хоча б двох прикладних оптимізаційних математичних моделей.

Математична модель мінімізації (за параметрами термічного навантаження $Y$) максимального значення температурного поля:

$$\min_Y \max T(x,y,z,t,Y), \quad (21)$$

де $(x,y,z) \in \Omega^*$ – область матеріалу; $t$ – час дії.

Математична модель мінімізації (за параметрами термічного навантаження $Y$) травмування матеріалу:

$$L = \frac{V_{segm}}{V} \times 100\% \to \min_Y, \quad (22)$$

де $V_{segm}$ – об’єм частини матеріалу, що піддається термічному навантаженню; $V$ – об’єм матеріалу.

Зазначимо, що для оптимізації багатьох технічних систем необхідні додаткові витрати часу та пам’яті під час реалізації прикладних задач оптимізації на комп’ютерах. Зазначені труднощі можна подолати за рахунок використання аналогових чи гібридних сіткових процесорів. Різновид математичного моделювання розглянуто в публікаціях [9; 10] для визначення надійності надання транспортних послуг та підвищення ефективності функціонування транспортних підприємств.

**Висновки.** У статті досліджені питання розв’язання прикладних задач нелінійного математичного програмування. Авторами запропоновано один із можливих алгоритмів для чисельної реалізації розрахункових математичних моделей. Наведено приклади двох розрахункових математичних моделей для багатошарових матеріалів, які перебувають під впливом джерел термічного навантаження, визначено й обґрунтовано умови коректності розглянутих крайових задач, а також у загальному вигляді здійснено їх реалізацію. З огляду на те, що досить часто під час моделювання технічних та інших систем доводиться мати справу з багатовимірними, нелінійними і нестаціонарними диференціальними рівняннями, то не можна гарантувати їх коректність. Тому для визначення умов існування і єдиності розв’язування крайових задач можна скористатися теорією псевдодиференціальних операторів у просторі узагальнених функцій. Це дозволить гарантувати коректність розглянутих розрахункових математичних моделей для багатьох технічних систем, які містять джерела термічного навантаження. Дослідження статті вирізняються універсальністю і можуть бути використані для розв’язування багатьох прикладних задач розрахунку та оптимізації багатошарових систем.

**Список літератури:**

1. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. Киев : Наук. думка, 1988. С. 44–48.
2. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Размещение источников физических полей. Киев : Наук. думка, 1981. С. 59–87.
3. Levkina R., Levkin A., Petrenko A., Kolomiec N. Current approaches to biotechnology in animal husbandry. *International Journal of Advanced Science and Technology*. 2020. Vol. 29, Issue 8. P. 2463–2469.
4. Antinori S. Experience with the UV non contact laser in a assisted hatching in human. *Journal of Assist Reprod and Genet*. 1997. Vol. 14, Issue 5. 200 p.
5. Douglas-Hamilton D.H., Conia J. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. *Journal of Biomedical Optics*. 2001. Vol. 6, Issue 2. P. 205. DOI: 10. 1117/1.1353796.
6. Левкин Д.А. Адекватность расчетной математической модели процесса лазерного воздействия на эмбрион. *Вчені записки Таврійського Національного Університету імені В.І. Вернадського. Серія: «Технічні науки»*. Київ, 2018. Т. 29 (68), № 3., Частина 1. С. 166–169.
7. Makarov A.A., Levkin D.A. Boundary-value problems in a layer for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions. *Вісник Харківського національного університету імена В.Н. Каразіна. Серія: «Математика, прикладна математика і механіка»*. 2018. Т. 87. 2018. С. 61–68.
8. Мегель Ю.Е., Путятин В.П., Левкин Д.А., Левкин А.В. Математическое моделирование и оптимизация параметров действия лазерного луча на многослойные биоматериалы. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: «Механіко-технологічні системи та комплекси»*. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. № 20 (1242). С. 60–64.
9. Vojtov V., Kutiya O., Berezhnaja N., Karnaukh M., Bilyaeva O. Modeling of reliability of logistic systems of urban freight transportation taking into account street congestion. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 4, No. 3. P. 15–21. DOI: 10. 15587/1729-4061.2019. 175064.
10. Volkov V., Taran I., Volkova T., Pavlenko O., Berezhnaja N. Determining the efficient management system for a specialized transport enterprise. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2020. Vol. 4. P. 185–191. https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-4/185.


**Levkin D.A., Berezhnaja N.G., Makarov O.A., Kutiya O.V. MATHEMATICAL MODELING OF TECHNICAL SYSTEMS**


*The article considers the issues of mathematical modeling of the multilayer systems that contain sources of thermal loads. The purpose of the research is to develop mathematical models of such systems, as well as modification of existing numerical methods in terms of taking into account the specifics of the modeled systems and technical parameters of emitters. As the object under study, the authors consider a multilayer spherical material under the action of thermal loads. The uniqueness of the research is to take into account the multilayer structure of the simulated systems and technical parameters of the emitters, which reduces the cost of technical resources, as well as reduce the loss of the studied material.*

*The authors of this work present one of the possible algorithms for the calculating the temperature field of the spherical material. Two calculated mathematical models (boundary value problems) of the thermal action process are proposed, the conditions of their correctness are determined and boundary value problems are solved. Since the boundary value problems are based on systems of multidimensional, inhomogeneous, nonstationary differential thermal equations in a spherical coordinate system, the theory of pseudodifferential operators in the space of generalized functions was used to prove the existence and uniqueness of solutions. This allowed us to determine the conditions for the correctness not only of the boundary value problems considered in this paper, but also of a number of calculated mathematical models of the thermal action process on multilayer materials. The implementation of the considered calculation mathematical models on computers for a specific object under study in the future will provide control over the distribution of temperature fields and reduce the loss of the studied material. The obtained results can be used to solve many applied problems of calculating the parameters of temperature fields in different multilayer systems.*


***Key words:*** *mathematical models, correctness, pseudodifferential operators, generalized functions, applied problems.*