УДК 631.347.8

МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЗОНИ ВСМОКТУВАННЯ КОРЕНЕВОЇ СИСТЕМИ РОСЛИН, ВИКЛИКАНОГО ВПЛИВОМ ЛАЗЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Сухін В. В., Лисиченко М. Л.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Запропонована математична модель температурного поля зони всмоктування кореневої системи рослин, викликаного впливом лазерного випромінювання. Розроблена модель може бути застосована для визначення розподілу температур від значень яких, залежить інтенсивність всмоктування води і поживних речовин коренем, і як наслідок – розвиток рослин.

Постановка проблеми. Процес поглинання зоною всмоктування кореневої системи рослин води і поживних речовин є досить складним і залежить від багатьох факторів, якими є: температура ґрунту (кореня), ступінь аерації кореневої системи, вміст вуглекислого газу в рослині, вологість ґрунту та ін. Досить важливе значення на інтенсивність поглинання води і розчинених в ній речовин зоною всмоктування кореня рослини, з перерахованих факторів, має температура ґрунту (кореня), яка впливає на швидкість поглинання ним води, що при зниженні може призвести до пригнічення рослин, зниження росту і розвитку [1].

Виходячи з цього, проведення досліджень по формуванню необхідних значень температури зони поглинання кореня рослин, при яких відбувається активізація всіх процесів в рослині викликає теоретичну і практичну значимість.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сучасному етапі, застосування лазерних технологій в різноманітних біологічних дослідженнях є досить актуальним, і визначним чинником цього є унікальні властивості лазерного випромінювання. Фотобіологічні процеси, викликані впливом лазерного випромінювання на біологічні об’єкти є досить різноманітними і специфічними та нараховують до декількох десятків. Однією з них є фотофізична реакція, яка полягає в нагріванні об’єкту до певної температури і розповсюдженню тепла в біотканинах. Під час такої реакції різниця температур більш виражена на мембранах клітин, що веде до відтоку іонів, розкриттю білкових каналів і збільшенню транспорту молекул і іонів речовин [2].

Проведений аналіз сучасної вітчизняної і закордонної літератури свідчить про ефективність використання лазерного випромінювання для активізації різних біологічних процесів в рослинах.

Мета статті. Розробити математичну модель зміни температурного поля зони всмоктування кореневої системи рослин, викликаного впливом лазерного випромінювання.

Основні матеріали дослідження. Для побудови даної моделі температурного поля, використаємо одновимірне нестаціонарне рівняння теплопровідності та для модулювання приймемо ряд спрощень, а саме: дану зону представимо у вигляді геометричної фігури циліндр, зона однорідна та ізотропна, внутрішні джерела теплоти відсутні, виконується закон збереження енергії, опромінюваний об’єкт є нерухомим.

Зона всмоктування кореневої системи рослини знаходиться в процесі теплообміну з навколишнім середовищем T_c. Для активізації транспорту молекул та іонів через білкові канали клітин, які знаходяться в даній зоні, відбувається дія лазера з густиною потужності випромінювання $q(z,t)$ на протязі часу t_e.

Далі проведемо схематичне представлення опромінення даної зони лазерним променем, яка зображена на рис. 1.

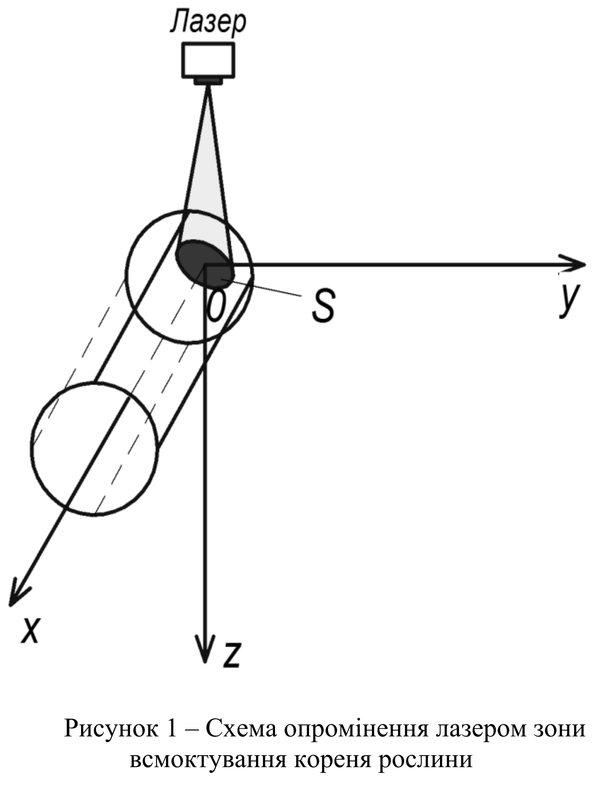

Рисунок 1 – Схема опромінення лазером зони всмоктування кореня рослини

На даній схемі представлений лазер, який проводить опромінення області S зони всмоктування кореневої системи рослини. Окрім цього, так як лазер не змінює своїх координат розміщення і площа плями досить мала, розгляд зміни температури проводиться тільки в напрямку осі z.

Далі визначимо межі опромінення і температури цієї області *S*, які приймуть наступний вигляд: $S \in R$, $z \in [0; S_z]$, $T \in [0; T_n]$.

Після цього сформуємо одновимірне нестаціонарне рівняння теплопровідності для даної області, яке прийме наступний вид [3]:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial T^2(z,t)}{\partial z^2} \quad (1)$$

де T – температура області *S*, ${}^0C$;

z – координата, *м*;

t – час, *с;*

a – коефіцієнт температуропровідності, $м^2 \cdot c^{-1}$.

Отримавши рівняння даної області опромінення, встановимо початкові та граничні умови необхідні для адекватної побудови математичної моделі.

Початкова умова:

$$\begin{cases} T\big|_{t=0} = \varphi_1(z) \\ T(z) = T_c \end{cases} \quad (2)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(0,t)}{\partial z} = -\alpha \cdot T(0,t) \\ T(n,t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, $Вт/м^2 \cdot K$.

Після отриманих початкових і граничних умов почнемо рішення сформованого рівняння, застосовуючи метод розділення змінних (метод Фур'є) [4]. Розв'язки рівняння методом Фур'є знаходяться у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від *z*, а інші тільки від *t*, і матиме наступний вигляд:

$$T(z,t) = Z(z) \cdot T(t) \quad (4)$$

Далі почнемо знаходити часткові рішення рівняння теплопровідності, які не рівні тотожно нулю і задовольняють граничним умовам. Проведемо підстановку $T(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$ у вихідне рівняння і отримаємо:

$$\frac{\partial (Z(z) \cdot T(t))}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 (Z(z) \cdot T(t))}{\partial z^2}, \quad (5)$$

$$Z(z) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = a \cdot T(t) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \quad (6)$$

В отриманому рівнянні змінимо позначення похідних і отримаємо наступне рівняння:

$$Z \cdot T^{'} = a \cdot T \cdot Z^{''} \quad (7)$$

Продовжуючи моделювання поділимо обидві частини отриманої рівності на $a \cdot T \cdot Z$ та отримаємо:

$$\frac{T^{'}}{a \cdot T} = \frac{Z^{''}}{Z} \quad (8)$$

В результаті отримали рівність, ліва і права частина якої залежить тільки від *Z* і від *T*. Функції з різними змінними будуть рівні між собою, якщо вони рівні якому-небудь числу, постійній $-k$:

$$\frac{T^{'}}{a \cdot T} = \frac{Z^{''}}{Z} = -k \quad (9)$$

З цього рівняння отримаємо два рівняння наступного виду:

$$\frac{T^{'}}{a \cdot T} = -k, \quad (10)$$

$$\frac{T^{'}}{a \cdot T} + k = 0, \quad (11)$$

$$\frac{Z^{''}}{Z} = -k, \quad (12)$$

$$\frac{Z^{''}}{Z} + k = 0 \quad (13)$$

Після ряду елементарних математичних перетворень отримаємо рівняння виду:

$$T^{'}(t) + a \cdot k \cdot T(t) = 0, \quad (14)$$

$$Z^{''}(z) + k \cdot Z(z) = 0 \quad (15)$$

Розглянемо перше з отриманих рівнянь, потрібно знайти його рішення, яке задовольнятиме умовам: $Z(l) = 0$, $l = n$ і $Z(0) = -\alpha \cdot T(0,t)$. В результаті отримаємо лінійне однорідне диференційне рівняння с постійними коефіцієнтами:

$$Z^{''}(z) + k \cdot Z(z) = 0 \quad (16)$$

де *k=const.*

Складаємо характеристичне рівняння, визначаємо його дискримінант і корені:

$$p^2 + k = 0, \quad (17)$$

$$p^2 = -k \quad (18)$$

Провівши визначення, дискримінант дорівнює $p = \pm i\sqrt{k}$. Виходячи з цього, $D < 0$, і отримуємо два комплексних кореня: $g_1 = a + ib$ і $g_2 = a - ib$.

Таким чином загальний розв'язок даного рівняння наступний:

$$Z(z) = A \cdot \cos\sqrt{k} \cdot z + B \cdot \sin\sqrt{k} \cdot z \quad (19)$$

Так як, початкові і граничні умови даного рівняння є частково неоднорідними, то застосовуючи метод редукції приведемо їх до однорідного вигляду, для цього представимо їх спочатку у вигляді системи:

$$\begin{cases} T(z,0) = T_0(z_0) = u_0 \\ \dfrac{\partial T^2(0,t)}{\partial z^2} = -\alpha \cdot T(o,t) = \mu_1 \\ T(l,t) = 0 = \mu_2 \end{cases} \quad (20)$$

Застосовуючи метод редукції, допоміжна функція в цей час приймає на себе граничні умови. Тоді встановимо, що $u = v + w$ і вимагаємо, щоб $w(0,t) = \mu_1(t)$, $w(1,t) = \mu_2(t)$. В результаті залежність функції w від часу t вже практично встановлена, визначимо залежність від z.

Щоб спростити задачу, виберемо цю функцію лінійною по змінній z, тоді друга похідна рівна $\frac{\partial u^2}{\partial z^2} = 0$, і функція матиме вигляд:

$$w(z,t) = \frac{l-z}{l} \cdot \mu_1(t) + \frac{z}{l} \cdot \mu_2(t) \quad (21)$$

Після цього проведемо визначення виду функції w в залежності від значень незалежних змінних z і t, опираючись на числові значення початкових і граничних умов даної задачі:

$$w(0,t) = 1 \cdot \mu_1(t) + 0 = \mu_1(t) \quad (22)$$

$$w(1,t) = 0 + \mu_2(t) = \mu_2(t) \quad (23)$$

На основі цього проведемо визначення нового виду функції v, як різницю між u–w, і отримаємо наступні аналітичні залежності:

$$w(1,t) = 0 + \mu_2(t) = \mu_2(t) \quad (24)$$

$$w(1,t) = 0 + \mu_2(t) = \mu_2(t) \quad (25)$$

$$w(1,t) = 0 + \mu_2(t) = \mu_2(t) \quad (26)$$

Так як функціональні залежності є однорідними, отримаємо початкові і граничні умови, які змінюють початкове рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a \cdot \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = u_0(z) - w(z) \end{cases} \quad (27)$$

Проведемо визначення коефіцієнтів A, B і k з граничних умов, при $v(0,t) = 0$ і $v(l,t) = 0$, отримаємо:

$$0 = A \cdot \cos(\sqrt{k} \cdot 0) + B \cdot \sin\sqrt{k} \cdot 0, \quad (28)$$

$$0 = B \cdot \sin(\sqrt{k} \cdot 0), \quad (29)$$

Аналізуючи вираз (24) можна прийти до висновку, що коефіцієнт B, не повинен дорівнювати нулю, бо інакше рішенням буде тільки $Z(z) = 0$.

$$\sqrt{k} \cdot l = \pi \cdot n \quad (30)$$

З попередніх виразів випливають такі значення: $A = 0$, $B = 1$, $k = (\frac{\pi \cdot n}{l})^2$, де n залежить від власних значень задачі.

Таким чином, нетривіальним рішенням даного рівняння є функція виду:

$$Z_n(z) = \sin(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot Z) \quad (31)$$

Далі проведемо розв'язок другого рівняння:

$$T^{'}(\mathrm{t}) + \mathrm{a} \cdot k \cdot T(t) = 0 \quad (32)$$

Для цього, як і для першого складемо характеристичне рівняння, визначимо дискримінант і корені:

$$p + a \cdot k = 0, \quad (33)$$

$$p = a \cdot k \quad (34)$$

Провівши визначення, дискримінант дорівнює $p = a \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l})^2$. Виходячи з цього, $D > 0$, і отримуємо два дійсних кореня $g_1 \neq g_2$.

Таким чином, загальний розв'язок даного рівняння наступний:

$$T(t) = C \cdot e^{g_1 \cdot t} + D \cdot e^{g_2 \cdot t} \quad (35)$$

Проведемо визначення коренів g_1 і g_2 :

$$g_1 = \frac{-a \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l})^2 + \sqrt{a} \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l})}{2}, \quad (36)$$

$$g_1 = \frac{-a \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l})^2 - \sqrt{a} \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l})}{2} \quad (37)$$

Підставимо отримані корені в загальний розв'язок рівняння, отримаємо:

$$T(t) = C_n \cdot e^{\frac{-a \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l})^2 + \sqrt{a} \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l}) \cdot \mathrm{t}}{2}} + D_n \cdot e^{\frac{-a \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l})^2 - \sqrt{a} \cdot (\frac{\pi \cdot n}{l}) \cdot \mathrm{t}}{2}} \quad (38)$$

Отримані значення $Z_n(z)$ і $T_n(t)$, підставимо до виразу 4 і матимемо:

$$T(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z,t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot e^{\frac{-a\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})^2 + \sqrt{a}\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})\cdot \mathrm{t}}{2}} + D_n \cdot e^{\frac{-a\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})^2 - \sqrt{a}\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})\cdot \mathrm{t}}{2}}\right) \times \quad (39)$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot z\right)$$

Далі підставимо початкові умови задачі в отриманий вираз функції $T(\mathrm{z},\mathrm{t})$, тоді вираз прийме вигляд:

$$T(\mathrm{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\mathrm{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot e^{\frac{-a\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})^2}{2}} + D_n \cdot e^{\frac{-a\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})^2}{2}}\right) \times \quad (40)$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot z\right)$$

Опираючись на відомості з теорії рядів Фур'є відомо, що будь-яка, кусочно-безперервна і кусочно-диференційована функція $f(x)$, яка задана на проміжку від $0 \le z \le l$ розкладається в ряд Фур'є [5]:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi\cdot n}{l}\right) \quad (41)$$

де $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{f}(\varsigma)\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot\varsigma\right)d\varsigma$.

Можна побачити, що $T(\mathrm{z})$, C_n D_n є коефіцієнтами цих розкладень і їх визначають за формулами:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l T(\varsigma)\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot\varsigma\right)d\varsigma, \quad (42)$$

$$D_n = \frac{2}{\pi\cdot n\cdot a}\int_0^l T(\varsigma)\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot\varsigma\right)d\varsigma \quad (43)$$

Таким чином, можна прийти до висновку, що отриманий вираз для функції $T(\mathrm{z},\mathrm{t})$ і є рішенням даної задачі та має вигляд:

$$T(\mathrm{z},t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z,t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot e^{\frac{-a\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})^2 + \sqrt{a}\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})\cdot \mathrm{t}}{2}} + D_n \cdot e^{\frac{-a\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})^2 - \sqrt{a}\cdot(\frac{\pi\cdot n}{l})\cdot \mathrm{t}}{2}}\right) \times \quad (44)$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot z\right)$$

Висновки. Таким чином, побудувавши математичну модель температурного поля зони всмоктування кореневої системи рослин, була отримана функціональна залежність $T(\mathrm{z},t)$ температури даної зони від координати *z* і часу *t*, що дає можливість аналізувати температурний розподіл в даній зоні і визначити параметри лазерного випромінювання для інтенсифікації поглинання води і поживних речовин коренем рослин.

Список використаних джерел

1. Кузнецов В. В. Физиология растений: учеб. / В. В. Кузнецов, Г. А. Дмитриева. – М.: Высш. шк., 2006. – 742 с.
2. Лазер и его действие на живые ткани / Режим доступа: http://stezia.com.ua/art15.html.
3. Мироненко Г. П. Основи тепломасообміну (в запитаннях і відповідях). Конспект лекцій / – Харків: ХНТУСГ, 2006. – 100 с.
4. Зайцев В. Ф. Метод разделения переменных в математической физике: / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – СПб.: 2009. – 92 с.
5. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. [для вузов] / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб.: "Лань", 2005. – 736 с.

Аннотация

МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЗОНЫ ВСАСЫВАНИЯ КОРНЕВОЙ СИСТЕМЫ РАСТЕНИЙ, ВЫЗВАННОГО ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Сухин В. В., Лисиченко Н. Л.

Предложена математическая модель температурного поля зоны всасывания корневой системы растений, вызванного воздействием лазерного излучения. Разработанная модель может быть применена для определения распределения температур, от значений которых зависит интенсивность всасывания воды и питательных веществ корнем, и как следствие - развитие растений.

Abstract

MODEL OF TEMPERATURE FIELD ZONE SUCTION PLANT'S ROOT SYSTEM CAUSED BY EXPOSURE TO LASER RADIATION

V. Sukhin, N. Lysychenko

The mathematical model of the temperature field absorption zone of the root system of plants caused by exposure to laser radiation. The model can be used to determine the temperature distribution on the values of which depends on the intensity of the absorption of water and nutrients Korea-Nam, and as a consequence - the development of plants.