



Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
ІМЕНІ ПЕТРА ВАСИЛЕНКА**

**Навчально-науковий інститут технічного сервісу
Кафедра надійності, міцності і технічного сервісу
машин ім.В.Я. Аніловича**

ОПІР МАТЕРІАЛІВ.

РОЗРАХУНОК БАЛОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГІНІ

**Методичні вказівки до проведення практичних занять
та індивідуальні завдання**

Для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної, заочної та дистанційної форм навчання
спеціальності 133 Галузеве машинобудування
та спеціальності 208 Агроінженерія

Харків
2019

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ ПЕТРА ВАСИЛЕНКА

Навчально-науковий інститут технічного сервісу

Кафедра надійності, міцності і технічного сервісу машин
ім.В.Я.Аніловича

ОПР МАТЕРІАЛІВ.

РОЗРАХУНОК БАЛОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНІ

Методичні вказівки до проведення практичних занять
та індивідуальні завдання

Для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної, заочної та дистанційної форм навчання
спеціальності 133 Галузеве машинобудування
та спеціальності 208 Агроінженерія

Затверджено
рішенням Науково-методичної
ради ННІ ТС ХНТУСГ
Протокол №7
від 10 травня 2019р

Харків
2019

УДК 539.3/6
О 61

Схвалено на засіданні
кафедри надійності, міцності і технічного сервісу машин ім. В.Я.Аніловича
Протокол №8 від "08" травня 2019 р.

Опір матеріалів. Розрахунок балок на міцність при плоскому поперечному згині: метод. вказівки до проведення практичних занять та індивідуальні завдання для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заоч. та дистанц. форм навч., спец. 133 Галузеве машинобудування та спеціальності 201 Агроінженерія / Харків. нац. техн. у-т сіл. госп-ва ім. П. Василенка; уклад.: О.С.Грінченко, В.Б.Савченко, Є.І.Калінін, О.А.Свіргун, О.А.Концевич. - Харків : [б. в.], 2019. - 24с.

Методичні вказівки "Опір матеріалів. Розрахунок балок на міцність при плоскому поперечному згині" розроблено з метою надання практичних навичок студентами під час виконання ними практичних завдань з дисципліни опір матеріалів (механіка матеріалів і конструкцій). Видання включає приклади вирішення задач з необхідними теоретичними положеннями і практичними поясненнями. Методичні вказівки містять також індивідуальні завдання, які можуть бути використані слухачами як на практичних заняттях, так і в процесі самостійного опанування матеріалу дисципліни.

Видання призначене студентам першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної та дистанційної форм навчання зі спеціальності 133 Галузеве машинобудування та спеціальності 201 Агроінженерія

Рецензенти:

В. М. Грищенко, канд. техн. наук, доцент кафедри динаміки і міцності НТУ "ХП"

С. О. Поляшенко, канд. техн. наук, доцент кафедри тракторів і автомобілів Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка

Відповідальний за випуск (зав.каф.) : В. Г. Кухтов, д-р. техн. наук, проф.

© О.С.Грінченко, В.Б.Савченко,
Є.І.Калінін, О.А.Свіргун,
О.А.Концевич, ХНТУСГ, 2019

Розрахунково-графічне завдання №2

РОЗРАХУНОК БАЛОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГІНІ

Розрахунок на міцність багатьох деталей і вузлів машин, елементів рамних конструкцій та споруд (таких як осі та ведучі мости мобільних машин, кран-балки, мостові крани, балки монтажних перекриттів, прольоти мостів та ін.) може бути зведений до розрахунку статично визначеної однопрогонної балки. Тому розрахунок на міцність при плоскому поперечному згині виконується на прикладі розрахункової схеми балки на двох опорах, яка є типовим елементом для багатьох реальних конструкцій.

У поперечних перерізах балки, яка навантажена розташованими у вертикальній площині зосередженими силами, згинальними моментами та розподіленими навантаженнями, виникають такі внутрішні силові фактори як згинальний момент M_x та поперечна сила Q_y .

Зміст завдання. Для двоопорної балки з системою зовнішніх навантажень побудувати епюри поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x . Визначити максимальне значення згинального моменту та з умови міцності за нормальним напруженням підібрати переріз двотаврової балки.

Вихідні дані для виконання РГЗ видаються кожному студентові викладачем у вигляді іменного бланка. В разі необхідності вони також можуть бути вибрані студентом за допомогою додатка А в залежності від його індивідуального шифру. Необхідні характеристики перерізів двотаврових балок наведені в додатку Б.

Мета роботи. Визначити небезпечний переріз однопрогонної статично визначеної балки та з умови міцності при згині підібрати двотавровий профіль для її виготовлення.

Правила оформлення. Розрахунково-графічне завдання оформлюють на листах формату А4, що мають рамку. Титульний лист повинен містити назву завдання, прізвище і номер групи студента, а також прізвище викладача, який приймає завдання. Зразок титульного листа наведено в додатку В. На першій сторінці угорі приклеюється картка з вихідними даними, а потім наводиться текст пояснювальної записки. Графічна частина завдання виконується з використанням креслярських інструментів. Допускається оформлення графічної частини завдання на міліметрівці.

Приклад визначення внутрішніх зусиль та підбір перерізу балки

Вихідні дані:

Геометричні характеристики розрахункової схеми :

$$V_1=0 \text{ м}; V_3=2 \text{ м}; V_4=10 \text{ м}; A_1=3 \text{ м}; A_2=6 \text{ м}; C=3 \text{ м}.$$

Силкові фактори:

$$P=15 \text{ кН}; q=-6 \text{ кН/м}; M=-5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Рішення задачі

1. За вихідними даними будуємо розрахункову схему балки (рис.1,а).

У вихідних даних задачі, яка тут розглядається, задано лінійні розміри балки, координати розташування і значення зовнішніх силових факторів, які діють на балку, а також координати опор. Система позначень у відповідності до якої будується розрахункова схема РГЗ, показана на рисунку додатка А. Наприклад, в РГЗ відстань V_1 визначає P_1 (в задачі, яка тут розглянута це положення сили P), V_3 - положення лівої опори, A_1 і A_2 - початок і кінець розподіленого навантаження, а C - положення згинального моменту. На рисунку додатка А показані напрями додатних зовнішніх силових факторів. Якщо в варіанті задано від'ємне значення силового фактору, то його напрям в розрахунковій схемі змінюється на протилежний.

Побудову розрахункової схеми розпочинають з того, що проводять координатні осі Y та Z . Потім вздовж осі Z розташовують силові фактори та опори. Наприклад, положення зосередженого згинального моменту визначається значенням $C=3$ м. Отже на відстані 3 м від початку координат розташовуємо згинальний момент, величина якого визначена в завданні як $M=-5$ кН·м. Знак «мінус» вказує на те, що напрям моменту має бути змінений на протилежний, тобто «за годинниковою стрілкою». Значення на розрахунковій схемі вказується без знаку «мінус», оскільки він вже враховується напрямком силового фактору (див. рис.1а).

Таким чином, на розрахунковій схемі зображуються дійсні напрями зовнішніх навантажень, які сформовані з урахуванням їх знаку, заданого у вихідних даних. Це дає можливість в подальших розрахунках вважати всі силові фактори додатними і враховувати лише їх напрям.

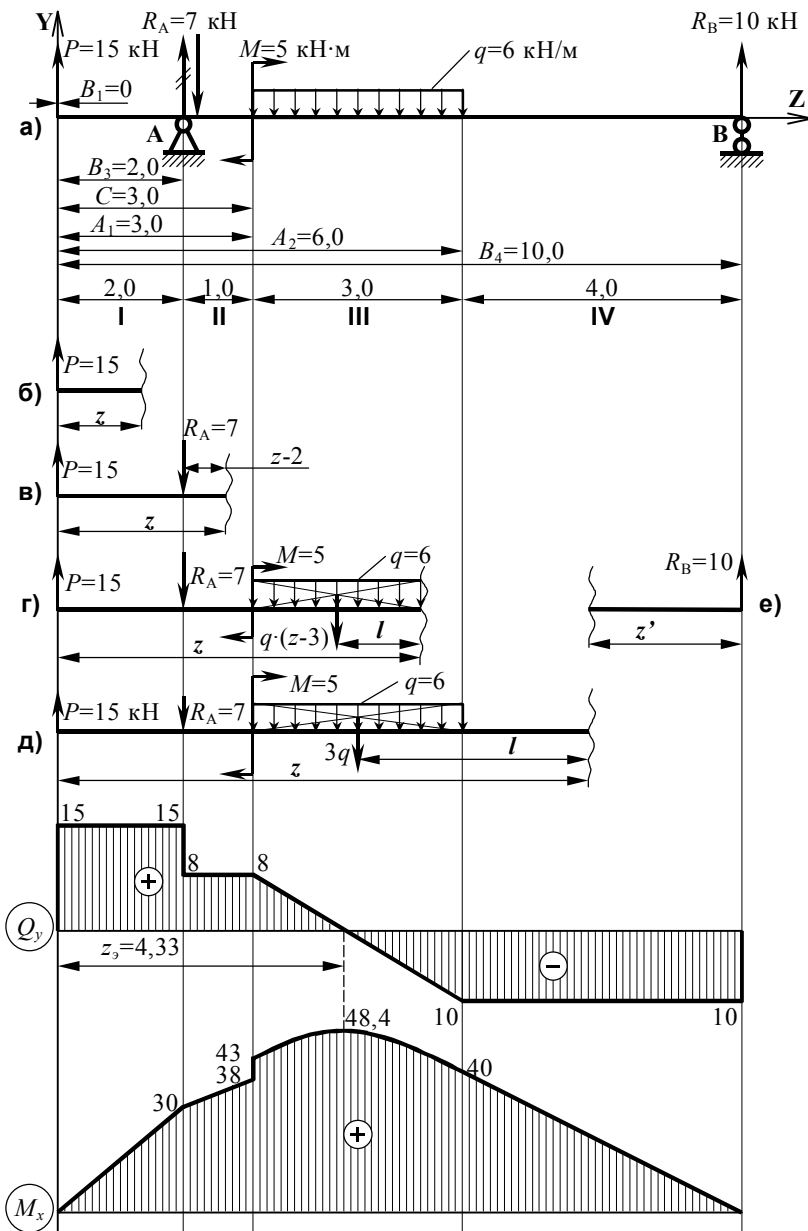


Рис.1 - Розрахункова схема та епюри поперечних сил та згинальних моментів

З умов рівноваги балки знаходимо реакції опор, позначивши їх на розрахунковій схемі.

Наприклад, в точці **B** з боку опори на балку діє поки що невідома зовнішня сила R_B , яку називають реакцією опори (див. рис.1а). Оскільки напрям і величина реакції заздалегідь невідомі, будемо вважати, що реакція спрямована вгору (додатний напрям сили).

Для визначення величини реакції опор скористуємося умовою статичної рівноваги балки, у відповідності до якої сума моментів всіх зовнішніх сил відносно будь-якої точки балки дорівнює нулю. Так, для визначення величини реакції R_B , запишемо суму моментів всіх зовнішніх сил відносно точки **A** і прирівняємо її до нуля.

При складанні рівняння, моменти тих сил, які намагаються повертати балку навколо точки **A** в одному напрямку (наприклад за годинниковою стрілкою) будемо вважати додатними (це сили P , q і M на рис 1а), а ті, що намагаються повертати балку в протилежний бік (проти годинникової стрілки), вважатимемо від'ємними (це реакція R_B на рис 1а). Прирівнявши отриману суму моментів до нуля, знайдемо значення реакції R_B .

Аналогічно, записавши рівняння суми моментів відносно точки **B** і прирівнявши його до нуля, визначимо реакцію R_A .

Прирівнюємо до нуля суму моментів зовнішніх сил відносно точки **A**:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_A = P \cdot 2 + q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right) + M - R_B \cdot 8 = 0.$$

Визначаємо реакцію в опорі **B**:

$$R_B = \frac{P \cdot 2 + q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right) + M}{8} = \frac{15 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 2,5 + 5}{8} = 10 \text{ кН.}$$

Прирівнюємо до нуля суму моментів зовнішніх сил відносно точки **B**:

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_B = P \cdot 10 - q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 4\right) + M + R_A \cdot 8 = 0,$$

Визначаємо реакцію в опорі **A**:

$$R_A = \frac{P \cdot 10 - q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 4\right) + M}{8} = \frac{-15 \cdot 10 + 6 \cdot 3 \cdot 5,5 - 5}{8} = -7 \text{ кН.}$$

В результаті розв'язання рівняння може бути отримано від'ємне значення реакції ($R_A = -7$). Це означає, що реакція, яку ми раніше спрямували догори, насправді спрямована вниз. Тому на розрахунковій схемі необхідно закреслити початковий напрям сили R_A , (вгору), а поруч зобразити силу R_A , спрямовану вниз (див. рис.1а). Значення реакції при цьому вказується додатним, оскільки знак "-" вже враховано спрямуванням сили вниз.

Для перевірки правильності визначення реакцій опор запишемо суму проєкцій усіх сил на вертикальну вісь. З умов статичної рівноваги балки ця сума повинна дорівнювати нулю. Підрахуємо її:

$$\sum P_y = P - R_A - q \cdot 3 + R_B = 15 - 7 - 6 \cdot 3 + 10 = 0.$$

Перевірка показує, що реакції визначені правильно.

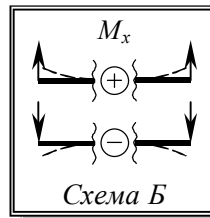
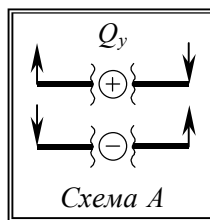
2. Побудова епюр поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_x .

Перед розрахунком і побудовою епюр поперечних сил та згинальних моментів, розрахункову схему балки розбивають на ділянки, в межах кожної з яких закони (залежності) зміни внутрішніх силових факторів є сталими. Зазвичай, границями ділянок слугують точки прикладення зовнішніх сил, моментів, а також початок і кінець розподіленого навантаження. Ділянки нумерують в довільному порядку.

Для побудови епюр використовують метод перерізів, відповідно до якого на кожній ділянці балки виконують уявний переріз, який знаходиться на довільній відстані z від початку координат в межах даної ділянки. Тоді для кожної з ділянок можна записати аналітичний вираз для визначення величини внутрішнього силового фактору в залежності від значення z .

Рівняння для визначення поперечної сили $Q_y(z)$ є алгебраїчною сумою всіх сил, які діють по один бік від перерізу. При цьому сила вважається додатною і входить до суми зі знаком "+", якщо вона прагне повернути переріз балки за годинниковою стрілкою (див. схему А).

Для обчислення величини згинального моменту $M_x(z)$, записують суму моментів відносно перерізу всіх силових факторів, що знаходяться по один бік від перерізу. Додатним вважається момент силового фактору, внаслідок дії якого верхні волокна ділянки балки стискаються (див. схему Б).



Ділянка I. Координата перерізу z , яка відраховується від початку координат (лівого кінця балки на рис.1б), може змінюватися в межах від 0 до 2 метрів ($0 < z < 2$ м). Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = P = 15 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на цій ділянці матиме вигляд:

$$M_x = P \cdot z;$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки

$$M_x \Big|_{z=0} = 15 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z=2} = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

і будуємо епюри Q_y і M_x (рис.1).

Проводячи переріз в межах першої ділянки ($0 < z < 2$ м), як показано на рис.1б, бачимо, що на відрізаний частині балки (зліва від перерізу) маємо єдиний силовий фактор - зосереджену силу P . Вона намагається повернути відрізану частину балки (а з нею і переріз) за годинниковою стрілкою і входить в рівняння поперечних сил зі знаком "+". Зазначимо, що величина сили P не залежить від координати перерізу z . Отже, на першій ділянці маємо рівняння $Q_y = P = 15$ кН, за допомогою якого можна вирахувати значення поперечної сили в будь-якій точці ділянки. Оскільки значення Q_y не залежить від значення z , епюра поперечних сил на цій ділянці матиме вигляд горизонтальної лінії.

Момент сили P відносно перерізу дорівнює добутку її величини ($P=15$ кН) на відстань від перерізу до сили. Ця відстань дорівнює z . Знак згинального моменту від сили P є додатним, оскільки ця сила призводить до стискання верхніх волокон балки. Отже, згинальний момент на цій ділянці визначається рівнянням $M_x = P \cdot z$. В це рівняння змінна z входить в першому ступені, тому воно є рівнянням нахиленої прямої. Зі збільшенням значення z значення моменту лінійно зростає, що знаходить своє відображення на епюрі (див.рис.1).

Ділянка II. Координата перерізу z , яка відраховується від початку координат, може змінюватися в межах $2 \text{ м} < z < 3 \text{ м}$ (див.рис.1в). Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = P - R_A = 15 - 7 = 8 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на цій ділянці матиме вигляд:

$$M_x = P \cdot z - R_A \cdot (z - 2).$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки :

$$M_x \Big|_{z=2} = 15 \cdot 2 - 7 \cdot (2 - 2) = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z=3} = 15 \cdot 3 - 7 \cdot (3 - 2) = 38 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На другій ділянці балки при $2 \text{ м} < z < 3 \text{ м}$ крім сили P діє також реакція опори R_A (див.рис.16). Реакція опори завжди враховується як зовнішня зосереджена сила. У рівняння поперечних сил на другій ділянці сила R_A увійде зі знаком "-", оскільки вона намагається повертати розглянутий відрізок балки проти годинникової стрілки. У рівнянні згинальних моментів M_x , значення моменту від реакції R_A чисельно дорівнює добутку величини реакції на відстань між нею та перерізом. Враховуючи координату токи A ($B_3=2\text{м}$), де прикладена сила, цю відстань можна визначити як $z - 2$. Знак згинального моменту від сили R_A буде від'ємним, оскільки вона стискає нижні волокна балки (див.схему Б).

Аналіз отриманих залежностей показує, що характер зміни внутрішніх силових факторів на цій ділянці аналогічний до першої ділянки.

Ділянка III. На цій ділянці координата перерізу z може змінюватися в межах $3 \text{ м} < z < 6 \text{ м}$ (див.рис.12). Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = P - R_A - q \cdot (z - 3);$$

Визначаємо величину Q_y на границях ділянки :

$$Q_y \Big|_{z=3} = 15 - 7 - 6 \cdot (3 - 3) = 8 \text{ кН};$$

$$Q_y \Big|_{z=6} = 15 - 7 - 6 \cdot (6 - 3) = -10 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на ділянці матиме вигляд:

$$\begin{aligned} M_x &= P \cdot z - R_A \cdot (z - 2) + M - q \cdot (z - 3) \cdot \frac{(z - 3)}{2} = \\ &= P \cdot z - R_A \cdot (z - 2) + M - q \cdot \frac{(z - 3)^2}{2}. \end{aligned}$$

Визначаємо величину M_x на межах ділянки:

$$M_x \Big|_{z=3} = 15 \cdot 3 - 7 \cdot (3-2) + 5 - 6 \cdot \frac{(3-3)^2}{2} = 43 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z=6} = 15 \cdot 6 - 7 \cdot (6-2) + 5 - 6 \cdot \frac{(6-3)^2}{2} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поперечна сила Q_y є першою похідною від згинального моменту M_x . Оскільки на цій ділянці епюра поперечних сил змінює знак з "+" на "-", в межах ділянки матиме місце екстремальне (максимальне) значення згинального моменту $M_{x \max}$. Визначимо екстремальне значення M_x . Для цього прирівняємо до нуля рівняння поперечних сил Q_y на цій ділянці і знайдемо з нього z_e .

$$Q_y = P - R_A - q \cdot (z_e - 3) = 0; \quad z_e = \frac{P - R_A}{q} + 3 = \frac{15 - 7}{6} + 3 = 4,33 \text{ м}.$$

Отже, на відстані $z_e = 4,33$ м від початку координат згинальний момент матиме максимальне значення:

$$M_{\max} = M_y \Big|_{z=4,33} = 15 \cdot 4,33 - 7 \cdot (4,33 - 2) + 5 - 6 \cdot \frac{4,33 - 3}{2} = 48,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Коли переріз знаходиться в межах третьої ділянки ($3 \text{ м} < z < 6 \text{ м}$), то крім розглянутих на попередніх ділянках силових факторів, в розрахунок мають бути включені зовнішній момент M і розподілене навантаження q (див.рис.1г).

При складанні рівняння поперечних сил Q_y , зовнішній момент M не враховується, оскільки не має вертикальної проекції. Розподілене навантаження замінюється рівнодіючою, яка дорівнює за величиною добутку інтенсивності q на довжину тієї її частини, яка розглядається ($z - 3$). Знак визначаються за схемою А.

У рівнянні згинальних моментів M_x крім розглянутих раніше сил P та R_A , урахуванню підлягають зовнішній момент M і розподілене навантаження q . Момент зовнішній момент M входить в рівняння згинальних моментів M_x як доданок зі знаком, що визначається за схемою Б. В даному випадку це знак "+", оскільки дія моменту M призводить до стискання верхніх волокон балки. Величина моменту від розподіленого навантаження чисельно дорівнює добутку її рівнодіючої $q \cdot (z - 3)$ на плече l (див.рис.1г), яке дорівнює половині довжини тієї її частини, яка розглядається: $l = (z - 3) / 2$.

Слід звернути особливу увагу на форму епюру цієї ділянки. Оскільки, на відміну від попередніх ділянок, в рівнянні Q_y з'являється змінна z , що стоїть в першому ступені, епюра матиме вигляд нахиленої прямої. Рівняння згинального моменту містить змінну z в другому ступені. Отже, епюра M_x на цій ділянці матиме форму квадратної параболи. Опуклість параболи завжди спрямована назустріч напрямку дії розподіленого навантаження.

Ділянка IV. Координата перерізу, відлічувана від лівого кінця балки, може змінюватися в межах $6 \text{ м} < z < 10 \text{ м}$ (див.рис.1д). Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = P - R_A - q \cdot z = 15 - 7 - 6 \cdot z = -10 \text{ кН}.$$

Рівняння для згинального моменту на ділянці матиме вигляд:

$$M_x = P \cdot z - R_A \cdot (z - 2) + M - q \cdot z \cdot \left(z - \frac{3}{2} - 3 \right);$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки:

$$M_x \Big|_{z=6} = 15 \cdot 6 - 7 \cdot (6 - 2) + 5 - 6 \cdot 3 \cdot (6 - 1,5 - 3) = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z=10} = 15 \cdot 10 - 7 \cdot (10 - 2) + 5 - 6 \cdot 3 \cdot (10 - 1,5 - 3) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Особливістю ділянки IV ($6 < z < 10$) є те, що рівнодіюча від розподіленого навантаження стає постійною (дорівнює $3q$), прикладеною в середині відрізка довжиною 3м (див.рис.1д). Плече рівнодіючої відносно перерізу визначається виразом $z - (3\text{м}/2 + 3\text{м}) = z - 3/2 - 3$.

Зручнішим є варіант при якому, розглядаючи ділянку IV, відкидають ліву частину балки (див.рис.1е). Тоді координата перерізу z' , яка відлічується від правого кінця балки вліво, може змінюватися в межах $0 < z' < 2 \text{ м}$. Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = -R_B = -10 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на цій ділянці матиме вигляд:

$$M_x = R_B \cdot z';$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки

$$M_x \Big|_{z'=0} = 10 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z'=4} = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В цьому випадку (рис.1е) слід змінити положення початку відліку координат і розмістити його на правому кінці балки, а напрямок осі

координат z змінити на протилежній (z'). Оскільки сила R_B намагається повертати відрізок балки справа від перерізу проти годинникової стрілки, в рівняння поперечних сил Q_y вона входить як від'ємна (див.схему А), а обумовлений нею згинальний момент M_x стискає верхні волокна балки і тому є позитивним (див.схему Б).

3. Контроль правильності побудови епюр.

Перевіряємо побудовані епюри Q_y та M_x (рис.1) на відповідність між собою. Епюра Q_y є додатною там, де M_x зростає від нуля до максимального значення $M_{x\max} = 48,4$ кН·м (див.рис.1). Там, де Q_y має від'ємне значення, величина M_x зменшується від $M_{x\max}$ до нуля. Це відповідає геометричному змісту диференційної залежності $Q_y = dM_x/dz$, яка визначає функцію поперечної сили як похідну від функції згинального моменту.

Перевіряємо "правило стрибків" на епюрах. Стрибок вниз на епюрі Q_y має місце в перерізі, в якому прикладена діюча вниз реакція R_A (див.рис.1). Величина стрибка дорівнює $15-8=7$ кН і співпадає з величиною самої реакції. Аналогічні стрибки мають місце також на початку і наприкінці епюри Q_y . Їхня величина і спрямування також відповідають величині і напрямку зовнішніх сил, прикладених у відповідних точках балки.

На епюрі M_x є стрибок в тому перерізі, де прикладений зовнішній зосереджений момент $M = 5$ кН·м. Величина стрибка $43-38=5$ кН·м збігається з величиною прикладеного в цьому перерізі зовнішнього моменту.

4. Підбір перерізу балки.

При виборі перерізу двотаврової балки з умови міцності тільки за нормальними напруженнями, на епюрі M_x знаходимо небезпечний переріз, в якому виникає максимальне (за модулем) значення згинального моменту $M_{x\max} = 48,4$ кН·м. Приймаючи максимальну величину напруження, яке допускається для матеріалу балки $[\sigma]=160$ МПа, визначаємо мінімально необхідну величину розрахункового осьового моменту опору перерізу:

$$W_{x p} = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{48,4 \cdot 10^5}{160,0 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}} = 302,5 \text{ см}^3.$$

Для виготовлення балки треба добирати двотавр, виходячи з умови $W_x \geq W_{x p}$. Відповідно до сортаменту (ГОСТ 8239-89) вибираємо двотавр №24а, в якого $W_x = 317 \text{ см}^3$ (дивися додаток Б).

Зразок виконання завдання за шифром 502

Картка вихідних даних має вигляд:

Група: 20ТС	Студент: Петров Петр Петрович	Шифр: 502
Розрахунково-графічне завдання №2		
"Розрахунок балок на міцність при плоскому поперечному згині"		
Силкові фактори: $F_1 = 5\text{кН}$; $F_2 = -15\text{кН}$; $q = -12\text{кН/м}$; $M = 5\text{кНм}$;		
Відстані (м): $b_1 = 5,5$; $b_2 = 1$; $b_3 = 0,8$; $b_4 = 11$;		
$a_1 = 0$; $a_2 = 9$; $c = 7,5$		

Рішення задачі

1. За вихідними даними будуємо розрахункову схему балки (рисунок 2) та з умови статичної рівноваги балки визначаємо реакції опор:

$$\sum M_B = 0;$$

$$R_A \cdot 10,2 - P_2 \cdot 10,0 + P_1 \cdot 5,5 - M - q \cdot 9 \cdot (2 + 0,5 \cdot 9) = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{10,2} (15 \cdot 10 - 5 \cdot 5,5 + 5 + 12 \cdot 9 \cdot 6,5) = 81,32 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$P_2 \cdot 0,2 - P_1 \cdot 4,7 - M - R_B \cdot 10,2 + q \cdot 9 \cdot (0,5 \cdot 9 - 0,8) = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{10,2} (15 \cdot 0,2 - 5 \cdot 4,7 - 5 + 12 \cdot 9 \cdot 3,7) = 36,68 \text{ кН}.$$

Перевірка знайдених реакцій:

$$\sum P_Y = R_A - q \cdot 9 - P_2 + P_1 + R_B = 81,32 - 12 \cdot 9 - 15 + 5 + 36,68 = 0;$$

Сума вертикальних проекцій зовнішніх сил, які діють на балку, дорівнює нулю. Отже, реакції визначені правильно.

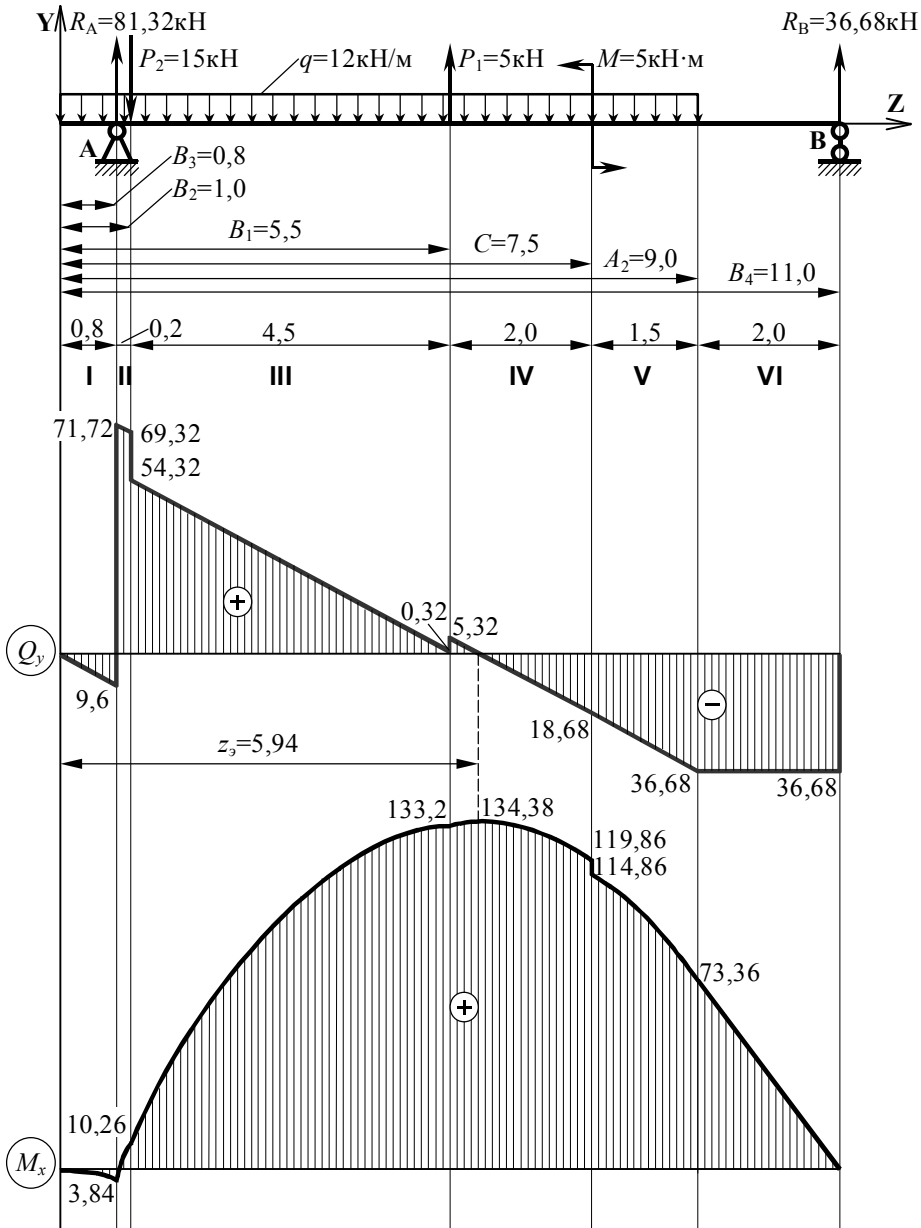


Рис.2 - Розрахункова схема і епюри поперечних сил і згинальних моментів до варіанту 502.

2. Побудова епюр поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x .

Ділянка I. Координата перерізу $0 < z < 0,8$ м. Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = -q \cdot z;$$

Визначаємо величину Q_y на границях ділянки:

$$Q_y|_{z=0} = 0; \quad Q_y|_{z=0,8} = -12,0 \cdot 0,8 = -9,60 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на ділянці матиме вигляд:

$$M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2};$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки :

$$M_x|_{z=0} = 0; \quad M_x|_{z=0,8} = -12,0 \cdot \frac{0,8^2}{2} = -3,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка II. Координата перерізу $0,8 \text{ м} < z < 1$ м. Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = -q \cdot z + R_A;$$

Визначаємо величину Q_y на границях ділянки :

$$Q_y|_{z=0,8} = -12,0 \cdot 0,8 + 81,32 = 71,72 \text{ кН};$$

$$Q_y|_{z=1} = -12,0 \cdot 1 + 81,32 = 69,32 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на ділянці матиме вигляд:

$$M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_A (z - 0,8);$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки :

$$M_x|_{z=0,8} = -12,0 \cdot \frac{0,8^2}{2} = -3,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x|_{z=1} = -12,0 \cdot \frac{1^2}{2} + 81,32 \cdot (1 - 0,8) = 10,26 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка III. Координата перерізу $1 \text{ м} < z < 5,5$ м. Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = -q \cdot z + R_1 - P_2;$$

Визначаємо величину Q_y на границях ділянки :

$$Q_y \Big|_{z=1} = -12,0 \cdot 1 + 81,32 - 15,0 = 54,32 \text{ кН};$$

$$Q_y \Big|_{z=5,5} = -12,0 \cdot 5,5 + 81,32 - 15,0 = 0,32 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на ділянці матиме вигляд:

$$M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_A(z - 0,8) - P_2(z - 1);$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки:

$$M_x \Big|_{z=1} = -12,0 \frac{1^2}{2} + 81,32(1 - 0,8) - 15,0(1 - 1) = 10,26 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z=5,5} = -12,0 \frac{5,5^2}{2} + 81,32(5,5 - 0,8) - 15,0(5,5 - 1) = 133,20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка IV. Координата перерізу $5,5 \text{ м} < z < 7,5 \text{ м}$. Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = -q \cdot z + R_A - P_2 + P_1;$$

Визначаємо величину Q_y на границях ділянки:

$$Q_y \Big|_{z=5,5} = -12,0 \cdot 5,5 + 81,32 - 15,0 + 5,0 = 5,32 \text{ кН};$$

$$Q_y \Big|_{z=7,5} = -12,0 \cdot 7,5 + 81,32 - 15,0 + 5,0 = -18,68 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на ділянці матиме вигляд:

$$M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_A(z - 0,8) - P_2(z - 1) + P_1(z - 5,5);$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки:

$$M_x \Big|_{z=5,5} = -12,0 \frac{5,5^2}{2} + 81,32(5,5 - 0,8) - 15,0(5,5 - 1) + 5,0(5,5 - 5,5) = 133,20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z=7,5} = -12,0 \frac{7,5^2}{2} + 81,32(7,5 - 0,8) - 15,0(7,5 - 1) + 5,0(7,5 - 5,5) = 119,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюра поперечних сил на ділянці змінює знак з "+" на "-", отже в

межах ділянки матиме місце максимальне значення згинального моменту $M_{x \max}$.

Визначимо екстремальне значення M_x . Для цього прирівняємо нулю рівняння поперечних сил Q_y на цій ділянці і знайдемо з нього z_e .

$$Q_y = -q \cdot z_e + R_A - P_2 + P_1 = 0;$$

$$z_e = \frac{R_A - P_2 + P_1}{q} = \frac{81,32 - 15,0 + 5,0}{12,0} = 5,94 \text{ м};$$

Отже, на відстані $z_e = 5,94$ м від початку координат, згинальний момент матиме екстремальне (максимальне) значення:

$$M_{x \max} = M_x \Big|_{z_e=5,94} = -12,0 \frac{5,94^2}{2} + 81,32(5,94 - 0,8) - 15,0(5,94 - 1) + 5,0(5,94 - 5,5) = 134,38 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка V. Координата перерізу $2 \text{ м} < z' < 3,5 \text{ м}$. Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = -R_B + q(z' - 2);$$

Визначаємо величину Q_y на границях ділянки:

$$Q_y \Big|_{z'=2} = -36,68 + 12,0(2 - 2) = -36,68 \text{ кН};$$

$$Q_y \Big|_{z'=3,5} = -36,68 + 12,0(3,5 - 2) = -18,68 \text{ кН};$$

Рівняння для моменту, що вигинає, на ділянці матиме вигляд:

$$M_x = R_B \cdot z - q \frac{(z' - 2)^2}{2};$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки:

$$M_x \Big|_{z'=2} = 36,68 \cdot 2 - 12,0 \frac{(2 - 2)^2}{2} = 73,36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_x \Big|_{z'=3,5} = 36,68 \cdot 3,5 - 12,0 \frac{(3,5 - 2)^2}{2} = 114,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка VI. Координата перерізу $0 \text{ м} < z' < 2 \text{ м}$. Рівняння для поперечної сили на ділянці має вигляд:

$$Q_y = -R_B = -36,68 \text{ кН};$$

Рівняння для згинального моменту на ділянці матиме вигляд:

$$M_x = R_B \cdot z';$$

Визначаємо величину M_x на границях ділянки:

$$M_x \Big|_{z'=0} = 0; \quad M_x \Big|_{z'=2} = 36,68 \cdot 2 = 73,36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюри Q_y та M_x приведено на рис.2.

3. Підбір перерізу балки.

При виборі перерізу двотаврової балки з умови міцності за нормальними напруженнями, на епюрі M_x знаходимо небезпечний переріз, в якому виникає максимальне (за модулем) значення згинального моменту $M_{x \max} = 134,38 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Приймаючи максимальну величину напруження, яке допускається для матеріалу балки $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначаємо мінімально необхідну величину розрахункового осевого моменту опору перерізу:

$$W_{xp} = \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{134,38 \cdot 10^5}{160,0 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}} = 839,9 \text{ см}^3.$$

Для виготовлення балки добираємо двотавр, виходячи з умови $W_x \geq W_{xp}$. Відповідно до сортаменту (ГОСТ 8239-89) вибираємо двотавр №40, в якого $W_x = 953 \text{ см}^3$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1.Що називається чистим та поперечним згином?
- 2.Яка диференційна залежність пов'язує поперечну силу і згинальний момент?
- 3.Як визначаються нормальні напруження в поперечному перерізі балки?
- 4.Чому дорівнює поперечна сила в перерізах балки, в яких згинальний момент досягає екстремальних значень?
- 5.Як змінюється епюра поперечних сил в перерізі, в якому до балки прикладена зосереджена зовнішня сила, перпендикулярна до осі балки?
- 6.Як змінюється епюра згинальних моментів в перерізі, в якому до балки прикладено зосереджений зовнішній момент?
- 7.Як визначається екстремальне значення згинального моменту?
- 8.Що таке нейтральний шар? Як він розташований при чистому згині?
- 9.Що називається моментом опору перерізу при згині? Яка його розмірність?
- 10.За якими формулами виконують розрахунок балки на міцність при плоскому поперечному згині?

Список літератури

1. Міцність та надійність машин/ В.Я. Анілович, О.С.Грінченко, В.В. Карабін та ін.; За ред. В.Я. Аніловича.-К.: Урожай, 1996.-288 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб.для втузов.-9-е изд., перераб.- М.: Наука, 1986.- 512 с.
3. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів: Підручник. - К.: Вища шк.,1993. - 655 с.: іл.
4. Заславский Б.В. Краткий курс сопротивления материалов: Учеб. для втузов.- М.: Машиностроение; 1986.- 328 с.

Додаток А. Порядок вибору вихідних даних

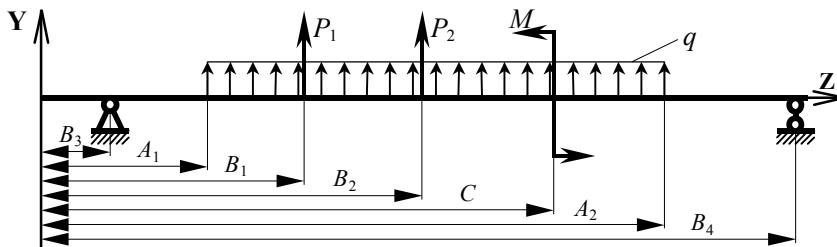
Методичні вказівки дозволяють за індивідуальним шифром студента сформувати вихідні дані до розрахунково-графічного завдання. Для цього під кожною цифрою шифру підписується одна з трьох букв U, V, T. Тоді букви U відповідатиме перша цифра шифру, букви V – друга, а букви T – третя.

5	0	2
U	V	T
Схема В		

Наприклад для шифру 502 отримаємо $U=5$; $V=0$; $T=2$ (див. схему В).

Щоб визначити величину і положення, наприклад, сили P_2 , в таблиці знаходимо відповідний стовпчик. Нижче позначення P_2 , кН знаходиться літера T, якій в шифрі 502 відповідає цифра 2 ($T=2$). Знайшовши в першому стовпці (U, V, T) рядок зі значенням 2, в ньому читаємо значення $P_2 = -15$ кН. На рисунку бачимо, що силі P_2 відповідає відстань (координата) B_2 , яка визначається літерою V шифру. Отже, із рядка з номером $V = 0$ знаходимо координату точки прикладення сили $B_2 = 1$ м.

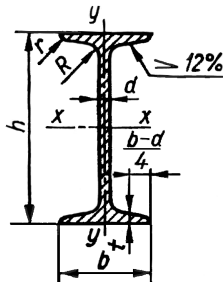
Розрахункова схема балки



Вихідні дані для розрахунку балок

U, V, T	$B_1,$ м	$B_2,$ м	$B_3,$ м	$B_4,$ м	$A_1,$ м	$A_2,$ м	$C,$ м	$P_1,$ кН	$P_2,$ кН	$q,$ кН/м	$M,$ кН·м	U, V, T
	U	V	T	U	V	T	U	V	T	U	V	
0	0,5	1	0	11	0	8,0	0	5	-5	-2	5	0
1	1,5	2	0,4	12	0,5	8,5	1,5	10	-10	-4	-10	1
2	2,5	3	0,8	13	1,0	9,0	3	15	-15	-6	15	2
3	3,5	4	1,2	14	1,5	9,5	4,5	20	-20	-8	-20	3
4	4,5	5	1,6	15	2,0	10,0	6	25	-25	-10	25	4
5	5,5	6	2,2	11	2,5	10,5	7,5	30	-30	-12	-30	5
6	6,5	7	2,4	12	3,0	11,0	9	35	-35	-14	35	6
7	7,5	8	2,8	13	3,5	11,5	10,5	40	-40	-16	-40	7
8	8,5	9	3,2	14	4,0	12,0	12	45	-45	-18	45	8
9	9,5	10	3,6	15	4,5	12,5	13,5	50	-50	-20	-50	9

Додаток Б. Балки двотаврові (по ГОСТ 8239-89).



h - висота балки;
 b - ширина полиці;
 d - товщина стінки;
 t - середня товщина полиці;

I - момент інерції;
 W - момент опору
 i - радіус інерції;
 S - статичний момент половини перерізу.

№ проф.	Розміри, мм				Площа перер. F , см^2	I_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	I_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	17,9	23,0	6,49	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	27,9	33,7	8,72	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	41,9	46,8	11,5	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	58,6	62,3	14,5	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	82,6	81,4	18,4	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	114	89,8	22,8	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	115	104	23,1	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	155	114	28,2	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	157	131	28,6	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	206	143	34,3	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	298	9,97	198	163	34,5	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	260	178	41,6	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	260	210	41,5	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	337	229	50,0	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	337	268	49,9	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	436	292	60,1	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	419	339	59,9	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	516	423	71,1	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	667	545	86,1	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	808	708	101	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	1043	919	123	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1356	1181	151	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1725	1491	182	108

Додаток В. Зразок оформлення титульної сторінки

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
ім. Петра Василенка**

**Кафедра надійності, міцності
і технічного сервісу машин
ім. В.Я.Аніловича**

**Розрахунково-графічне завдання № 2
Розрахунок балок на міцність
при плоскому поперечному згині**

**Виконав
студент групи 20тс
Іванов П.П.**

**Прийняв
доц. Петров І.І.**

Харків 2014р.

ОПІР МАТЕРІАЛІВ.

**РОЗРАХУНОК БАЛОК НА МІЦНІСТЬ
ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНІ**

Методичні вказівки
до проведення практичних занять
та індивідуальні завдання

Укладачі:

ГРІНЧЕНКО Олександр Степанович,
САВЧЕНКО Володимир Борисович,
КАЛІНІН Євген Іванович,
СВІРГУН Ольга Анатоліївна
КОНЦЕВИЧ Олександр Андрійович

Формат 60×84 1/16. Гарнітура Times New Roman.
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Умов. друк. арк. 1,4
Наклад 100 примірників.

Віддруковано у друкарні ФОП Заночкин Д.Л.
м. Харків, вул.Плеханівська, 16.
Зам. 0505/2019. тел. 757-93-82.