

## К РАСЧЕТУ ДРОБИЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

**Нанка А. В., к.т.н., доц., Бойко Д.И., к.т.н., ст. преп.,  
Иевлев И. И., к.ф.-м.н., доц., Русалев А.М., к.т.н., доц.,  
Семенцов В.В., к.т.н., доц.**

*Харьковский национальный технический университет  
сільського господарства імені Петра Василенка*

*В работе рассматривается устройство (дробилка), предназначенное для дробления зернового материала. Конструкция дробилки была предложена и опробована в лабораторных условиях кафедры ТСТТ ХНТУСГ им. Петра Василенка. Лабораторные испытания показали эффективность работы устройства, качество получаемого раздробленного зерна, малое количество некондиционной пылевидной фракции, меньшее шумообразование по сравнению с ранее известными дробильными аппаратами.*

*В работе дается теоретическое описание процесса резания зерна в данном устройстве, приведен расчет мощности, опирающийся на аналогии с заклепчным соединением так, как это делается в теории сопротивления материалов, приведены графики, позволяющие осуществить выбор оптимального режима дробления. Методами теории упругости рассчитано напряженное состояние зерна в рабочей зоне устройства, приведены графики интенсивности касательных напряжений в опасных сечениях зерна. Результаты вычислений позволяют прогнозировать процесс дробления зерна.*

***Ключевые слова.** Зерно, дробилка, мощность, напряженное состояние, численный метод, теория упругости, пластичность, условия текучести, разрушение зерна, интенсивность касательных напряжений.*

В работе рассматривается задача о разрушении зернового материала посредством дробильного устройства. Конструкция дробилки разработана и запатентована коллективом кафедры ТСТТ ХНТУСГ (рис.1) [1-5]. Схема рабочего органа дробилки приведена на рис.2.

Устройство представляет собой горизонтальный цилиндр, внутри которого располагается барабан  $C_1$  с фрезами. Зерно через входное отверстие бункера попадает в рабочую зону дробилки на противорежущую пластину (далее ПРП). Считаем, что зерно, имеет форму вытянутого эллипсоида вращения с полуосями  $a_3, b_3$  (большей и меньшей, соответственно).

Зерно, попавшее в рабочую зону, увлекается фрезой  $A$ , ложится центральной частью на ПРП (рис.3). Движущиеся фрезы срезают концевые части

зерна длиной  $d$ . На рис.2 изображен вид вдоль оси барабана с расположением поперечного сечения зерна в начальный и конечный моменты времени его соприкосновения с ПРП.

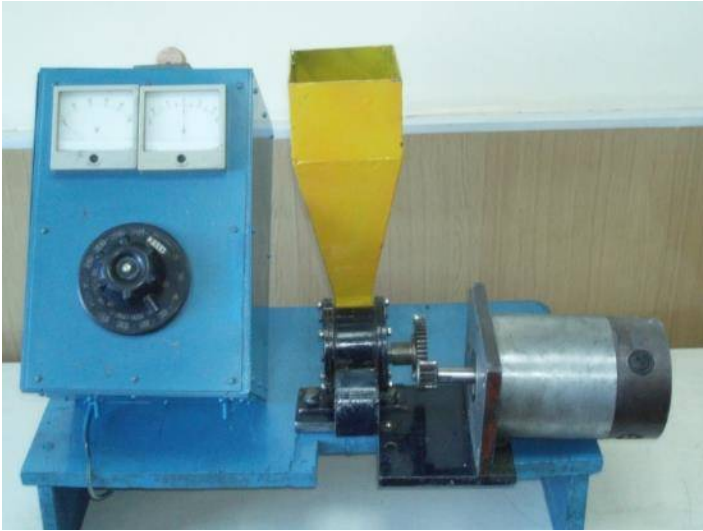


Рисунок 1 - Общий вид лабораторной дробильной установки

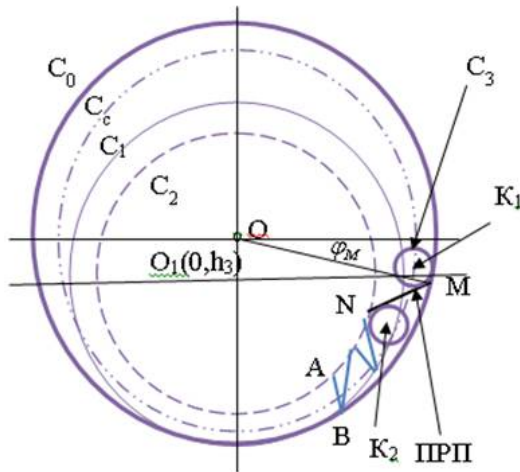


Рисунок 2 - Рабочая зона дробилки

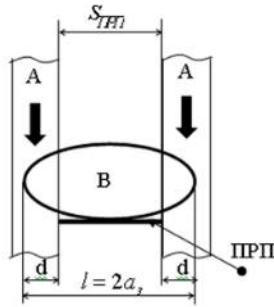


Рисунок 3 - Расположение зерна на ПРП

Здесь:

$C_0$  - корпус дробилки, окружность радиуса  $R_0$ ,

$C_3$  - граница поперечного сечения зерна, окружность радиуса

$$r_3 = b_3 = d_3 / 2,$$

$d_3$  - диаметр поперечного сечения зерна (меньшая ось эллипсоида  $b_3$ ),

$C_c$  - линия центров поперечных сечений зерна  $C_3$  окружность радиуса  $R_c$ ,

$h_3$  - высота зуба фрезы,

$C_1$  - фреза, окружность радиуса  $R_1$ ,

$C_2$  - место расположения оснований зубьев фрезы, окружность радиуса  $R_2 = R_1 - h_3$ ,

$MN$  - противорежущая пластина (ПРП), закрепленная в точке  $M$  корпуса дробилки и наклоненная по отношению к горизонтالي под углом  $\gamma$ ,

$\varphi_1, \varphi_2$  - полярные углы для центра поперечного сечения зерна, соответствующие первому (точка  $K_1$ ) и последнему (точка  $K_2$ ) моментам соприкосновения зерна с ПРП,

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

### Геометрические соотношения и кинематика движущегося зерна в рабочей зоне дробилки

Введем декартовы координаты  $(x, y)$  с началом в точке  $C_0$ , являющейся центром окружности корпуса дробилки  $C_0$ . Тогда уравнения окружностей  $C_0, C_c, C_1, C_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} C_0 : x^2 + y^2 &= R_0^2, & C_\varepsilon : x^2 + y^2 &= (R_0 - r_3)^2 \\ C_1 : x^2 + (y - \varepsilon)^2 &= R_1^2 & C_2 : x^2 + (y - \varepsilon)^2 &= (R_1 - h_3)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\varepsilon = R_0 - R_1)$$

Обозначим через  $x_M, y_M$  координаты точки закрепления ПРП, а через  $\gamma$  угол наклона ПРП по отношению к оси  $Ox$ . Пусть точка  $M$  лежит на окружности  $C_0$ . Тогда  $x_M = R_0 \cos(\varphi_M)$ ,  $y_M = R_0 \sin(\varphi_M)$ .

Если обозначить через  $\varphi_1, \varphi_2$  полярные углы центров поперечного сечения зерна, соответствующие началу и концу контакта зерна с ПРП, координаты точек  $K_1, K_2$  можно записать в виде (рис.4)

$$x_{K_i} = (R_0 - r_3) \cos(\varphi_i), \quad y_{K_i} = (R_0 - r_3) \sin(\varphi_i) \quad (i=1,2) \quad (2)$$

Уравнение прямой  $MM$ , проходящей через точку  $M$  под углом  $\gamma$  к горизонту, имеет вид

$$(x - x_M) \sin \gamma + (y - y_M) \cos \gamma = 0 \quad (3)$$

Для определения координат точек, являющихся основаниями перпендикуляров  $P_1, P_2$ , опущенных из точек  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) на прямую  $MM$ , построим уравнение прямой, проходящей через точки  $K_i, P_i$

Точки  $P_i(x_i, y_i)$ , принадлежащие линиям  $MM$  и  $K_i P_i$ , их координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} (x - x_M) \sin \gamma + (y - y_M) \cos \gamma = 0 \\ (x - x_{K_i}) \cos \gamma - (y - y_{K_i}) \sin \gamma = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

Решение системы (4) дает выражения для координат точек  $P_1: x_{P_1}, y_{P_1}$  и  $P_2: x_{P_2}, y_{P_2}$

$$\begin{aligned} x_{P_1} &= \cos^2 \gamma x_{K_1} + \sin^2 \gamma x_M - \sin \gamma \cos \gamma (y_{K_1} - y_M) \\ y_{P_1} &= \sin^2 \gamma y_{K_1} + \cos^2 \gamma y_M - \sin \gamma \cos \gamma (x_{K_1} - x_M) \\ x_{P_2} &= \cos^2 \gamma x_{K_2} + \sin^2 \gamma x_M - \sin \gamma \cos \gamma (y_{K_2} - y_M) \\ y_{P_2} &= \sin^2 \gamma y_{K_2} + \cos^2 \gamma y_M - \sin \gamma \cos \gamma (x_{K_2} - x_M) \end{aligned}$$

Уравнения для нахождения  $\varphi_1, \varphi_2$  вытекают из того, что расстояние между точками  $K_1, P_1$  ( $K_2, P_2$ ) равняется радиусу  $r_3$  поперечного сечения зерна, и имеют вид

$$(x_{P_1} - x_{K_1})^2 + (y_{P_1} - y_{K_1})^2 - r_3^2 = 0 \quad (5)$$

$$(x_{P_2} - x_{K_2})^2 + (y_{P_2} - y_{K_2})^2 - r_3^2 = 0 \quad (6)$$

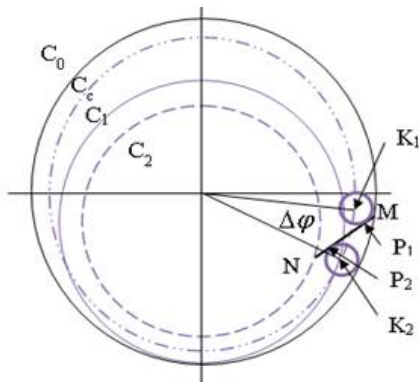


Рисунок 4 - Определение крайних положений зерна на ПРП

Трансцендентные уравнения (5), (6) относительно переменных  $\varphi_1, \varphi_2$  решаются численно методом деления интервала пополам [45]. Интервал для полярного угла, при котором зерно находится в контакте с ПРП, равняется

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctg \frac{y_{K_2}}{x_{K_2}} - \arctg \frac{y_{K_1}}{x_{K_1}} \quad (7)$$

Процесс прохождения зерна через ПРП, полученный в результате расчетов для  $d_3 = 0.004$  м через равные промежутки времени, изображен на рис.5. В начальный момент соприкосновения зерна с ПРП срезанная площадь равна площади поперечного сечения зерна. Затем эта величина уменьшается до нуля.

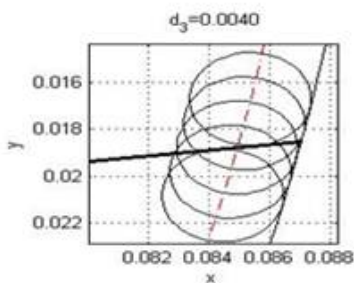


Рисунок 5 - Движение зерна через ПРП

### Заклепочное приближение. Расчет мощности дробилки.

При расчете мощности устройства воспользуемся предположениями, принимаемыми при расчете в сопротивлении материалов заклепочных соединений: разрушение заклепочного соединения происходит при достижении предельного значения  $\tau_s$  касательных напряжений в плоскости сдвига материала [6]. При этом полагают, что во всей плоскости сдвига касательные напряжения одинаковы и равны  $\tau_s$ . Тогда предельная сдвигающая сила равняется  $P = \tau_s S_c$ , где  $S_c$  - площадь поперечного сечения заклепки. Обобщим последнее утверждение таким образом. Пусть процесс резания материала (заклепки) начат, и некоторая часть поперечного сечения его уже срезана. Тогда под  $S_c$  будем понимать площадь материала, предстоящего дальнейшей резки.

На рис.6 указана область, соответствующая  $S_c$  в начальный момент прохождения зерном ПРП. Здесь  $\gamma$  угол наклона ПРП к горизонту,  $\Psi = \angle AKB$  в процессе движения зерна меняется от 0 до  $2\pi$ . Нетрудно показать, что площадь  $S_c$  в зависимости от угла  $\Psi$  принимает значения

$$S_c = \frac{1}{2} r_3^2 (2\pi - \psi + \sin \psi)$$

Обозначим  $\bar{w}$  скорость движения зерна, и разложим ее на составляющие, параллельные векторам  $\overline{KP}$  и  $\overline{AB}$ :  $w_n = \omega R_c \sin \beta$ ,  $w_s = \omega R_c \cos \beta$ , полагая  $\beta = \pi / 2 - \varphi - \gamma$ . Учитывая малость отношения  $r_3 / R_c \ll 1$ , можно считать движения зерна поступательным.

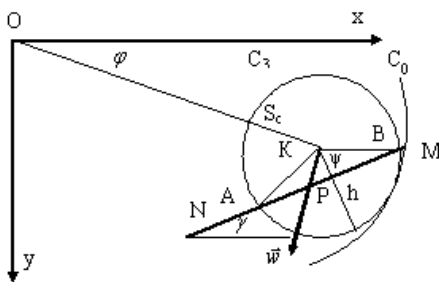


Рисунок 6 - К расчету мощности устройства

Учтем силу трения зерна о ПРП в соответствии с законом сухого трения Кулона с коэффициентом трения  $f_k$ , приближенное значение угла

$\varphi \approx (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$ . Тогда элементарную работу, затрачиваемую на резание зерна с одного его конца за время  $dt$ , можно записать в виде

$$dA = P_{W_n} dt + f_K P_{W_s} dt = \\ = \tau_s S_c \frac{1}{2} r_3^2 (2\pi - \psi + \sin \psi) \omega dt R_c [\cos(\varphi + \gamma) + f_K \sin(\varphi + \gamma)]$$

Отсюда, мгновенная мощность равна  $M = dA / dt$ . Интегрируя по «быстрой» переменной  $\psi$  на интервале  $[0, 2\pi]$ , разделив выражение на  $2\pi$  и умножив его на число зубьев  $N_z$  фрезы, получим выражение для среднего значения мощности  $\overline{M}$

$$\overline{M} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\psi) d\psi = N_z \tau_s \pi r_3^2 \omega R_c [\cos(\varphi + \gamma) + f_K \sin(\varphi + \gamma)] \quad (8)$$

Результаты вычислений для средней мощности, развиваемой фрезой для отрезания двух концов зерна и  $N_z$  зубьев фрезы в одном ряду, в соответствии с формулой (8), приведены на рис.7 для предельного касательного напряжения  $\tau_s = 1_{10}5 \text{ н/м}^2$ ,  $N_z = 20$ ,  $d_3 = 0.005 \text{ м}$  и частоты вращения фрезы  $f = 1500, 2500 \text{ об/мин}$ , соответственно.

Из графиков видно, что с увеличением  $\gamma$  наклона ПРП мощность ведет себя немонотонно – вначале она возрастает, а затем убывает. При этом точка максимума сдвигается в сторону увеличения  $\gamma$ . При изменении  $\varphi_M$ , определяющего расположения ПРП кривые зависимости  $M_{cp}(\gamma)$  ведут себя подобным образом, лишь точка максимума сдвигается в сторону увеличения  $\gamma$ .

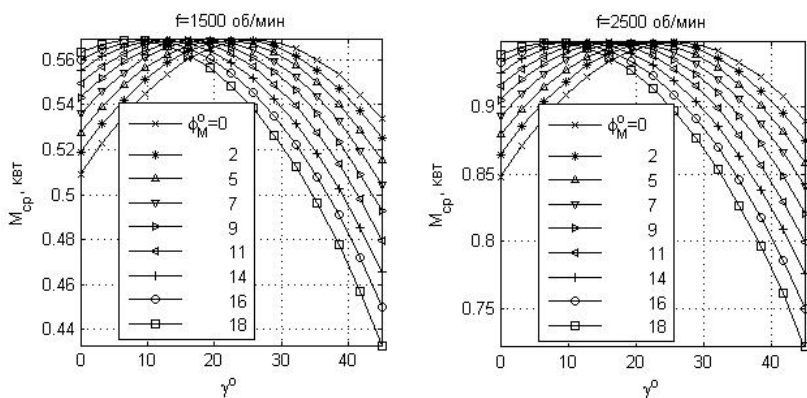


Рисунок 7 - Средняя мощность дробилки

### О напряженном состоянии зерна при его резании.

Далее исследуется напряженное состояние зерна в процессе его разрушения методами теории упругости. Зерно, имеющее форму эллипсоида вращения с полуосями  $a_3 > b_3 > 0$ , заменяется прямым круговым цилиндром эквивалентного объема (рис.8).

Введем обозначения для объемов разных частей цилиндра:

$$V_- = \{0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -l/2 \leq z \leq -l/2 + d\},$$

$$V_0 = \{0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -l/2 + d \leq z \leq l/2 - d\},$$

$$V_+ = \{0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, l/2 - d \leq z \leq l/2\}, \quad V = V_- + V_0 + V_+.$$

Считаем, что на поверхности объема  $V_- + V_0 + V_+$  действуют поверхностные силы, имеющие разный знак на частях цилиндра  $V_-, V_+$  и  $V_0$ .

$$p_n = F \cos(\varphi) \tag{9}$$

на боковой поверхности цилиндра и

$$\vec{p} = 0 \tag{10}$$

на торцах цилиндра.

Внутри объема  $V$  выполняются уравнения равновесия, записанные либо в терминах тензора напряжений, либо в форме Ламе через вектор перемещений  $\vec{u} = \vec{e}_r u_r + \vec{e}_\varphi u_\varphi + \vec{e}_z u_z$ , где  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  - орты цилиндрической системы координат.

Для решения указанной задачи используется представление Папковича-Нейбера [7]

$$\vec{u} = \nabla(\Phi + \vec{r} \cdot \vec{\Psi}) - 4(1-\nu)\vec{\Psi}$$

где  $\Phi, \vec{\Psi} = \vec{e}_r \Psi_r + \vec{e}_\varphi \Psi_\varphi$  - гармонические функция и вектор.

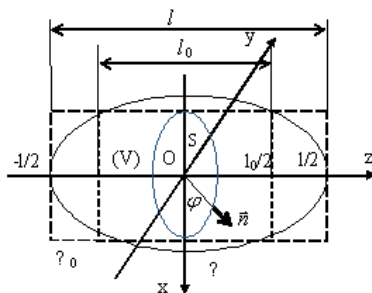


Рисунок 8 - К расчету напряжений зерна



Разыскивается приближенное решение, опирающееся на метод Галеркина, в виде агрегатов [8].

$$\begin{aligned}\Phi(r, z) &= [\Phi_1^{(c)}(r)\omega_1(z) + \Phi_2^{(c)}(r)\omega_2(z)] \cos \varphi + \\ &+ [\Phi_1^{(s)}(r)\omega_1(z) + \Phi_2^{(s)}(r)\omega_2(z)] \sin \varphi \\ \Psi_r(r, z) &= [\Psi_{r,1}^{(c)}(r)\omega_1(z) + \Psi_{r,2}^{(c)}(r)\omega_2(z)] \cos \varphi + \\ &+ [\Psi_{r,1}^{(s)}(r)\omega_1(z) + \Psi_{r,2}^{(s)}(r)\omega_2(z)] \sin \varphi \\ \Psi_\varphi(r, z) &= [\Psi_{\varphi,1}^{(c)}(r)\omega_1(z) + \Psi_{\varphi,2}^{(c)}(r)\omega_2(z)] \cos \varphi + \\ &+ [\Psi_{\varphi,1}^{(s)}(r)\omega_1(z) + \Psi_{\varphi,2}^{(s)}(r)\omega_2(z)] \sin \varphi\end{aligned}$$

где  $\omega_m(z)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) - базисные функции, а коэффициенты, стоящие при них, выражаются через модифицированные функции Бесселя первого рода [9].

После определения вектора перемещений  $\vec{u}$ , нахождения компонент тензора деформаций

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_\varphi & \varepsilon_{\varphi z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\varphi z} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

вычисляем тензор напряжений в соответствии с законом Гука

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_\varphi & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\varphi z} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Для применения теории пластического разрушения материала требуется привлечь условие текучести [10,11]. Воспользуемся условием текучести Мизеса

$$T \equiv \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]} + \sigma_{r\varphi}^2 + \sigma_{\varphi z}^2 + \sigma_{rz}^2 = \tau_s \quad (11)$$

где  $\tau_s$  - предельное касательное напряжение. Согласно этому критерию в точках, в которых выполняется соотношение (11), материал претерпевает пластические деформации. С точки зрения сопротивления материалов такая ситуация соответствует процессу разрушения тела.

### Алгоритм решения задачи о разрушении зерна в дробилке.

В силу линейности задачи о равновесии зерна можно считать, что напряжения, а, следовательно, и интенсивность касательных напряжений  $T$  пропорциональны главному вектору  $Q$  поверхностных сил, действующих на зерно в области  $V_0$  боковой поверхности, соприкасающейся с ПРП

$$T = T_1 Q$$

где  $T_1$  - интенсивность касательных напряжений, вычисляемая для  $Q=1$ .

Тогда

$$\max T = Q \max T_1 \quad (12)$$

Тогда соотношение (11), (12) позволяют найти значение  $\min Q$ , соответствующее предельному равновесию [11]

$$\min Q = \frac{\tau_s}{\max T_1}$$

После этого определяем напряженное состояние зерна, соответствующее нагрузке  $Q = \min Q$ .

Представляет интерес распределение касательных напряжений в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, в которой лежит точка со значением  $T = T_{\max}$

$$\tau_x = \sigma_{rz} \cos \varphi - \sigma_{\varphi z} \sin \varphi$$

На рис.9 изображены: слева – график зависимости  $T(r, \varphi, z)$  в полу-плоскости  $\varphi = 85^\circ$ , содержащей максимальное значение  $T_{\max}$ ; по центру – линии уровня этой же функции; справа – распределение касательных напряжений в плоскости  $z = z_{\max}$ , содержащей  $T = T_{\max}$ .

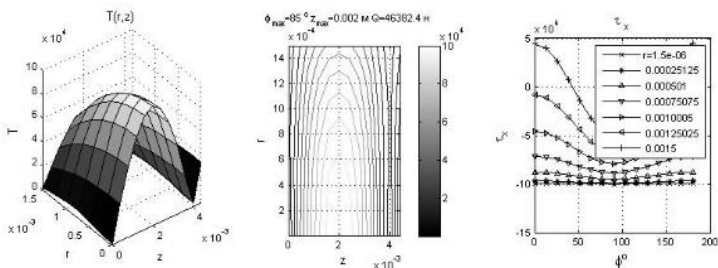


Рисунок 9 - Интенсивность касательных напряжений и касательные напряжения  $\tau_x$

### Выводы.

В результате численного анализа напряженного состояния зерна можно сказать:

- интенсивность касательных напряжений имеет наибольшие значения вблизи большей оси зерна; она имеет две плоскости максимальных значений, симметрично расположенных относительно плоскости  $z=0$  на расстоянии, примерно равном  $l/4$ . Это соответствует интуитивно понимаемому факту того, что зерно будет раздроблено на три фрагмента;
- распределение касательных напряжений в плоскостях, соответствующих  $T = T_{\max}$  не является однородным. Это говорит о том, что предположения теории сопротивления материалов об однородности  $\tau_x$  в срезаемой плоскости не вполне корректны.

### Литература

1. Нанка О.В., Бойко І.Г., Науменко О.А. 2013. Подрібнювач зернових кормів. Патент України, UA №84938, В02С, Бюл. №21, 11.11.2013.
2. Нанка О.В. 2013.. Патент України, UA №95760, МПКА21С 1/06, А21D13/08, Бюл. №1, 12.01.2015.
3. Нанка О.В. Спосіб підвищення рівномірності подрібнення зерна. Патент України, UA №116240, В02С 9/00, Бюл. №9, 10.05.2017.
4. Нанка О.В. Подрібнювач фуражного зерна.
5. Нанка О.В., Бойко І.Г., Бакум М.В., Нагорний С.А. 2017. Подрібнювач фуражного зерна. Патент України, UA №116599, А01F 12/00, А01F 29/00, В02С 18/00 Бюл. №9, 10.05.2017.
6. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965. 856 с.
7. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
9. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 287 с.
10. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1979. 207 с.
11. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа. 1969. 609 с.

## Abstract

### TO CALCULATION OF A CRUSHING DEVICE

**A. Nanka, D. Boyko, I. Ievlev, A. Rusaljov, V. Sementsov**

*In this work, a device (crusher) intended for crushing grain material is considered. The design of the crusher was proposed and tested in the laboratory conditions of the TSTT Department of KhNTUMS named after. Peter Vasilenko. Laboratory tests showed the efficiency of the device, the quality of the crushed grain, a small amount of unconsolidated pulverized fraction, less noise generation in comparison with the previously known crushing equipment.*

*The paper gives a theoretical description of the grain cutting process in this device, a power calculation based on analogy with a riveted joint is given, as is done in the theory of the resistance of materials, graphs are given that allow choosing the optimal mode of crushing. The tensile state of grain in the working zone of the device is calculated by the methods of the theory of elasticity, graphs of the intensity of tangential stresses in dangerous sections of grain are given. The results of the calculations make it possible to predict the process of grain crushing.*

## Анотація

### ДО РОЗРАХУНКУ ДРОБИЛЬНОГО ПРИСТРОЮ

**Нанка О. В., Бойко Д. І., Ієвлєв І. І., Русальов О. М.,  
Семенцов В. В.**

*В роботі розглядається пристрій (дробарка), призначене для дроблення зернового матеріалу. Конструкція дробарки була запропонована і випробувана в лабораторних умовах кафедри ТСТТ ХНТУСГ ім. Петра Василенка. Лабораторні випробування показали ефективність роботи пристрою, якість одержуваного роздробленого зерна, мала кількість некондиційної пилоподібної фракції, менше шумообразование в порівнянні з раніше відомими дробильними апаратами.*

*В роботі дається теоретичний опис процесу різання зерна в цьому пристрої, наведено розрахунок потужності, що спирається на аналогії з клепаних з'єднань так, як це робиться в теорії опору матеріалів, наведені графіки, що дозволяють здійснити вибір оптимального режиму дроблення. Методами теорії пружності розраховано напружений стан зерна в робочій зоні пристрою, приведені графіки інтенсивності дотичних напружень в небезпечних перетинах зерна. Результати обчислень дозволяють прогнозувати процес дроблення зерна.*