УДК 534.1:539.3

ВІЛЬНЕ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ З НЕСИМЕТРИЧНО КУСКОВОЮ ЛІНІЙНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Ольшанський В.П., Бурлака В.В., Сліпченко М.В.,
Харьківський національний технічний університет сільського господарства імені П.Василенка

Розглянуто вільні коливання механічної системи з одним ступенем вільності, яка має несиметричну кусково-лінійну характеристику пружності. Системи з несиметричною кусково-лінійною характеристикою жорсткості поширені в техніці, зокрема в транспортних засобах, де поряд з основним пружним елементом (ресори) використовують додатковий пружний елемент–підсилювач (підресорник).

Виведено замкнені формули для обчислення періоду і частоти коливань. Для досягнення поставленої мети вибрано метод припасування розв'язків диференціальних рівнянь. Встановлено умови, коли коливання відбуваються без деформування підресорника. Показано, що ці характеристики руху залежать від амплітуди коливань. В статті показано, що розрахунок амплітудного відхилення можна одержати й іншим методом. А саме прирівняти потенціальні енергії системи у крайньому верхньому і крайньому нижньому положеннях. Встановлено, що період вільних коливань залежить від початкового амплітудного відхилення, що властиво нелінійним системам. Виведені випадки, коли коливання ізохорні. Визначено умови, за яких система має найменший період коливань. Встановлено, що, внаслідок несиметрії характеристики пружності, період і частота коливань залежать від того, в який бік надано початкове відхилення системи від положення рівноваги. Доведено, що для обчислень періоду і частоти коливань можна скористатись виведеними формулами і у випадку так званого миттєвого імпульсу, коли системі надана початкова швидкість. Для цього треба перерахувати початкову швидкість на початкове еквівалентне відхиленя, скориставшись їх енергетичним співвідношенням. Наведено приклади розрахунків. В результаті розрахунків встановлено, що період і частота коливань залежать від величини конструктивного зазору. Як і в нелінійні системі, частота і період залежать не тільки від конструктивних параметрів системи, а також і від величини початкового відхилення її від положення рівноваги. Їх обчислення зводиться до використання компактних розрахункових формул, які побудовано в роботі.

Ключові слова: *несиметрична характеристика пружності, вільні коливання, період і частота, задача Коші, аналітичний розв'язок.*

Актуальність

Системи з несиметричною кусково лінійною характеристикою жорсткості поширені в техніці, зокрема в транспортних засобах, де поряд з основним пружним елементом (ресори) використовують додатковий пружний елемент–підсилювач (підресорник). Іноді додатковим пружним елементом є обмежувач переміщень (буфер). Якщо додатковий елемент встановлено з одного боку від положення рівноваги системи, що зустрічається на практиці, то пружна характеристика стає несиметричною.

Аналіз останніх публікацій

Формули для розрахунків частоти і періоду вільних коливань системи з одним ступенем вільності, що має симетричну кусково-лінійну характеристики, надруковано в довіднику [1]. Але їх не має для несиметричної характеристики, що послужило мотивом цієї роботи.

Мета статті

Метою статті є вивчення особливостей вільних коливань механічної системи з одним ступенем вільності, що зумовлені несиметрією кусково лінійної силової характеристики.

Засобом досягнення поставленої мети вибрано метод припасування розв'язків диференціальних рівнянь. Використання вказаного методу дало можливість побудувати замкнені формули для обчислення періоду і частоти вільних коливань та з'ясувати особливості руху.

Викладення основного матеріалу

Використовуємо розрахункову схему, зображену на рис. 1.

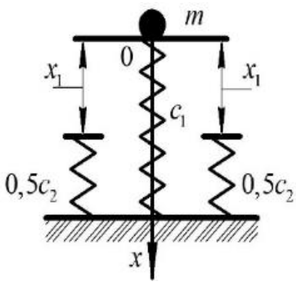

Рис. 1. Розрахункова схема

Тут основний пружний елемент жорсткості c_1 утримує тверде тіло (матеріальну точку) масою m. Знизу від положення встановлено елемент підсилювач жорсткості c_2, який вступає в роботу, коли переміщення системи $x(t)$ перевищує зазор $x = x_1 > 0$. Напрям вісі Ox спрямовуємо вниз. Припускаємо, що причиною вільних коливань є початкове відхилення системи вгору на $x=-a_0$ від положення рівноваги $x=0$.

На проміжку часу $t\in[0;t_1]$, коли $-a_0\le x(t)\le x_1$, коли рух системи описуємо диференціальним рівнянням [2, 3]:

$$m\ddot{x}+c_1x=0\ ,$$

при початкових умовах:

$$x(0)=-a_0\ ,\quad \dot{x}(0)=0\ ,$$

де крапка над x означає похідну по t .

Розв'язки цієї задачі є вираз:

$$x(t)=-a_0\cos(\omega_1t)\ , \tag{1}$$

у якому $\omega_1=\sqrt{c_1/m}$; $a_0>0$.

Рух відбувається зі швидкістю:

$$\dot{x}(t)=a_0\omega_1\sin(\omega_1t)\ . \tag{2}$$

Якщо початкове відхилення задовольняє нерівності $a_0\le x_1$, то коливання проходять без деформування підресорника, а їх частоти і період коливань відповідно становлять: ω_1 і $T_1=2\pi/\omega_1$. Маємо варіант лінійних ізохорних вільних коливань [4], коли ω_1 і T_1 не залежать від a_0, причому $T_1=T_{\max}$.

Далі розглянемо більш складний випадок, $a_0>x_1$. Деформування підресорника починається при $t=t_1$ і згідно з (1) і (2):

$$x_1=x_1(t)=-a_0\cos(\omega_1t)\ ;\quad \upsilon_1=\dot{x}(t)=a_0\omega_1\sin(\omega_1t)\ .$$

Із цих рівнянь випливає, що:

$$t_1=\frac{1}{\omega_1}\arccos\left(-\frac{x_1}{a_0}\right)=\frac{1}{\omega_1}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{x_1}{a_0}\right);\ \upsilon_1=\omega_1\sqrt{a_0^2-x_1^2}\ .$$

На проміжку $t\in[t_1;t_*]$, коли $x(t)=x_1$, рух системи описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x}+c_1x+c_2(x-x_1)=0\ , \tag{3}$$

з початковими умовами:

$$x(t_1)=x_1\ ,\ \dot{x}(t_1)=\upsilon_1\ .$$

Ця задача Коші має розв'язок:

$$x(t)=\frac{c_2x_1}{c_1+c_2}+\sqrt{\left(\frac{c_1x_1}{c_1+c_2}\right)^2+\left(\frac{\upsilon_1}{\omega_2}\right)^2}\sin\left[\omega_2(t-t_1)+\alpha\right], \qquad (4)$$

у якому: $\omega_2=\sqrt{(c_1+c_2)/m}$; $\alpha=arctg\dfrac{c_1x_1\omega_2}{(c_1+c_2)\upsilon_1}=arctg\dfrac{\omega_1x_1}{\omega_2\sqrt{a_0^2-x_1^2}}$.

Згідно з (4) амплітудне переміщення системи вниз A_0 становить:

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{c_2x_1}{c_1+c_2}+\sqrt{\left(\frac{c_1x_1}{c_1+c_2}\right)^2+\frac{c_1}{c_1+c_2}\left(a_0^2-x_0^2\right)}=\\&=\frac{1}{c_1+c_2}\left(c_2x_1+\sqrt{(c_1+c_2)c_1a_0^2-c_1c_2x_1^2}\right)\end{aligned}, \qquad (5)$$

і досягається воно при:

$$t=t_*=t_1+\frac{1}{\omega_2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Вираз для A_0 модна також одержати не розв’язуючи рівняння (4). Для цього слід прирівняти потенціальні енергії системи у крайньому верхньому і крайньому нижньому положеннях. Це дає рівняння:

$$c_1a_0^2=c_1A_0^2+c_1\left(A_0-x_1\right)^2, \qquad (6)$$

з якого випливає, що $A_0<a_0$, тобто амплітудне відхилення системи вниз менше, ніж відхилення вгору.

Елементарним перетворенням залежність (6) зводимо до квадратного рівняння:

$$A_0^2-2\frac{c_2x_1}{c_1+c_2}A_0-\frac{c_1a_0^2-c_2x_1^2}{c_1+c_2}=0,$$

Що має розв’язок (5).

Оскільки при $t=t_*$ система починає рух вгору, то період коливань T дорівнює:

$$T=2t_*=\pi\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)+\frac{2}{\omega_1}\arcsin\frac{x_1}{a_0}-\frac{2}{\omega_2}\mathrm{arc}\,tg\frac{\omega_1x_1}{\omega_2\sqrt{a_0^2-x_1^2}}. \qquad (7)$$

Знаючи T, легко обчислити і частоту коливань ω, бо:

$$\omega=2\pi/\mathrm{T}.$$

Для подальшого параметричного аналізу, формулі (7) доцільно надати вигляд:

$$T = T_{\min} + \frac{2}{\omega_1}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{\sqrt{a_0^2 - x_1^2}} - \frac{2}{\omega_2}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1 x_1}{\omega_2\sqrt{a_0^2 - x_1^2}}, \qquad (8)$$

де $T_{\min} = \pi\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)$.

Із (8) випливає, що період вільних коливань залежить від початкового амплітудного відхилення a_0, що властиво нелінійним системам. Виключенням є три окремих випадки ізохорності коливальної системи. Перший з них маємо, коли $a_0 = x_1$. Тоді:

$$T = \pi\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) + \frac{\pi}{\omega_1} - \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_1} = T_1.$$

Це варіант малих амплітудних коливань.

Другий виникає, якщо $c_2 = 0$. Для нього $\omega_1 = \omega_2$ і, згідно з (8), $T = T_1 = T_{\max}$. У системі відсутній підресорник.

Третій випадок маємо при $x_1 = 0$. Йому відповідає найменший період коливань $T = T_{\min}$. У мінімальності значення періода легко переконатись, використовуючи (8) і нерівності:

$$\omega_2 \geq \omega_1; \ \frac{2}{\omega_1} \geq \frac{2}{\omega_2}; \ \operatorname{arctg}\frac{x_1}{\sqrt{a_0^2 - x_1^2}} \geq \operatorname{arctg}\frac{\omega_1 x_1}{\omega_2\sqrt{a_0^2 - x_1^2}}.$$

У відповідності з ними, при $x_1 > 0$, $T > T_{\min}$.

Таким чином, період коливань системи, зображеної на рис. 1, задовольняє нерівностям:

$$\pi\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) \leq T \leq \frac{2\pi}{\omega_1},$$

що утворюють його двобічну оцінку.

Оскільки коливання проходять з різними амплітудними відхиленнями вгору і вниз, з'ясуємо далі як обчислити T і ω при заданому A_0. Із (5) випливає, що:

$$a_0^2 - x_1^2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1}\left(A_0 - \frac{c_2 x_1}{c_1 + c_2}\right)^2 - \frac{c_1 x_1^2}{c_1 + c_2}. \qquad (9)$$

Тому для обчислення T і ω, крім (8), треба додатково використовувати (9).

При однакових початкових відхиленнях вгору і вниз маємо різні значення періодів і частот коливань. Це наслідок несиметрії силової характеристики системи.

Крім початкового відхилення, причиною вільних коливань може бути надана системі початкова швидкість υ_0 або дія так званого миттєвого імпульсу. Якщо початкова швидкість надана в положенні $x=0$, то для розрахунку T і ω можна використати виведені вище формули. Для цього треба скористатися енергетичним співвідношенням:

$$m\upsilon_0^2 = c_1 a_0^2 ,$$

тобто перерахувати початкову швидкість υ_0 на еквівалентне початкове відхилення:

$$a_0 = \upsilon_0 \sqrt{\frac{m}{c_1}} = \frac{\upsilon_0}{\omega_1}.$$

При цьому немає значення в якому напрямі, вниз чи вгору, надана швидкість υ_0 .

Розглянемо приклади розрахунку.

Приклад 1. Для проведення обчислень приймаємо: $m = 10^3$ кг ; $c_1 = 64 \cdot 10^3$ Н/м ; $c_2 = 80 \cdot 10^3$ Н/м ; $x_1 = 0,02$ м . Знайдемо T, коли $a_0 = 0,04$ м . Для прийнятих числових даних: $\omega_1 = 8$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 12$ с$^{-1}$; $T_{\min} \approx 0,6545$ с ; $\sqrt{a_0^2 - x_1^2} \approx 0,03464$ м . Підстановка їх в формулу (8) дає $T \approx 0,7242$ с . Якщо замість a_0 задати $A_0 = 0,04$ м , то згідно з (9), $\sqrt{a_0^2 - x_1^2} \approx 0,041231$ м . Тоді за формулою (8) отримуємо $T \approx 0,7153$ с . У другому випадку зменшився період коливань, тобто вони проходять з більшою частотою.

Приклад 2. Обчислимо, яким буде період коливань осцилятора з попередніми параметрами, коли йому надати початкову швидкість $\upsilon_0 = 0,4$ м/с . Цій швидкості відповідає: $a_0 = 0,05$ м ; $\sqrt{a_0^2 - x_1^2} \approx 0,04583$ м ; $T \approx 0,7102$ с . Якщо зменшити конструктивний зазор x_1 до $x_1 = 0,01$ м , то зменшиться і період коливань до значення $T \approx 0,6841$ с. Отже період і частота коливань залежать від величини зазору.

Висновки

Обчислення періоду і частоти вільних коливань системи з несиметричною кусково лінійною силовою характеристикою зводиться до використання компактних розрахункових формул, які побудовано в роботі. Як і в нелінійні системі, частота і період залежать не тільки від конструктивних параметрів системи, а також і від величини початкового відхилення її від положення рівноваги. Внаслідок несиметрії характеристики пружності, амплітуди коливань системи різні по різні сторони від положення рівноваги.

Література

1. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. – Москва: Машиностроение, 1979. – Т.2. Колебания нелинейных механических систем. 351 с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – Москва: Дрофа, 2004. – 591 с.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – Ленинград: Машиностроение, 1976. – 320 с.
4. Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. – Київ: Вища школа, 2004. – 526 с.

Abstract

FREE SYSTEM OSCILLATION WITH NON-SYMETRIC PIECEWICE LINEAR CHARACTERISTICS

Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V.

Free oscillations of a mechanical system with one degree of freedom, which has an asymmetrical piecewise linear characteristic of elasticity are investigated. Systems with asymmetrical piecewise linear stiffness characteristics are common in engineering, in particular in vehicles, where an additional elastic element is used along with the main elastic element (springs). Closed formulas are derived for calculating the period and frequency of oscillations. To achieve this goal, method of adding of the solutions of differential equations were chosen. Conditions are established where oscillations occur without deformation of the sub-springs. It is shown that these characteristics of motion depend on the amplitude of the oscillations. The article shows that the calculation of the amplitude deviation can be obtained in another way. Namely, to equate the potential energies of the system in the extreme upper and lower positions. It is estab-

lished that the period of free oscillations depends on the initial amplitude deviation, actually to nonlinear systems.Conditions had obtained when the oscillations are isochoric. The conditions under which the system has the smallest period of oscillations are determined. It is established that due to the asymmetry of the elasticity characteristics, the period and frequency of the oscillations depend on the direction in which the initial deviation of the system from the equilibrium position is given. It is proved that for calculations of the period and frequency of oscillations, one can use the derived formulas in the case of the so-called instantaneous pulse, when the initial velocity is given to the system. To do this, it is necessary to re-count the initial speed by the initial equivalent to the deviations, taking advantage of their energy ratio. Examples of calculations are given. As a result of calculations it is established that the period and frequency of oscillations depend on the size of the constructive clearance. As in nonlinear systems, the frequency and period depend not only on the design parameters of the system, but also on the magnitude of its initial deviation from the equilibrium position. Their calculations are reduced to the use of compact computational formulas, which are constructed in the work.

Keywords: *asymmetric characteristic of elasticity, free oscillations, period and frequency, Cauchy problem, analytical solution.*