

УДК 532+533.2

О СЕПАРАЦИИ ПРИМЕСИ В НЕСУЩЕМ ПОТОКЕ ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЫ

Нанка А.В., академик УНАНЕТ, профессор, Иевлев И.И., доцент
(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства)

Рассматривается динамика двухфазного потока, несущая фаза которого представляет собой зернистую (гранулированную) среду, а дисперсную фазу представляет собой мало концентрированная примесь. Описание динамики несущей фазы производится посредством реологии Сэвиджа – Оствальда - де Уайеля. Примесь рассматривается как ансамбль невзаимодействующих между собой частиц. Учитывается действие силы Магнуса на частицы, приводящее к дополнительному эффекту их сепарации.

Рассматривается динамика двухфазной среды, несущая фаза которой представляет собой зернистую среду, находящуюся в состоянии «быстрого движения» [1]. Дисперсная фаза (примесь) представляет собой континуум твердых частиц, истинная плотность которых отличается от плотности частиц несущей фазы. Будем рассматривать случай, когда плотность числа частиц примеси существенно меньше плотности числа частиц несущей фазы. Это позволит, во-первых, пренебречь влиянием примеси на динамику несущей фазы, и, во-вторых, взаимодействием частиц примеси между собой. Первую и вторую фазу можно рассматривать как взаимопроникающие континуумы, описываемые следующей системой дифференциальных уравнений [2, 3]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(v \bar{v}_1) = 0 \quad (1)$$

$$\rho_1^0 v \frac{d\bar{v}_1}{dt} = \operatorname{div} \mathcal{E} + \rho_1^0 v \bar{g} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi (\eta a)^3 \rho_2^0 \frac{d\bar{v}_2}{dt} = & \frac{4}{3} \pi (\eta a)^3 \rho_2^0 \bar{g} + 6\pi \eta a (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) - \\ & - \frac{4}{3} \pi (\eta a)^3 \operatorname{div}(\mathcal{E}) + \rho_1^0 v \pi (\eta a)^3 K_M \bar{\omega} \times (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \end{aligned} \quad (3)$$

где

v - объемная плотность несущей фазы,

$\rho_1^0, \rho_2^0, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ - истинные плотности и скорости несущей и дисперсной фаз,

соответственно,

\mathcal{E} - тензор напряжений для несущей фазы,

a - радиус твердых частиц дисперсной среды,

η - поправочный коэффициент для формы частиц дисперсной фазы,

K_M - феноменологический коэффициент силы Магнуса,

$\vec{\omega} = 1/2 \text{rot } \vec{v}_1$ - вихрь поля скоростей первой фазы,

\vec{g} - массовая плотность сил тяжести.

В правой части последнего уравнения второе слагаемое представляет собой силу Стокса, вызванную вязкостью несущей среды. Третье слагаемое является силой Архимеда, а четвертое слагаемое – это сила Магнуса, учитывающая влияние вращения твердых частиц на их динамику.

Из приведенных выше уравнений следует, что возможно вначале определить движение несущей фазы, а затем исследовать движение потока частиц, описываемое уравнением (3).

Для исследования быстрых движений зернистой среды воспользуемся реологической моделью Сэвиджа - Оствальда – де Уайеля [1,2]

$$\mathcal{E} = -\alpha \left(\Phi |\nabla v|^2 \mathcal{E} + \nabla v \otimes \nabla v \right) + m_0 \frac{4v}{v_b - v} \sqrt{I_2(\overset{\circ}{V})} \mathcal{E} \quad (4)$$

где

\mathcal{E} - тензор скоростей деформаций для поля скоростей \vec{v}_1 ,

$I_2(\overset{\circ}{V}) = 1/2 \overset{\circ}{V}_{ik} \overset{\circ}{V}_{ki}$ - второй инвариант девиатора тензора скоростей

деформаций $\overset{\circ}{V} = \mathcal{E} - 1/3 \text{div } \vec{v}_1 \mathcal{E}$,

\mathcal{E} - единичный тензор,

$\Phi = \left[k^{-1} (v - v_0)^{-1} - 1 \right]$,

α, v_0, v_b, m_0, k - феноменологические коэффициенты,

$\nabla v \otimes \nabla v = \left\{ \partial v / \partial x_i, \partial v / \partial x_k \right\}_{i,k=1}^3$ - диадное произведение вектора ∇v .

Для изучения особенностей динамики сыпучего материала рассмотрим модельную задачу – плоское одномерное стационарное движение слоя зернового материала глубины h в наклонном под углом θ к горизонту лотке (рис.1). В данном случае вектор скорости $\vec{v}_1 = (U(y), 0)$, $v = v(y)$.

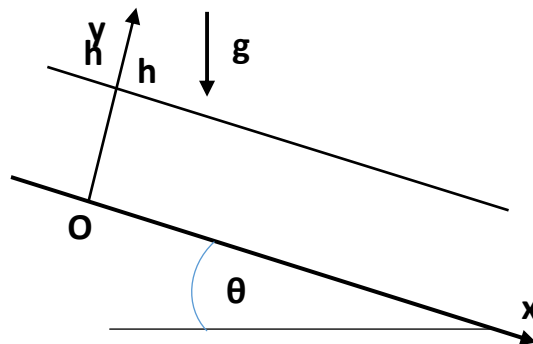


Рисунок 1 - Одномерный поток на наклонном лотке

Компоненты тензора напряжений, отличные от нуля, равны

$$\sigma_x = -\alpha\Phi v'^2, \quad \sigma_{xy} = \frac{2m_0 v}{v_b - v} |u'|u', \quad \sigma_y = -\alpha(\Phi + 2)v'^2 \quad (5)$$

Уравнения для стационарного одномерного движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho_1^0 v g \sin \theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho_1^0 v g \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

приобретают вид

$$2m_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{v}{v_b - v} \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \right) + \rho_1^0 g \sin \theta = 0 \quad (7)$$

$$\alpha \frac{d}{dy} \left[(\Phi + 2) \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \right] + \rho_1^0 g \cos \theta v = 0 \quad (8)$$

Эти уравнения должны дополняться граничными условиями при $y = h$

$$v(h) = v_0 \quad (9)$$

кинематического плана, и условиями отсутствия напряжений на свободной границе.

$$v'(h) = 0, \quad u'(h) = 0 \quad (10)$$

(Здесь ()' означает дифференцирование по переменной y).

На дне лотка ($y = 0$) должен выполняться баланс касательных сил, силы трения Кулона и гидравлического сопротивления [4]

$$\sigma_{xy} - \text{sign}(U) f_s |\sigma_y| - Du = 0 \quad (y = 0) \quad (11)$$

Или в развернутом виде

$$\frac{2m_0 v}{v_b - v} u'^2 - f_s \alpha (\Phi + 2) v'^2 - Du = 0 \quad (12)$$

где

D - коэффициент гидравлического сопротивления,

f_s - коэффициент трения скольжения среды по поверхности дна лотка.

Можно показать, что решение уравнения (8) при $y \rightarrow h$ имеет асимптотическое выражение

$$v = v_0 + \frac{\rho_1^0 g k v_0 \cos \theta}{9\alpha} (h - y)^3 + O((h - y)^4) \quad (13)$$

Использование последнего соотношения позволяет избежать особенности в уравнении (8) при его решении численным методом. Введем новую независимую переменную $z = h - y$. Переформулируем уравнения (8) и, используя (13), зададим значения $v, dv/dz$ для достаточно малого ε

$$v(\varepsilon) = v_0 + \frac{\rho_1^0 g k v_0 \cos \theta}{9\alpha} \varepsilon^3, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{\rho_1^0 g k v_0 \cos \theta}{3\alpha} \varepsilon^2 \quad (14)$$

Соотношения (8), (14) представляют собой задачу Коши, для решения которой применимы методы численного решения пакета MATLAB.

После определения зависимости $v = v(y)$ переходим к нахождению неизвестной $U = U(y)$. Введем переменную $W(y)$

$$W(y) = \frac{v}{v_b - v} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (15)$$

Тогда уравнение (7) можно представить следующим образом

$$\frac{dW}{dy} = -\frac{\rho_1^0 g \sin \theta}{2m_0} v(y) \quad (16)$$

которое можно проинтегрировать с учетом второго условия (10)

$$W(y) = \frac{\rho_1^0 g \sin \theta}{2m_0} \left[\int_0^h v(\xi) d\xi - \int_0^y v(\xi) d\xi \right] \quad (17)$$

Наконец, интегрируя (17) с учетом граничного условия (12), получаем выражение для $U(y)$

$$U = \left[\frac{2m_0 W - f_s \alpha (\Phi + 2) v'^2}{D} \right]_{y=0} + \int_0^y \sqrt{\frac{v_b - v(\xi)}{v(\xi)}} W(\xi) d\xi \quad (18)$$

Процедура определения динамики частиц примеси состоит в следующем. Обозначим через \vec{r} радиус-вектор некоторой выбранной частицы дисперсной среды. Ее скорость движения определяется выражением $\vec{v}_2 = (\dot{x}, \dot{y})$, а ускорение $d\vec{v}_2 / dt = (\ddot{x}, \ddot{y})$ (точка над символом обозначает дифференцирование по времени). И рассмотрим величины, входящие в правую часть векторного уравнения (3)

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathcal{E})_x &= \frac{d\sigma_{xy}}{dy} = 2m_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{v}{v_b - v} U'^2 \right), \quad (\operatorname{div} \mathcal{E})_y = \frac{d\sigma_y}{dy} = -\alpha \frac{d}{dy} ((\Phi + 2) v'^2) \\ \vec{\omega} \times (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) &= (-U'u, U'(u - U)) \end{aligned}$$

Тогда уравнения движения частицы в проекциях на декартовы оси координат записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{3}{\pi(\eta a)^3 \rho_2^0} \left[\frac{4}{3} \pi(\eta a)^3 \rho_2^0 g \sin \theta + 6\pi\mu\eta a (U - \dot{x}) - \right. \\ &\left. - \frac{8}{3} \pi(\eta a)^3 m_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{v}{v_b - v} U'^2 \right) - \rho_1^0 \pi v(\eta a)^3 K_M U' \dot{x} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = \frac{3}{\pi(\eta a)^3 \rho_2^0} \left[-\frac{4}{3} \pi(\eta a)^3 \rho_2^0 g \cos \theta - 6\pi \mu \eta a \dot{y} + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \pi(\eta a)^3 \alpha \frac{d}{dy} \left((\Phi + 2)v'^2 \right) + \rho_1^0 \pi v(\eta a)^3 K_M (\dot{x} - U)U' \right] \quad (20)$$

где η - коэффициент, учитывающий отличие формы твердой частицы от шаровой.

Необходимые начальные условия для задачи Коши для отдельной частицы можно задать в виде

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = U(y(0)), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (21)$$

выбирая $y_0 \in (0, h)$.

Задача (19)-(21) решается численно с привлечением пакета прикладных программ MATLAB.

Результаты вычислений приведены на рис.2-5. На рис.2 приведены эпюры распределения по глубине слоя объемной плотности $v(y)$ и скорости движения несущей среды $U(y)$ при различных углах наклона лотка θ . На рис. 3-5 изображены траектории движения частиц примеси при различных углах наклона лотка и параметра $K_M = 0.1, 1.0, 5.0$. Из графиков видно, что характер зависимости v с изменением угла наклона меняется слабо, а скорость U с увеличением θ растет. С увеличением значения параметра K_M длина пробега частиц вдоль лотка уменьшается. Это говорит о влиянии силы Магнуса на характер динамики частиц, в частности, на процесс сепарации.

Примечательно поведение траекторий движения частиц в зависимости от угла θ . При малых углах наклона лотка частицы устремляются вверх к свободной поверхности, а с увеличением угла частицы стремятся уложиться на дно лотка (рис.3,4).

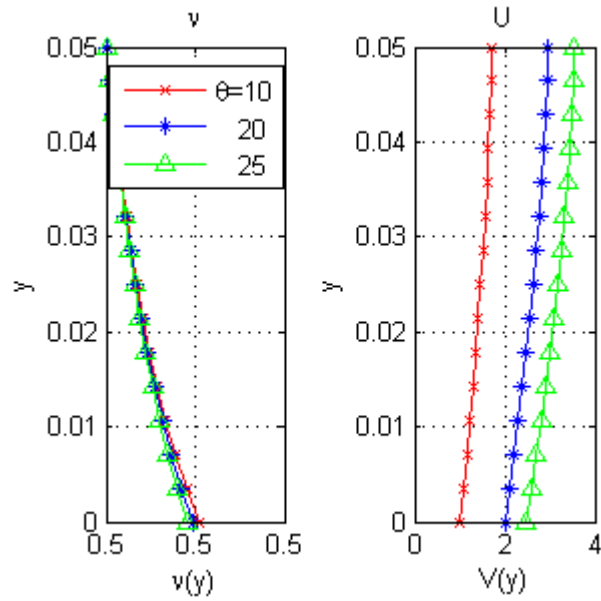
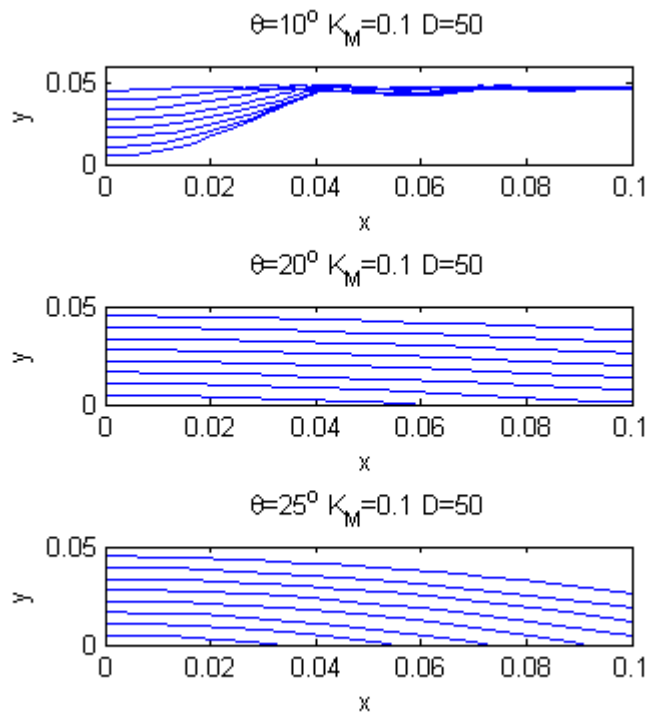
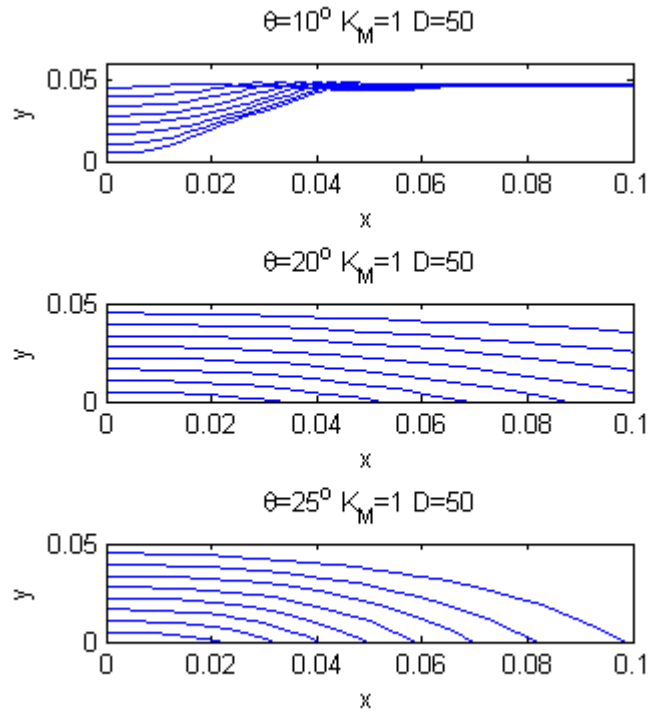
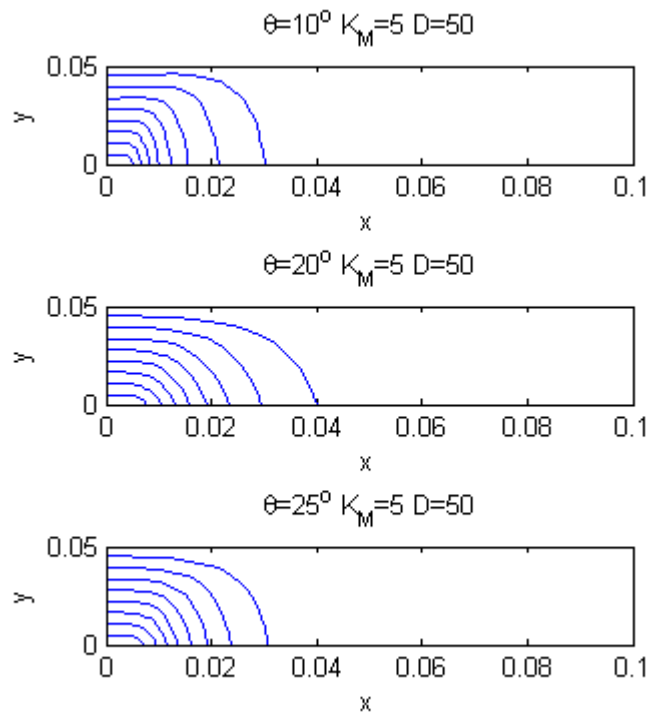


Рисунок 2 - Эпюры объемной плотности и скорости несущей фазы

Рисунок 3 - Траектории движения частиц, $K_M=0.1$

Рисунок 4 - Траектории движения частиц, $K_M=1.0$ Рисунок 5 - Траектории движения частиц, $K_M=5.0$

Список литературы

1. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. М.: Мир, 1985. 280 с.
2. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
4. Константинов Ю.М. Гидравлика. Киев: Выща шк., 1988. 398 с.

Анотація

Про сепарацію домішків несучому потоці зернистого середовища

Нанка О.В., професор, Ієвлев І.І.

*Харківський національний технічний університет сільського
господарства ім. Петра Василенка*

Розглядається динаміка двофазного потоку, несуча фаза якого є зернистим (гранульованим) середовищем, а дисперсна фаза є мало концентрованим домішком. Опис динаміки несучої фази проводиться за допомогою реології Севіджа - Оствальда - де Уайеля. Домішок розглядається як ансамбль невзаємодіючих між собою часток. Враховується дію сили Магнуса на частинки, що приводить до додаткового ефекту їх сепарації.

Abstract

About separation of the impurity in the carrying stream of the grain environment

A.Nanka, I. Ievlev

The dynamics of a two-phase flow is considered, the carrier phase of the which is a granular medium, and the dispersed phase is a little concentrated impurity. The dynamics of the one phase is described by the rheology of the Savage-Ostwald-de Wael. Impurity is considered as an ensemble of noninteracting particles. The action of the Magnus force on the particles is taken into account, which leads to an additional effect of their separation.